CXXVI.

Programm

des

Königl. Friedrichs-Gymnasiums

zu

Breslau

1891

I. Schulnachrichten

Breslau
Druck von Otto Gutsmann

I. Allgemeine Lehrverfassung

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl

	Gymnasium									Vorschule			
	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Summa	I	II	III	Summa
Religionslehre													
für die Evangelischen	2	2	2	2	2	2	2	3	17	2	2	2	4
für die Katholiken . .	2	2	2	2	2	2	2	2 1	9				
Deutsch	3	2	2	2	2	2	2	3	18	10	6+2	2+4	22
Latein	8	8	8	9	9	9	9	9	69	—	—	—	—
Griechisch.	6	7	7	7	7	—	—	—	34	—	—	—	—
Französisch	2	2	2	2	2	5	4	—	19	—	—	—	—
Hebräisch	2	2	2	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—
Geschichte u. Geographie	3	3	3	3	3	4	3	3	25	1	—	—	1
Rechnen und Mathematik	4	4	4	3	3	4	4	4	30	4	4	4	8
Naturbeschreibung. . . .	—	—	—	2	2	2	2	2	10	—	—	—	—
Physik	2	2	2	—	—	—	—	—	6	—	—	—	—
Schreiben	—	—	—	—	—	—	2	2	4	3	4	4	7
Zeichnen.	2	2	2	2	2	2	2	2	8	—	—	—	—
Singen	2	2	2	2	2	2	2	2	6	1	1	1	2
Turnen.	2	2	2	2	2	2	2	2	4	1	1	1	2
Summa	38	38	38	36	36	34	34	32	263	22	20	18	46

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer

a. Gymnasium

	Ordinarius von	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Zahl der Stunden	Bemerkungen
Professor **Treu**, Direktor	I	8 Latein		2 Griech.						10	
Prof. Dr. **Menzel**, 1. Oberlehrer	IIa		6 Latein		7 Griech.		5 Franz.			18	
Prof. Dr. **Vogt**, 2. Oberlehrer		4 Mathem. 2 Physik	4 Mathem. 2 Physik	4 Mathem.		3 Mathem.				19	
Scharnweber, 3. Oberlehrer		2 Hebr.	2 Hebräisch	2 Latein 2 Franz.	2 Franz.	2 Deutsch 2 Latein 2 Franz.		4 Franz.		20	
Dr. **Michael**, 4. Oberlehrer	IIb	6 Griech. 2 Franz.	5 Griech. 2 Franz.	6 Latein						21	
Loewe, ordentl. Lehrer	IIIa			2 Deutsch 5 Griech.	7 Latein 3 Gesch. u. Geogr.		4 Gesch. u. Geogr.			21	
Schiller, ordentl. Lehrer	IIIb	3 Deutsch 3 Gesch.	3 Gesch.	3 Gesch.		7 Latein 3 Gesch. u. Geogr.				22	
Rehbaum, ordentl. Lehrer		2 Singen						2 Geogr. 4 Rechnen 2 Schreib. 2 Singen	2 Geogr. 4 Rechnen 2 Schreib. 2 Singen 2 Zeichnen	24	und 4 Turnen
Lerch, ordentl. Lehrer				2 Physik	3 Mathem. 2 Naturb.	2 Naturb.	4 Mathem. 2 Naturb.	1 Gesch. 2 Naturb.	1 Gesch. 2 Naturb.	21	
Dr. **Kynast**, ordentl. Lehrer	VI	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion		2 Religion	2 Religion	3 Deutsch 9 Latein	24	und 4 Turnen
Dr. th. **Hildebrand**, Curatus		2 Religion			2 Religion		2 Religion	2 Religion	1 Religion	9	
Reinitz, Hilfslehrer	V		2 Deutsch 2 Latein 2 Griech.		2 Deutsch 2 Latein			2 Deutsch 9 Latein		21	
Dr. **Volkmann**, Hilfslehrer	IV					2 Religion 7 Griech.	2 Deutsch 9 Latein		3 Religion	23	
Painer, Maler		2 Zeichnen					2 Zeichnen	2 Zeichnen		6	
Raddatz, Schulamtskandidat						[im Sommer 2 Deutsch im Winter 2 Religion]		[im Winter 2 Religion]			
Dr. **Wilhelm**, Schulamtskandidat			[2 Latein]								
Altmann, Schulamtskandidat					[im Sommer 2 Religion]				[im Winter 3 Religion]		
Dr. **Schirdewahn**, Schulamtskandidat			[im Winter 4 Mathem. 2 Physik]	[im Winter 4 Mathem.]		[im Winter 3 Mathem.]	[im Winter 4 Mathem. 2 Naturb.]				
Dr. **Collatz**, Probekandidat			[im Sommer 5 Griech.]			[im Sommer 2 Latein]					
Dr. **Hippe**, Mitglied des Seminars							[5 Franz.]				
Dr. **Scheuer**, Mitglied des Seminars				[2 Griech. 2 Latein]							

b. Vorschule

	I	II	III	Zahl der Stunden
Gerstenberg, 1. Vorschullehrer	2 Religion, 10 Deutsch, 3 Schreiben, 2 Singen-Turnen, 1 Heimatskunde	2 Religion, 2 Singen-Turnen		22
Schoenbrunn, 2. Vorschullehrer	4 Rechnen	4 Rechnen, 4 Schreiben, 8 Deutsch	4 Rechnen, 4 Schreiben, 6 Deutsch	24

3. Übersicht über die während des abgelaufenen Schuljahres absolvierten Pensen

Prima

Ordinarius der **Direktor**

Ev. Religionslehre, 2 St. Römerbrief im Urtext; die Hauptpunkte der Glaubens- und Sittenlehre; Confessio Augustana; die Hauptepochen der Kirchengeschichte von der Reformation an (Hollenbergs Hilfsbuch). Kynast. — **Kath. Religionslehre,** 2 St. Gottes Wesen und Eigenschaften; Gott der Schöpfer und Erhalter der Welt; Erlösung der Menschen; Lehre von der Gnade und den Gnadenmitteln (Lehrbuch von König). Hildebrand. — **Deutsch,** 3 St. Die Hauptepochen der Nationallitteratur bis Lessing; Lektüre bedeutender Schriftwerke; Dispositionsübungen; Übungen im mündlichen Vortrage; Memorieren von Gedichten und Dichterstellen; Aufsätze: 1 a, Was erfahren wir aus Goethes Epilog zu Schillers Glocke über Schillers Leben und Wirken? 1 b, Welche Fortschritte in der Entwicklung der Handlung zeigt der zweite Akt von Schillers Maria Stuart? 2, Wie verteidigt sich Sokrates gegen die Anklage des Meletos? 3 a, Welche Konflikte geben dem Nibelungenliede sein eigentümliches Gepräge? 3 b, Wie erklärt sich die Wandlung im Charakter Kriemhilds nach Siegfrieds Tode? 4, Kann man mit Recht sagen, dass in Shakespeares Coriolan Volumnia für den Haupthelden die Schöpferin und Gestalterin seines Lebens ist? 5, (Klausur) Worin liegt die hohe Erhebung der deutschen Krone unter Heinrich III und ihr tiefer Fall unter Heinrich IV begründet? 6 a, Welche charakteristischen Merkmale Klopstockscher Dichtung lassen sich aus den beiden Oden: der Zürichersee und: der Rheinwein nachweisen? 6 b, Mit welchem Recht kann man Klopstocks Oden Spiegelbilder seines äusseren und inneren Lebens nennen? 7, Wodurch hat Sophokles in seinem Philoktet die Darstellung eines körperlichen Leidens ermöglicht? (nach Lessings Laocoon.) 8, (Klausur) Wem gereicht, wenn zwischen Virgil und dem bildenden Künstler in der Darstellung des Laocoon eine Abhängigkeit anzunehmen ist, die Nachahmung zu grösserer Ehre? 9, Welche dramatischen Grundsätze entwickelt Lessing bei der Besprechung der Merope von Voltaire? 10, (Klausur) Inwiefern ist nach Lessings Laocoon die Sphäre der bildenden Kunst enger als die der dichtenden? **Abiturienten-Aufsatz Ostern 1891:** Wie bestimmt Lessing im Laocoon das Wesen und die Gesetze des poetischen Gemäldes? Schiller. — **Latein,** 8 St. Cic. Tusc. I, de orat. I, Tacitus ab exc. divi Aug. I, Tacitus Germania I. Teil, Hor. carm. I. II. Wiederholung und Erweiterung grammatischer Abschnitte; Stilistisches. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik). Aufsätze: 1, In Agricola Taciteo quae virtus maxima fuisse videatur. 2, Earum virtutum quas Cicero in prooemio Tusculanarum laudat testes citentur gravissimi. 3, Quid post cladem Cannensem labantem iam rem publicam sustinuerit. 4, (Klausur) Quanta religione Romani optimis rei publicae temporibus ius iurandum servarint. 5, Illud Menandri: *ὃν οἱ θεοὶ φιλοῦσιν, ἀποθνήσκει νέος*, quid sibi velit ex primo Tusculanarum optime perspicitur. 6, Ciceronem in pessima re publica eum vitae cursum tenuisse, ut neque in negotio auctoritate, neque in otio dignitate careret. 7, (Klausur) Alexander Achillis aemulus. 8, Tiresias sepeliendum utique mortuum esse defendit. 9, *Τὸ κακὸν δοκεῖ ποτ' ἐσθλὸν Τῷδ' ἔμμεν, ὅτῳ φρένας Θεὸς ἄγει πρὸς ἄταν.* Soph. Antig. 618ss. Treu. — **Griechisch,**

6 St. Plat. Apol. und Kriton, Thucyd. I. II, Hom. Ilias XIII—XXIV, Soph. Aias. Grammatische Pensen nach Bedürfnis. 14tägig eine schriftl. Übung (v. Bambergs Grammatik). Michael. — **Französisch**, 2 St. Molière l'avare, Montesquieu considérations. Grammatische Pensen nach Bedürfnis. 3 wöchentlich eine schriftliche Übung (Ploetz Grammatik). Michael. — **Hebräisch** (fakultativ), 2 St. II. Regum, Psalm 50—90. Abschluss der Formenlehre (Hollenbergs Hilfsbuch). Scharnweber. — **Geschichte** und **Geographie**, 3 St. Deutsche Geschichte bis 1555. Wiederholungen nach Bedürfnis (Cauers Tabellen, Herbsts Hilfsbuch, Daniels Leitfaden). Schiller. — **Mathematik**, 4 St. Stereometrie: 1. Teil, bis zu den regelmässigen Polyedern. Algebra: Anwendungen der arithmetischen und geometrischen Reihen, Zinses-Zins- und Rentenrechnung; Geometrie und Trigonometrie wurden durch Aufgaben weitergeführt. 14tägig eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik, Gauss' Tafeln). **Abiturienten-Aufgaben Ostern 1891**: 1, Zeichnet man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen gleichseitige Dreiecke und verbindet deren Spitzen mit den gegenüberliegenden Ecken des ursprünglichen Dreiecks, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte und sind gleich lang. 2, In einen Kreis, dessen Radius $r = 10$ cm ist, ist ein regelmässiges Fünfeck eingezeichnet. Welche Fläche hat die von den Diagonalen desselben gebildete Sternfigur? 3, Welchen Halbmesser muss der Grundkreis eines geraden Doppelkegels haben, dessen Spitze im Mittelpunkte einer gegebenen Kugel liegt, wenn die Gesamt-Oberfläche des Doppelkegels gleich der Hälfte der Kugeloberflächen sein soll? 4, Wie viel muss am Schlusse eines jeden Jahres zu einem Kapitale von 9000 M. hinzugefügt werden, damit es bei $4\frac{1}{2}$ % Zinseszins sich in 8 Jahren verdoppele? Vogt. — **Physik**, 2 St. Abschluss der Mechanik. Mathematische Geographie. Wiederholungen (Trappes Schulphysik). Vogt. —

Ober-Sekunda

Ordinarius Professor Dr. **Menzel**

Ev. Religionslehre, 2 St. Perikopen und Pastoralbriefe im Urtext; Geschichte des Reiches Gottes im N. T. Wiederholung des 2. und 3. Artikels und des 3. Hauptstücks; Wiederholung der Kirchenlieder (Hollenbergs Hilfsbuch). Kynast. — **Kath. Religionslehre**, 2 St., vereinigt mit I. — **Deutsch**, 2 St. Schillers Wallenstein und Wilhelm Tell, Lessings Minna von Barnhelm, leichtere Prosastücke Schillers, häuslich besonders Schillersche Dramen. Die hauptsächlichsten Kunstformen der dramatischen Poesie und der Prosa; Dispositionsübungen; Übungen im mündlichen Vortrage; Memorieren von Gedichten und Dichterstellen; Aufsätze: 1, Ithaka in Odysseus' Abwesenheit. 2a, Gedankengang in Schillers Siegesfest. 2b, Die Schaubühne als eine moralische Anstalt betrachtet. 3, Hat Schiller Recht, wenn er von den Phäaken sagt: Immer ist Sonntag, es dreht immer am Herd sich der Spiess? 4, (Klausur) Wie gewinnt Minna von Barnhelm Tellheim, und wie führt sie ihr Verhältnis zum glücklichen Ende? 5, Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand. 6, Welche Eindrücke empfängt Questenberg im Wallensteinschen Lager? 7, Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Wallensteinschen Lager und den Piccolomini? 8, Lebensbild Wallensteins (nach Schillers Trilogie). 9, Gertrud und Hedwig in Schillers Wilhelm Tell. 10, (Klausur) Warum ist den Deutschen der Rheinstrom so lieb? Reinitz. — **Latein**, 6 St. Cic. IV. Verrin., de imper. Cn. Pomp., Livius I. Dekade Auswahl. Wiederholung und Erweiterung grammatischer Abschnitte; Wortstellung; einiges vom Satz- und Periodenbau; Synonymen. Übersetzen aus dem Lesebuch; 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Süpfles Aufgaben). Aufsätze: 1, Quo modo Xenophon in Cyri expeditionis societatem venisse sese narret. 2, Quid Ulixes in Ithacam reversus persona mendici indutus de genere, patria, rebus adversis Eumaeo narraverit. 3, De legibus Lycurgi ad educationem spectantibus. 4, De causis belli Peloponnesiaci. Menzel. — 2 St. Seyfferts Lesestücke Auswahl, Verg. Aen. V—XII Auswahl. Memorieren poetischer Stücke. Reinitz. — **Griechisch**, 5 St. Herod. I—V und Xenoph. memor. Auswahl, Lysias *κατὰ Ἀγοράτου* und *ὑπὲρ τοῦ ἀδυνάτου*. Wiederholungen;

syntaktische Hauptregeln. 8tägig eine schriftliche Übung (v. Bambergs Grammatik). Michael. — 2 St. Seyfferts Lesestücke Auswahl. Hom. Od. IX—XXIV, teilw. häuslich. Homerische Formen; Memorieren von Dichterstellen. Reinitz. — **Französisch**, 2 St. Michaud histoire de la première croisade. Syntax der Pronomina; Infinitiv; Konjunktionen. 14tägig eine schriftliche Übung (Knebel-Probst Schulgrammatik, Probst Übungsbuch). Michael. — **Hebräisch** (fakultativ), 2 St. Formenlehre bis zu den verbb. gutt. 3wöchentlich eine schriftliche Übung (Hollenbergs Hilfsbuch). Scharnweber. — **Geschichte** und **Geographie**, 3 St. Römische Geschichte. Geographische Wiederholungen: Europa (Cauers Tabellen, Herbsts Hilfsbuch, Daniels Leitfaden). Schiller. — **Mathematik**, 4 St. Algebra: Theorie der linearen Gleichungen; Wortgleichungen. Beziehungen der Rechnungsarten, Aufbau des Zahlensystems. Allgemeine Potenzlehre; Logarithmen. Arithmetische und geometrische Reihen. Geometrie: Ähnlichkeitspunkte der geradlinigen Figuren und Kreise. Merkwürdige Punkte des Dreiecks. Apollonisches Berührungsproblem. Reguläre Polygone. Rektifikation und Quadratur des Kreises. Trigonometrie. 14tägig eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik, Gauss' Tafeln). Vogt. — **Physik**, 2 St. Wärmelehre; Lehre von den flüssigen und luftförmigen Körpern; Statik fester Körper (Trappes Schulphysik). Vogt. —

Unter-Sekunda

Ordinarius Oberlehrer Dr. **Michael**

Ev. Religionslehre, 2 St Ev. Lucae und die Apostelgeschichte; Geschichte des Reiches Gottes im N. T. Wiederholung des 1. Hauptstückes und des 1. Artikels; Wiederholung der Kirchenlieder (Hollenbergs Hilfsbuch). Kynast. — **Kath. Religionslehre**, 2 St., vereinigt mit I. — **Deutsch**, 2 St. Goethes Hermann und Dorothea, Nibelungenlied (nach Simrock), Gedichte von Schiller und Goethe; häuslich Herders Cid und einige andere hervorragende epische Gedichte. Die hauptsächlichsten Kunstformen der epischen Poesie; Übungen im mündlichen Vortrage; Memorieren von Gedichten und Dichterstellen; das Hauptsächlichste von den Redefiguren; Aufsätze: 1, Caesar spricht vor Ausbruch des Bürgerkrieges zu Ravenna zur XIII. Legion. 2, Naturzustand und Kultur (nach Schillers Eleusischem Fest). 3, (Klausur) Welche Umstände ermöglichten Caesar die Eroberung Galliens. 4, Charakteristik Cids (nach Herder). 5, Die Stadt in Goethes Hermann und Dorothea. 6, Das Nibelungenlied ein Lied der Treue. 7, Die Verdienste des grossen Kurfürsten um das deutsche Volk. 8, Wo rohe Kräfte sinnlos walten, da kann sich kein Gebild gestalten (Chrie). 9, (Klausur) Themistokles spricht vor der Schlacht bei Salamis zu den Hellenen. 10, Welche Umstände erleichterten den Hellenen den Sieg bei Salamis. 11, Die Schlacht an der Trebia. 12, (Klausur) Gedankengang von Sophokles Antigone. Loewe. — **Latein**, 6 St. Sal. Catilina, Cic. oratt. Cat., Livius III. Dekade Auswahl. Wiederholung und Erweiterung grammatischer Abschnitte; der römische Kalender; Synonymen; Übersetzen aus dem Lesebuch. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Süpfles Aufgaben). Michael. — 2 St. Seyfferts Lesestücke Auswahl. Verg. Aen. I—IV Auswahl. Memorieren poetischer Stücke; Metrik. Scharnweber. — **Griechisch**, 5 St. Xen. anab. V, Xen. Cyrop. Auswahl, Herod. VI—IX Auswahl. Wiederholung der Formenlehre; syntaktische Hauptregeln. 8tägig eine schriftliche Übung (v. Bambergs Grammatik). Loewe. — 2 St. Hom. Od. I—IIX, teilw. häuslich. Homerische Formen; Memorieren von Dichterstellen. Treu. — **Französisch**, 2 St. Paganel histoire de Frédéric le Grand. Hauptlehren der Syntax: Artikel, Casus und Casuspräpositionen; Adjektiv; Pronomina; Modus- und Tempuslehre erweitert. 14tägig eine schriftliche Übung (Knebel-Probst Schulgrammatik, Probst

Übungsbuch). Scharnweber. — **Hebräisch** (fakultativ), 2 St., vereinigt mit IIa. — **Geschichte und Geographie**, 3 St. Kultur des Orients. Griechische Geschichte. Geographische Wiederholungen: Die aussereuropäischen Erdteile (Cauers Tabellen, Herbsts Hilfsbuch, Daniels Leitfaden). Schiller. — **Mathematik**, 4 St. Geometrie: Proportionalität gerader Linien, Ähnlichkeit geradliniger Figuren; Konstruktionsaufgaben. Algebra und Arithmetik: Potenz- und Wurzellehre; Gleichungen vom 1. Grade mit mehreren Unbekannten, vom 2. Grade mit einer Unbekannten; Ansatz der Gleichungen. 14tägig eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik). Vogt. — **Physik**, 2 St. Chemie; Akustik; Magnetismus und Elektrizität (Trappes Schulphysik). Lerch. —

Ober-Tertia

Ordinarius Loewe

Ev. Religionslehre, 2 St. Abschnitte aus den prophetischen und poetischen Büchern; Geschichte des Reiches Gottes im A. T. Kenntnis des heil. Landes. Das 4. und 5. Hauptstück; 4 Kirchenlieder; Wiederholung der früheren (Hollenbergs Hilfsbuch). Kynast. — **Kath. Religionslehre**, 2 St. Gott der Schöpfer und Erhalter der Welt. Lehre von der Gnade (Königs Handbuch). Hildebrand. — **Deutsch**, 2 St. Lektüre und Erklärung von Gedichten und Prosastücken. Dispositionsübungen; Übungen im mündlichen Vortrage; Memorieren von 4 Gedichten; grammatische Wiederholungen, besonders der Lehre von der Periode und den Konjunktionen; das Wichtigste von der Prosodie. 3wöchentlich ein Aufsatz (Hopf und Paulsieks Lesebuch). Reinitz. — **Latein**, 7 St. Caes. bell. civ. und bell. Gallic. V—VII Auswahl. Wiederholung und Erweiterung des gesamten vorhergehenden Pensums; die griechische Deklination; Synonymen; Übersetzen aus dem Lesebuch. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Süpfles Aufgaben). Loewe. — 2 St. Ovid. met. Auswahl. Memorieren poetischer Stücke; Metrik. Reinitz. — **Griechisch**, 7 St. Xen. anab. I—IV Auswahl. Abschluss der Formenlehre; Begrenzung des Stoffes und Einüben im Anschluss an die Lektüre; Hauptpunkte der Satzlehre; Vokabeln. 8tägig eine schriftliche Übung (v. Bambergs Grammatik, Dzialas Übungsbuch). Menzel. — **Französisch**, 2 St. Voltaire Charles XII. Hauptlehren der Syntax: Reflexiva, Intransitiva, Impersonalia. Hauptregeln der Modus- und Tempuslehre. 14tägig eine schriftliche Übung (Knebel-Probst Schulgrammatik, Probst Übungsbuch). Scharnweber. — **Geschichte**, 2 St. Preussische und deutsche Geschichte von 1648—1871 (Cauers Tabellen). Loewe. — **Geographie**, 1 St. Deutschland (Daniels Leitfaden). Loewe. — **Mathematik**, 3 St. Geometrie: Kreislehre; Vergleichung und Auswertung des Flächeninhalts geradliniger Figuren; Pythagoreischer Satz; Konstruktionsaufgaben. Algebra: Gleichungen vom 1. Grade mit einer und zwei Unbekannten; Wortgleichungen; Quadrat- und Kubikwurzel aus algebraischen Ausdrücken und Zahlen. 3wöchentlich eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik). Lerch. — **Naturbeschreibung**, 2 St. Anthropologie. Wiederholungen aus der Botanik und aus der Zoologie. Mineralogie (Schillings kleine Naturgeschichte). Lerch. —

Unter-Tertia

Ordinarius Schiller

Ev. Religionslehre, 2 St. Abschnitte aus den historischen Büchern des A. T.; Geschichte des Reiches Gottes im A. T. Einteilung und Reihenfolge der Bücher des A. T. Das

Kirchenjahr. Wiederholung des 2. Hauptstücks. 5 Kirchenlieder, Wiederholung der früheren (Hollenbergs Hilfsbuch). Volkmann. — **Kath. Religionslehre**, 2 St., vereinigt mit IIIa. — **Deutsch**, 2 St. Lektüre und Erklärung von Gedichten und Prosastücken; mündliche Übungen; Memorieren von 4 Gedichten; die Eigentümlichkeiten der Kasuslehre; die Lehre von den Präpositionen; Wiederholung der Lehre von der Periode. 14tägig ein Aufsatz (Hopf und Paulsieks Lesebuch). Scharnweber. — **Latein**, 7 St. Caes. bell. Gall. I–IV Auswahl. Wiederholung der Formen- und Kasuslehre; Tempus- und Moduslehre und einige Hauptregeln der anderen Syntax; Synonymen; Übersetzen aus dem Lesebuch. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Süpfles Aufgaben). Schiller. — 2 St. Ovid. met. Auswahl. Memorieren poetischer Stücke; Metrik. Volkmann. — **Griechisch**, 7 St. Formenlehre bis zu den Verben auf ω incl.; Begrenzung des Stoffes und Einüben im Anschluss an die Lektüre; Vokabeln. 8tägig eine schriftliche Übung (v. Bambergs Grammatik, Dzialas Übungsbuch). Volkmann. — **Französisch**, 2 St. Rollin hommes illustres. Ergänzende Wiederholung der Formenlehre; Hauptlehren der Syntax. 14tägig eine schriftliche Übung (Knebel-Probst Schulgrammatik, Probst Übungsbuch). Scharnweber. — **Geschichte**, 2 St. Deutsche Geschichte bis 1648 (Cauers Tabellen). Schiller. — **Geographie**, 1 St. Die ausserdeutschen und ausserösterreichischen Länder Europas (Daniels Leitfaden). Schiller. — **Mathematik**, 3 St. Geometrie: Lehre vom Dreieck und Parallelogramm; Anfang der Kreislehre. Arithmetik: Die Rechnungsoperationen mit algebraischen Grössen; Potenzen mit ganzen positiven Exponenten. 3wöchentlich eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik). Vogt. — **Naturbeschreibung**, 2 St. Botanik. Zoologie (Schillings kleine Naturgeschichte). Lerch. —

Quarta

Ordinarius Dr. **Volkmann**

Ev. Religionslehre, 2 St. Wiederholung, Erweiterung und Vertiefung des Pensums der VI und V: Wiederholung des 1. und 3. Hauptstücks. 5 Kirchenlieder, Wiederholung der früheren (Hollenbergs Hilfsbuch). Kynast. — **Kath. Religionslehre**, 2 St. Die Gebote Gottes; Jugendgeschichte des Erlösers; Lehre von der Tugend und Vollkommenheit; öffentliches Wirken des Erlösers; Geographie von Palästina (Katechismus für die Diözese Breslau; Schusters biblische Geschichte). Hildebrand. — **Deutsch**, 2 St. Lesen und mündliche Übungen; Memorieren von 4 Gedichten; die Satzverbindung in Bei- und Unterordnung; Hauptarten der Nebensätze; Interpunktion; Rechtschreibung. 14tägig ein Aufsatz (Hopf und Paulsieks Lesebuch). Volkmann. — **Latein**, 9 St. Corn. Nepos Auswahl. Wiederholung und Abschluss der Formenlehre; Kasuslehre und einige Hauptregeln der anderen Syntax; Synonymen; Übersetzen aus dem Lesebuch; Memorieren von Prosastücken. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Süpfles Aufgaben). Volkmann. — **Französisch**, 5 St. Abschluss der Formenlehre, die gebräuchlicheren unregelmässigen und reflexiven Verben; propädeutische Berücksichtigung unentbehrlicher syntaktischer Regeln; Lektüre im Lesebuch. 8tägig eine schriftliche Übung (Knebel-Probst Schulgrammatik, Probst praktische Vorschule). Menzel. — **Geschichte**, 2 St. Biographieen aus der griechischen und römischen Geschichte (Cauers Tabellen). Loewe. — **Geographie**, 2 St. Elementare Grundlehren der mathematischen Geographie. Die aussereuropäischen Erdteile (Daniels Leitfaden). Loewe. — **Mathematik**, 2 St. Lehre von geraden Linien und von Winkeln; Verwertung der gewonnenen Sätze für Dreieck und

Parallelogramm. Construktion des Dreiecks aus gegebenen Seiten und Winkeln. 14tägig eine schriftliche Übung (Mehlers Elementarmathematik). Lerch. — **Rechnen**, 2 St. Decimalbrüche Zusammengesetzte Regeldetri; Procentrechnung mit ihren Anwendungen; Gesellschafts- und Mischungsrechnung. 3wöchentlich eine schriftliche Übung (Fölsings Rechenbuch). Lerch. — **Naturbeschreibung**, 2 St. Botanik. Zoologie (Schillings kleine Naturgeschichte). Lerch. — **Zeichnen**, 2 St. Painer.

Quinta

Ordinarius **Reinitz**

Ev. Religionslehre, 2 St. Biblische Geschichte des N. T.; 2. Hauptstück mit Bibelstellen; 5 Kirchenlieder, Wiederholung der früheren (Hollenbergs Hilfsbuch, Zahns Historien). Volkmann. — **Kath. Religionslehre**, 2 St. Die Geschichte des A. T.; Geographie von Palästina; die Gebote Gottes; Lehre von der Tugend und Vollkommenheit (Katechismus für die Diözese Breslau, Schusters Biblische Geschichte). Hildebrand. — **Deutsch**, 2 St. Lesen und mündliche Übungen. Memorieren von 4 Gedichten; der zusammengesetzte Satz; starke und schwache Deklination und Konjugation; Interpunktion; Rechtschreibung; 8tägig eine schriftliche Übung (Schwartz Leitfaden, Hopf und Paulsieks Lesebuch). Reinitz. — **Latein**, 9 St. Regelmässige und unregelmässige Formenlehre; Begrenzung des Stoffes und Einüben im Anschluss an die Lektüre; Vokabeln. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Ostermanns Übungsbuch). Reinitz. — **Französisch**, 4 St. Formenlehre; propädeutische Berücksichtigung unentbehrlicher syntaktischer Regeln; Lektüre im Lesebuch. Schriftliche Übungen (Probst praktische Vorschule). Scharnweber. — **Geschichte**, 1 St. Biographische Erzählungen aus der deutschen Sagenzeit, aus der deutschen und preussischen Geschichte. Lerch. — **Geographie**, 2 St. Europa (Daniels Leitfaden). Rehbaum. — **Rechnen**, 4 St. Bruchrechnung; Decimalbrüche; einfache und zusammengesetzte Regeldetri; geometrisches Zeichnen (Fölsings Rechenbuch). Rehbaum. — **Naturbeschreibung**, 2 St. Botanik. Zoologie (Schillings kleine Naturgeschichte). Lerch. — **Zeichnen**, 2 St. Painer. — **Schreiben**, 2 St. Rehbaum. —

Sexta

Ordinarius **Dr. Kynast**

Ev. Religionslehre, 3 St. Biblische Geschichte des A. T. 1. und 3. Hauptstück mit Bibelstellen; 5 Kirchenlieder (Hollenbergs Hilfsbuch, Zahns Historien). Volkmann. — **Kath. Religionslehre**, 2 St., vereinigt mit V. 1 St. Oeffentliches Wirken, Leiden und Sterben des Erlösers. Hildebrand. — **Deutsch**, 3 St. Lesen und mündliche Übungen; Memorieren von 4 Gedichten; Satzlehre bis zum einfach erweiterten Satz; Präpositionen; Rechtschreibung; 8tägig eine schriftliche Übung (Schwartz Leitfaden, Hopf und Paulsieks Lesebuch). Kynast. — **Latein**, 9 St. Regelmässige Formenlehre bis zu den Deponentien incl. Begrenzung des Stoffes und Einüben im Anschluss an die Lektüre; Vokabeln. 8tägig eine schriftliche Übung (Ellendt-Seyfferts Grammatik, Ostermanns Übungsbuch). Kynast. — **Geschichte**, 1 St. Biographische Erzählungen aus der griechischen Mythologie und alten Geschichte. Lerch. — **Geographie**, 2 St. Allgemeine Grundbegriffe. Die aussereuropäischen Erdteile (Daniels Leitfaden). Rehbaum. — **Rechnen**, 4 St. Die 4 Species mit benannten und unbenannten Zahlen; Bruchrechnung (Fölsings Rechenbuch). Rehbaum. — **Naturbeschreibung**, 2 St. Botanik. Zoologie

(Schillings kleine Naturgeschichte). Lerch. — **Zeichnen**, 2 St. Rehbaum. — **Schreiben**, 2 St. Rehbaum. —

Von der Teilnahme am evangelischen Religionsunterricht sind während des verflossenen Schuljahres 17 Schüler dispensiert worden. —

Mitteilungen über den technischen Unterricht

Turnen: 4 Abteilungen, jede Abteilung 2 Unterrichtsstunden. Dispensiert waren im Sommersemester 30, im Wintersemester 29 Schüler. 1. und 2. Abteilung I—III Rehbaum. 3. und 4. Abteilung IV—VI Kynast. Der Unterricht wurde in der Turnhalle des König Wilhelms-Gymnasiums erteilt. Leider musste derselbe wegen der mangelhaften Beschaffenheit der Öfen auch in diesem Winter mehrere Monate hindurch ausgesetzt werden. — **Singen**: 1. Abteilung: Prima bis Quarta, 2 St. 2. Abteilung: Quinta, 2 St. 3. Abteilung: Sexta, 2 St. Rehbaum. — **Fakultatives Zeichnen**: Eine Abteilung in 2 Stunden. Es nahmen 20 Schüler teil. Painer. —

Vorschule

Erste Klasse Ordinarius **Gerstenberg**

Ev. Religionslehre, 2 St. Biblische Geschichten. 1. Artikel ohne Luthers Erklärung; Lieder (Zahns Historien, Hilfsbuch für den Religionsunterricht). — **Deutsch**, 10 St. Lesen; Fertigkeit und sinngemässe Betonung. Rechtschreibung: Diktate und Niederschreiben memorierter Stücke. Nacherzählen des Gelesenen. Memorieren poetischer und prosaischer Stücke. Die Teile des einfachen Satzes. Wortarten. Deklination. Konjugation (Activum) (Paulsieks Lesebuch). — **Heimatskunde**, 1 St. (Adamys Heimatskunde). — **Rechnen**, 4 St. Die 4 Species mit unbenannten Zahlen im unbegrenzten Zahlenraum (Blümels Aufgaben). Schoenbrunn. — **Schreiben**, 3 St. Deutsche und lateinische Schrift nach Vorschrift des Lehrers. Taktschreiben. — **Singen**, 1 St. Volkslieder und Choralmelodien (Mettners Liederbuch). — **Turnen**, 1 St. Einfache Frei- und Ordnungsübungen. —

Zweite Klasse Ordinarius **Schoenbrunn**

Ev. Religionslehre, 2 St. Biblische Geschichten. Die Zehn Gebote mit Luthers Erklärung. Das Vaterunser; einige Gesangverse und Sprüche im Anschluss an die Geschichten. Gerstenberg. — **Deutsch**, 8 St. Lesen: Fertigkeit, allmählich sinngemässe Betonung. Rechtschreibung: Abschreiben von Lesestücken, Diktate und Niederschreiben memorierter Stücke. Nacherzählen des Gelesenen. Memorieren poetischer und prosaischer Stücke. Substantivum, Adjectivum, Verbum, Pronomen (Bocks Lesebuch). — **Rechnen**, 4 St. Die 4 Species mit unbenannten Zahlen bis 1000 (Blümels Aufgaben). — **Schreiben**, 4 St. Deutsche Schrift. Anfänge der lateinischen Schrift nach Vorschrift des Lehrers. Taktschreiben. — **Singen**, 1 St. Volkslieder und Choralmelodien (Mettners Liederbuch). Gerstenberg. — **Turnen**, 1 St. Einfache Freiübungen auf und von der Stelle. Gerstenberg. —

Dritte Klasse Ordinarius **Schoenbrunn**

Ev. Religionslehre, 2 St. Biblische Geschichten. Die Zehn Gebote. Morgen-, Mittag- und Abendgebete und sonstige Gebete. Einige Gesangverse und Sprüche im Anschluss an die Geschichten. Gerstenberg. — **Deutsch**, 6 St. Lesen: Anfangsgründe bis zum Lesen zusammenhängender Stücke. Rechtschreibung: Abschreiben von Wörtern, Sätzen und Lesestücken. Schreiben diktierter Wörter und leichter Sätze. Nacherzählen und Memorieren kleiner Gedichte (Bocks Lesebuch). — **Rechnen**, 4 St. Die 4 Species im Zahlenraum von 1—100 (Blümels Aufgaben). — **Schreiben**, 4 St. Deutsche Schrift mit grossen und kleinen Buchstaben, einzeln und in Wörtern nach Vorschrift des Lehrers. — **Singen**, 1 St. Kleine Volkslieder und Choralmelodien (Mettners Liederbuch). Gerstenberg. — **Turnen**, 1 St. Einfache Freiübungen auf und von der Stelle. Gerstenberg. —

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörde

6. December 1890. Die Ferien für das Jahr 1891:

Osterferien:	Schulschluss:	Sonnabend, 21. März.	Schulanfang:	Montag, 6. April.
Pfingstferien:	„	Freitag, 15. Mai.	„	Donnerstag, 21. Mai.
Sommerferien:	„	Freitag, 3. Juli.	„	Mittwoch, 5. August.
Michaelisferien:	„	Sonnabend, 26. September.	„	Donnerstag, 8. Oktober.
Weihnachtsferien:	„	Mittwoch, 23. Dezember.	„	Donnerstag, 7. Januar 1892.

III. Chronik der Schule

Am 29. März 1890 wurde das Schuljahr 1889/90 geschlossen. Herr Dr. Friedrich Wilhelm beendigte sein Probejahr.

Am 14. April wurde das Schuljahr 1890/91 eröffnet.

Im Sommersemester waren der Anstalt zur Beschäftigung überwiesen die Herren Schulamts-Kandidaten Karl Raddatz, Dr. Friedrich Wilhelm und Karl Altmann, sowie die Mitglieder des pädagogischen Seminars Herr Dr. Max Hippe und Herr Dr. Friedrich Scheuer.

Am 31. Mai unternahmen die einzelnen Klassen unter Leitung ihrer Lehrer Turnfahrten.

Am 14. Juni fand zur Erinnerung an das Hinscheiden des in Gott ruhenden Kaisers und Königs Friedrich eine Gedächtnisfeier statt.

Am 6. August entschlief nach kurzen Leiden Gotthelf Tschache, welcher vom August 1849 bis zum 1. Oktober 1883 zweiter Lehrer der Vorschule des Königlichen Friedrichs-Gymnasiums gewesen ist, im Alter von beinahe 76 Jahren. Das Lehrer-Kollegium und seine früheren Schüler gaben ihm am 9. August das letzte Geleit.

Am 2. September wurde das Sedanfest gefeiert.

Am 11. und 12. September fiel aus Anlass der Anwesenheit Seiner Majestät des Kaisers und Königs hierselbst der Unterricht aus.

Am 26. September wurde unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulrat Hoppe die mündliche Prüfung von Extraneern, welche der Anstalt überwiesen waren, abgehalten. Die Reife wurde keinem derselben zuerkannt.

Am 27. September wurde das Sommersemester geschlossen. Herr Dr. Otto Collatz beendigte sein Probejahr.

Am 9. Oktober begann das Wintersemester. In demselben waren der Anstalt zur Beschäftigung überwiesen die Herren Schulamts-Kandidaten Karl Raddatz, Dr. Friedrich Wilhelm, Karl Altmann und Dr. Georg Schirdewahn, sowie die Mitglieder des pädagogischen Seminars Herr Dr. Max Hippe und Herr Dr. Friedrich Scheuer.

Am 18. Oktober, als am Geburtstage des in Gott ruhenden Kaisers und Königs Friedrich, wurde eine Gedächtnisfeier abgehalten.

Am 25. Oktober wurde der Tag, an welchem der Generalfeldmarschall Graf von Moltke sein 90. Lebensjahr vollendete, durch eine Schulfeier festlich begangen. Der Unterricht fiel aus.

Am 1. Dezember fiel der Unterricht wegen der Volkszählung aus.

Am 23. Januar 1891 wurde zur Vorfeier des Allerhöchsten Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs vor geladenen Gästen und vor den Schülern der Anstalt Sophokles Antigone in griechischer Sprache aufgeführt. Die Leitung der gesamten Aufführung hatte Herr Oberlehrer Dr. Michael übernommen. Die Darsteller waren Schüler und einige frühere Schüler der Anstalt. Die Kostüme waren von der Generalintendanz der Königlichen Schauspiele in Berlin, das zur Begleitung der Chöre verwandte Harmonium von Herrn Hoflieferant Grosspietsch hierselbst freundlichst zur Verfügung gestellt worden. Am 29. und 30. Januar, sowie am 2. und 3. Februar wurde die Aufführung gegen Eintrittsgeld wiederholt. Der Ertrag desselben ist nach Deckung der Kosten zu einem wohlthätigen Zwecke bestimmt.

Am 27. Januar hielt Herr Gymnasiallehrer Lerch vor den Lehrern und Schülern die Festrede.

Am 9. März, als am Todestage des in Gott ruhenden Kaisers und Königs Wilhelm I, wurde eine Gedächtnisfeier abgehalten.

Am 14. März wurde unter dem Vorsitz des Herrn Provinzial-Schulrat Hoppe die mündliche Entlassungsprüfung abgehalten.

Der Gesundheitszustand der Schüler war im ganzen günstig.

Von den Lehrern fehlte der Direktor wegen einer wissenschaftlichen Reise vom 1. Juni bis zu den grossen Ferien, in Familienangelegenheiten 3 Tage, Herr Professor Dr. Vogt wegen Krankheit von den grossen Ferien bis zum 6. September, sodann vom 1. November bis jetzt, Herr Gymnasiallehrer Schiller wegen einer militärischen Übung vom 25. Februar bis zum 7. März. Ausserdem fehlte Herr Oberlehrer Scharnweber und Herr Dr. Volkmann je 3 Tage, die Herren Gymnasiallehrer Lerch und Dr. Kynast je 1 Tag. Wiederholt erkrankte Herr Zeichenlehrer Painer. Herr Zeichenlehrer Paul Exner von hier hatte die Güte seinen Unterricht vom 28. April bis zu den grossen Ferien, und vom 16. Januar bis jetzt zu übernehmen.

IV. Statistische Mitteilungen

1. Übersicht über die Frequenz und deren Veränderung im Laufe des Schuljahres

	A. Gymnasium										B. Vorschule			
	Ia	Ib	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Sa.	1	2	3	Sa.
1. Bestand am 1. Febr. 1890	9	13	13	24	43	33	42	40	31	248	17	7	5	29
2. Abgang bis zum Schluss des Schuljahres 1889/90 .	9	—	4	7	3	4	3	—	4	34	2	—	—	2
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern	2	8	10	31	19	26	33	22	13	164	7	5	—	12
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	1	—	4	4	1	2	1	1	14	3	—	5	8
4. **Frequenz am Anfange des Schuljahres 1890/91**	2	20	11	42	32	37	48	30	19	241	12	5	5	22
5. Zugang i. Sommersemester	1	1	3	1	2	—	2	—	1	11	1	—	—	1
6. Abgang i. Sommersemester	—	5	—	4	3	—	2	1	3	18	—	—	—	—
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis	7	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	—	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis	1	—	—	1	1	1	—	—	—	4	2	2	—	4
8. **Frequenz am Anfange des Wintersemesters**	11	9	14	40	32	38	48	29	17	238	15	7	5	27
9. Zugang i. Wintersemester	—	—	—	—	2	—	—	—	—	2	1	—	—	1
10. Abgang i. Wintersemester	—	1	1	—	—	1	—	—	—	3	2	—	1	3
11. **Frequenz am 1. Febr. 1891**	11	8	13	40	34	37	48	29	17	237	14	7	4	25
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1891	19,4	18,6	17,2	16,7	16	15	13,2	12,2	10,7		9,2	8,7	7,1	

2. Übersicht über die Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler

	A. Gymnasium							B. Vorschule						
	Evg.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.	Evg.	Kath.	Diss.	Juden	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfange des Sommersemesters .	133	18	—	90	220	21	—	10	4	—	8	21	1	—
2. Am Anfange des Wintersemesters .	131	18	—	89	218	20	—	13	4	—	10	26	1	—
3. Am 1. Februar 1891	130	18	—	89	216	21	—	14	4	—	7	23	2	—

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1890: 17, Michaelis: 4 Schüler; davon sind zu einem praktischen Berufe abgegangen Ostern 7, Michaelis 4.

3. Übersicht über die Abiturienten Ostern 1891

Name	Tag der Geburt	Ort der Geburt	Konfession (Religion)	Stand und Wohnort des Vaters	Auf dem Fr.-G. Jahre	Primaner Jahre	Künftiger Beruf
Rudolph, Victor	9. 8. 70	Greiffenberg, Kr. Löwenbg.	evang.	Kaufmann, Wüstewaltersdorf	2	2	Theologie
Richter, Franz	6. 4. 73	Beuthen O/S.	jüd.	Sanitätsrat Dr. med., Breslau	1½	2	Jura
Andersch, Hermann	3. 12. 71	Hannover	evang.	Prov.-Steuer-Sekret., Breslau	¾	2	Medizin
Gürich, Arthur	4. 3. 73	Ragnit	evang.	Landesrat, Breslau	7	2	Jura
Schwarz, Heinrich	14. 5. 72	Jassy, Rumän.	jüd.	emer. Lehrer, Breslau	9	2	Jura
Grünberger, Hugo	30. 6. 70	Breslau	jüd.	Kaufmann, Breslau	10¼	2	Jura
Philippi, Oscar	13. 8. 70	Breslau	evang.	† Kaufmann, Breslau	5½	2	Jura
Gürich, Lothar	15. 2. 72	Ragnit	evang.	Landesrat, Breslau	7	2	Naturwissensch.
Wolff, Max	10. 1. 73	Liegnitz	jüd.	Kaufmann, Breslau	9	2	Jura

Rudolph, die beiden Gürich und Wolff wurden von der mündlichen Prüfung dispensirt.

V. Sammlungen von Lehrmitteln

A. Die **Lehrerbibliothek** unter Verwaltung des Gymnasiallehrers Reinitz wurde durch folgende Werke vermehrt: a. durch **Ankauf** der Fortsetzungen des Centralblattes für die gesamte Unterrichtsverwaltung Preussens, der Schriften des Vereins für Geschichte und Altertum Schlesiens, des Museumsvereins, von Grimms Wörterbuch, Iwan Müllers Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft, der Breslauer Philologischen Abhandlungen, der Geschichtsschreiber der deutschen Vorzeit, der Kommentarien zu Aristoteles, der Verhandlungen der Direktorenversammlungen, Orellis Horaz (4. Ausgabe), Weltrichs Schiller; ferner folgender Werke: Matranga, Anecdota Vaticana; Zonarae epitome historiarum ed. Dindorf; Du Cange, Glossarium mediae et infimae Graecitatis (effig. rec.); Schuchardt, Schliemanns Ausgrabungen; Ribbeck, Geschichte der römischen Dichtung; Hertzberg, Geschichte Griechenlands seit dem Absterben des antiken Lebens; Fr. Kern, Die 5. Direktorenversammlung in der Provinz Sachsen; Lehmann, Der deutsche Unterricht; Klussmann, Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen in den Programmen von 1876—85; Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. b. die **Programme** der im Austausch stehenden Universitäten und Schulen. c. **Geschenke**: Von der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur den 67. Jahresbericht; von Herrn Dr. Adolf Schmidt: Mathematische Entwicklungen zur allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus.

B. Die **Schülerbibliothek.** Zu dem Bestande von 1289 Bände kamen 41: Uhle, Plutarchs Lebensbeschreibungen grosser Helden; Meyer, Erinnerungen an die Hohenzollernherrschaft in Franken; Peters, Die deutsche Emin-Pascha-Expedition; Lüders, Ein Soldatenleben in Krieg und Frieden; Marshall, Spaziergänge eines Naturforschers; v. Eschstruth, Im Schellenhemd; Evers, Wilde Wogen; Wolff, Der Sülfmeister; Viehoff, Schillers Gedichte erläutert; Volz, Geographische Charakterbilder aus Afrika; Kleinschmidt, Die Befreiung Germaniens vom Römerjoche; Jordans Nibelunge; Ebers, Drei Märchen für Alt und Jung; Herder, Kleinere Prosaschriften; Herders ausgewählte Dichtungen; Goethes Prosa; Klopstocks Oden; Lessings Laocoon; Kauffmann, Deutsche Mythologie; Hoffmann, Andreas Hofer; Lauckhard, Kleine Erzählungen für die Jugend; Ebeling, Der Tulpenschwindel; v. Köppen, Das alte Ordensland; Heyer, Kaiser Friedrich II, Landmeister Hermann Balk, Die letzten Hohenstaufen; Garlepp, Die Paladine Kaiser Wilhelms I; Ziemssen, Hans Sachs; Sonnenburg, Graf Heinrich von Schwerin, Unter dem Schwerte der Weissmäntel.

C. Die **Hilfsbibliothek.** Zu dem Bestand von 292 kamen 18 Bände.

D. Das **physikalische Kabinett** unter Verwaltung des Professors Dr. Vogt. Ausser Verbrauchsgegenständen wurde angeschafft: Ein Paar Siemens-Telephone, ein Mikrophon nach Bell Blake, eine Wellensirene nach König, ein Apparat für totale Reflexion in einem Wasserstrahl, ein Heronsbrunnen, ein Crookesches Kreuz, eine Influenzmaschine neuester Konstruktion mit Selbsterregung.

E. Die **naturwissenschaftlichen** Sammlungen unter Verwaltung des Gymnasiallehrers Lerch. Es wurde gekauft: Zippel-Bollmann, Einheimische Pflanzenfamilien, Lieferung III. Präparate von Lunge und Wiederkäuermagen zum Aufblasen.

F. Der Apparat für den **geographischen** und **historischen** Unterricht unter Verwaltung des Gymnasiallehrers Schiller. Es wurde gekauft: Coordes und Bamberg, Klimatologische Karte von Europa; Bamberg, (physikalische) Wandkarte von Deutschland; zwei Alpenlandschaften; die Fortsetzung von Curtius und Kaupert, Karte von Attika.

VI. Stiftungen und Unterstützungen von Schülern

A. **Stiftungen** 1, unter eigener Verwaltung des Gymnasiums: a. **Keschner**'sche Fundation vom Jahre 1787. Vermögen 6 200 M., Zinsen 237 M. Zweck: Gewährung der Mittel zu freier Schule und den nötigen Schulbüchern für arme und würdige reformierte Schüler. b. **Hering**'sche Fundation vom Jahre 1807. Vermögen 24 000 M., Zinsen 964,88 M, davon zu Stipendien disponibel 400 M. Zweck: Gewährung der Mittel zu freier Schule für 4 arme und würdige reformierte Schüler. c. **Kayssler**'sches Reformations-Stipendium vom Jahre 1817. Vermögen 10 827 M., Zinsen 370 M. Zweck: Zwei Stipendien für bedürftige Studirende, welche nach vorherigem Besuche des Friedrichs-Gymnasiums die Entlassungsprüfung an dieser Anstalt bestanden haben, einer christlichen Religionsgemeinschaft angehören und sich durch Fleiss und sittliche Führung die ungeteilte Zufriedenheit ihrer Lehrer erworben haben. d. **Pathe**'sches Legat vom Jahre 1836. Vermögen 600 M., Zinsen 21 M. Zweck: Unterstützung zweier armer und würdiger Schüler. e. **Hirt**'sche Stiftung vom Jahre 1865. Vermögen 335,25 M., Zinsen 8 M. Zweck: Unterstützung eines armen und würdigen Schülers, der Sohn einer Witwe oder elternlos ist. 2, unter besonderer Verwaltung: **Säkular-Stipendien-Fonds** vom Jahre 1865. Vermögen 10 214,30 M., Zinsen 346,50 M. Zweck: Unterstützung eines bedürftigen und würdigen jungen Mannes, der Schüler des Friedrichs-Gymnasiums gewesen ist. Der Verwaltungsrat besteht aus dem Direktor und vier früheren Schülern des Gymnasiums.

B. **Freischule**: Von dem von den Schülern der Gymnasialklassen zu zahlenden Schulgelde kann bis zu 10% erlassen werden.

C. **Prämien**: a. vom hiesigen **Schiller**-Verein: Ein Schüler der oberen Klassen erhielt auf Vorschlag des Lehrer-Kollegiums eine Gesamt-Ausgabe von Schillers Werken. b. von der hiesigen Freimaurerloge **Friedrich zum goldenen Zepter**: Ein Schüler der oberen Klassen erhielt aus der **Kahlert**-Stiftung auf Vorschlag des Lehrer-Kollegiums ein Buch. c. der Königliche Kommissionsrat und Hof-Musikalienhändler, Herr **Julius Hainauer** schenkte, wie in den drei vorigen Jahren, am 14. Februar 1891 einem Ober-Tertianer ein wertvolles Buch.

VII. Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern

Das Schuljahr wird Sonnabend, den 21. März, geschlossen. Das neue Schuljahr beginnt Montag, den 6. April, vormittags 9 Uhr. Die Aufnahme neuer Schüler findet Sonnabend, den 4. April, vormittags statt, in die Vorschule um 8 Uhr, in die Gymnasialklassen um 9 Uhr. Vorzulegen ist bei der Aufnahme: 1, der Geburts- oder Taufschein; 2, das Impfattest; 3, eventuell das letzte Abgangszeugnis. — Der Direktor ist an allen **Schultagen** von 11 bis 12 Uhr vormittags im Amtszimmer zu sprechen.

Breslau, am 15. März 1891.

Treu

CXXVI.

Programm

des

Königl. Friedrichs-Gymnasiums

zu

Breslau

1891

II. Wissenschaftliche Abhandlung

Breslau
Druck von Otto Gutsmann

Über Dreiecke,

welche einem Kegelschnitt umschrieben und einem anderen eingeschrieben sind.

Von

Friedrich Lerch.

I.

Wenn die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene von einem veränderlichen Parameter λ abhängig sind, so dass $x = \frac{a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2}{c_1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2}$ und $y = \frac{b_1 + b_2\lambda + b_3\lambda^2}{c_1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2}$ ist, so ist der Ort des Punktes ein Kegelschnitt. Denn es ist

$$\lambda^2(c_3x - a_3) + \lambda(c_2x - a_2) + c_1x - a_1 = 0$$

und $\lambda^2(c_3y - b_3) + \lambda(c_2y - b_2) + c_1y - b_1 = 0,$

und die Elimination von λ aus diesen Gleichungen ergiebt:

$$\Big[(c_3x - a_3)(c_1y - b_1) - (c_3y - b_3)(c_1x - a_1)\Big]^2 = \Big[(c_3x - a_3)(c_2y - b_2) - (c_2x - a_2)(c_3y - b_3)\Big] \cdot \Big[(c_2x - a_2)(c_1y - b_1) - (c_1x - a_1)(c_2y - b_2)\Big].$$

Da sich hierin die Glieder von höherem als dem zweiten Grade heben, so erhält man die Gleichung eines Kegelschnitts.

Die Tangentialgleichung desselben erhält man durch Elimination von λ aus der Gleichung des Punktes:

$$(a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2)\xi + (b_1 + b_2\lambda + b_3\lambda^2)\eta + (c_1 + c_2\lambda + c_3\lambda^2)\zeta = 0$$

und ihrem Differenzialquotienten nach λ, nämlich:

$$(a_2 + 2a_3\lambda)\xi + (b_2 + 2b_3\lambda)\eta + (c_2 + 2c_3\lambda)\zeta = 0.$$

Man erhält $\lambda = -\frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta}{2(a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta)}$ und durch Einsetzung dieses Wertes in die erste Gleichung:

$$\left(a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta\right)\left(a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta\right) - \frac{1}{4}\left(a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta\right)^2 = 0.$$

In der allgemeinen Gleichung in Linien-Koordinaten:

$$A_{11}\xi^2 + 2A_{12}\xi\eta + A_{22}\eta^2 + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{23}\eta\zeta + A_{33}\zeta^2 = 0$$

ist also zu setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{11} = a_1a_3 - \frac{a_2^2}{4}, & 2A_{12} = a_1b_3 + a_3b_1 - \frac{a_2b_2}{2} \\ A_{22} = b_1b_3 - \frac{b_2^2}{4}, & 2A_{13} = a_1c_3 + a_3c_1 - \frac{a_2c_2}{2} \\ A_{33} = c_1c_3 - \frac{c_2^2}{4}, & 2A_{23} = b_1c_3 + b_3c_1 - \frac{b_2c_2}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

II.

Wenn einem beliebigen Kegelschnitt zwei Dreiecke umschrieben werden, so liegen bekanntlich deren 6 Ecken auf einem neuen Kegelschnitt, und es giebt nach einem Satze von *Poncelet* unzählige Dreiecke, welche dem ersten Kegelschnitt umschrieben und dem zweiten eingeschrieben sind. Man kann sich also das Dreieck beweglich vorstellen; seine Seiten bleiben Tangenten des einen, seine Ecken Punkte des anderen Kegelschnitts. Nach einer von *Weill* in den *Nouvelles annales de mathématiques (II. série, tome XIX, p. 367)* gegebenen und auf die Parabel angewendeten Methode kann die Bewegung des Dreiecks durch Veränderung eines Parameters in folgender Weise dargestellt werden.

In der Gleichung $x^3 + \lambda x^2 + px + q = 0$ seien p und q lineare Funktionen von λ und zwar $p = A\lambda + B$, $q = C\lambda + D$. Dann entsprechen jedem Werte von λ drei Wurzeln der Gleichung, welche $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ heissen mögen. Sind nun diese Wurzeln selbst Parameter, durch welche die Berührungspunkte der Seiten eines Dreiecks bestimmt sind, so entspricht jedem Werte von λ ein anderes Dreieck. Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = -(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) \\ p = A\lambda + B = \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 \\ q = C\lambda + D = -\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Gleichung einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ kann ersetzt werden durch $x = a\ cos\varphi$ und $y = b\ sin\varphi$. Setzt man $tg\ \frac{\varphi}{2} = \varkappa$, so ist $sin\varphi = \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa^2}$ und $cos\varphi = \frac{1 - \varkappa^2}{1 + \varkappa^2}$, also

$$x = a\frac{1 - \varkappa^2}{1 + \varkappa^2} \text{ und } y = 2b\frac{\varkappa}{1 + \varkappa^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Gleichung der Tangente wird $\frac{x}{a}\ cos\varphi + \frac{y}{b}\ sin\varphi - 1 = 0$, oder: $xb(\varkappa^2 - 1) - 2a\varkappa y + ab(1 + \varkappa^2) = 0$.

Für den Schnittpunkt zweier Tangenten erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\dfrac{cos\frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{cos\frac{1}{2}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} = a\dfrac{1 - \varkappa_1\varkappa_2}{1 + \varkappa_1\varkappa_2} \\ \\ y = b\dfrac{sin\frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}{cos\frac{1}{2}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} = b\dfrac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{1 + \varkappa_1\varkappa_2} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Im Folgenden soll zunächst der durch die Ecken zweier Tangenten-Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_4A_5A_6$ gehende Kegelschnitt bestimmt werden, auf welchem also folgende 5 Punkte liegen:*)

---

*) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1873. p. 297, Aufg. 2.

$$x_1 = a\frac{1-\varkappa_2\varkappa_3}{1+\varkappa_2\varkappa_3} \quad y_1 = b\frac{\varkappa_2+\varkappa_3}{1+\varkappa_2\varkappa_3} \qquad x_4 = a\frac{1-\varkappa_5\varkappa_6}{1+\varkappa_5\varkappa_6} \quad y_4 = b\frac{\varkappa_5+\varkappa_6}{1+\varkappa_5\varkappa_6}$$

$$x_2 = a\frac{1-\varkappa_3\varkappa_1}{1+\varkappa_3\varkappa_1} \quad y_2 = b\frac{\varkappa_3+\varkappa_1}{1+\varkappa_3\varkappa_1} \qquad x_5 = a\frac{1-\varkappa_6\varkappa_4}{1+\varkappa_6\varkappa_4} \quad y_5 = b\frac{\varkappa_6+\varkappa_4}{1+\varkappa_6\varkappa_4}$$

$$x_3 = a\frac{1-\varkappa_1\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2} \quad y_3 = b\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2}.$$

Es sei $L=0$ die Gleichung von A_1A_3
$M=0$ „ „ „ A_3A_4
$N=0$ „ „ „ A_4A_2
$P=0$ „ „ „ A_2A_1,

so ist $LN=kMP$ die Gleichung eines dem Viereck $A_1A_3A_4A_2$ umschriebenen Kegelschnitts und die Konstante k ergiebt sich durch Einsetzen der Werte von x_5 und y_5. Es ist nun

$L = xb(\varkappa_2^2-1) - 2a\varkappa_2 y + ab(1+\varkappa_2^2)$

$P = xb(\varkappa_3^2-1) - 2a\varkappa_3 y + ab(1+\varkappa_3^2)$. Die Gleichung von A_3A_4 ist $x(y_3-y_4) - y(x_3-x_4) + x_3y_4 - x_4y_3 = 0$ oder $M =$

$$xb\Big[(\varkappa_1-\varkappa_5)(1-\varkappa_2\varkappa_6) + (\varkappa_2-\varkappa_6)(1-\varkappa_1\varkappa_5)\Big] + 2ay(\varkappa_1\varkappa_2-\varkappa_5\varkappa_6)$$
$$+\ ab\Big[(\varkappa_5-\varkappa_1)(1+\varkappa_2\varkappa_6) + (\varkappa_6-\varkappa_2)(1+\varkappa_1\varkappa_5)\Big].$$

Ebenso ist:

$$N = xb\Big[(\varkappa_1-\varkappa_5)(1-\varkappa_3\varkappa_6) + (\varkappa_3-\varkappa_6)(1-\varkappa_1\varkappa_5)\Big] + 2ay(\varkappa_1\varkappa_3-\varkappa_5\varkappa_6)$$
$$+\ ab\Big[(\varkappa_5-\varkappa_1)(1+\varkappa_3\varkappa_6) + (\varkappa_6-\varkappa_3)(1+\varkappa_1\varkappa_5)\Big].$$

Setzt man nun $x=x_5$ und $y=y_5$ und bezeichnet die dadurch erhaltenen Werte von L, M, N und P mit L_5, M_5, N_5 und P_5, so erhält man

$$L_5 = \frac{2ab}{1+\varkappa_4\varkappa_6}\left(\varkappa_2^2+\varkappa_4\varkappa_6-\varkappa_2\varkappa_4-\varkappa_2\varkappa_6\right) = \frac{2ab(\varkappa_2-\varkappa_6)(\varkappa_2-\varkappa_4)}{(1+\varkappa_4\varkappa_6)}$$

$P_5 = \dfrac{2ab(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_6)}{(1+\varkappa_4\varkappa_6)}$. Ebenso findet man nach einigen Umformungen:

$$M_5 = \frac{2ab(\varkappa_2 - \varkappa_6)(\varkappa_5 - \varkappa_4)(\varkappa_6 - \varkappa_1)}{(1 + \varkappa_4\varkappa_6)}$$

$$N_5 = \frac{2ab(\varkappa_3 - \varkappa_6)(\varkappa_6 - \varkappa_1)(\varkappa_5 - \varkappa_4)}{(1 + \varkappa_4\varkappa_6)}.$$

Folglich ist $k = \frac{L_5 N_5}{M_5 P_5} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_4}{\varkappa_3 - \varkappa_4}$. . . . . (5)

Setzt man die Werte in die Gleichung $LN - kMP = 0$ ein, so lassen sich die Koeffizienten der Kegelschnittsgleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

berechnen. Man erhält z. B.

$$a_{11} = b^2(\varkappa_2^2 - 1)\Big[(\varkappa_1 - \varkappa_5)(1 - \varkappa_3\varkappa_6) + (\varkappa_3 - \varkappa_6)(1 - \varkappa_1\varkappa_5)\Big]$$
$$- \frac{b^2(\varkappa_2 - \varkappa_4)(\varkappa_3^2 - 1)}{\varkappa_3 - \varkappa_4}\Big[(\varkappa_1 - \varkappa_5)(1 - \varkappa_2\varkappa_6) + (\varkappa_2 - \varkappa_6)(1 - \varkappa_1\varkappa_5)\Big].$$

Bei der Ausrechnung lässt sich $(\varkappa_2 - \varkappa_3)$ als Faktor herausnehmen, und es wird:

$$a_{11} = \frac{b^2(\varkappa_2 - \varkappa_3)}{\varkappa_3 - \varkappa_4}\Big(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 - \varkappa_4 - \varkappa_5 - \varkappa_6 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_4\varkappa_5\varkappa_6$$
$$- (\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1)(\varkappa_4 + \varkappa_5 + \varkappa_6 + \varkappa_4\varkappa_5\varkappa_6)$$
$$+ (\varkappa_4\varkappa_5 + \varkappa_5\varkappa_6 + \varkappa_6\varkappa_4)(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)\Big).$$

Setzt man daher:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = -\lambda_1 \qquad \varkappa_4 + \varkappa_5 + \varkappa_6 = -\lambda_2$$
$$\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 = p_1 = A\lambda_1 + B \qquad \varkappa_4\varkappa_5 + \varkappa_5\varkappa_6 + \varkappa_6\varkappa_4 = +p_2 = A\lambda_2 + B$$
$$\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = -q_1 = -(C\lambda_1 + D) \qquad \varkappa_4\varkappa_5\varkappa_6 = -q_2 = -(C\lambda_2 + D),$$

so ist:

$$a_{11} = \frac{b^2(\varkappa_2 - \varkappa_3)}{\varkappa_3 - \varkappa_4}\Big(-\lambda_1 + \lambda_2 - (C\lambda_1 + D) + (C\lambda_2 + D)$$
$$- (A\lambda_1 + B)(-\lambda_2 - C\lambda_2 - D) + (A\lambda_2 + B)(-\lambda_1 - C\lambda_1 - D)\Big)$$
$$= \frac{b^2(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\varkappa_3 - \varkappa_4}\Big(1 + C + B + BC - AD\Big).$$ In derselben Weise erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
a_{22} &= -\frac{4a^2(\varkappa_2-\varkappa_3)}{\varkappa_3-\varkappa_4}\left(\varkappa_4\varkappa_5\varkappa_6-\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\right)=\frac{4a^2(\varkappa_2-\varkappa_3)(\lambda_2-\lambda_1)C}{\varkappa_3-\varkappa_4}\\
a_{33} &= \frac{a^2b^2(\varkappa_2-\varkappa_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{\varkappa_3-\varkappa_4}\left(BC-AD-B-C+1\right).\\
a_{12} &= -\frac{ab(\varkappa_2-\varkappa_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{\varkappa_3-\varkappa_4}\left(A+D\right).\\
a_{13} &= \frac{ab^2(\varkappa_2-\varkappa_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{\varkappa_3-\varkappa_4}\left(BC-AD-1\right).\\
a_{23} &= \frac{a^2b(\varkappa_2-\varkappa_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{\varkappa_3-\varkappa_4}\left(A-D\right).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Also heisst die Gleichung des umschriebenen Kegelschnitts:

$$\begin{aligned}
&x^2b^2(BC-AD+B+C+1)-2abxy(A+D)+4a^2Cy^2\\
&\quad+2ab^2x(BC-AD-1)+2a^2by(A-D)\\
&\qquad+a^2b^2(BC-AD-B-C+1)=0. \quad .\ .\ .\ .\ (7)
\end{aligned}$$

III.

Jeder der merkwürdigen Punkte des Dreiecks beschreibt bei der Bewegung des Dreiecks eine Bahn, deren Gleichung man findet, wenn man die Koordinaten des Punktes durch A, B, C, D und λ ausdrückt und nach (1) die Koeffizienten der Tangentialgleichung berechnet.

Ort des Schwerpunktes.

Sind x_s und y_s die Koordinaten des Schwerpunktes S, so ist $x_s=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y_s=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. Daher ist

$$x_s=\frac{a}{3}\left(\frac{1-\varkappa_2\varkappa_3}{1+\varkappa_2\varkappa_3}+\frac{1-\varkappa_3\varkappa_1}{1+\varkappa_3\varkappa_1}+\frac{1-\varkappa_1\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2}\right)$$

$$= \frac{a}{3}\left(\frac{2 - 2\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3^2}{(1+\varkappa_2\varkappa_3)(1+\varkappa_3\varkappa_1)} + \frac{1-\varkappa_1\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2}\right)$$

$$= \frac{a}{3}\,\frac{(3+\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1-(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3)\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - 3\varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2)}{(1+\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1+(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3)\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - \varkappa_1^2\varkappa_2^2\varkappa_3^2)}$$

$$= \frac{a}{3}\,\frac{(3+A\lambda+B-\lambda(C\lambda+D)-3(C\lambda+D)^2)}{(1+A\lambda+B+\lambda(C\lambda+D)+(C\lambda+D)^2)}.$$

$$y_s = \frac{b}{3}\left(\frac{\varkappa_2+\varkappa_3}{1+\varkappa_2\varkappa_3} + \frac{\varkappa_3+\varkappa_1}{1+\varkappa_3\varkappa_1} + \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2}\right)$$

$$= \frac{b}{3}\left(\frac{\varkappa_1+\varkappa_2+2\varkappa_3+\varkappa_2\varkappa_3^2+\varkappa_1\varkappa_3^2+2\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}{1+\varkappa_1\varkappa_3+\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3^2} + \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{1+\varkappa_1\varkappa_2}\right)$$

$$= \frac{b}{3}\left(\frac{2(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3)+3\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+(\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1)(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+2\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)}{(1+\varkappa_1\varkappa_2)(1+\varkappa_2\varkappa_3)(1+\varkappa_3\varkappa_1)}\right).$$

$$y_s = -\frac{b}{3}\,\frac{(2\lambda+3(C\lambda+D)+\lambda(A\lambda+B)+2(A\lambda+B)(C\lambda+D))}{(1+A\lambda+B+\lambda(C\lambda+D)+(C\lambda+D)^2)}.$$

Es sind also x_s und y_s von λ in der anfangs besprochenen Form abhängig, der Ort von S ist daher ein Kegelschnitt. Zur Bestimmung desselben ist

$$a_1 = \frac{a}{3}\left(3+B-3D^2\right) \qquad a_2 = \frac{a}{3}\left(A-D-6CD\right)$$

$$a_3 = -\left(3C^2+C\right)$$

$$b_1 = -\frac{b}{3}\left(2BD+3D\right) \qquad b_2 = -\frac{b}{3}\left(2+3C+B+2AD+2BC\right)$$

$$b_3 = -\frac{b}{3}\left(2AC+A\right)$$

$$c_1 = 1+B+D^2 \qquad c_2 = A+D+2CD \qquad c_3 = C^2+C$$

Hieraus ergiebt sich:

$$A_{11} = a_1a_3 - \frac{a_2^2}{4}$$

$$= -\frac{a^2}{36}\left(4C(9C+3BC+3+B-3AD)+(A-D)^2\right)$$

Mit Hülfe der Koeffizienten von Gleichung (7) erhält man: $A_{11} = -\frac{a^2}{36}\left(\frac{a_{22}}{a^2} \cdot W + \frac{a_{23}^2}{a^4 b^2}\right)$,

worin $W = 3BC - 3AD + B + 9C + 3$ ist. Ebenso ist:

$$A_{22} = b_1 b_3 - \frac{b_2^2}{4} = \frac{b^2}{9}\Big(AD(4BC + 2B + 6C + 3)$$

$$-\frac{1}{4}\left(2 + 3C + B + 2BC\right)^2 - A^2D^2 - AD(2 + 3C + B + 2BC)\Big)$$

$$= \frac{b^2}{36}\left(-(2BC - 2AD + B + 3C + 2)^2 - 4AD\right)$$

$$= -\frac{b^2}{36}\Big((BC - AD - 1)^2$$

$$+ (BC - AD + B + C + 1)(3BC - 3AD + B + 9C + 3)\Big)$$

$$= -\frac{b^2}{36}\left(\frac{a_{13}^2}{a^2 b^4} + \frac{a_{11}}{b^2} \cdot W\right).$$

$$A_{33} = c_1 c_3 - \frac{c_2^2}{4} = C(BC - AD + B + C + 1) - \frac{1}{4}\left(A + D\right)^2$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right).$$

$$2A_{12} = a_1 b_3 + a_3 b_1 - \frac{a_2 b_2}{2} = \frac{+\,ab}{18}\Big(A(2AD - 2BC - B - 4 - 9C)$$

$$+ D(4AD - 4BC - B - 9C - 2)\Big)$$

$$= \frac{ab}{18}\Big(A(BC - AD - 1 - W) + D(AD - BC + 1 - W)\Big)$$

$$= \frac{ab}{18}\Big((A - D)(BC - AD - 1) - (A + D)W\Big)$$

$$= \frac{ab}{18}\left(\frac{a_{12}W}{ab} + \frac{a_{13}a_{23}}{a^3b^3}\right).$$

$$2A_{13} = a_1 c_3 + a_3 c_1 - \frac{a_2 c_2}{2} = \frac{a}{3}\left(-2C(BC - AD - 1) - \frac{A^2 - D^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{a}{6}\left(\frac{a_{22}a_{13}}{a^3b^2} - \frac{a_{12}a_{23}}{a^3b^2}\right) = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{6a^2b^2}.$$

$$2A_{23} = b_1c_3 + b_3c_1 - \frac{b_2c_2}{2} = -\frac{b}{3}\Big(A(BC - AD) - D + \frac{(B+C)(A-D)}{2}\Big)$$

$$= -\frac{b}{6}\Big((BC-AD-1)(A+D) + (A-D)(BC-AD+B+C+1)\Big)$$

$$= -\frac{b}{6}\Big(-\frac{a_{12}a_{13}}{a^2b^3} + \frac{a_{23}a_{11}}{a^2b^3}\Big) = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{6a^2b^2}.$$

Setzt man noch $W = -\frac{a'_{33}}{a^2b^2}$, also $a'_{33} = -a^2b^2W$, so erhält man

$$A_{11} = \frac{a_{22}a'_{33} - a_{23}^2}{36a^2b^2}, \quad A_{22} = \frac{a_{11}a'_{33} - a_{13}^2}{36a^2b^2}, \quad A_{12} = \frac{a_{13}a_{23} - a_{12}a'_{33}}{36a^2b^2}$$

$$A_{13} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{12a^2b^2}, \quad A_{23} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{12a^2b^2}, \quad A_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{4a^2b^2}$$

Der Ort von S hat daher die Gleichung:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{2}{3}a_{13}x + \frac{2}{3}a_{23}y + \frac{a'_{33}}{9} = 0.$$

Führt man noch den Wert von a'_{33} ein, so ist

$$a'_{33} = -a^2b^2(3BC - 3AD + B + 9C + 3)$$

$$= -a^2b^2\Big(\frac{2a_{11}}{b^2} + \frac{2a_{22}}{a^2} + \frac{a_{33}}{a^2b^2}\Big) = -(2a_{11}a^2 + 2a_{22}b^2 + a_{33}),$$

und wenn man $Z = a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33}$ setzt,

$$a'_{33} = a_{33} - 2Z.$$

Also heisst die Gleichung:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{2a_{13}x}{3} + \frac{2a_{23}y}{3} + \frac{a_{33} - 2Z}{9} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Der Schwerpunkt beschreibt also einen Kegelschnitt, welcher dem umschriebenen ähnlich und mit ihm ähnlich gelegen ist. Die Koordinaten seines Mittelpunktes sind

$$\alpha_s = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{\alpha}{3} \text{ und } \beta_s = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{\beta}{3},$$

wenn α und β diejenigen des Mittelpunktes des umschriebenen Kegelschnitts bedeuten. Nennt man also den letzteren U, ferner den des eingeschriebenen Kegelschnitts M und den des Schwerpunkts-Kegelschnitts S, so liegen M, S und U in gerader Linie, und es ist $MS : SU = 1 : 2$, oder $MS = \frac{1}{3} MU$.

VI.

Ort des Höhenschnittpunktes.

Die Gleichung der Höhe auf A_2A_3 ist:

$$2a\varkappa_1 x + b(\varkappa_1^2 - 1)y = 2a^2\varkappa_1 \frac{1 - \varkappa_2\varkappa_3}{1 + \varkappa_2\varkappa_3} + b^2 \frac{(\varkappa_1^2 - 1)(\varkappa_2 + \varkappa_3)}{1 + \varkappa_2\varkappa_3},$$

die einer zweiten

$$2a\varkappa_2 x + b(\varkappa_2^2 - 1)y = 2a^2\varkappa_2 \frac{1 - \varkappa_1\varkappa_3}{1 + \varkappa_1\varkappa_3} + b^2 \frac{(\varkappa_2^2 - 1)(\varkappa_1 + \varkappa_3)}{1 + \varkappa_1\varkappa_3}.$$

Hieraus ergeben sich die Koordinaten des Höhenschnittpunkts:

$$2ax_h(\varkappa_1\varkappa_2^2 - \varkappa_1 - \varkappa_1^2\varkappa_2 + \varkappa_2) = 2a^2\left(\frac{\varkappa_1(\varkappa_2^2 - 1)(1 - \varkappa_2\varkappa_3)}{(1 + \varkappa_2\varkappa_3)}\right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa_2(\varkappa_1^2 - 1)(1 - \varkappa_1\varkappa_3)}{(1 + \varkappa_1\varkappa_3)}\right) + b^2(\varkappa_1^2 - 1)(\varkappa_2^2 - 1)\left(\frac{\varkappa_2 + \varkappa_3}{1 + \varkappa_2\varkappa_3} - \frac{\varkappa_1 + \varkappa_3}{1 + \varkappa_1\varkappa_3}\right)$$

$$2ax_h(\varkappa_2 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_1\varkappa_2)$$

$$= \frac{2a^2(\varkappa_2 - \varkappa_1)(1 + p - \lambda q - q^2) + b^2(\varkappa_2 - \varkappa_1)(\varkappa_1^2 - 1)(\varkappa_2^2 - 1)(1 - \varkappa_3^2)}{(1 + \varkappa_2\varkappa_3)(1 + \varkappa_1\varkappa_3)}.$$

$$x_h = \frac{2a^2(1 + p - \lambda q - q^2) + b^2(1 - \varkappa_1^2)(1 - \varkappa_2^2)(1 - \varkappa_3^2)}{(1 + \varkappa_1\varkappa_2)(1 + \varkappa_2\varkappa_3)(1 + \varkappa_1\varkappa_3)}$$

Da ferner $\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 = \lambda^2 - 2p$ und $\varkappa_1^2\varkappa_2^2 + \varkappa_2^2\varkappa_3^2 + \varkappa_3^2\varkappa_1^2 = p^2 - 2\lambda q$ ist, so ist

$$x_h = \frac{2a^2(1 + p - \lambda q - q^2) + b^2\left[(1 + p)^2 - (q + \lambda)^2\right]}{1 + p + \lambda q + q^2}$$

Ebenso findet man $y_h = \frac{-(4a^2q + b^2(2q + \lambda + pq))}{1 + p + \lambda q + q^2}$.

Als Ort des Höhenschnittpunktes erhält man wiederum einen Kegelschnitt, dessen Gleichung sich nach dem Vorigen bilden lässt. Die Rechnung unterbleibt jedoch, da das Resultat bereits durch einen Satz von *Burnside**) gegeben ist. Die Gleichung heisst

$$\begin{aligned} &a_{22}x^2 + a_{11}y^2 - 2a_{12}xy - 2a_{13}x - 2a_{23}y \\ &\quad - (a_{11} + a_{22})(a^2 + b^2) - a_{33} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Die Hauptachse dieses Kegelschnitts steht auf der des umschriebenen Kegelschnitts senkrecht. Bezeichnet man die Gleichung (8) mit $K_S = 0$, die Gleichung (9) mit $K_H = 0$, so ist

$$\begin{aligned} K_S + K_H = (a_{11} + a_{22})(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) - \frac{4}{3}\left(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}\right) \\ - \frac{2}{9}\left(Z - 2a_{33}\right). \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte beider Kegelschnitte liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt

$$\alpha_p = \frac{2a_{13}}{3(a_{11} + a_{22})} \text{ und } \beta_p = \frac{2a_{23}}{3(a_{11} + a_{22})} \text{ ist.}$$

Der Mittelpunkt von K_H ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{a_{12}a_{23} + a_{11}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \alpha + \frac{(a_{11} + a_{22})a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \beta_h &= \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \beta + \frac{(a_{11} + a_{22})a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \tag{10}$$

---

*) Salmon-Fiedler, p. 464, Aufg. 6.

V.

Ort des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises.

Ist $x_c y_c$ der Mittelpunkt des durch $A_1 A_2 A_3$ gehenden Kreises, so ist

$$x_c = \frac{3x_s - x_h}{2} \text{ und } y_c = \frac{3y_s - y_h}{2}.$$

Setzt man die gefundenen Werte ein, so wird

$$x_c = \frac{4a^2(1-q^2) + b^2\left((\lambda+q)^2 - (p+1)^2\right)}{4a(1+p+\lambda q+q^2)}$$

$$y_c = \frac{4a^2 q - b^2(p+1)(\lambda+q)}{4b(1+p+\lambda q+q^2)}.$$

Der Ort des Punktes ist daher ebenfalls ein Kegelschnitt, dessen Tangentialgleichung zunächst aufgestellt werden soll. Man hat:

$$a_1 = \frac{1}{4a}\left(4a^2(1-D^2) + b^2(D^2 - B^2 - 2B - 1)\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{4b}\left(4a^2 D - b^2(BD + D)\right)$$

$$c_1 = 1 + B + D^2$$

$$a_2 = \frac{1}{4a}\left(-8a^2 CD + 2b^2(CD + D - AB - A)\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{4b}\left(4a^2 C - b^2(BC + AD + B + C + 1)\right)$$

$$c_2 = A + D + 2CD$$

$$a_3 = \frac{1}{4a}\left(-4a^2 C^2 + b^2(C^2 + 2C + 1 - A^2)\right)$$

$$b_3 = \frac{1}{4b}\left(-b^2(AC + A)\right)$$

$$c_3 = C + C^2,$$

und bestimmt hieraus wie oben die Grössen $A_{11} = a_1 a_3 - \frac{a_2^2}{4}$ u. s. w. mit Hülfe der Koeffizienten von (7). Das Resultat ist folgende Gleichung:

$$\left(4a_{13}^2 - 4a_{12}^2 b^2 - (a_{11} - a_{22})^2 b^2\right)\xi^2 + \left(4a_{23}^2 - 4a_{12}^2 a^2 - (a_{11} - a_{22})^2 a^2\right)\eta$$
$$+ 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\zeta^2 + 8a_{13}a_{23}\xi\eta - 4a_{13}(a_{11} + a_{22})\xi\zeta$$
$$- 4a_{23}(a_{11} + a_{22})\eta\zeta = 0. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Für den Mittelpunkt C ist somit $\alpha_c = \frac{-(a_{11} + a_{22})a_{13}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}$, $\beta_c = \frac{-(a_{11} + a_{22})a_{23}}{2(a_{11}a_{22} - a_{11}^2)}$. Vergleicht man dies mit (10), so zeigt sich, dass $\alpha_h + 2\alpha_c = \alpha$ und $\beta_h + 2\beta_c = \beta$ ist; folglich liegt C mit S und H auf einer Geraden und es verhält sich

$$CS : SH = 1 : 2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Ferner ist $\alpha_c : \beta_c = a_{13} : a_{23}$, also auch $= \alpha_p : \beta_p$, daher liegt der Mittelpunkt von $K_S + K_H = 0$ auf der Geraden MC.

Bei der Berechnung der Koeffizienten der Punktgleichung aus $\Delta . a_{11} = A_{22}A_{33} - A_{23}^2$ u. s. w. ergiebt sich als allen gemeinsamer Faktor $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$. So lange dieser nicht verschwindet, lässt sich folgende Gleichung als Ort des Kreismittelpunktes aufstellen:

$$\left(a_{23}^2 + a^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right)x^2 - 2a_{13}a_{23}xy + \left(a_{13}^2 + b^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right)y^2$$
$$+ a_{13}a^2(a_{11} + a_{22})x + a_{23}b^2(a_{11} + a_{22})y + \frac{Z^2}{4}$$
$$- \frac{a^2b^2}{4}(a_{11} + a_{22})^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Ist dagegen $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$, so verschwinden alle Koeffizienten. Der umschriebene Kegelschnitt ist alsdann ein Kreis mit dem Mittelpunkte $\alpha_c = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$, $\beta_c = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$, und die Tangentialgleichung (11) geht über in $(a_{13}\xi + a_{23}\eta - a_{11}\zeta)^2 = 0$, also in die Gleichung von $\alpha_c\beta_c$.

VI.

Ort des Mittelpunktes des Kreises der 9 Punkte.

Der Mittelpunkt des *Feuerbach*schen Kreises hat die Koordinaten $x_o = \frac{x_c + x_h}{2}$, $y_o = \frac{y_c + y_h}{2}$.

Mit Hülfe des Vorigen erhält man

$$x_o = \frac{4a^2(2 + p - \lambda q - 2q^2) - b^2\big((\lambda + q)^2 - (p + 1)^2\big)}{8a(1 + p + \lambda q + q^2)}$$

$$y_o = \frac{-4a^2 q - b^2(5q + 3\lambda + \lambda p + 3pq)}{4b(1 + p + \lambda q + q^2)}.$$

Der gesuchte Ort ist ebenfalls ein Kegelschnitt, dessen Tangentialgleichung folgende Koeffizienten hat:

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{-1}{64a^2b^4}\left[4(a^2 - b^2)(a_{12}^2 b^2 - a_{13}^2) + \big(b^2(a_{11} + a_{22}) + Z\big)^2\right] \\
A_{22} &= \frac{-1}{64a^4b^2}\left[4(a^2 - b^2)(a_{23}^2 - a_{12}^2 a^2) + \big(a^2(a_{11} + a_{22}) + Z\big)^2\right] \\
A_{33} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{4a^2b^2} \quad A_{13} = \frac{1}{16a^2b^2}\Big(2a_{12}a_{23} + (a_{11} - a_{22})a_{13}\Big) \\
A_{12} &= \frac{a_{12}(a_{11} - a_{22})(a^2 - b^2)}{32a^2b^2} \\
A_{23} &= \frac{1}{16a^2b^2}\Big(2a_{12}a_{13} - (a_{11} - a_{22})a_{23}\Big).
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Für den Mittelpunkt dieses Kegelschnitts erhält man:

$$\alpha_o = \frac{2a_{12}a_{23} + (a_{11} - a_{22})a_{13}}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{(a_{11} + a_{22})a_{13} + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}$$

$$= \frac{\alpha - \alpha_c}{2}$$

$\beta_o = \frac{2a_{12}a_{13} - (a_{11} - a_{22})a_{23}}{4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{\beta - \beta_c}{2}$. Nach (10) und (11) ist aber $\alpha_h = \alpha - 2\alpha_c$ und $\beta_h = \beta - 2\beta_c$, folglich $\alpha_o = \frac{\alpha_c + \alpha_h}{2}$ und $\beta_o = \frac{\beta_c + \beta_h}{2}$.

Da ferner $\alpha_s = \frac{\alpha}{3}$ und $\beta_s = \frac{\beta}{3}$ ist, so ist auch $\alpha_h = 3\alpha_s - 2\alpha_c$ oder $\alpha_s = \frac{2\alpha_c + \alpha_h}{3}$ und ebenso $\beta_s = \frac{2\beta_c + \beta_h}{3}$.

Durch die bisherigen Untersuchungen ist daher folgendes Resultat gewonnen:

Bewegt sich ein Dreieck so, dass seine Seiten Tangenten einer Ellipse und seine Ecken Punkte eines anderen Kegelschnitts bleiben, so beschreiben der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und der des *Feuerbach*schen Kreises ebenfalls Kegelschnitte, deren 4 Mittelpunkte H, S, C und O auf einer Geraden liegen, und es verhält sich $CS : SO : OH = 2 : 1 : 3$. Ausserdem teilt S auch die Verbindungslinie MU der Mittelpunkte des ein- und umgeschriebenen Kegelschnitts so, dass $MS : SU = 1 : 2$ ist.

Hieraus folgt z. B., dass $MC \parallel UH$ und $UH = 2MC$ ist.

Um die Lage der Achsen von K_c und K_o festzustellen, benutzt man die Formel $tg 2w = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, in welcher w die Neigung der Hauptachse eines Kegelschnitts gegen die x-Achse, also in diesem Falle gegen die Hauptachse der eingeschriebenen Ellipse bedeutet. Man erhält nämlich für K_c aus (13):

$$tg 2w_c = \frac{-2a_{13}a_{23}}{a_{23}^2 - a_{13}^2 + (a^2 - b^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}.$$

Um diesen Wert mit dem für K_o vergleichen zu können, setzt man zuerst

$$tg 2w = \frac{2(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33})}{A_{13}^2 - A_{23}^2 + (A_{22} - A_{11})A_{33}}$$

und erhält aus (14)

$$A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33} = \frac{1}{256a^4b^4}\Big[\big(4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2\big)a_{13}a_{23}$$
$$+ 2a_{12}(a_{11} - a_{22})\big(a_{13}^2 - a_{23}^2 - (a^2 - b^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\big)\Big]$$

$$A_{13}^2 - A_{23}^2 = \frac{1}{256a^4b^4}\Big[(a_{23}^2 - a_{13}^2)\big(4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2\big)$$
$$+ 8a_{12}a_{13}a_{23}(a_{11} - a_{22})\Big] \text{ und}$$

$$A_{22} - A_{11} = \frac{1}{64a^4b^4}\big(a^2 - b^2\big)\Big(8a_{12}^2a^2b^2 - 4a_{13}^2a^2 - 4a_{23}^2b^2$$
$$- (a_{11} + a_{22})^2a^2b^2 + Z^2\Big).$$

Es ist aber $Z = a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33} = 2a^2b^2(BC - AD + 1 + 2C)$, also

$$Z^2 = 4a^4b^4\Big((BC - AD + 1)^2 + 4C^2 + 4C(BC - AD + 1)\Big)$$
$$= 4a^4b^4\Big((BC - AD - 1)^2 - 4AD + 4C(BC - AD + B + C + 1)\Big)$$
$$= 4(a_{13}^2a^2 + a_{23}^2b^2 + a_{11}a_{22}a^2b^2 - a_{12}^2a^2b^2). \text{ Somit ist}$$

$$A_{22} - A_{11} = \frac{1}{64a^2b^2}\big(a^2 - b^2\big)\Big(4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2\Big).$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$2a_{13}a_{23} = N, \quad a_{23}^2 - a_{13}^2 + (a^2 - b^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = P,$$

$4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2 = Q$ und $4a_{12}(a_{11} - a_{22}) = R$, so erhält man

$$tg2w_c = \frac{-N}{P} \text{ und } tg2w_0 = \frac{NQ - RP}{QP + NR} = \frac{\frac{N}{P} - \frac{R}{Q}}{1 + \frac{NR}{PQ}}.$$ Da aber

$$\frac{N}{P} = -tg2w_c \text{ und } \frac{R}{Q} = \frac{4a_{12}(a_{11} - a_{22})}{4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{22})^2} = \frac{2tg2w}{tg^22w - 1} = -tg4w$$

ist, so ist $tg2w_0 = \dfrac{tg4w - tg2w_c}{1 + tg4w \cdot tg2w_c} = tg(4w - 2w_c)$. Folglich ist

$$2w_0 = 4w - 2w_c \text{ oder } w = \frac{w_0 + w_c}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

d. h. die Hauptachsen von K_o und K_c bilden einen Winkel, dessen Halbierungslinie der Hauptachse des umschriebenen Kegelschnitts parallel ist, oder, da die Hauptachse von K_S parallel der letzteren und die von K_H zu ihr senkrecht ist: Die Richtungen der Hauptachsen der 4 Kegelschnitte sind gleich denen der Strahlen eines harmonischen Büschels.

VII.

Wählt man statt der Ellipse als eingeschriebenen Kegelschnitt eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, so ist $x = a\frac{1 + \varkappa_2\varkappa_3}{1 - \varkappa_2\varkappa_3}$ und $y = \frac{b(\varkappa_2 + \varkappa_3)}{1 - \varkappa_2\varkappa_3}$ zu setzen. Der Schwerpunkt eines Tangentendreiecks wird alsdann:

$$x_s = \frac{a(3 - p - \lambda q + 3q^2)}{3(1 - p + \lambda q - q^2)}, \; y_s = \frac{b(-2\lambda + \lambda p + 3q - 2pq)}{3(1 - p + \lambda q - q^2)}$$

Als Gleichung des umschriebenen Kegelschnitts ergiebt sich

$$b^2(BC - AD - B - C + 1)x^2 + 2ab(A - D)\,xy + 4a^2Cy^2$$
$$+ 2ab^2(BC - AD - 1)x - 2a^2b(A + D) + a^2b^2(BC - AD$$
$$+ B + C + 1) = 0.$$

Mit Hülfe dieser Koeffizienten erhält man den Ort des Schwerpunktes in der Form: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{2}{3}a_{13}x + \frac{2}{3}a_{23}y - \frac{1}{9}\left(2a_{11}a^2 - 2a_{22}b^2 + a_{33}\right) = 0$, so dass sich also diese Gleichung von der oben (8) aufgestellten nur durch das Vorzeichen von b^2 unterscheidet. Ebenso ergiebt die

Rechnung für K_H, K_c und K_o Gleichungen, welche aus den obigen durch Vertauschung von b^2 mit $-b^2$ hervorgehen.

Den Fall der Parabel hat *Weill**) behandelt. Die Gleichung derselben $y^2 = \frac{px}{2}$ giebt für die Tangente: $2yy' = \frac{p}{2}\left(x + x'\right)$. Indem $\frac{y'}{x'} = tg\varphi = m$ gesetzt wird, woraus $\frac{p}{2x} = m^2$ folgt, erhält er für den Schnittpunkt zweier Tangenten $x = \frac{p}{2m.\,m_1}$ $y = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}\right)$, wobei p der Parameter der Parabel ist. Der Schwerpunkt eines Tangentendreiecks hat die Koordinaten $x = \frac{p}{6}\left(A\lambda + B\right)$, $y = \frac{-p\lambda}{3}$, sein Ort ist daher eine gerade Linie. *Weill* bestimmt ferner den Ort des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises und findet ebenfalls eine gerade Linie, indessen werden die Gleichungen dieser Linien nicht aufgestellt.

Die Gleichungen zweier Höhen sind

$$2\varkappa_3 x + y = p.\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \frac{p}{4}\left(\varkappa_1 + \varkappa_2\right)$$

$$\text{und}\quad 2\varkappa_1 x + y = p.\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \frac{p}{4}\left(\varkappa_2 + \varkappa_3\right)$$

Hieraus folgt für den Höhenschnittpunkt

$$x_h = -\frac{p}{8},\quad y_h = +p.\,\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \frac{p}{4}\left(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3\right)$$

$$= -\frac{p}{4}\left(\lambda + 4C\lambda + 4D\right).$$

Folglich liegt der Höhenschnittpunkt irgend eines Dreiecks von Parabeltangenten auf der Linie $x = -\frac{p}{8}$, d. h. auf der Direktrix der Parabel.

*) Nouvelles annales II. série, tome XIX, p. 367.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich für den Mittelpunkt des *Feuerbach*schen Kreises $x_0 = \frac{p}{4}\left(A\lambda + B\right)$ und $y_0 = \frac{-p}{16}\left(3\lambda + 4C\lambda + 4D\right)$, also als Ort desselben eine gerade Linie.

Entwickelt man die Gleichung des 2 Tangentendreiecken umschriebenen Kegelschnitts in der oben angegebenen Weise, so erhält man die Gleichung:

$$x^2 + 2Axy + 4Cy^2 - \frac{p(B+C)}{2}.x - pD.y$$
$$+ \frac{p^2}{4}\left(BC - AD\right) = 0.$$

VIII.

Von anderen Punkten des Dreiecks ist noch der Punkt erwähnenswert, in welchem sich die 3 Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten schneiden. Für eine Ecke A_1 des Dreiecks ist $x = a\frac{1 - \varkappa_2\varkappa_3}{1 + \varkappa_2\varkappa_3}$ und $y = b\frac{\varkappa_2 + \varkappa_3}{1 + \varkappa_2\varkappa_3}$, für den Berührungspunkt B_1 der Gegenseite:

$x = a\frac{1 - \varkappa_1^2}{1 + \varkappa_1^2}$ $y = b\frac{2\varkappa_1}{1 + \varkappa_1^2}$, also ist die Gleichung der Linie A_1B_1 hierdurch bestimmt. Für die Koordinaten des Schnittpunktes von A_1B_1 und A_2B_2 erhält man

$$x_P = \frac{a\left(\lambda^2 - (A\lambda + B)^2 + 3\lambda(C\lambda + D) - 3(A\lambda + B)\right)}{\lambda^2 + (A\lambda + B)^2 - 3\lambda(C\lambda + D) - 3(A\lambda + B)}$$

$$y_P = \frac{b\left(-\lambda(A\lambda + B) + 9(C\lambda + D)\right)}{\lambda^2 + (A\lambda + B)^2 - 3\lambda(C\lambda + D) - 3(A\lambda + B)}.$$

Der Ort von P ist daher ein Kegelschnitt, dessen Gleichung sich wie in den früheren Beispielen bestimmen lässt. Die so gefundene Gleichung lautet:

$$K_P = \frac{a_{11}a^2 - 2a_{22}b^2 + 2a_{33}}{3a^2} \cdot x^2 + 2a_{12}xy + \frac{a_{22}b^2 - 2a_{11}a^2 + 2a_{33}}{3b^2} \cdot y^2$$

$$+ 2a_{13}x + 2a_{23}y + \frac{2a_{11}a^2 + 2a_{11}b^2 + a_{33}}{3} = 0.$$

Bezeichnet man ferner die Gleichung des umschriebenen Kegelschnitts mit $S_1 = 0$, die des eingeschriebenen mit $S = 0$, so ergiebt sich:

$$K_P - S_1 = -\frac{2}{3}\left(a_{11}a^2 + a_{22}b^2 - a_{33}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(a_{11}a^2 + a_{22}b^2 - a_{33}\right) S. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die drei Kegelschnitte haben daher dieselben Schnittpunkte oder gehören zu demselben Büschel. (Mit Benutzung der Invarianten von S und S_1 lässt sich auch schreiben

$$K_P = S_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\Theta}{\Delta} S = S_1 - \frac{8\Theta'}{3\Theta} \cdot S,$$

denn im vorliegenden Falle ist $\Theta^2 = 4\Delta\Theta'$.)

Zieht man von einem Berührungspunkte B_1 aus einen Durchmesser von S und verbindet seinen Endpunkt D_1 mit der Ecke A_1, so geht A_1D_1 durch den Schnittpunkt der entsprechenden Linien A_2D_2 und A_3D_3. Dieser Punkt heisse Q. Sein Ort lässt sich auf die obige Art bestimmen, einfacher aber durch Parallelprojektion. Wenn nämlich die eingeschriebene Ellipse Projektion eines Kreises ist, so ist Q die Projektion desjenigen Punktes, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der äusseren Berührungskreise schneiden, des so-

genannten *Nagel*schen Punktes. Dieser Punkt N liegt aber mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks und dem Mittelpunkt J des eingeschriebenen Kreises in einer Geraden, und es ist $NS = 2SJ$. Hieraus folgt, dass in der projizierten Figur QM ebenfalls durch den Schwerpunkt geht und die Koordinaten von Q $x_q = 3x_s$ und $y_q = 3y_s$ sind. Der Ort von Q wird also erhalten, indem man in (8) x und y durch $\frac{x}{3}$ und $\frac{y}{3}$ ersetzt. Er ist somit $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} - 2(a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33}) = 0$ oder $S_1 - 2Z = 0$, . . . (17)
also ein dem umschriebenen Kegelschnitt ähnlicher, ähnlich und konzentrisch gelegener Kegelschnitt.

IX.

Besondere Fälle.

1) Der umschriebene Kegelschnitt ist ein Kreis.

In diesem Falle ist $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$. Für S und H ergeben sich ebenfalls Kreise, wie bereits bekannt.*) Für O wird aus (14) : $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Aus $A_{22} - A_{11} = \frac{1}{64a^2b^2}\left(a^2 - b^2\right)\left(4a_{12}^2 - (a_{11} - a_{12})^2\right)$ folgt $A_{11} = A_{22}$ und die Punktgleichung des Ortes von O wird $A_{11}A_{33}(x^2 + y^2) + A_{11}^2 = 0$ oder $x^2 + y^2 = -\frac{A_{11}}{A_{33}}$. Er beschreibt also einen Kreis um M, dessen Radius bestimmt werden soll.

*) Weill, Nouvelles annales, II. série, tome XIX, p. 253 ff.

Es ist $-\frac{A_{11}}{A_{33}} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}^2} + 2(a^2+b^2) + \frac{a_{33}}{a_{11}}\right)$. Da aber jetzt $\alpha_c = \frac{a_{13}}{a_{11}}$ und $\beta_c = \frac{a_{23}}{a_{11}}$ ist, so ist $\frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}^2} = \alpha_c^2 + \beta_c^2 = \overline{MC}^2$; ferner ist $\frac{a_{33}}{a_{11}} = \alpha_c^2 + \beta_c^2 - R^2$, wenn R der Radius des umschriebenen Kreises ist,

$$\text{also } x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{MC}^2 + 2(a^2 + b^2) + \overline{MC}^2 - R^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\overline{MC}^2 + 2(a^2 + b^2) - R^2\right).$$

Setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so ist jetzt $2\overline{MC}^2 + 2(a^2 + b^2) = 4r^2 + R^2$.

Bezeichnet h einen Höhenschnittpunkt und ist $Co = oh$, so ist $r = Mo$ und $\overline{MC}^2 + \overline{Mh}^2 = 2\overline{Mo}^2 + 2\overline{oh}^2 = 2r^2 + \frac{\overline{Ch}^2}{2}$. Also wird $2\overline{Mh}^2 - 2(a^2 + b^2) = \overline{Ch}^2 - R^2$, d. h. gleich der Potenz dieses Punktes h in Bezug auf den umschriebenen Kreis. Da diese aber gleich dem doppelten Rechteck aus den Abschnitten einer Höhe ist, so ist letzteres $q^2 = \overline{Mh}^2 - (a^2 + b^2)$ oder $\overline{Mh}^2 = a^2 + b^2 + q^2$. (Satz von *Faure.*)*)

Im allgemeinen Falle war $Z^2 = (a_{11}a^2 + a_{22}b^2 + a_{33})^2 = 4\left(a_{13}^2a^2 + a_{23}^2b^2 + a^2b^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right)$, also ist hier

$$\left(a^2 + b^2 + \frac{a_{33}}{a_{11}}\right)^2 = 4\left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}a^2 + \frac{a_{23}^2}{a_{11}^2}b^2 + a^2b^2\right) \text{ oder}$$

$$(a^2 + b^2 + \overline{MC}^2 - R^2)^2 = 4(\alpha^2a^2 + b^2\beta^2 + a^2b^2)$$

---

*) Salmon-Fiedler, p. 464, Aufg. 4, Weill a. a. O. p. 253.

$$\left(a^2+b^2+\overline{MC}^2\right)^2=2R^2\left(a^2+b^2+\overline{MC}^2\right)-\frac{R^2}{4}$$
$$+4a^2\alpha^2+4b^2\beta^2+4a^2b^2.$$

$$(a^2-b^2+\overline{MC}^2)^2=2R^2\cdot 2r^2+4a^2\alpha^2+4b^2\beta^2+4a^2b^2$$
$$-4b^2(a^2+\alpha^2+\beta^2)$$

$$(a^2-b^2+\overline{MC}^2)^2=4r^2R^2+4\alpha^2(a^2-b^2).$$

Setzt man $a^2-b^2=e^2$, so wird $4r^2R^2=(\overline{MC}^2+e^2)^2-4\alpha^2e^2$

$$=(\alpha^2+\beta^2+e^2-2\alpha e)(\alpha^2+\beta^2+e^2+2\alpha e)$$
$$=\left(\beta^2+(e-\alpha)^2\right)\left(\beta^2+(e+\alpha)^2\right).$$

Bezeichnet man noch die Brennpunkte des eingeschriebenen Kegelschnitts mit F und F_1, so ist

$$\overline{CF}^2=(e+\alpha)^2+\beta^2 \text{ und } \overline{CF_1}^2=(e-\alpha)^2+\beta^2,$$

folglich ist $4r^2R^2=\overline{CF}^2\cdot\overline{CF_1}^2$ oder $CF\cdot CF_1=2r\cdot R$, ein Satz, welcher von *Weill* ohne Beweis aufgestellt ist.

2) Der eingeschriebene Kegelschnitt ist ein Kreis.

In diesem Falle ist $a=b=\varrho$ zu setzen. Die Gleichungen $K_S=0$, $K_C=0$ und $K_H=0$ werden hierdurch nicht wesentlich geändert, ihre Mittelpunkte sind von a und b unabhängig. Für den Mittelpunkt des *Feuerbach*schen Kreises wird dagegen $A_{11}=A_{22}=-\frac{1}{64\varrho^6}\left(2\varrho^2(a_{11}+a_{22})+a_{33}\right)^2$, $A_{12}=0$, und die Punktgleichung lautet: $x^2(A_{11}A_{33}-A_{23}^2)+y^2(A_{11}A_{33}-A_{13}^2)$

$$+2A_{13}A_{23}xy-2A_{11}A_{13}x-2A_{11}A_{23}y+A_{11}^2=0 \text{ oder}$$

$$\frac{A_{11}}{A_{33}}\left(x^2+y^2-2\alpha_0x-2\beta_0y+\frac{A_{11}}{A_{33}}\right)-\left(\beta_0x-\alpha_0y\right)^2=0.$$

Da also die Gleichung die Form $S=kL^2$ erhält und $S=0$ einen Kreis um $\alpha_0\beta_0$ bedeutet, während $\beta_0x=\alpha_0y$ die

Linie MO darstellt, so hat der Kegelschnitt K_o mit einem konzentrischen Kreise in den Schnittpunkten des durch M gehenden Durchmessers eine doppelte Berührung.

3) Die Mittelpunkte des ein- und des umbeschriebenen Kegelschnitts fallen zusammen.

Alsdann ist $\alpha = \beta = 0$, $a_{13} = 0$ und $a_{23} = 0$, daher verschwinden auch α_s, β_s, α_h, β_h, α_c, β_c, α_0 und β_0, und die 4 Kegelschnitte werden konzentrisch. K_c geht über in

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2) - \frac{a^2b^2(a_{11} + a_{22})^2}{4} = 0,$$ also in

eine Ellipse, welche der eingeschriebenen ähnlich ist und deren Hauptachse auf der des anderen Kegelschnitts senkrecht steht.

Ist zugleich der umschriebene Kegelschnitt ein Kreis, so ist $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$. Man erhält $K_S = a_{11}(x^2 + y^2) - \frac{1}{9}\left(2a_{11}(a^2 + b^2) + a_{33}\right)$. Bezeichnet man mit R den Radius des umschriebenen Kreises, so ist $R^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$, folglich für den Radius R_s des Kreises K_s: $R_s^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - R^2}{9}$.

Aus K_H wird $a_{11}(x^2 + y^2) - 2a_{11}(a^2 + b^2) - a_{33} = 0$, also ein Kreis, dessen Radius R_h sich ergiebt aus $R_h^2 = 2(a^2 + b^2) - R^2$. Es ist also $R_h = 3R_s$.

K_c reduziert sich wieder auf einen Punkt. Für K_0 wird $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$ und $A_{23} = 0$, daher die Punktgleichung: $A_{11}A_{33}x^2 + A_{22}A_{33}y^2 + A_{11}A_{22} = 0$, für welche

$$\frac{A_{11}}{A_{33}} = -\frac{(2a_{11}b^2 \pm 2a_{11}ab)^2}{16a_{11}^2b^2} = -\frac{(b \pm a)^2}{4}$$

und $\frac{A_{22}}{A_{33}} = -\frac{(a \pm b)^2}{4}$ sich ergiebt, weil $Z^2 = 4a_{11}^2a^2b^2$

zu setzen ist. Also erhält man einen Kreis $x^2+y^2_0 = R_0^2 = \left(\frac{a \pm b}{2}\right)^2$ Endlich ergiebt sich der Radius R des umschriebenen Kreises aus Z, denn es ist:

$$Z^2 = \left(a_{11}(a^2+b^2)+a_{33}\right)^2 = 4a_{11}^2a^2b^2 \text{ oder}$$

$a_{11}(a \pm b)^2 + a_{33} = 0$, also $-\frac{a_{33}}{a_{11}} = R^2 = (a \pm b)^2$ und $R = (a \pm b)$*) (Satz von *Steiner*).

Ist dagegen der eingeschriebene Kegelschnitt ein Kreis und hat der umschriebene die Achsen $2a_1$ und $2b_1$, so wird $a = b = \varrho$, $a_{13} = a_{23} = 0$ und $Z^2 = \left(\varrho^2(a_{11}+a_{22})+a_{33}\right)^2 = 4\varrho^4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$. Also ergiebt sich für K_c:

$$\varrho^2\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\left(x^2+y^2\right)+\varrho^4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)-\frac{\varrho^4}{4}\left(a_{11}+a_{22}\right)^2=0,$$

$$\text{oder } x^2+y^2 = \frac{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}{4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}\varrho^2.$$

Nun ist aber $(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = \frac{(a_1^2-b_1^2)^2}{a_1^4b_1^4}$ und

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = \frac{1}{a_1^2b_1^2}, \text{ folglich } x^2+y^2 = \frac{(a_1^2-b_1^2)^2\varrho^2}{4a_1^2b_1^2} = R_c^2$$

$$\text{also } R_c = \varrho\frac{a_1^2-b_1^2}{2a_1b_1}.$$

Da aber $\left(\varrho^2(a_{11}+a_{22})+a_{33}\right)^2 = 4\varrho^4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$ ist, oder wegen $a_{11}+a_{22} = \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}$ und $a_{33} = -1$:

$$\left[\varrho^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}\right)-1\right]^2 = \frac{4\varrho^4}{a_1^2b_1^2}, \text{ so ist ferner:}$$

$$\varrho^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}\right)-1 = \pm\frac{2\varrho^2}{a_1b_1} \text{ oder } \varrho^2\left(\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{b_1}\right)^2 = 1.$$

*) Steiner, Gesammelte Werke, Berlin 1882, Bd. II, p. 671.

Folglich ist $\varrho = \frac{a_1 b_1}{a_1 \pm b_1}$. (*Steiner* a. a. O.) Setzt man dies in R_c ein, so wird $R_c = \frac{a_1 \mp b_1}{2}$.

4) Beide Kegelschnitte sind Kreise.

Da in diesem Falle $a = b = \varrho$, $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$ zu setzen ist, so wird $\alpha = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$, $\beta = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$ und $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}$, daher $\frac{Z^2}{a_{11}^2} = (2\varrho^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 = 4(\alpha^2\varrho^2 + \beta^2\varrho^2 + \varrho^4)$ oder $(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4\varrho^2 R^2 = 0$. $\alpha^2 + \beta^2 = d^2$ gesetzt, giebt die bekannte Formel $d^2 = R^2 \pm 2R\varrho$.

X.

Es sollen im Folgenden noch einige Sätze über die Mittelpunkte der einem Dreieck ein- und umbeschriebenen Kegelschnitte abgeleitet werden, welche *Steiner* ohne Andeutung des Beweises aufgestellt hat.

Es seien $A_1 A_2 A_3$ die Ecken eines Dreiecks und M Mittelpunkt einer umschriebenen Ellipse, ferner sei a_2 die Mitte von $A_1 A_3$ und α_2 der durch a_2 gehende, β_2 der dazu konjugierte, also $A_1 A_3$ parallele Halbdurchmesser. Dann sind, auf die Achsen $\alpha_2 \beta_2$ bezogen, die Koordinaten von A_3 $x = a_2 A_3$ und $y = M a_2$, folglich ist

$$\frac{\overline{Ma_2}^2}{\alpha_2^2} + \frac{\overline{a_2 A_3}^2}{\beta_2^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zieht man durch A_2 eine Parallele zu $A_1 A_3$, welche Ma_2 in $\mathfrak{a}_2$ schneidet, so ist

$$\frac{\overline{M\mathfrak{a}_2}^2}{\alpha_2^2} + \frac{\overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2}{\beta_2^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnet man ferner die Höhe auf A_2A_3 mit h_1 und das Lot von M auf dieselbe Seite mit p_1, so verhält sich $\mathfrak{a}_2M : Ma_2 = h_2 - p_2 : p_2$, also ist

$$\mathfrak{a}_2M = \frac{h_2 - p_2}{p_2} \cdot Ma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ferner ist, wenn sich $M\mathfrak{a}_2$ und A_2A_3 in Q schneiden: $A_2\mathfrak{a}_2 : a_2A_3 = \mathfrak{a}_2Q : a_2Q$, also:

$$A_2\mathfrak{a}_2 = a_2A_3 \cdot \frac{\mathfrak{a}_2Q}{a_2Q} = a_2A_3 \cdot \frac{M\mathfrak{a}_2 - MQ}{a_2M + MQ}.$$

Da aber $M\mathfrak{a}_2 = a_2M \cdot \dfrac{h_2 - p_2}{p_2}$ ist, und sich verhält $MQ : a_2M$

$= p_1 : \dfrac{h_1}{2} - p_1$, so wird $A_2\mathfrak{a}_2 = a_2A_3 \cdot \dfrac{a_2M\dfrac{h_2-p_2}{p_2} - a_2M\dfrac{2p_1}{h_1 - 2p_1}}{a_2M + a_2M \cdot \dfrac{2p_1}{h_1 - 2p_1}}$

$$= \frac{a_2A_3\Big((h_1 - 2p_1)(h_2 - p_2) - 2p_1p_2\Big)}{h_1p_2}.$$

Setzt man noch $A_1A_3 = s_2$, so ist $a_2A_3 = \dfrac{s_2}{2}$ und

$$A_2\mathfrak{a}_2 = \frac{s_2}{h_1p_2}\left(\frac{h_1h_2}{2} - p_1h_2 - \frac{p_2h_1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Multipliziert man nun (1) mit $\overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2$, (2) mit $-\overline{a_2A_3}^2$ und addiert, so ist

$$\frac{1}{\alpha_2^2}\left(\overline{Ma_2}^2 \cdot \overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2 - \overline{M\mathfrak{a}_2}^2 \cdot \overline{a_2A_3}^2\right) = \overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2 - \overline{a_2A_3}^2.$$

Nun ist aber $Ma_2 \cdot A_2\mathfrak{a}_2 + M\mathfrak{a}_2 \cdot a_2A_3$

$$= Ma_2 \cdot s_2\left(\frac{h_2 - p_2}{2p_2} - \frac{p_1h_2}{p_2h_1} - \frac{h_2 - p_2}{2p_2}\right) = - Ma_2 \cdot \frac{s_2p_1h_2}{p_2h_1}$$

und $Ma_2 \cdot A_2\mathfrak{a}_2 - M\mathfrak{a}_2 \cdot a_2A_3$

$$= Ma_2 \cdot s_2\left(\frac{h_2 - p_2}{p_2} - \frac{p_1h_2}{p_2h_1}\right) = Ma_2 \cdot \frac{s_2h_2}{p_2}\left(1 - \frac{p_2}{h_2} - \frac{p_1}{h_1}\right).$$

Weil aber $\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$ ist, so ergiebt sich

$$Ma_2 \cdot A_2\mathfrak{a}_2 - M\mathfrak{a}_2 \cdot a_2A_3 = Ma_2 \cdot \frac{s_2h_2p_3}{p_2h_3}.$$

Somit ist $\overline{Ma_2}^2 \cdot \overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2 - \overline{M\mathfrak{a}_2}^2 \cdot \overline{a_2A_3}^2 = -\overline{Ma_2}^2 \cdot s_2^2 \cdot \frac{p_1p_3h_2^2}{p_2^2h_1h_3}.$

Ferner ist $A_2\mathfrak{a}_2 + a_2A_3 = \frac{s_2h_2}{2p_2}\left(1 - \frac{2p_1}{h_1}\right) = \frac{s_2h_2}{p_2h_1}\left(\frac{h_1}{2} - p_1\right)$

und $A_2\mathfrak{a}_2 - a_2A_3 = \frac{s_2h_2}{p_2}\left(\frac{1}{2} - \frac{p_1}{h_1} - \frac{p_2}{h_2}\right) = \frac{s_2h_2}{p_2h_3}\left(p_3 - \frac{h_3}{2}\right),$

also wenn man $\frac{h_1}{2} - p_1 = \pi_1$ setzt:

$$\overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2 - \overline{a_2A_3}^2 = -\frac{s_2^2 \cdot h_2^2 \cdot \pi_1\pi_3}{p_2^2 \cdot h_1h_3}.$$

In Folge dessen ist:

$$\frac{1}{\alpha_2^2}\left(-\overline{Ma_2}^2 \cdot s_2^2 \frac{p_1p_3h_2^2}{p_2^2h_1h_3}\right) = -\frac{s_2^2h_2^2\pi_1\pi_3}{p_2^2h_1h_3}, \text{ oder } \alpha_2^2 = \overline{Ma_2}^2 \cdot \frac{p_1p_3}{\pi_1\pi_3}.$$

Bezeichnet man noch

$\angle Ma_2A_3$ mit ω, so ist $p_2 = Ma_2 \cdot \sin\omega$,

und man erhält: $\alpha_2^2 \cdot \sin^2\omega = \frac{p_1p_2^2p_3}{\pi_1\pi_3}$. . . . . (5)

Ebenso erhält man aus (1) und (2) durch Elimination von α die Gleichung

$$\frac{1}{\beta_2^2}\left(\overline{Ma_2}^2 \cdot \overline{A_2\mathfrak{a}_2}^2 - \overline{M\mathfrak{a}_2}^2 \cdot \overline{a_2A_3}^2\right) = \overline{Ma_2}^2 - \overline{M\mathfrak{a}_2}^2.$$

Es ist aber

$$\overline{Ma_2}^2 - \overline{M\mathfrak{a}_2}^2 = \overline{Ma_2}^2 \cdot \frac{h_2}{p_2}\left(2 - \frac{h_2}{p_2}\right) = -2\ \overline{Ma_2}^2 \cdot \frac{h_2\pi_2}{p_2^2}$$

und daher $\beta_2^2 = \frac{s_2^2h_2p_1p_3}{2\pi_2h_1h_3} = \frac{F \cdot s_2p_1p_3}{\pi_2h_1h_3}$, wenn F den Flächeninhalt des Dreiecks bedeutet. Somit ist

$$\alpha_2^2 \cdot \beta_2^2 \cdot \sin^2\omega = \frac{p_1^2p_2^2p_3^2}{\pi_1\pi_2\pi_3} \cdot \frac{F \cdot s_2}{h_1h_3}.$$

Da aber $\frac{Fs_2}{h_1 h_3} = \frac{s_1 s_2}{2h_3} = R$, dem Radius des umschriebenen Kreises ist und das von 2 konjugierten Halbdurchmessern und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte gebildete Dreieck konstanten Inhalt hat, so ist für a und b als die halben Hauptachsen der Ellipse:

$$a^2 b^2 = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot R.^{*)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus den Werten $\alpha_2^2 = \overline{Ma_2}^2 \cdot \frac{p_1 p_3}{\pi_1 \pi_3}$ und $\beta_2^2 = \frac{p_1 p_3}{\pi_2} . R$ folgt ferner

$$\left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right) \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{p_2}\left(\pi_2 \cdot \overline{Ma_2}^2 + R \cdot \pi_1 \pi_3\right).$$

$\alpha_2^2 + \beta_2^2$ ist aber gleich $a^2 + b^2$, also bleibt die linke Seite bei Vertauschung des Indices konstant und man erhält die drei Gleichungen:

$$\left(a^2 + b^2\right) \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{p_2}\left(\pi_2 \cdot \overline{Ma_2}^2 + \pi_1 \pi_3 \cdot R\right)$$

$$\left(a^2 + b^2\right) \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{p_3}\left(\pi_3 \cdot \overline{Ma_3}^2 + \pi_1 \pi_2 \cdot R\right)$$

$$\left(a^2 + b^2\right) \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{p_1 p_2 p_3} = \frac{1}{p_1}\left(\pi_1 \cdot \overline{Ma_1}^2 + \pi_2 \pi_3 \cdot R\right).$$

Multipliziert man sie der Reihe nach mit $\frac{p_2}{h_2}$, $\frac{p_3}{h_3}$ und $\frac{p_1}{h_1}$ und addiert, so erhält man wegen $\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$:

$$\begin{aligned} \left(a^2 + b^2\right) \frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{p_1 p_2 p_3} &= \frac{\pi_1}{h_1} \cdot \overline{Ma_1}^2 + \frac{\pi^2}{h_2} \cdot \overline{Ma_2}^2 + \frac{\pi_3}{h_3} \cdot \overline{Ma_3}^2 \\ &\quad + R\left(\frac{\pi_2 \pi_3}{h_1} + \frac{\pi_3 \pi_1}{h_2} + \frac{\pi_1 \pi_2}{h_3}\right). \\ &= V + R \cdot W. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7) \end{aligned}$$

*) Schröter, Theorie der Kegelschnitte. Leipzig 1876. p. 220, Aufg. 16.

Die Ausdrücke V und W haben eine einfache Bedeutung.

Da $h_1 = \frac{2F}{s_1} = \frac{F}{R sin A_1}$ ist, so ist

$$R W = \frac{R^2}{F}\left(\pi_2\pi_3 sin A_1 + \pi_3\pi_1 sin A_2 + \pi_1\pi_2 sin A_3\right) = \frac{2R^2}{F} \cdot \delta,$$

wenn δ den Inhalt des Dreiecks bedeutet, welches die auf den Seiten von $a_1a_2a_3$ liegenden Fusspunkte von π_1, π_2 und π_3 bilden.

Wenn aber allgemein $\varDelta$ der Inhalt eines Dreiecks ist, dessen Ecken die Fusspunkte der von einem Punkte M auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Lote sind, wenn C der Mittelpunkt und R der Radius des umschriebenen Kreises ist, und F den Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks bedeutet, so ist $\frac{\varDelta}{F} = \frac{R^2 - \overline{CM}^2}{4R^2}$, oder wenn man die Potenz von M, d. h. $\overline{CM}^2 - R^2 = P_M$ setzt, $P_M = -\frac{4R^2 \cdot \varDelta}{F}$. . (8)

Ein Beweis dieses Satzes findet sich bei *Wiegand* (Die schwierigeren Aufgaben aus *Jacobis* Anhängen zu *van Swindens* Elementen der Geometrie, Halle 1849, p. 16) unter Hinweis auf die Originalarbeit des unbekannten Verfassers in der Zeitschrift *The Mathematician,* Jahrg. 1844 p. 70. Hiernach werden zuerst die von M ausgehenden Lote durch R, MC und die Winkel des Dreiecks ausgedrückt. Die von C gefällten Lote sind $m_1 = R cos A_1$ $m_2 = R cos A_2$ $m_3 = R cos A_3$. Für die von M gefüllten Lote ergiebt sich aber

$q_1 = m_1 + MC \cdot sin \alpha$, wobei α den Winkel bedeutet, welchen die Verlängerung von MC mit A_2A_3 bildet. Ferner erhält man für $MC = d$

$$q_2 = m_2 - d sin(\alpha + A_3) = R cos A_2 - d sin(\alpha + A_3)$$

und $q_3 = R cos A_3 - d sin(\alpha - A_2)$. Setzt man dies in $2\varDelta = q_1q_2 sin A_3 + q_2q_3 sin A_1 + q_3q_1 sin A_2$ ein und berücksichtigt, dass $m_1 m_2 sin A_3 + m_2 m_3 sin A_1 + m_3 m_1 sin A_2 = \frac{F}{2}$ ist, so erhält man

$$2\Delta = \frac{F}{2} + Rd\Big(sin\alpha\, cos A_2\, sin A_3 - sin(\alpha + A_3) cos A_3 sin A_1$$
$$- sin(\alpha - A_2) cos A_1 sin A_2 - cos A_1 sin(\alpha + A_3) sin A_3$$
$$- sin(\alpha - A_2) cos A_2 sin A_1 + cos A_3 sin\alpha\, sin A_2\Big)$$
$$+ d^2\Big(- sin\alpha\, sin(\alpha + A_3) sin A_3 + sin(\alpha + A_3) sin(\alpha - A_2) sin A_1$$
$$- sin\alpha\, sin(\alpha - A_2) sin A_2\Big)$$

Durch Auflösung von $sin(\alpha + A_3)$ und $sin(\alpha - A_2)$ ergiebt sich, dass der Koeffizient von Rd verschwindet und der von d^2 gleich $- sin A_1 sin A_2 sin A_3$ wird. Da nun dieses Produkt gleich $\frac{F}{2R^2}$ ist, so erhält man

$$2\Delta = \frac{F}{2} - \frac{d^2 F}{2R^2}$$

oder $\frac{4R^2\Delta}{F} = R^2 - d^2 = - P_M$.

Wendet man diesen Satz auf das Dreieck δ an und benutzt, dass der Radius des durch $a_1 a_2 a_3$ gehenden Kreises gleich $\frac{R}{2}$ ist, so ist $- RW = \frac{2R^2}{F} \cdot \Pi_M \cdot \frac{F}{4R^2} = \frac{\Pi_M}{2}$, worin Π_M die Potenz von M in Bezug auf den *Feuerbach*schen Kreis bedeutet. Wir erhalten also $RW = - \frac{\Pi_M}{2}$ . . . . (9)

Der Ausdruck $V = \overline{Ma_1}^2 \cdot \frac{\pi_1}{h_1} + \overline{Ma_2}^2 \cdot \frac{\pi_2}{h_2} + \overline{Ma_3}^2 \cdot \frac{\pi_3}{h_3}$ lässt sich in ähnlicher Weise durch die Potenz von M ausdrücken. Wenn in einem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ sich drei Transversalen $A_1 b_1$, $A_2 b_2$ und $A_3 b_3$ im Punkte M schneiden und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises C genannt wird, so ist

$$\cos CMA_2 = \frac{\overline{MC}^2 + \overline{MA}_2^2 - \overline{CA}_2^2}{2MC \cdot MA_2}$$

$$\text{und } \cos CMb_2 = \frac{\overline{MC}^2 + \overline{Mb}_2^2 - \overline{Cb}_2^2}{2MC \cdot Mb_2},$$

folglich, weil $CMA_2 + CMb_2 = 180^0$ ist,

$Mb_2(\overline{MC}^2 + \overline{MA}_2^2 - \overline{CA}_2^2) + MA_2(\overline{MC}^2 + \overline{Mb}_2^2 - \overline{Cb}_2^2) = 0$, oder

$\overline{MC}^2 \cdot A_2b_2 + MA_2 \cdot Mb_2 \cdot A_2b_2 - \overline{CA}_2^2 \cdot Mb_2 - \overline{Cb}_2^2 \cdot MA_2 = 0$

und, da $CA_2 = R$ ist,

$$\overline{MC}^2 = \frac{R^2 \cdot Mb_2 + MA_2 \cdot \overline{Cb}_2^2}{A_2b_2} - MA_2 \cdot Mb_2.$$

Nun ist aber, wenn die von M gefällten Lote mit q bezeichnet werden: $Mb_2 : A_2b_2 = q_2 : h_2$, $MA_2 : A_2b_2 = h_2 - q_2 : h_2$ und $Mb_2 : MA_2 = q_2 : h_2 - q_2$, also:

$$\overline{MC}^2 = \frac{R^2 q_2 + \overline{Cb}_2^2 (h_2 - q_2)}{h_2} - \overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2 - q_2} \text{ und}$$

$$\overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2 - q_2} = \overline{Cb}_2^2 - \overline{MC}^2 - \frac{q_2}{h_2}\left(\overline{Cb}_2^2 - R^2\right)$$

$$= R^2 - \overline{MC}^2 - \frac{h_2 - q_2}{h_2}\left(R^2 - \overline{Cb}_2^2\right).$$

Es ist aber $MC^2 - R^2 = P_M$ gleich der Potenz von M für den umschriebenen Kreis und $R^2 - \overline{Cb}_2^2$ die Potenz von b_2 also gleich $b_2A_1 \cdot b_2A_3$. Fällt man ferner von b_2 auf A_1A_2 das Lot z_3, so ist $A_1b_2 : A_1A_3 = z_3 : h_3$ und $z_3 : q_3 = b_2A_2 : MA_2 = h_2 : h_2 - q_2$, also für $A_1A_3 = s_2$:

$$A_1b_2 = \frac{s_2q_3h_2}{h_3(h_2 - q_2)} \text{ und ebenso } b_2A_3 = \frac{s_2q_1h_2}{h_1(h_2 - q_2)} \text{ und somit}$$

$$\overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2 - q_2} = - P_M - \frac{s_2^2 q_1 q_3 h_2}{h_1 h_3 (h_2 - q_2)}, \text{ sowie}$$

$$\overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2} = - P_M \cdot \frac{h_2 - q_2}{h_2} - q_1q_3 \cdot \frac{s_2^2}{h_1h_3}.$$

Endlich kann noch $\frac{s_2^2}{h_1 h_3} = \frac{s_1 s_2^2 s_3}{4F^2} = \frac{s_2 \cdot R}{F} = \frac{2R^2 sin A_2}{F}$

gesetzt werden, und man erhält:

$$\overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2} = -P_M \frac{h_2 - q_2}{h_2} - \frac{2R^2}{F} \cdot q_1 q_3 sin A_2 .$$

Ebenso bestehen die Gleichungen:

$$\overline{MA}_3^2 \frac{q_3}{h_3} = -P_M \frac{h_3 - q_3}{h_3} - \frac{2R^2}{F} \cdot q_2 q_1 sin A_3$$

und $\overline{MA}_1^2 \frac{q_1}{h_1} = -P_M \frac{h_1 - q_1}{h_1} - \frac{2R^2}{F} \cdot q_2 q_3 sin A_1 .$

Addiert man diese 3 Gleichungen und berücksichtigt, dass

$\frac{h_1 - q_1}{h_1} + \frac{h_2 - q_2}{h_2} + \frac{h_3 - q_3}{h_3} = 3 - \left(\frac{q_1}{h_1} + \frac{q_2}{h_2} + \frac{q_3}{h_3}\right)$ also $= 2$

und $q_1 q_3 sin A_2 + q_2 q_1 sin A_3 + q_2 q_3 sin A_1 = 2\Delta$, dem doppelten Inhalt des Dreiecks der Fusspunkte von $q_1 q_2$ und q_3 ist, so ergiebt sich

$\overline{MA}_1^2 \cdot \frac{q_1}{h_1} + \overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2} + \overline{MA}_3^2 \cdot \frac{q_3}{h_3} = -2P_M - \frac{4R^2\Delta}{F}$, also da nach (8) $P_M = -\frac{4R^2\Delta}{F}$ ist:

$$\overline{MA}_1^2 \cdot \frac{q_1}{h_1} + \overline{MA}_2^2 \cdot \frac{q_2}{h_2} + \overline{MA}_3^2 \cdot \frac{q_3}{h_3} = -P_M \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wendet man diesen Satz auf das Mittendreieck $a_1 a_2 a_3$ an, so erhält man:

$$V = \overline{Ma}_1^2 \cdot \frac{\pi_1}{h_1} + \overline{Ma}_2^2 \cdot \frac{\pi_2}{h_2} + \overline{Ma}_3^2 \cdot \frac{\pi_3}{h_3} = -\frac{\Pi_M}{2},$$

da q durch π zu ersetzen ist und die Höhen des Dreiecks $a_1 a_2 a_3$ die Hälften derjenigen von $A_1 A_2 A_3$ sind. Folglich erhält man aus (7):

$$a^2 + b^2 = \frac{-p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot \Pi_M \text{*)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

*) Schröter, Theorie der Kegelschnitte. Leipzig 1876, p. 220, Aufg. 16.

Ist M der Mittelpunkt einer eingeschriebenen Ellipse mit den Brennpunkten F und F_1 und den Halbachsen a und b und bezeichnet man die Lote von M auf die Dreiecksseiten mit $q_1 q_2 q_3$, die von F mit $p_1 p_2 p_3$ und die von F_1 mit $p'_1 p'_2 p'_3$, so ist $p_1 p'_1 = p_2 p'_2 = p_3 p'_3 = b^2$. Ferner ist, wenn die Fusspunkte der Brennpunktslote P_1, P'_1 und so weiter heissen: $MP_1 = MP'_1 = a$. Nun ist $p_1 + p'_1 = 2q_1$, folglich $p_1^2 + p_1 p'_1 = 2p_1 q_1$ und $p_1^2 - 2p_1 q_1 = -b^2$, also $p_1 = q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - b^2}$.

$$\text{Ebenso ist } p_2 = q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - b^2},$$
$$p_3 = q_3 \pm \sqrt{q_3^2 - b^2}.$$

Multipliziert man der Reihe nach mit s_1, s_2 und s_3 und beachtet, dass

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 = s_1 q_1 + s_2 q_2 + s_3 q_3 = 2F$$

ist, so erhält man:

$$s_1\sqrt{q_1^2 - b^2} + s_2\sqrt{q_2^2 - b^2} + s_3\sqrt{q_3^2 - b^2} = 0. \quad . \quad . \quad (12)$$

Ist ferner Q_1 der Fusspunkt des Lotes q_1 auf A_2A_3, so ist

$$A_2Q_1 - A_3Q_1 = A_2P_1 - A_3P_1 + 2P_1Q_1.$$

Da nun $\overline{P_1Q_1}^2 = \overline{MP_1}^2 - \overline{MQ_1}^2 = a^2 - q_1^2$ ist, so erhält man

$$A_2Q_1 - A_3Q_1 = A_2P_1 - A_3P_1 \pm \sqrt{a^2 - q_1^2}$$

und durch Multiplikation mit s_1:

$$\overline{A_2Q_1}^2 - \overline{A_3Q_1}^2 = \overline{A_2P_1}^2 - \overline{A_3P_1}^2 \pm s_1\sqrt{a^2 - q_1^2}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\overline{A_3Q_2}^2 - \overline{A_1Q_2}^2 = \overline{A_3P_2}^2 - \overline{A_1P_2}^2 \pm s_2\sqrt{a^2 - q_2^2}$$

$$\text{und } \overline{A_1Q_3}^2 - \overline{A_3Q_1}^2 = \overline{A_1P_3}^2 - \overline{A_3P_1}^2 \pm s_3\sqrt{a^2 - q_3^2}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen wird

$$s_1\sqrt{a^2 - q_1^2} + s_2\sqrt{a^2 - q_2^2} + s_3\sqrt{a^2 - q_3^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

da die Quadratsummen sich heben. Durch Vergleichung von (13) und (12) ersieht man, dass a^2 und b^2 Wurzeln derselben quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sein müssen, also $a^2 + b^2 = -\frac{B}{A}$ und $a^2b^2 = \frac{C}{A}$ ist. Da die Bestimmung von $a^2 + b^2$ auf den oben erwähnten Satz von *Faure* führt, so soll hier nur a^2b^2 bestimmt werden. Macht man die Gleichung (13) rational, so lautet sie:

$$s_1^4(a^2 - q_1^2)^2 + s_2^4(a^2 - q_2^2)^2 + s_3^4(a^2 - q_3^2)^2 - 2s_1^2s_2^2(a^2 - q_1^2)(a^2 - q_2^2)$$
$$- 2s_2^2s_3^2(a^2 - q_2^2)(a^2 - q_3^2) - 2s_3^2s_1^2(a^2 - q_3^2)(a^2 - q_1^2) = 0.$$

Folglich ist

$$A = s_1^4 + s_2^4 + s_3^4 - 2s_1^2s_2^2 - 2s_2^2s_3^2 - 2s_3^2s_1^2 \text{ also } = -16F^2.$$

Ferner ist $C = s_1^4q_1^4 + s_2^4q_2^4 + s_3^4q_3^4 - 2s_1^2s_2^2q_1^2q_2^2 - s_2^2s_3^2q_2^2q_3^2 - 2s_3^2s_1^2q_1^2q_2^2$

$$= -16F(F - s_1q_1)(F - s_2q_2)(F - s_3q_3)$$

$$= -16F \cdot s_1s_2s_3\left(\frac{h_1}{2} - q_1\right)\left(\frac{h_2}{2} - q_2\right)\left(\frac{h_3}{2} - q_3\right).$$

$= -16F^2 \cdot 4R \cdot \pi_1\pi_2\pi_3$, wenn $\pi_1\pi_2\pi_3$ die Lote von M auf die Seiten des Mittendreiecks von $A_1A_2A_3$ sind. Also erhält man: *)

$$a^2b^2 = 4R \cdot \pi_1\pi_2\pi_3 \quad \text{. . . . . (14)}$$

XI.

Die von *Steiner* (ges. Werke, Bd. II, p. 670 ff.) aufgestellten Sätze ergeben sich hieraus als einfache Folgerungen. Fallen die Mittelpunkte beider Kegelschnitte zusammen und nennt man die Halbachsen des eingeschriebenen a_1 und b_1, so ist

$$a^2b^2 \cdot a_1^2b_1^2 = 4p_1^2p_2^2p_3^2R$$

oder $ab \cdot a_1b_1 = 2p_1p_2p_3R$.

*) Schröter, a. a. O. Aufg. 15.

Ferner ist $\frac{a^2b^2}{a_1^2b_1^2} = \frac{p_1^2p_2^2p_3^2}{4\pi_1^2\pi_2^2\pi_3^2}$ oder $\frac{2ab}{a_1b_1} = \frac{p_1p_2p_3}{\pi_1\pi_2\pi_3}$. —

Ist der umschriebene Kegelschnitt ein Kreis, also $a = b = R$, so erhält man

$$R^2 \cdot a_1b_1 = 2p_1p_2p_3 \cdot R, \text{ oder } a_1b_1 = \frac{2p_1p_2p_3}{R}$$

$$\text{und } \frac{2R^2}{a_1b_1} = \frac{p_1p_2p_3}{\pi_1\pi_2\pi_3}, \text{ folglich } \pi_1\pi_2\pi_3 = \frac{a_1^2b_1^2}{4R}.$$

Ferner ist $p_1 = R\cos A_1$ u. s. w., und wegen des *Faure*schen Satzes ist $a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{MH}^2 + R^2\right)$, wobei H den Höhenschnittpunkt bedeutet.

Ist also M zugleich Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist

$$\overline{MH}^2 = R^2(1 \pm 8\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3) = R^2 \pm \frac{8p_1p_2p_3}{R}$$

$$= R^2 \pm 4a_1b_1 \text{ und daher } a_1^2 + b_1^2 = R^2 \pm 2a_1b_1$$

$$\text{oder } R = a_1 \pm b_1.$$

Aus $p_1p_2p_3 = \frac{a_1b_1R}{2}$ wird also $p_1p_2p_3 = \frac{a_1b_1(a_1 \pm b_1)}{2}$ und aus $a_1^2b_1^2 = 4\pi_1\pi_2\pi_3R$ wird $\pi_1\pi_2\pi_3 = \frac{a_1^2b_1^2}{4(a_1 \pm b_1)}$, daher auch $p_1p_2p_3 \cdot \pi_1\pi_2\pi_3 = \frac{a_1^3b_1^3}{8}$ und endlich $\frac{p_1p_2p_3}{\pi_1\pi_2\pi_3} = \frac{2(a_1 \pm b_1)^2}{a_1b_1}$.

Ist dagegen der eingeschriebene Kegelschnitt ein Kreis und $a_1 = b_1 = \varrho$, also auch $p_1 = p_2 = p_3 = \varrho$, so erhält man:

$$4\pi_1\pi_2\pi_3 \cdot R = \varrho^4 \text{ und } a^2b^2 = 4R^2\varrho^2, \text{ also } ab = \pm 2R\varrho.$$

Ist ferner C der Mittelpunkt des umschriebenen, O der des

*Feuerbach*schen Kreises, also $CO = OH$, so ist $\Pi_M = \overline{MO}^2 - \frac{R^2}{4}$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{MC}^2 + \overline{MH}^2 - \frac{\overline{CH}^2}{2}\right) - \frac{R^2}{4}.$$

$\overline{MC}^2$ ist aber gleich $R^2 \pm 2R\varrho$ und der *Faure*sche Satz giebt $2\varrho^2 = \overline{MH}^2 - \frac{1}{2}\left(\overline{CH}^2 - R^2\right)$, folglich ist

$$\Pi_M = \frac{1}{2}\left(R^2 \pm 2R\varrho + 2\varrho^2 - \frac{R^2}{2}\right) - \frac{R^2}{4} = \varrho^2 \pm R\varrho.$$

Aus (11) wird $a^2 + b^2 = \Pi_M \cdot \frac{\varrho^3 \cdot 4R}{\varrho^4} = -4R(\varrho \pm R)$.
Da aber $ab = 2R\varrho$ ist, so erhält man $(a \pm b)^2 = 4R^2$,

$$a \pm b = 2R = \frac{ab}{\varrho} \text{ und } \varrho = \frac{ab}{a \pm b}.$$

$$\overline{MC}^2 = R^2 \pm 2R\varrho = \frac{(a \pm b)^2}{4} \pm ab = \frac{(a \mp b)^2}{4} \text{ oder } MC = \frac{a \mp b}{2}.$$

Auch ist $\pi_1\pi_2\pi_3 = \frac{\varrho^4}{4R} = \frac{a^4b^4}{2(a \pm b)^5}$.