Ueber die Bewegung veränderlicher ebener Figuren, welche während der Bewegung sich ähnlich bleiben in ihrer Ebene. *)

Erster Theil.

§. 1.

Bei der Lage zweier ähnlicher Figuren in einer Ebene sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Die beiden Figuren können nämlich entweder so liegen, dass die eine durch blosse Drehung um irgend einen Punkt der Ebenen in eine solche Lage zu der anderen gebracht werden kann, dass je zwei homologe Seiten parallel sind, oder sie können eine solche Lage zu einander haben, dass das genannte Ziel durch blosse Drehung um irgend einen festen Punkt der Ebene nicht zu erreichen ist. Man kann die erste Lage schlechtweg ähnliche Lage, die zweite symmetrisch ähnliche Lage nennen. Befinden sich zwei Figuren in symmetrisch ähnlicher Lage, und man dreht die eine Figur um irgend eine feste Linie der Ebene aus der Ebene heraus, bis sie nach einer Drehung um zwei rechte Winkel in die Ebene zurückkommt, so haben die Figuren nach vollzogener Drehung zu einander ähnliche Lage. In beiden Fällen wird jedem Punkte, der auf die eine Figur bezogen wird, ein ähnlich liegender der zweiten entsprechen, und denkt man die Punkte der Peripherie eines Kreises der einen Figur zugehörig, so werden die Punkte eines zweiten Kreises der andern Figur entsprechen. Durchläuft man die Punkte der Peripherie des ersten Kreises nach einer bestimmten Drehungsrichtung, so werden die entsprechenden Punkte des zweiten Kreises für die erste Lage der beiden Figuren dieselbe Drehungsrichtung und für die zweite Lage die entgegengesetzte Drehungsrichtung annehmen. In dem Folgenden wird nur von ähnlichen Figuren in ähnlicher Lage die Rede sein. Gesetzt, die beiden Vierseite (Fig. I.) ***HABCH*** und ***HabcH*** seien zwei ähnliche Figuren in ähnlicher Lage, und die gleichnamigen Punkte seien ähnlich liegende Punkte; der Punkt ***H*** sei ein Punkt,

---

*) Die vorliegende Abhandlung, von welcher ich hier nur den ersten Theil dem Drucke übergeben kann, hatte ich in der gegenwärtigen Form vor zwei Jahren dem Herrn Professor Steiner in Berlin vorgelegt, und von ihm die Mittheilung erhalten, dass er dasselbe Thema in ausgedehnterer Weise bereits vor langer Zeit bearbeitet, aber noch nicht veröffentlicht habe. Da meine Hoffnung auf Publication der betreffenden Arbeit von Seiten des Herrn Professor Steiner bis jetzt nicht in Erfüllung gegangen ist, so halte ich es für meine Pflicht bei Veröffentlichung meiner Arbeit, die ich ohne fremde persönliche Anregung abgefasst habe, auf diesen Umstand aufmerksam zu machen, damit nach dereinstiger Publication der Steiner'schen Arbeit, die Priorität derselben nicht in Zweifel gezogen werde.

der sich selbst entspricht, so haben, wenn man die Längen der Perpendikel, welche man von H auf AB, BC, CA und ab, bc, ca fällen kann, bezüglich mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; bezeichnet die Proportionen statt $HA : Ha = \mathfrak{A} : \mathfrak{a} = \mathfrak{B} : \mathfrak{b} = \mathfrak{C} : \mathfrak{c}$ bezeichnet man den Schnittpunkt von AB und ab mit γ, den von BC und bc mit α und den von AC und ac mit β, so lässt sich jede der Linien $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ auf folgende Weise wie $H\alpha$ definiren. $H\alpha$ ist eine der beiden geraden Linien, welche die Winkel, die BC und bc mit einander bilden, so theilt, dass die Perpendikel von irgend einem Punkte von ihr auf BC und bc sich wie zwei homologe Seiten verhalten. Da es bekanntlich zwei solcher Linien giebt, welche mit BC und bc ein harmonisches Büschel bilden, so ist die Linie $H\alpha$ durch die vorige Angabe noch nicht eindeutig bestimmt. Es bleibt noch anzugeben, ob die Linie $H\alpha$ innerhalb des Winkels $b\alpha B$ oder innerhalb des Nebenwinkels von diesem, im Winkel $b\alpha D$ sich befinden müsse. Man kann nun diese Winkel in folgender Weise unterscheiden. Dreht man die Linie abc um den Punkt α und durch den Winkel $b\alpha D$, so wird nach vollendeter Drehung die Richtung von b nach c dieselbe sein, wie die von B nach C, dreht man dagegen die Linie abc um den Punkt α und durch den Winkel $b\alpha B$, so wird nach vollzogener Drehung die Richtung von b nach c entgegengesetzt der Richtung von B nach C sein. Da sich ausserdem leicht nachweisen lässt, dass der Winkel $b\alpha D$ gleich einem der unter sich gleichen Winkel AHa, BHb, CHc sei, so werde ich den Winkel $b\alpha D$ den Drehungswinkel der beiden ähnlichen Figuren nennen. Hat man überhaupt in der Ebene zwei gerade Linien AB und ab und sieht A und a, B und b als ähnlich liegende Punkte an, und schneiden sich diese Linien im Punkte γ, so werde ich den Winkel $A\gamma a$ oder dessen Nebenwinkel den Drehungswinkel nennen, je nachdem nach vollendeter Drehung um den Punkt γ um den Winkel $A\gamma a$ oder dessen Nebenwinkel die Richtung von A nach B dieselbe ist, wie die von a nach b, oder nicht. Demnach theilt die Linie $H\alpha$ den Nebenwinkel des Drehungswinkels in der oben angegebenen Weise. Von den beiden ähnlichen Figuren $HABCH$ und $HabcH$ ist vorausgesetzt worden, dass sie einen sich selbst entsprechenden Punkt H haben; man leitet indess nach den vorausgegangenen Betrachtungen auch leicht den Satz ab: Hat man in einer Ebene zwei ähnliche Vielseite $ABC \ldots . A$ und $abc \ldots .. a$ in ähnlicher Lage und theilt man den Nebenwinkel des Drehungswinkels je zweier homologen Seiten durch eine gerade Linie in ein solches Verhältniss, dass die Perpendikel von irgend einem Punkte dieser Geraden auf die homologen Seiten sich wie zwei homologe Seiten verhalten, so schneiden sich alle diese Linien in einem Punkt der Ebene, und dieser Punkt ist für beide ähnliche Figuren der sich selbst entsprechende Punkt. Dieser Punkt möge kurzweg Aehnlichkeitspunkt für schiefliegende ähnliche Figuren oder schiefer Aehnlichkeitspunkt heissen.

Verbindet man den schiefen Aehnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen Figuren mit zwei homologen Punkten P und p der beiden ähnlichen Figuren $ABC \ldots A$ und $abc \ldots a$ und P und p unter sich, so entsteht ein Dreieck, welches einem der unter sich ähnlichen Dreiecke AHa, BHb, etc. ähnlich ist. Es ist mithin jeder der Winkel HPp und HpP ein constanter.

Bewegt sich eine Figur in einer Ebene in der Weise, dass sie mit der Bewegung zugleich in eine ähnliche Figur übergeht, so wird je nach der Bewegung und der Veränderung der Figur ein bestimmter Punkt der Figur eine Curve beschreiben und eine gewisse Linie derselben eine solche umhüllen.

§. 2.

Um die Bahn bestimmter Punkte einer Figur kennen zu lernen, wenn sich dieselbe nach der angegebenen Weise bewegt und verändert, stellen wir zunächst folgende Aufgabe:

AB und ab seien homologe Seiten ähnlicher Figuren, und die gleichnamigen Punkte seien homologe, ferner schneide sich Aa und Bb in g unter einem rechten Winkel. Es sollen, wenn die Lage eines Punktes P der Figur, welche zu AB gehört, gegeben ist, die Coordinaten des entsprechenden Punktes p der Figur, die zu ab gehört, in Bezug auf die Coordinatenaxen gA und gB gefunden werden:

(Fig. II.) Zu diesem Zwecke fälle man das Perpendikel PC von P auf AB, setze die Strecken $Ac = m$, $Bc = n$, $CP = \rho$, $Ag = Y$, $gB = X$, und ziehe durch P und C die Linien PT und CT parallel mit gA und gB. Alsdann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CPT und AgB, dass $CT = \frac{\rho}{m+n}Y$ und $PT = \frac{\rho}{m+n}X$ ist. Man erhält mithin für x oder für den Abstand des Punktes P von gA und für y oder für den Abstand dieses Punktes von gB folgende beiden Werthe:

$$x = \frac{m}{m+n}X + \frac{\rho}{m+n}Y$$

$$y = \frac{n}{m+n}Y + \frac{\rho}{m+n}X$$

Dem entsprechend sind die Werthe von x_1 und y_1, d. h. die bezüglichen Abstände des der Linie ab entsprechenden Punktes p von der X Axe und der Y Axe, da die Quotienten $\frac{m}{m+n}$ und $\frac{\rho}{m+n}$ als Quotienten homologer Stücke in ähnlichen Figuren constant sind,

$$x_1 = \frac{m}{m+n}X_1 + \frac{\rho}{m+n}Y_1$$

$$y_1 = \frac{n}{m+n}Y_1 + \frac{\rho}{m+n}X_1$$

wo unter X_1 und Y_1 die Strecken gb und ga verstanden sind. — Da nun bekanntlich der Inhalt eines Dreiecks, dessen eine Ecke im Anfangspunkt des Coordinatensystems liegt und dessen andere Ecken durch die Coordinaten x, y und x_1, y_1 gegeben sind, ausgedrückt wird durch den Werth von $\frac{x_1 y - y_1 x}{2}$, so folgt, wenn Δ den Inhalt des Dreiecks Pgp bezeichnet, dass

$$2\Delta = \left(\frac{m}{m+n}X_1 + \frac{\rho}{m+n}Y_1\right)\left(\frac{n}{m+n}Y + \frac{\rho}{m+n}X\right) - \left(\frac{m}{m+n}X + \frac{\rho}{m+n}Y\right)\left(\frac{n}{m+n}Y_1 + \frac{\rho}{m+n}X_1\right) = \frac{mn-\rho^2}{(m+n)^2}\,(X_1 Y - Y_1 X)$$

Der Inhalt aller solcher Dreiecke gPp, für welche $\frac{mn-\rho^2}{(m+n)^2}$ eine constante Zahl ist, wird mithin derselbe sein. Um den Ort der Punkte P zu übersehen, für welche die Gleichung statthat $\frac{mn-\rho^2}{(m+n)^2} = c$, wo c irgend eine Constante ausdrückt, beziehe man alle Punkte P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Linie AB liegt, und dessen X Axe mit der Linie AB zusammenfällt. Setzt man nun $AB = 2l$, $m = l - \xi$, $n = l + \xi$, so geht obige Gleichung über in $\frac{(l-\xi)(l+\xi)-\rho^2}{4l^2} = c$ oder in $\xi^2 + \rho^2 = l^2 - 4l^2 c$ über, woraus sich denn ergiebt, dass alle Punkte P, welche auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt in den Halbirungspunkt von AB fällt, in solche Punkte übergehen, dass die Dreiecke gPp gleichen Inhalt haben.

Ist $c = o$, so ist $\xi^2 + \rho^2 = l^2$, d. h. alle Punkte P, welche in der Peripherie des um gAB

geschlagenen Kreises liegen, ergeben Dreiecke Pgp, deren Flächeninhalt gleich o ist, oder jeder dieser Punkte geht in einen Punkt p über, der mit g in gerader Linie liegt.

Wenn sich mithin eine sich selbst ähnlich bleibende Figur mit zwei bestimmten Punkten in den Schenkeln eines rechten Winkels bewegt, so beschreiben alle Punkte der Peripherie eines Kreises, der durch jene Punkte und die Spitze des rechten Winkels geht, gerade Linien, die nach der Spitze des rechten Winkels gerichtet sind, nach welchem Gesetze sich auch die Linie bewegen möge.

(Fig. III.) Von diesem Satze überführt man sich auch leicht auf elementarem Wege. Schlägt man nämlich um AgB und agb zwei Kreise und sieht die beiden Linien AB und ab als homologe Durchmesser an, so folgt, wenn man eine Linie durch g zieht, welche den ersten Kreis in P und den zweiten in p schneidet, aus der Gleichheit der Winkel AgP und agp, die Gleichheit der Certriwinkel auf den Bogen AP und ap, und diese Gleichheit deutet an, dass der Punkt P zu AB ähnliche Lage hat wie der Punkt p zu ab.

Zieht man durch g noch eine zweite Linie, welche den ersten Kreis in P_1 (Fig. III.), den zweiten in p_1 schneidet, so wird, da P zu AB ähnliche Lage hat, wie p zu ab, die Linie PP_1 homolog mit pp_1 sein.

Indem nun A in a und B in b nach irgend einem Gesetze übergeht, wird zu gleicher Zeit der Punkt P in p und der Punkt P_1 in p_1 übergehen. Sind also die Punkte A und B der Bedingung unterworfen, dass sie sich stets auf den Schenkeln des rechten Winkels AgB bewegen müssen, so sind die Punkte P und p_1, welche so mit A und B zusammenhängen, dass das Vierseit APP_1B sich stets ähnlich bleibt, der Bedingung unterworfen, dass sie sich auf den geraden Linien gP und gP_1 bewegen müssen. Sind nun die Punkte P und P_1 einer sich ähnlich bleibenden Figur der Bedingung unterworfen, dass sie sich auf den Schenkeln gP und gP_1 des Winkels PgP_1 bewegen müssen, und man nimmt irgend einen rechten Winkel AgB an, so müssen die Punkte A und B, welche man als jener Figur zugehörig denkt, sich in den Schenkeln des rechten Winkels AgB bewegen; denn in welche Lage P und P_1 auf den Schenkeln gP und gP_1 auch übergegangen sein mögen, die nun mit p und p_1 bezeichnet werden mögen, so muss, wenn man um das Dreieck gpp_1 einen Kreis schlägt, der gA in a, gB in b schneidet, das Vierseit app_1ba immer dem Vierseit APP_1BA ähnlich bleiben, weil die Seiten beider in den Kreisen Sehnen sind, die man um die Dreiecke gAB und gab schlagen kann, welche zu gleichen Mittelpunkts-Winkeln gehören, und weil diese Sehnen in gleicher Ordnung aufeinander folgen. Anstatt also von der Bewegung der Punkte P und P_1 auf den Schenkeln gP und gP_1 auszugehen, kann man von der Bewegung der Punkte A und B auf den Schenkeln des rechten Winkels gAB ausgehen. *Bewegt sich mithin eine sich selbst ähnlich bleibende Figur mit zwei bestimmten Punkten P und P_1 in den Schenkeln eines Winkels PgP_1 so beschreiben alle Punkte der Peripherie des Kreises, der um PgP_1 geschlagen ist, gerade Linien, die nach g gerichtet sind, und jeder Punkt Q, der auf der Peripherie eines mit jenem Kreise concentrischen liegt, geht in einen Punkt q über, so dass das Dreieck gQq einen constanten Inhalt hat, welcher vom Radius dieses Kreises allein abhängt.*

Der doppelte Inhalt des Dreiecks gPp war nach dem Obigen gleich $\frac{mn-\rho^2}{(m+n)^2}(X_1Y - Y_1X) = \frac{(l^2-\xi^2-\rho^2)}{4l^2}(X_1Y - Y_1X)$. Nennt man e die Entfernung des Punktes P vom Halbirungspunkte von AB, so ist $\xi^2+\rho^2=e^2$, und $2\Delta = (\frac{l^2-e^2}{4l^2})(X_1Y - Y_1X)$. Nennt man das

Dreieck, welches dem Halbirungspunkte von AB selbst entspricht Δ_1, so ist für diesen Punkt $e = o$ und $2\Delta = \frac{1}{4}(X_1 Y - Y_1 X)$. Man erhält mithin:

$$2\Delta : 2\Delta_1 = \frac{l^2 - e^2}{4l^2} : \frac{1}{4} \text{ oder } \Delta = \frac{l^2 - e^2}{l^2} . \Delta_1$$

Das Dreieck, welches dem Halbirungspunkte von AB entspricht, ist mithin ein Maximum's-Dreieck. Je grösser die Entfernung eines Punktes P von dem Halbirungspunkt wird, ein um so kleineres Dreieck entspricht ihm. Ist die Entfernung desselben vom Halbirungspunkte gleich l oder gleich $\frac{1}{2}AB$, so ist das ihm entsprechende Dreieck Null, und ist die Entfernung des Punktes noch grösser als $\frac{1}{2}AB$, so ist das Dreieck gPp negativ, d. h. der Winkel $P_1 g p_1$ hat mit dem Winkel Pgp entgegengesetzte Lage, wo P_1 und p_1, die Halbirungs-Punkte von AB und ab sind. Es mögen hier noch folgende Bemerkungen Platz finden. Da PP_1 und pp_1 in Bezug auf die beiden ähnlichen Figuren, welche zu AB und ab gehören, homologe Strecken sind, so ist das Verhältniss von PP_1 zu pp_1 dasselbe, wie von AB zu ab, oder das Verhältniss der Durchmesser der Kreise um PgP_1 und pgp_1; demnach ist das Verhältniss irgend zweier Strecken PP_1 und pp_1 ein constantes. Der Winkel, unter dem sich irgend zwei Linien PP_1 und pp_1 schneiden, ist gleichfalls constant und zwar gleich dem Winkel, unter dem sich AB und ab schneiden. Dieser Winkel ist wiederum derselbe wie der, unter dem sich die beiden Kreise um gAB und gab schneiden. Alles dieses folgt aus den Vorbemerkungen über ähnliche Dreiecke in ähnlicher Lage. (Fig. IV.) Man bemerke noch, wie sich zu einem Punkte Q der entsprechende Punkt q durch Construction finden lässt. Man ziehe durch den Punkt Q irgend eine Linie, welche der Kreis um PgP_1 in M und M_1 schneidet, und lege durch M und g, und M_1 und g zwei Linien, von denen die erste den Kreis um pgp_1 in m, die zweite in m_1 schneidet. Da nun MM_1 und mm_1 homologe Strecken sind, so ist klar, dass der dem Punkt Q entsprechende Punkt q auf der Linie mm_1 liegen muss. Legt man darauf durch Q noch eine zweite Linie, welche den ersten Kreis in N und N_1 schneidet und construirt in analoger Weise die entsprechende Linie nn_1, so wird der Punkt q auch auf der Linie nn_1 liegen müssen und wird mithin der Schnittpunkt der Linien mm_1 und nn_1 sein. Man sieht zu gleicher Zeit, dass, wenn man durch einen Punkt des ersten Kreises eine Schar Transversalen legt und für jede Transversale die entsprechende des zweiten Kreises sucht, alle diese entsprechenden Transversalen sich in einem Punkte schneiden.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie man vermöge der beiden Kreise (Fig. III.) gPP_1 und gpp_1 den sich selbst entsprechenden Punkt der beiden ähnlichen Figuren, welche zu PP_1 und pp_1 gehören, oder ihren schiefen Aehnlichkeitspunkt H finden kann. Es wird behauptet, derselbe sei der Schnittpunkt H der beiden Kreise gPP_1 und gpp_1.

Da die Punkte P und p, sowie die Punkte P_1 und p_1 homologe sind, so ist nachzuweisen, dass die Dreiecke HPP_1 und Hpp_1 ähnliche sind, und dass sie sich in ähnlichen Lagen befinden. Die beiden Sehnen HP und Hp sind Sehnen von Bögen desselben Peripheriewinkels HgP und verhalten sich mithin wie die Radien der Kreise, die um HgP und Hgp geschlagen sind. Aus demselben Grunde verhalten sich auch HP_1 und Hp_1 wie die Radien dieser beiden Kreise und ebenso $PP_1 : pp_1$, woraus folgt, dass $HP : Hp = HP_1 : Hp_1 = PP_1 : pp_1$. Die beiden Dreiecke HPP_1 und Hpp_1 sind also ähnlich, und man sieht auch leicht, dass sich dieselben in ähnlicher Lage befinden, denn die Drehung in der Richtung HPP_1 auf dem ersten Kreise ist dieselbe, wie die Drehung in der Richtung Hpp_1 auf dem zweiten Kreise, woraus hervorgeht, dass H der schiefe Aehnlichkeitspunkt von PP_1 und pp_1 ist.

Es lässt sich mithin folgender allgemeiner Satz aussprechen:

Hat man irgend zwei ähnliche Figuren F und f und gehören zu F die beiden Punkte P_1 und P, welchen in der Figur f die Punkte p und p_1 entsprechen, und schneiden sich Pp und P_1p_1 im Punkte g, so schneiden sich die die Kreise, welche man um PP_1g und pp_1g legen kann, in einem gemeinsamen Punkte, dem schiefen Aehnlichkeitspunkte beider Figuren F und f, welcher von der besonderen Lage von P und P_1 unabhängig ist.

§. 3.

Bewegt sich die veränderliche Linie AB (Fig. V.) mit ihren Endpunkten A und B in den beiden festen Schenkeln Ag und gB des Winkels AgB und geht hierbei in die Lage von AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. über, sieht man dabei die Linien AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. als homologe Seiten ähnlicher Figuren, und die Punkte A, A_1, A_2, A_3 .... etc., ebenso die Punkte B, B_1, B_2, B_3 .... als homologe in den verschiedenen Lagen an, denkt man ferner einen Punkt Q zur ersten Lage der Figur gehörig, welcher bei der zweiten Lage seinen homologen Punkt in Q_1, bei der dritten in Q_2 etc. hat, verbindet man sämmtliche Punkte Q mit g, so wird der Radiusvector gQ, indem AB in A_1B_1, dann in A_2B_2 etc. übergeht, in gQ_1, dann in gQ_2 etc. übergehen, und der Inhalt der geradlinigen Figur $gQQ_1Q_2 \ldots g$ wird allein von der Entfernung des Punktes Q vom Halbirungspunkte von AB abhängen. Nennt man diesen Halbirungspunkt M und F die Fläche $gMM_1M_2 \ldots g$, so wird $gQQ_1Q_2 \ldots g = \frac{l^2 - e^2}{l^2} \cdot F$ sein, wo nach der obigen Bezeichnung $l = \frac{AB}{2}$ und e die Entfernung des Punktes Q von M ist. Die Punkte der Peripherie des um AgB beschriebenen Kreises werden ihre homologen Punkte, auf geraden Linien haben, die durch g gehen. Diese Sätze, welche unmittelbar aus § 2. folgen, gelten natürlich auch für jede continuirliche Bewegung der Linie AB, bei welcher also zwei auf einander folgende Lagen dieser Linien unendlich nahe sind, und bei welcher sich die Grössen der Strecken AB und A_1B_1 nur unendlich wenig unterscheiden. Betrachtet man zwei auf einander folgende Lagen der Linie AB, so werden gedachte zwei Linien einen sich selbst entsprechenden Punkt haben, und alle die sich selbst entsprechenden Punkte je zweier auf einander folgender Linien werden auf einer Kurve liegen, deren Beschaffenheit, von dem Gesetz der Bewegung und Veränderung der Linie AB abhängig ist. Das Gesetz der Bewegung und Veränderung dieser Linie lässt sich nun einfach in der Weise aufstellen, dass man festsetzt, sie möge sich so bewegen, und verändern, dass sie in jeder Lage durch eine bestimmte Kurve v in Punkt p halbirt wird. (Fig. V.)

Bewegt sich nach diesem Gesetze die Linie AB mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines rechten Winkels AgB, so wird der Schnittpunkt der in A und B auf den Schenkeln errichteten Perpendikel AP und BP eine Kurve V beschreiben, welche mit v ähnlich ist, denn da $Ap = pB$, wenn p der Halbirungspunkt von AB ist, so geht die Diagonale gP des Rechteckes $gAPBg$ durch den Punkt p und wird von ihm halbirt.

Betrachtet man nun zwei Lagen AB und A_1B_1 der beweglichen Linie AB, so werden die Kreise ABg und A_1B_1g, deren Schnittpunkt der schiefe Aehnlichkeitspunkt der beiden Linien ist, bezüglich durch P und P_1 gehen und sich in dem Fusspunkte H des Perpendikels, welches von g auf PP_1 gefällt ist, schneiden, denn da gP und gP_1 Durchmesser der Kreise ABg und A_1B_1g sind, so wird der Kreis ABg sowohl, als auch der Kreis A_1B_1g durch H gehen. Denkt man AB und A_1B_1 der Lage und Grösse nach unendlich wenig verschieden, und mithin auch P_1 unendlich nahe an P, so geht die Linie PP_1 in eine Tangente an der Kurve V über, und H wird mithin der Fusspunkt des auf die Tangente von g aus gefällten Perpendikels sein. Sämmtliche Punkte H befinden sich mithin auf einer Kurve, welche man erhält, wenn man vom Punkte g aus auf sämmtliche Tangenten der Kurve V Perpendikel fällt, und die Fusspunkte dieser Perpendikel verbindet. Wir nennen diese letztere Curve daher nach Steiner die **Fusspunkten-Curve der Curve** V **für den Punkt** g. (Vergl.: Ueber den Krümmungs-Schwerpunkt ebener Curven von Steiner, gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 5. April 1838.)

Die Fusspunktencurve der Curve V in Bezug auf g sei mit W bezeichnet. (Fig. VI.) Da die Fusspunkten-Curve der Ort der Schnittpunkte der Kreise ist, die um die continuirlich auf einander folgenden Durchmesser gP, gP_1 etc. geschlagen sind, so bildet sie die Umhüllungslinie aller dieser Kreise und wird mithin von jedem derselben berührt. Ist W und der Punkt g gegeben, so ist es auch leicht, die Curve V zu finden. Denkt man nämlich durch einen Punkt H der Curve W und durch den Punkt g einen Kreis k gelegt, welcher W in H tangirt, so ist der dem Punkte g diametral gegenüberliegende Punkt P ein Punkt der Curve V und HP ist Tangente in diesem Punkte an V. Denkt man durch alle Punkte H, H_1, H_2, H_3 ...., von denen je zwei auf einander folgende unendlich nahe liegen, und durch den Punkt g Kreise K, K_1, K_2, K_3 ...., welche bezüglich die Curve W in H, H_1, H_2, H_3 .... tangiren, so bilden alle die dem Punkte g diametral gegenüberliegende Punkte P, P_1, P_2, P_3 .... der Kreise K, K_1, K_2, K_3 ... die Curve V und HP, H_1P_1, H_2P_2, H_3P_3 .... sind die bezüglichen Tangenten der Curve V in den Punkten P, P_1, P_2, P_3 .... Wie nun die Curve V die Bewegung und Veränderung der beweglichen Linie AB dadurch festsetzt, dass die in den Endpunkten derselben auf den Schenkeln des rechten Winkels g errichteten Perpendikel sich in einem Punkte von V schneiden, so wird auch die Curve W als der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte je zweier auf einander folgenden Lagen der veränderlichen Linie eine bestimmte Bewegung und Veränderung von AB bestimmen; denn legt man durch einen Punkt H der Curve W und den Punkt g einen Kreis k, welcher W in H tangirt, so wird dieser die Schenkel des rechten Winkels g, in denen sich die veränderliche Linie mit ihren Endpunkten bewegen soll, in zwei Punkten A und B schneiden und AB wird die dem Punkte H entsprechende Lage der veränderlichen Linie sein. Denkt man nun durch alle Punkte H, H_1, H_2, H_3 ...., von denen je zwei aufeinanderfolgende unendlich nahe liegen, und durch den Punkt g Kreise k, k_1, k_2, k_3 .... gelegt, welche W respective in H, H_1, H_2, H_3 .... tangiren, so wird jeder von diesen Kreisen die Schenkel genannten Winkels bezüglich in zwei Punkten A und B, A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 etc. schneiden und AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 .... werden alle die Lagen sein, in welche die bewegliche Linie nach und nach übergehen kann, wenn der Kreis k nach einander in den Kreis k_1, k_2, k_3 übergeht. Dieses Uebergehen lässt sich nun in der Weise denken, dass man sich vorstellt, der Kreis k rolle auf der Curve W und nehme bei dem Rollen so zu oder ab, dass seine Peripherie stets durch einen festen Punkt g geht. Bei dieser Bewegung und Veränderung des Kreises k bewegt und verändert sich also auch die Linie AB und zwar so, dass die Punkte A und B sich auf den festen Linien gA und gB bewegen.

In der bisherigen Betrachtung sind wir von der Curve v ausgegangen, welche der Halbirungspunkt von AB beschreibt, sind von dieser Curve zur Curve V und von dieser zur Fusspunkten-Curve W der letzteren übergegangen. Da aber leicht zu übersehen ist, dass sich jede Curve als eine Curve W ansehen lässt, zu der sich auf die angegebene Weise, wenn g gegeben ist, V und v bestimmen lassen, so kann man folgende Sätze aussprechen:

Hat man eine Curve W und einen festen Punkt g, legt alsdann durch g einen Kreis k, welcher die Curve W in H tangirt, und zieht durch g irgend zwei rechtwinklig auf einander stehende Linien, welche von k in A und B geschnitten werden, so wird, wenn k auf W rollt und sich so verändert, dass er stets durch g geht, und die Linie AB, welche ein Durchmesser in dem Kreise k ist, hierbei mit ihren Endpunkten A und B sich auf den Schenkeln gA und gB bewegt, der Radiusvector ρ irgend eines Punktes P, welcher zu k in Bezug auf die Punkte

A und B bei der Bewegung eine stets ähnliche Lage behält, ein Flächenstück beschrieben, welches seinem Inhalte nach dem Flächenstücke gleich ist, welches irgend ein Radius vector eines Punktes, der mit P auf einem mit k concentrischen Kreisbogen liegt, beschreibt. Liegt der Punkt P auf der Peripherie des Kreises k selbst, so wird derselbe bei genannter Rollung und Veränderung von k eine gerade Linie beschreiben. Wenn der Radius vector des Mittelpunktes von k ein Flächenstück F beschreibt, so wird ein Radius vector irgend eines anderen Punktes P ein Flächenstück $f = \frac{l^2 - e^2}{l^2} . F$ beschreiben, wo l der Radius des Kreises k in irgend einer Lage und e die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte des Kreises k in dieser Lage bedeutet.

Geht der Kreis k durch Rollung auf der Curve W und Wachsthum oder Abnahme seiner Dimensionen nach einander in den Kreis k_1, in den Kreis k_2, in den Kreis k_3 u. s. f. über, so geht die Linie L, welche zu k eine bestimmte Lage hat, nacheinander in die Linie L_1, in die Linie L_2, in die Linie L_3 u. s. w. über, wo L_1 zu k_1 und den Punkten A_1 und B_1, L_2 zu k_2 und den Punkten A_2 und B_2 u. s. f. ähnliche Lage hat, wie L zu k und den Punkten A und B. Alle Linien L, L_1, L_2, L_3 u. s. w. umhüllen eine Curve, und der Schnittpunkt je zweier auf einander folgender ist nach folgenden Betrachtungen durch Construction leicht zu finden. Man bemerke zunächst (Fig. VII.), dass irgend ein Punkt p des Kreises k, indem k in den nächsten Kreis k_1 übergeht, in p_1 übergeht und pp_1 Tangente an der Curve ist, welche p bei der Rollung von k beschreibt. Zu gleicher Zeit geht alsdann der Punkt P der Peripherie des Kreises k in den Punkt P_1 über, welcher mit P und g auf einer geraden Linie liegt. Nennt man H den Schnittpunkt der Kreise k und k_1, so erhält man zwei Dreiecke HPP_1 und Hpp_1, welche nach § 1. ähnlich sind, und es ist daher der Winkel Hpp_1 gleich dem Winkel HPP_1. Denkt man irgend eine Linie L, welche durch den Punkt p des Kreises k geht, so wird, wenn k in k_1 übergeht, L in L_1 übergehen, wo alsdann L_1 durch den Punkt p_1 geht, und irgend ein Punkt q auf der Linie L wird in einen Punkt q_1 der Linie L_1 übergehen, so dass der Nebenwinkel von Hqq_1 gleich dem Winkel HPg ist. Fasst man den Schnittpunkt s von L und L_1 als zur Linie L gehörig auf, so wird dieser, wenn k in k_1 übergeht, in einen Punkt s_1 auf der Linie L_1 übergehen, wo gleichfalls der Nebenwinkel von Hss_1 gleich dem Winkel HPg ist. Es bildet mithin die Linie L_1 mit der Linie, welche den Schnittpunkt von L und L_1 mit H verbindet, d. i. mit Hs den Winkel HPg, oder, da L und L_1 einen unendlich kleinen Winkel bilden, so kann man auch sagen, der Winkel, den L mit Hs bildet, ist gleich dem Winkel Hpg, wonach sich der Schnittpunkt von L und L_1 leicht construiren lässt. Schlägt man um HPm einen Kreis, wo m der Schnittpunkt von gP mit L ist, so muss dieser durch s gehen, da $HPms$ ein Kreisviereck ist, und somit ist der Punkt s gefunden.

Indem ein Kreis k (Fig. VIII.) in erwähnter Weise auf der Curve W rollend und sich verändernd in seine nächste Lage k_1 übergeht, gehen irgend zwei Punkte P und Q auf der Peripherie von k in zwei andere P_1 und Q_1 über, welche bezüglich auf Pg und Qg liegen, wo g wieder den festen Punkt bezeichnet, durch welchen die Kreislinie k bei der Rollung stets gehen muss. Die Linie PQ geht mithin in die Linie P_1Q_1 über und der Berührungspunkt H des Kreises k mit W ist der schiefe Aehnlichkeitspunkt für diese beiden Linien, da der Schnittpunkt von k und k_1 mit diesem Berührungspunkte verwechselt werden kann. Rollt demnach der Kreis k auf der Curve W so, dass der constante Punkt g stets auf seiner Peripherie liegt, so bewegt sich die Linie PQ mit ihren Endpunkten in den Schenkeln des spitzen (rechten oder stumpfen) Winkels PgQ in einer Weise, welche von der Natur der Curve W abhängig ist, wo W der Ort der schiefen Aehnlichkeitspunkte je zweier auf einander folgender Lagen der beweglichen Linie ist, und umgekehrt, bewegt sich eine Linie PQ mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines spitzen (rechten oder stumpfen) Winkels PgQ, so kann diese Bewegung stets auf ein Rollen des Kreises PgQ auf einer Curve W zurückgeführt werden, wo W der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte je zweier Lagen der beweglichen Linie ist. Hierbei liegt der in jedem Kreise PgQ, P_1gQ_1, P_2gQ_2, dem Punkte g diametral gegenüberliegende Punkt auf einer Curve V, von welcher W Fusspunktencurve ist. Wenn die bewegliche Linie sich mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines rechten Winkels bewegt, und das Gesetz ihrer Bewegung dadurch gegeben ist, dass sie in jeder Lage durch eine Curve v halbirt wird, so ist eben gezeigt worden, wie jeder Punkt der Curve V und somit auch die Curve W leicht durch Construction zu findeu ist. Bewegt sich dagegen die Linie in den Schenkeln eines spitzen (rechten oder stumpfen) Winkels und zwar so, dass sie durch eine Curve v in einem constanten Verhältniss von $m:n$ getheilt wird, so lassen sich die Punkte der Curve W ebenfalls construiren. Man bemerke zunächst, dass; wenn PQ in P_1Q_1 durch Rollung von k übergeht, der Winkel HPP_1 gleich dem Winkel HQQ_1 gleich jedem Winkel Hqq_1 ist, wenn q irgend ein Punkt der Linie PQ und q_1, der dem Punkte q ähnliche, der Linie P_1Q_1 ist. Der Punkt H ist also der Punkt, dessen Verbindungslinie mit P, q, Q bezüglich mit der Bewegungsrichrichtung von P, q, Q gleiche Winkel bilden. Bewegt sich demnach die Linie PQ mit ihren Endpunkten in den Linien L und L_1, (Fig. IX.)welche sich in g schneiden, in der Weise, dass sie in jeder Lage durch eine Curve v in dem Verhältniss von $m:n$ getheilt wird, und man fasst eine Lage PqQ dieser Linie, wo q der Punkt ist, welcher auf der Curve v liegt, und die Bewegungsrichtung der drei Punkte P, q, Q auf, wo die Bewegungsrichtung des Punktes q als Tangente an der Curve v, gegeben ist, so ist der Punkt H, d. h. der sich selbst entsprechende Punkt für diese und die nächst folgende Lage der beweglichen Linie, in folgender Weise zu finden. Man verlängere die Tangente im Punkte q, bis sie L in s und L_1 in s_1 schneidet, und schlage um Psq und Qs_1q Kreise; der Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist der Punkt H; denn der Winkel HPg ist gleich dem Winkel Hqs, als Peripheriewinkel auf dem Bogen Hs und Winkel Hqs_1 ist wieder gleich Winkel HQg als Peripheriewinkel auf Hs_1. Es ist noch zu bemerken, dass da $HPg = HQg$ ist, auch der um PgQ geschlagene Kreis durch H geht, weswegen H auch durch diesen und einen von den anderen beiden Kreisen zu finden ist. Wie der Punkt H, so ist H_1, H_2, H_3 . . . ., welche den Bogen von $P_1q_1Q_1$, $P_2q_2Q_2$, $P_3q_3Q_3$ . . . . entsprechen, zu finden; alle Punkte H, H_1, H_2, H_3 . . . . bilden aber die Curve W.

Es sei hier noch erwähnt, wie der Punkt H zu finder ist, wenn sich die Linie PQ so bewegt, dass sie in irgend einer Lage durch ihre nächst folgende Lage P_1Q_1 (Fig. X.), nach einem gegebenen Verhältnisse von $m:n$ getheilt wird. Geht nämlich PQ in P_1Q_1 über, so dass P_1Q_1 die Linie PQ in einem Punkte q schneidet, welcher PQ nach dem Verhältnisse von $m:n$ theilt, so fällt die Bewegungsrichtung des Punktes q mit der Linie P_1Q_1 zusammen, und die beiden Kreise, vermöge deren der Punkt H gefunden wird, gehen respective durch q, P, P_1 und q, Q, Q_1, d. h. sie tangiren bezüglich L und L_1 in P und Q. Legt man demnach durch q zwei Kreise, von denen der eine L in P, der andere L_1 in Q tangirt, so ist der Schnittpunkt dieser Kreise der gesuchte Punkt H. Dass dieser Punkt so liegt, dass Winkel HPP_1 gleich Winkel HqP_1 gleich Winkel HQQ_1 ist, kann man leicht aus der Fig. X. ersehen, wo die Gleichheit der gleichbenannten Winkel sogleich in die Augen springt.

Vermöge dieser Construction des Punktes H (Fig. XI.) lassen sich mit Leichtigkeit die Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte construiren. Man bemerke zunächst, dass, wenn zwei concentrische und ähnliche Kegelschnitte k und K gegeben sind, die Tangente in einem Punkte q von k durch K in zwei gleiche Abschnitte Pq und Qq getheilt wird. Zieht man nämlich in k und K alle Sehnen, welche der Tangente PqQ parallel sind, und constrnirt in k zu dem

Durchmesser, der zur Schar dieser Sehnen gehört, den congugirten Durchmesser, so geht dieser durch q und halbirt alle diese Sehnen von k; zu gleicher Zeit fällt aber dieser Durchmesser auch mit der Richtung des Durchmessers von K zusammen, welchen eine mit der ersten parallele Sehnen-Schar von K halbirt, da die Kegelschnitte k und K ähnlich und concentrisch sind, und es folgt daher, dass die Linie, welche durch q und den Mittelpunkt beider Kegelschnitte geht, auch die zweite Sehnenschar, welche zu k gehört, mithin auch die zu dieser Schar gehörige Sehne PQ halbirt, und zwar in dem Punkt, wo sie den Kegelschnitt k tangirt. Denkt man alle Sehnen (PQ), welche den Kegelschnitt k umhüllen, so wird jede Sehne durch die ihr nächstfolgende halbirt, oder anders ausgedrückt: Bewegt sich eine Sehne (PQ) von K so, dass sie stets Sehne in K bleibt und in jeder Lage durch die nächstfolgende Lage halbirt wird, so umhüllt sie den Kegelschnitt k. Fasst man eine Lage einer solchen Sehne PQ, welche k in q tangirt, auf, und denkt in P und Q Tangenten an K gezogen, welche sich in g schneiden, so kann man annehmen, dass die Linie PQ, indem sie in ihre nächste Lage P_1Q_1 übergeht, mit ihren Endpunkten sich in den Schenkeln gP und gQ bewegt. Für PQ und P_1Q_1 sei H der schiefe Aehnlichkeitspunkt, der nach dem Obigen gefunden werden kann.

Zieht man nun in den bezüglichen Tangirungspunkten von PQ und P_1Q_1, welche mit q und q_1 bezeichnet sein mögen, zwei Perpendikel qn und q_1n_1, so ist H auch der schiefe Aehnlichkeitspunkt für diese beiden Perpendikel, und den Schnittpunkt s dieser beiden Linien findet mau nach Früherem, wenn man bemerkt, dass s so liegt, dass der Winkel, den Hs mit qn bildet, gleich ist dem Winkel HQg, gleich dem Winkel HqP und überhaupt gleich einem Winkel, den Hx, wenn x irgend ein zum System gehöriger Punkt ist, mit der Bewegungsrichtung von x bildet.

Hiernach ergiebt sich folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes eines Kegelschnittes k für irgend einen Punkt q desselben. Man lege im Punkte q eine Tangente an den Kegelschnitt, schneide von q die gleichen Stücke qP und qQ ab und ziehe von P und Q nach dem Mittelpunkt von k zwei Linien, welche k in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ schneiden; darauf lege man durch P und Q die Linien L und L_1, welche bezüglich den in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gezogenen Tangenten parallel sind, und construire zwei Kreise, welche beide durch q gehen und von denen der erste L in P_1, der zweite L_1 in Q tangirt: der Schnittpunkt beider ist der schiefe Aehnlichkeitspunkt H, durch welchen auch der Kreis geht, welcher um PQg geschlagen ist. Man verbinde alsdann H mit q, errichte in q ein Perpendikel qn auf der Tangente und thue desgleichen in H auf Hq. Wo letzteres Perpendikel ersteres schneidet, ist der Krümmungsmittelpunkt s, der zu q gehört; denn der Winkel, den Hs mit qs bildet, ist nach der Construction gleich dem Winkel, den Hq mit PQ bildet.

Es sei noch bemerkt, dass man bei der Hyperbel statt der zu construirenden Hülfslinien L und L_1 die Asymptoten nehmen kann, da bekanntlich die Strecke der Tangente einer Hyperbel, welche zwischen die Asymptoten fällt, von dem Tangirungspunkt oder von der nächsten Tangente halbirt wird. In derselben Art lässt sich der Krümmnngsmittelpunkt eines Punktes einer Curve finden, welche dadurch gebildet wird, dass sich eine Linie mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines Winkels in der Weise bewegt, dass die Linie in irgend einer Lage stets durch die in der ihr nächstfolgenden Lage nach einem constanten Verhältniss von $m:n$ getheilt wird.

Die Gleichung einer solchen Curve, welche von allen diesen Linien umhüllt wird, ist nun in folgender Weise zu ermitteln. Fasst man zwei nächste Lagen einer solchen Linie auf, PQ und P_1Q_1, welche sich in einem Punkte q schneiden, so dass $Pq:qQ = m:n$, so ist der Quotient, welchen man erhält, wenn man Dreieck PqP_1 durch QqQ_1 dividirt, gleich $\frac{m^2}{n^2}$. Bezeichnet man die beiden Linien, in denen sich P und Q bewegt, mit L und L_1, ihren Schnittpunkt mit g und den Winkel, den sie bei g bilden, mit ϕ, und setzt den Abschnitt $Pg = Y$, den Abschnitt $Qg = X$, so dass also $PP_1 = dY$, $QQ_1 = -dX$ ist, so findet man für den Inhalt der Dreiecke PP_1q und QQ_1q bezüglich die Werthe $\frac{m}{m+n} X \sin\phi . dY$ und $-\frac{n}{m+n} Y \sin\phi . dX$, woraus sich denn die Gleichung ergiebt $-\frac{mXdY}{nYdX} = \frac{m^2}{n^2}$ oder $n\frac{dY}{Y} + m\frac{dX}{X} = o$. Durch Integration dieser Differentialgleichung erhält man die Gleichung $nlgY + mlgX = c$, wo c eine Constante bedeutet, und daher $lg(Y^nX^m) = c$ oder $Y^nX^m = e^c$. Es lässt sich mithin der Krümmungsmittelpunkt irgend eines Punktes einer Curve $Y^nX^m = k$, wo k eine Constante bedeutet, vermöge der Linien L_1 und L, auf denen die X und Y gerechnet werden, in derselben Weise construiren, wie der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes der Hyperbel vermöge ihrer Asymptoten.

§ 4.

Bewegt sich eine Linie mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines Winkels nach irgend einem Gesetz, so beschreibt ein Punkt, der zu dieser Linie stets ähnliche Lage behält, eine Curve, und deren Krümmungsradius soll in diesem Paragraphen ausgedrückt werden. Wie gezeigt ist, lässt sich die Bewegung einer solchen Linie stets auf ein Rollen eines veränderlichen Kreises, in dem die angenommene Linie Sehne ist, zurückführen, und wir werden demnach auch obige Aufgabe in die Form kleiden können: Es rollt ein veränderlicher Kreis k auf einer beliebig gewählten Curve W in der Weise, dass er bei der Wälzuug auf derselben zugleich so viel zu- oder abnimmt, dass seine Peripherie stets durch einen festen Punkt g geht; es soll der Krümmungsradius des Bahnelements eines Punktes p ermittelt werden, der in dem beweglichen Kreise stets ähnliche Lage behält, wenn man annimmt, dass irgend ein Punkt der Peripherie des Kreises k bei dieser Bewegung sich stets auf einer geraden Linie, welche durch g geht, befindet. Der Krümmungskreis in einem Punkte n einer Curve V ist der Kreis, welcher durch n und zwei auf beiden Seiten von n unendlich nahe liegende Punkte p und q der Curve V geht, und man erhält demnach seinen Mittelpunkt, wenn man die Curvenelemente qn und pn halbirt und in den Halbirungspunkten die Normalen N und N_1 errichtet; der Schnittpunkt s dieser Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt. Zieht man in den Fusspunkten von N und N_1 zwei Tangenten, so bilden diese den Contingenzwinkel, welcher gleich dem Winkel ist, welchen beide Normalen N und N_1 mit einander bilden. N und N_1 halbiren bezüglich die Winkel, welche qs und sn, und ps und sn bilden, und es ist daher der Winkel, den qs mit ps bildet, gleich dem doppelten Contingenzwinkel. Vertauscht man nun das Kreiselement qnp des Krümmungskreises mit dem Curvenelement $qnp = ds$, so kann man den doppelten Contingenzwinkel ausdrücken durch $\frac{ds}{r}$, wo r der Krümmungsradius ist, und es ist daher der Krümmungsradius des Punktes n einer Curve V gleich dem bei n liegenden Curvenelemente ds, dividirt durch den doppelten Contingenzwinkel, der in den Endpunkten von ds gezogenen Tangenten.

(Fig. XII.) Die Curve W, auf welcher der Kreis k in genannter Weise rollt, ist der Ort der Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender Lagen des Kreises k, wo k der Kreis ist, welcher durch die Endpunkte der beweglichen Linie und durch den festen Punkt g gelegt wurde. Nimmt man nun drei solcher Kreise k, k_1, k_2 an, welche ihrer Lage nach unendlich wenig von einander verschieden sind, und nennt a den Schnittpunkt von k und k_1, und b den Schnittpunkt von k_1 und k_2, so ist ab ein Curvenelement von W. Ausser a liegt noch ein der Curve W angehöriger Punkt α auf k, das ist der Schnittpunkt von k mit dem ihm nächst vorhergehenden Kreise, und desgleichen ein Punkt β, der der Curve W angehört, auf k_2, nämlich der Schnittpunkt von k_2 mit dem ihm zunächst folgenden Kreise.

Es sind also die geraden Strecken $a\alpha$ und $b\beta$ gleichfalls Curvenelemente von W, und wir wollen annehmen, dass diese drei zu betrachtenden Elemente unter einander gleich sind, was der Einfachheit wegen und unbeschadet der Allgemeinheit der daraus zu folgernden Resultate geschehen darf. Jedes der genannten Curvenelemente sei gleich σ.

Bevor wir nun die Bahn eines beliebigen Punktes des Kreises, welcher auf W rollt, betrachten, wollen wir bemerken, dass der Punkt d, das ist der Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden, welche durch den festen Punkt g und den Schnittpunkt c von k und k_2 geht, auf der Geraden gd in c übergeht, wenn k_1 in k übergeht, und dass dieser Punkt denselben Weg dc durchläuft, wenn k_1 sich in die Lage von k_2 bewegt. Fasst man jetzt einen Punkt p_1 des Kreises k_1 auf, welcher von a den gegebenen Abstand ρ hat und auf der Sehne af liegt, so wird dieser, wenn sich k_1 in die Lage von k bewegt, in einen Punkt p übergehen, so dass der Winkel, den ρ und die Bewegungsrichtung pp_1 bilden, gleich dem Winkel adc ist, und das Dreieck pp_1a wird ähnlich dem Dreiecke adc sein, was sogleich einleuchtet, wenn man bemerkt, dass a der schiefe Aehnlichkeitspunkt für diese beiden Dreiecke ist. Setzt man $pp_1 = s$, so hat demnach die Proportion statt $s : \rho = dc : ad$, woher $s = \rho\frac{dc}{ad}$ ist. Geht der Kreis k_1 in den Kreis k_2 über, so geht p_1 in einen Punkt p_2 über und zwar liegt p_2 so, dass das Dreieck p_1p_2b ähnlich dem Dreiecke bdc ist, da b der schiefe Aehnlichkeitspunkt für diese beiden Dreiecke ist; Daher folgt, wenn $p_1p_2 = s_1$ gesetzt wird, dass $s_1 : \rho_1 = dc : db$, also $s_1 = \rho_1\frac{dc}{db}$ ist, wo ρ_1 die Verbindungslinie von p_1 mit b bezeichnet. Demnach ist der ganze Weg S, den der Punkt p beschreibt, wenn k in k_1 und dann in k_2 übergeht, $\rho\frac{dc}{ad} + \rho_1\frac{dc}{bd}$ oder es ist, da ρ und ρ_1 unendlich wenig von einander verschieden sind, weil a und b unendlich nahe liegen, $S = \rho\left(\frac{dc}{ad} + \frac{dc}{bd}\right)$. Verlängert man ad bis m, dem Schnittpunkt mit k, und bd bis n, dem Schnittpunkt mit k_2, so ist, da $ad\,.\,dm = dc\,.\,dg$ und $bd\,.\,dn = dc\,.\,dg$ oder $\frac{dc}{ad} = \frac{dm}{dg}$ und $\frac{dc}{bd} = \frac{dn}{dg}$: $S = \frac{\rho}{gd}\,.\,(dm + dn) = \frac{\rho}{gd}(da + db + am + bn)$. Bemerkt man, dass der Winkel, den ad und ab bilden, Peripheriewinkel auf dem Bogen bd, mithin sein Sinus oder auch der Winkel selbst, da es sich nur um unendlich kleine Grössen handelt, gleich $\frac{bd}{2R_1}$ ist, wo R_1 den Radius von k_1 bezeichnet, und ferner, dass der Nebenwinkel von ama gleich dem Peripheriewinkel auf σ in dem Kreise k, also gleich $\frac{\sigma}{2R}$ ist, wo R den Radius von k ausdrückt, so findet man als Ausdruck für den Winkel $ma\alpha$, wenn v den Winkel, den $a\alpha$ und ab bilden, bezeichnet, $\frac{\sigma}{2R} - v + \frac{bd}{2R_1}$ und auf der andern Seite lässt sich dieser Winkel darstellen durch $\frac{am}{2R}$, so dass also $\frac{\sigma}{2R} - v + \frac{bd}{2R_1} = \frac{am}{2R}$ oder, da $R = R_1$ gesetzt werden darf, weil beide unendlich wenig verschieden sind, $am = \sigma + bd - 2R_1v$. Durch dieselben Betrachtungen der analogen Winkel in Bezug auf Kreis k_1 und k_2 ergiebt sich zur Bestimmung von bn die Beziehung $\frac{\sigma}{2R_2} - \mu + \frac{ad}{2R_1} = \frac{bn}{2R_2}$, wo R_2 den Radius von k_2 und μ den Winkel bezeichnet, den bS und ab bilden. Setzt man $R_2 = R_1$, weil beide sich unendlich wenig unterscheiden, so ist $bn = \sigma + ad - 2R\mu$. Substituirt man für bn und am in dem Ausdruck von S diese Werthe und bemerkt,, dass $ad + db$ im Grenzfalle gleich σ ist, so ist $S = \frac{\rho}{gd}(4\sigma - 2R_1[v + \mu])$. Dieser Werth durch den doppelten Contingenzwinkel, also durch das zweifache des Winkels, den s und s_1 bilden, dividirt, giebt den Krümmungsradius der Curve, welche p durchläuft. Der Winkel afb ist gleich $\frac{\sigma}{2R_1}$ und in dem Dreieck p_1fb ist $\sin p_1bf = \frac{\sin afb}{p_1b} \cdot p_1f$. Da b unendlich nahe an a liegt, so kann man $p_1b = p_1a = \rho$ setzen, setzt man zugleich $p_1f = \rho_2$ und für $\sin p_1bf$ und $\sin p_1fb$ die unendlich kleinen Winkel p_1bf und p_1fb, so ist Winkel $p_1bf = \frac{\sigma}{2R_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho}$. Bemerkt man, dass die Summe der Winkel $pp_1a + p_2p_1b = \angle adg + \angle gdb = \angle adb = \pi - \frac{\sigma}{2R_1}$ und dass Winkel $ap_1b = \frac{\sigma}{2R_1} + \frac{\rho_2 . \sigma}{\rho . 2R_1}$ ist, so erhält man für den Contingenzwinkel, der augenscheinlich gleich $\angle pp_1a + \angle ap_1b + \angle bp_1p_2 - \pi$ ist, den Werth $\pi - \frac{\sigma}{2R_1} + \frac{\sigma}{2R_1} + \frac{\rho_2}{\rho}\frac{\sigma}{2R_1} - \pi = \frac{\rho_2}{\rho}\frac{\sigma}{2R_1}$. Demnach ist der gesuchte Krümmungsradius $K = \frac{S}{2\left(\frac{\rho_2\sigma}{\rho . 2R_1}\right)} = \frac{2\rho^2 R_1}{gd\rho_2}\left(\frac{4\sigma - 2R_1[v + \mu]}{2\sigma}\right)$. Denkt man in den Halbirungspunkten der drei Sehnen σ der drei Kreise k, k_1, k_2 Perpendikel r, r_1, r_2 errichtet, so kann man annehmen, da σ verschwindend klein zu denken ist, dass $r = r_1 = r_2$ sei. Der Winkel, den r und r_2 bildet, ist gleich $v + \mu$, und die Strecke, welche zwischen den Fusspunkten von r und r_2 liegt, ist 2σ. Nach diesen Angaben lässt sich r, welches im Grenzfall der Krümmungsradius der Curve W ist, ausdrücken durch $\frac{2\sigma}{v + \mu}$. Dividirt man Zähler und Nenner des Werthes von k durch $v + u$ und setzt $\frac{2\sigma}{v + \mu} = r$, so ist $K = \frac{4\rho^2 R_1}{gd . \rho_2}\left(\frac{r - R_1}{r}\right)$.

Ist das Vorzeichen von K positiv, so ist die Summe der Winkel pp_1a und ap_1p_2 kleiner als zwei Rechte, und die Linie p_1a liegt auf der concaven Seite des Bogens S; ist das Vorzeichen von k negativ, so ist die Summe der Winkel pp_1a und ap_1p_2 grösser als zwei Rechte, und die Linie p_1a liegt auf der convexen Seite des Bogens S. — Eine andere Ableitung von k wird in dem folgenden Theile gegeben werden.

§ 5.

Wir wenden uns jetzt zu den speciellen Fällen, in denen die Curve W selbst ein Kreis ist. Dieselben zerfallen in drei Abtheilungen. Es kann nämlich der Punkt g innerhalb des Kreises W liegen, oder W kann in eine gerade Linie übergehen, oder g kann ausserhalb des Kreises W liegen.

(Fig. XIII.) Den festen Mittelpunkt des Kreises W bezeichne man mit M, den beweglichen von k mit m, den zweiten Schnittpunkt von gm mit k durch t und den veränderlichen Berührungspunkt von k mit W durch H. Da nun im ersten Falle $gm + mM$ gleich dem constanten Radius MH ist, so ist der Ort des Punktes m oder die Curve v eine Elipse, von welcher g und M Brennpunkte, und MH die Länge der grossen Axe ist. Der Ort des Punktes t ist eine mit v ähnliche Ellipse von doppelten Dimensionen und g ist der äussere Aehnlichkeitspunkt von v und V. Die Fusspunkten-Curve der Ellipse V ist W. Zieht man durch g und M den Durchmesser uz des Kreises W, halbirt gu in m_1 und gz in m_2, so ist m_1m_2 die grosse Axe von v und uz die die grosse Axe von V. Da g auch ein Brennpunkt der Ellipse V ist, so folgt der bekannte Satz, dass die Fusspunkten-Curve der Ellipse für einen ihrer Brennpunkte ein Kreis ist, der mit der halben grossen Axe aus dem Mittelpunkte der Ellipse geschlagen ist.

Zieht man durch g irgend eine gerade Linie, welche der Kreis k in a schneidet, und sieht bei jeder Lage von k die Schnittpunkte von k mit gA als homologe an, und ebenso die Mittelpunkte von k als unter sich homologe Punkte, so beschreibt bei der Bewegung von k jeder Punkt der Peripherie des Kreises k eine gerade Linie, welche durch g geht, und jeder andere Punkt p beschreibt einen Bogen, dessen Tangente pp_1 mit Hp einen Winkel bildet, der gleich dem Winkel Htg ist, mithin wird auch die Tangente der Ellipse v im Punkte m mit Hm einen Winkel bilden, der gleich Htg oder halb so gross wie Hmg ist, welches letztere wieder ein bekannter Satz ist, der hier als specieller Fall eintritt. (Fig. XIV.) Liegt insbesondere der Punkt g im Mittelpunkte M von W, so ist der Kreis k von constanter Grösse und sein Radius ist alsdann halb so gross wie der Radius von W, V geht in diesem Falle in W über und W ist seine eigene Fusspunkten-Curve. Da nun k von constanter Grösse, so ist auch die Bewegung von k in diesem Falle ein Rollen im gewöhnlichen Sinne, und man wird zu den bekannten Sätzen geführt, welche stattfinden, wenn ein Kreis in einem zweiten von noch einmal so grossem Radius rollt, und nach welchen jeder Punkt der Peripherie des rollenden Kreises einen Durchmesser von W und jeder andere Punkt eine Ellipse beschreibt. Wir können hinzufügen: dass, wenn der Punkt m den Kreisbogen mm_1 beschreibt und der Punkt p des rollenden Kreises k den Ellipsen-Bogen pp_1, dass alsdann der Ellipsen-Ausschnitt gpp_1 gleich dem Kreis-Ausschnitt gmm_1 multiplicirt mit: $\frac{l^2 - e^2}{l^2}$ ist, wo l der Radius des Kreises v und e die Strecke pm ist.

Die Sätze über die Umhüllungen gerader Linien, welche zum Kreise v gehören, führen hier zu folgenden Ergebnissen:

(Fig. XIII.) Zieht man durch den Brennpunkt g einer Ellipse zwei gerade Linien gL und gL_1, und beschreibt von irgend einem Punkte m des Umfangs der Ellipse mit mg einen Kreis k, welchen die Linien L und L_1 in A und B schneiden, so wird die gerade Linie AB_1 in eine andere gerade Linie A_1B_1 übergehen, wenn der Punkt m des Umfangs der Ellipse in einem anderen Punkt m_1 des Umfanges übergeht. Denkt man nun zu jedem Punkt m des Umfangs der Ellipse die zugehörige Linie AB, so werden alle diese Linien AB eine gewisse Curve umhüllen oder berühren. Um den Berührungspunkt t_1 auf einer bestimmten Linie AB, d. h. den Durchschnittspunkt mit der ihr folgenden Lage zu finden, ziehe man den Radius MH im Kreise W und bemerke, dass der Winkel $HA_1A =$ dem Winkel Htg sein müsse. Bezeichnet q den Schnittpunkt von gt mit AB, so ist mithin der Schnittpunkt des Kreises, den man um das Dreieck Htq schlagen kann, mit AB der gesuchte Berührungspunkt. Denkt man jedem beweglichen Kreise $\varkappa$ eine Linie $\mathfrak{AB}$ zugehörig, welche diesen Kreis nicht schneidet, und will zunächst diese Linie für eine zweite Lage des Kreises k wiederfinden, so ziehe man eine Sehne AB parallel mit $\mathfrak{AB}$, und die beiden Linien gA und gB; die Schnittpunkte dieser beiden Linien mit der zweiten Lage k_1 von k bestimmen die Linie A_1B_1. Die zweite Lage von $\mathfrak{AB}$ oder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ ist nun dadurch bestimmt, dass $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ parallel A_1B_1 sein muss, und dass die Entfernungen der Linien $\mathfrak{AB}$ und AB vom Punkte m sich verhalten müssen, wie die Entfernungen von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ und A_1B_1 vom Punkte m_1. Sämmtliche Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ umhüllen ebenfalls eine Curve, und den Tangirungspunkt auf der Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ findet man, wenn man zuerst den Punkt t auf AB nach der angegebenen Weise bestimmt, alsdann den Durchschnittspunkt von von Bt mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ construirt. Dieser Durchschnittspunkt ist der gesuchte Tangirungspunkt.

Geht der Kreis W in eine gerade Linie über, so gehen die Curven v und V in Parabeln über. Liegt der Punkt g ausserhalb des Kreises W, so gehen v und V in Hyperbeln über, und es gelten natürlich hier ganz ähnliche Sätze, wie die soeben an der Ellipse erläuterten.

Es bleibt noch zu bemerken übrig, dass wenn g innerhalb W liegt, jeder Punkt, den man als zu k gehörig denkt, bei der Bewegung von k eine Ellipse beschreibt, dass im zweiten Falle, wenn W eine gerade Linie ist, jeder zu k gehörige Punkt eine Parabel, und dass, wenn g ausserhalb W liegt, jeder zu k gehörige Punkt eine Hyperbel beschreibt. Zieht man nämlich durch den Brennpunkt g des Kegelschnitts irgend zwei senkrechte Coordinaten-Axen, und zieht durch jeden Punkt P des Kegelschnitts eine Linie, von welcher die Strecke AB, welche zwischen den beiden Axen liegt, durch den Kegelschnitt selbst halbirt wird, so sind die Abschnitte auf den Coordinaten-Axen, die doppelten Werthe der Coordinaten des Punktes P. Nennt man X und Y die Abschnitte der Coordinaten-Axen, so sind $\frac{1}{2}X$ und $\frac{1}{2}Y$ die Coordinaten von P. Denkt man den Punkt P zugehörig zu AB, so sind die Coordinaten x und y des Punktes P nach § 2. bestimmt durch die Gleichungen $x = \frac{m}{m+n} X + \frac{\rho}{m+n} Y$ und $y = \frac{n}{m+n} Y + \frac{\rho}{m+n} X$, wo die Coefficienten von X und Y constante Zahlen sind. Man kann mithin auch die Grössen $\frac{1}{2}X$ und $\frac{1}{2}Y$ durch Ausdrücke von x und y darstellen. Ist nun $f(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y) = o$ die Gleichung des Kegelschnittes, so erhält man die Gleichung des Punktes P, wenn man in dieser für X und Y ihre durch x und y ausgedrückten Werthe setzt. Die Gleichung für die Curve, welche P beschreibt, ist mithin im Allgemeinen von demselben Grade, wie die Gleichung $f(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y) = o$, in dem betrachteten Falle mithin wieder ein Kegelschnitt.

Geht der Punkt p bei der Bewegung in den Punkt p_1 über, so geht der Punkt P in den Punkt P_1 über. Zwischen den beiden Kegelschnitts-Sectoren gpp_1 und gPP_1 findet aber nun die Beziehung statt, dass der Sector gPP_1 gleich dem Sector gpp_1 multiplicirt mit: $\frac{l^2 - e^2}{l^2}$ ist, wo $l = \frac{1}{2}AB$ und $e = Pp$ ist. Da sich aber übersehen lässt, dass sich die Quadratur einer Ellipse nur auf die Quadratur einer anderen Ellipse, nicht aber einer Parabel oder einer Hyperbel zurückführen lässt, wenn die Coordinaten der einen sich durch die der andern lineär ausdrücken lassen, und da ähnliches für die Parabel und Hyperbel stattfindet, so müssen die Punkte p und P zugleich einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel angehören.

Wenn der Punkt g ausserhalb des Kreises W liegt, so kann noch der besondere Fall eintreten, dass der Kreis W selbst in einen Punkt übergeht, welchen wir W (Fig. XV.) nennen wollen. Die Curve v geht in die gerade Linie vv_1 über, welche gW halbirt und auf dieser Linie senkrecht steht; denn in dieser Geraden liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch g und W gehen. Zieht man nun zwei zu einander senkrechte Linien gL und gL_1 durch den Punkt g und denkt durch jeden Punkt p der Linie vv_1 eine Linie AB gezogen, welche von p halbirt wird, so fallen die schiefen Aehnlichkeitspunkte je zweier auf einander folgender Lagen von AB in den Punkt W, woraus man schliessen kann, dass W der schiefe Aehnlichkeitspunkt sämmtlicher Linien AB ist, die durch die Punkte p der Linie vv_1 halbirt werden. Man kann auch schliessen, dass, wenn der Punkt g gegeben ist und die Curve v in die gerade Linie vv_1 übergeht, dass alsdann die Fusspunkten-Curve W in einen Punkt übergeht, welcher dadurch bestimmt wird, dass gW auf vv_1 senkrecht steht und von vv_1 halbirt wird. Da zwischen den Coordinaten der Linie vv_1, wenn man sie auf die Coordinatenaxen gL und gL_1 bezieht, eine lineäre Gleichung stattfindet, so kann man schliessen, dass auch zwischen den Abschnitten gA und gB oder zwischen den doppelten Coordinaten des Punktes p eine lineäre Gleichung stattfindet, und umgekehrt, dass wenn zwischen diesen Abschnitten eine lineäre Gleichung stattfindet, der Halbirungspunkt p sich auf einer geraden Linie vv_1 bewegen müsse, und dass mithin alsdann der schiefe Aehnlichkeits-Punkt sämmtlicher Linien AB sich in dem Punkte W befinden müsse. Hat man mithin das rechtwinklige Dreieck MgN (Fig. XVI.) und zieht von den Punkten F, F_1 etc. der Hypotenuse MN auf gM und gN die Perpendikel FA und FB, F_1A_1 und F_1B_1 etc., so findet zwischen den Coordinaten gA und gB, gA_1 und gB_1 der Punkte F, F_1, ... der geraden Linie MN eine lineäre Gleichung statt, deshalb müssen alle Linien AB, A_1B_1 etc. ... einen gemeinsamen schiefen Aehnlichkeitspunkt haben. Da die Linie vv_1, welche durch die Mitten der geraden Linie AB, A_1B_1 .... hindurchgeht, mit MN parallel ist, und denselben Abstand vom Punkte g wie von MN hat, so ist der Fusspunkt W des Perpendikels gW auf MN der schiefe Aehnlichkeits-Punkt sämmtlicher Linien AB, A_1B_1 .... oder sämmttiche Dreiecke WAB, WA_1B_1 .... etc., zu denen auch WgM und WgN gehören, sind unter sich ähnlich. Nach den angegebenen Bestimmungen über den schiefen Aehnlichkeitspunkt kann man auch sagen: sämmtliche Kreise, die man um AgB, A_1gB_1 etc. beschlagen kann, schneiden sich im Fusspunkte W, was sich natürlich auch leicht elementar beweisen lässt. Denkt man nun wieder irgend einen Punkt P zugehörig zu AB, so sind nach § 2. seine Coordinaten bestimmt durch die Gleichungen $x = \frac{m}{m+n} X + \frac{p}{m+n} Y$ und $y = \frac{n}{m+n} Y + \frac{p}{m+n} X$, wo für X und Y die Grössen gA und gB zu setzen sind. Da zwischen gA und gB eine lineäre Gleichung existirt, so existirt auch eine lineäre Gleichung zwischen x und y oder sämmtliche Punkte P, P_1, P_2 etc., welche zu AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. ähnliche Lage haben, liegen auf einer geraden Linie, und es muss das Dreieck WPP_1 ähnlich sein dem Dreieck WAA_1, WP_1P_2 ähnlich sein WA_1A_2 etc.; es verhält sich mithin $PP_1 : AA_1 = WP_1 : WA_1 = P_1P_2 : A_1A_2$. und mithin $PP_1 : P_1P_2 = AA_1 : A_1A_2$. Alle Punkte, die zu AB gehören, bewegen sich also bei der Bewegung von AB in geraden Linien und legen proportionale Strecken zurück. Beschreibt man um gAB, (Fig. XVII.) gA_1B_1, und gA_2B_2 die drei Kreise k, k_1 und k_2 und zieht die geraden Linien gP und gQ, welche k in P und Q, k_1 in P_1 und Q_1 und k_2 in P_2 und Q_2 schneiden, so muss, indem A in A_1 übergeht, P in P_1, und Q in Q_1 übergehen und indem A_1 in A_2 übergeht, muss P_1 in P_2 und Q_1 in Q_2 übergehen, man erhält mithin die Proportionen $AA_1 : A_1A_2 = PP_1 : P_1P_2 = QQ_1 : Q_1Q_2$.

Schneiden sich also drei Kreise in zwei Punkten g und W, und man zieht durch einen dieser Punkte g mehrere Transversalen, so verhalten sich die Abschnitte der Transversalen zwischen je zweien der drei Kreise auf der einen Transversale, wie die entsprechenden auf den anderen.

(Fig. XVIII.) Bewegt sich die Linie AB mit ihren Endpunkten A und B in den Schenkeln des rechten Winkels MgN und der Mittelpunkt von AB beschreibt die gerade Linie vv_1, und man zieht die Sehne PQ, welche AB in s schneidet, so wird, indem AB in andere Lagen A_1B_1, A_2B_2 etc. übergeht, der um ABg beschriebene Kreis in den Kreis übergehen, der um A_1B_1g, A_2B_2g etc. beschrieben ist, und alle diese Kreise werden durch den Fusspunkt W eines Perpendikels gW auf MN gehen, wo MN parallel vv_1 und noch einmal so weit von g entfernt ist, wie vv_1. Dabei wird, indem das Vierseit $ABPQA$ sich stets ähnlich bleibt, der Punkt P, indem er in P_1, P_2 etc. übergeht sich stets auf dem Schenkel gP und der Punkt Q, indem er in Q_1, Q_2 etc. übergeht, sich stets auf dem Schenkel gQ bewegen, und die Vierseite $ABPQA$, $A_1B_1P_1Q_1A_1$, $A_2B_2P_2Q_2A_2$ ..... werden sämmtlich ähnlich und W ihr gemeinsamer schiefer Aehnlichkeitspunkt sein. Da die Punkte s, s_1, s_2 ....., auf einer geraden Linie liegen, so kann man diese auf die schiefen Coordinaten-Axen gP und gQ bezogen denken, und da ferner zwischen den Coordinaten der Punkte s, s_1, s_2 etc. eine lineäre Gleichung existirt und das Verhältniss von $Qs : sP$ stets dasselbe bleibt, so folgt auch, dass zwischen gP und gQ, gP_1 und gQ_1 etc. eine lineäre Gleichung existirt.*) Daraus folgt leicht, dass auch umgekehrt, wenn zwischen den veränderlichen Grössen gP und gQ eine lineäre Gleichung existirt, alle Kreise, welche man durch gPQ, gP_1Q_1 etc. legen kann, sich in einem und demselben zweiten Punkte W schneiden, und hieraus folgt der folgende Satz:

Hat man irgend ein Dreieck MgN und zieht von den Punkten F, F_1, F_2 etc. der Linie MN mit gM und gN die Parallelen FA und FB, F_1A_1 und F_1B_1, F_2A_2 und F_2B_2 etc., welche gM in A, A_1, A_2 .... gN in B, B_1, B_2 etc. schneiden, und schlägt Kreise um gAB, gA_1B_1, gA_2B_2 etc., so schneiden sich alle diese Kreise in einem Punkte W, welcher der gemeinsame schiefe Aehnlichkeitspunkt der Linien AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. ist, so dass also sämmtliche Dreiecke WAB, WA_1B_1, WA_2B_2 ähnlich sind. Ferner, haben die Punkte P, P_1, P_2 etc. zu AB, A_1B_1, A_2B_2.... ähnliche Lage, so liegen sie in gerader Linie, und es verhält sich $PP_1 : P_1P_2 = AA_1 : A_1A_2$. (Fig. XIX.) Da die Linien gM und gN zur Schar der Linien AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. gehören, so müssen die Dreiecke WgM und WgN ähnlich sein, und man findet daher den Punkt W im schiefen Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Linien, den man im Durchschnitt W zweier Kreise erhält, von denen der eine durch g und M geht und gN berührt, und der andere durch g und N und gM berührt.

Um den Schnittpunkt s zweier auf einander folgender Lagen der Linie AB zu finden, hat man zu bedenken, dass Winkel WsA = Winkel WAM sein müsse, woraus sich ergiebt, dass der Punkt s im Durchschnitt eines Kreises, der AM in A berührt und der durch W geht, mit AB liegt. Denkt man mit AB eine Linie GL verbunden, welche AB in t, gM in G, gN in L schneidet, und die zu AB stets ähnliche Lage behält, (bezeichnen also AB, A_1B_1, A_2B_2 etc. die auf einandar folgenden Lagen der Linie AB, so muss $At : tB = A_1t_1 : t_1B_1 = A_2t_2 : t_2B_2$ und $\angle AtG$ muss $= \angle A_1t_1G_1 = \angle A_2t_2G_2$ etc. sein): so findet man den Schnittpunkt s_1 von GL mit seiner nächsten Lage, im Schnittpunkte eines Kreises mit GL, der durch W, G und A geht, denn alsdann ist der Winkel WAM = Winkel Ws_1G. Durch denselben Punkt s_1 geht zugleich der Kreis, welchen man um W, B und L schlagen kann.

Schliesslich bemerken wir noch, dass die Linie GL bei ihrer Bewegung eine Parabel umhüllt; denn da G und L sich auf geraden Linien bewegen, und da t sich ebenfalls auf einer geraden Linie bewegt, so muss GL eine Parabel umhüllen, weil dies bekanntlich jedesmal geschieht, wenn drei sich ähnlich bleibende Punkte einer geraden Linie sich auf geraden Linien bewegen.

---

*) Setzt man (Fig. XVII.) $gP = x$, $gP_1 = x_1$, $gP_2 = x_2$, $gQ = y$, $gQ_1 = y_1$, $gQ_2 = y_2$, so findet nach dem Obigen die Proportion statt $PP_1 : PP_2 = QQ_1 : QQ_2$ oder $(x_1 - x) : (x_2 - x) = (y_1 - y) : (y_2 - y)$, aus welcher man die Gleichung $x_1y_2 - x_2y_1 = x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1)$ ableitet. Sieht man die Punkte Q_1 und P_1, Q_2 und P_2 als feste und Q und P als veränderliche an und setzt für x und y wieder gP und gQ ein, so erhält man die lineäre Gleichung, welche zwischen gP und gQ stattfindet.

Professor **Schönemann.**

Druckfehler:

S. 4, Z. 3 v. o. setze ein ; vor „bezeichnet“.
S. 6, Z. 12 „ „ lies Centriwinkel statt Certriwinkel.
S. 6, Z. 20 „ „ „ P_1 „ p_1.
S. 8, Z. 1 „ „ „ P und P_1 „ P_1 und P.
S. 11, Z. 12 „ „ „ dass, „ dass;.
S. 11, Z. 14 „ „ „ q_1 „ q_1.
S. 15, Z. 4 „ „ „ R_1 „ R.
S. 15, Z. 9 „ „ „ $p_1 a$ „ $p_1 \alpha$.
S. 15, Z. 20 „ „ „ durch $v + \mu$ „ durch $v + u$.
S. 16, Z. 6 v. u. „ k „ $\varkappa$.

Fi

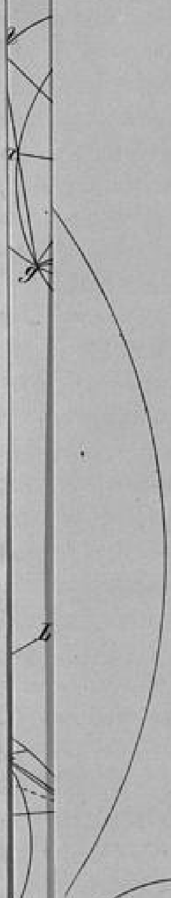
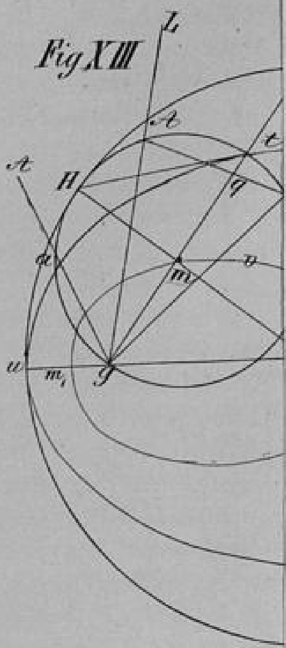
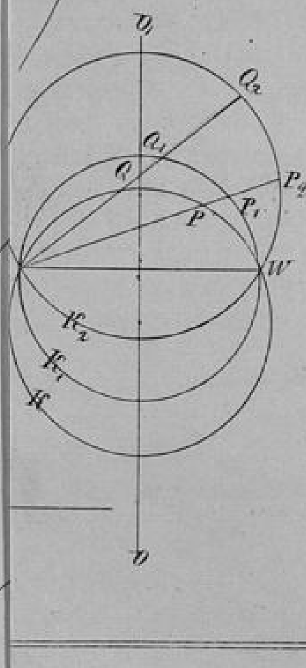


Fig XIII





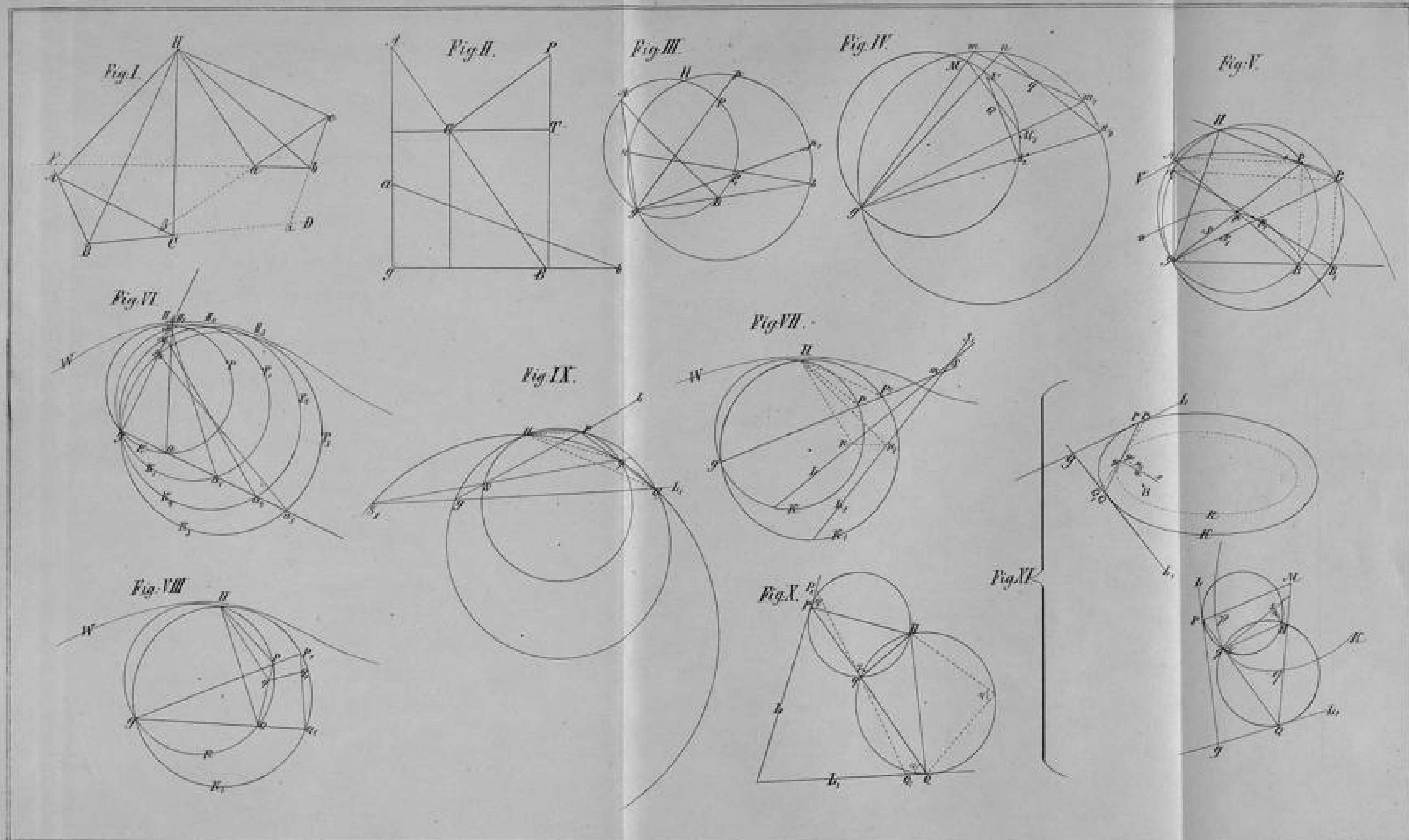


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.

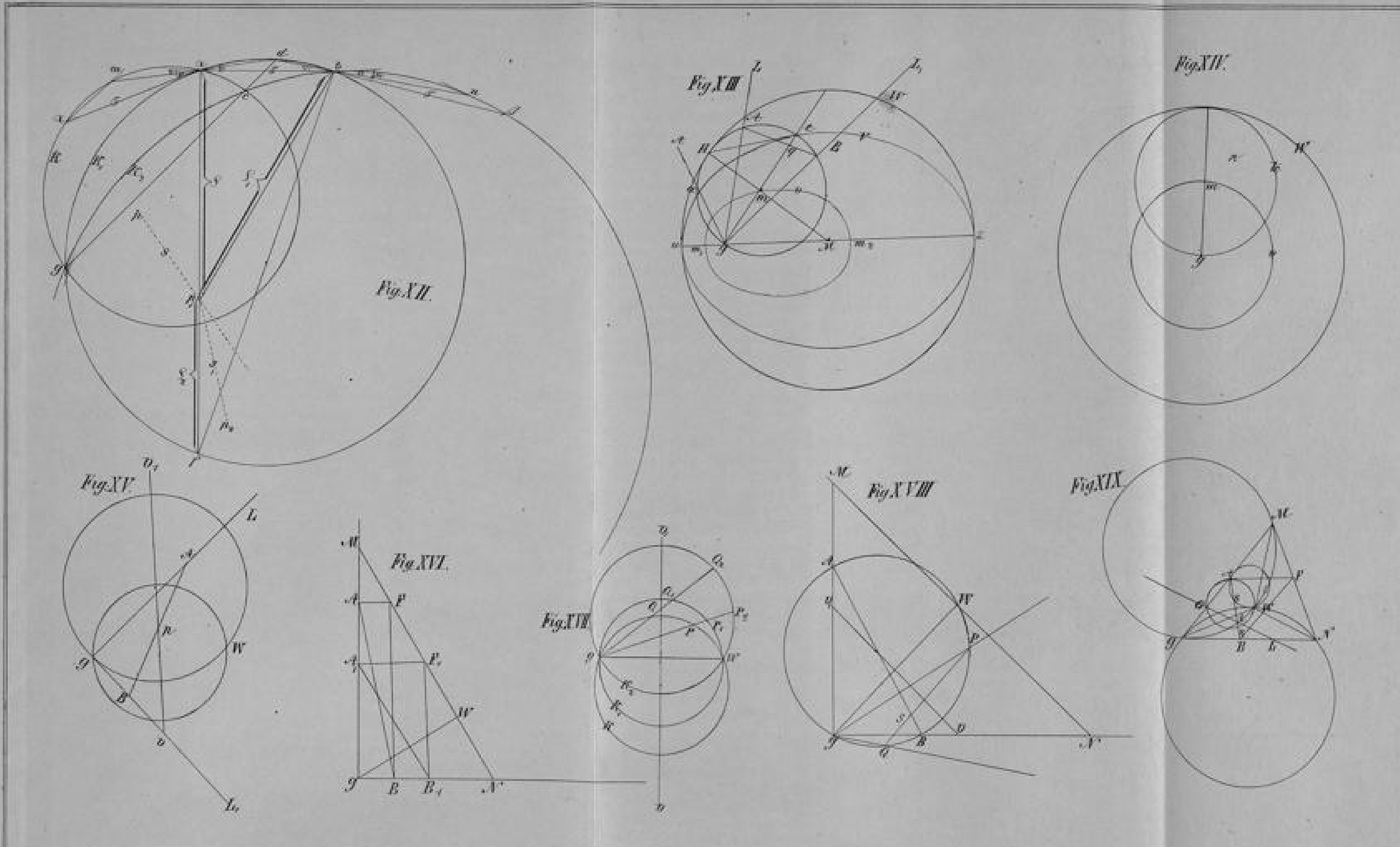


Fig. XII.
Fig. XIII
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.