CXX.

Programm

des

Königl. Friedrichs-Gymnasiums

zu

Breslau

1885

II. Wissenschaftliche Abhandlung

Breslau
Druck von Otto Gutsmann

Der Grenzbegriff

in der

Elementar-Mathematik

von

Heinrich Vogt.

Im Betrachten wie im Handeln ist das Zugängliche von dem Unzugänglichen zu unterscheiden; ohne dies lässt sich im Leben wie im Wissen wenig leisten.

Goethe, Maximen und Reflexionen I.

Alles Fortschreiten im mathematischen Lernen und Forschen, das Lösen einer einzelnen Aufgabe wie die Einsicht in die Abhängigkeit verschiedener Disciplinen beruht auf der Kunst, die zusammengesetzten Probleme in ihre Bestandtheile zu zerlegen, die Schwierigkeiten getrennt zu bewältigen, die zur Zeit noch nicht lösbaren zu umgehen, die gelösten zur Behandlung der Probleme höherer Ordnung zusammenzufassen. Wie die Alten Meister in dieser mathematischen Scheidekunst waren, so möchten wir sie am reinsten in den schon von ihnen gepflegten Elementen anwenden, erstens, weil hier die Methoden an sich beschränkt sind, und zweitens, weil grade in dieser Beschränkung auf sichtbare Ziele und ihnen angepasste Methoden ein guter Teil des Lehrwertes der Mathematik liegt. Denn sie macht möglich, was in andern Fächern nicht möglich ist, dass der Lernende ein scharf umgrenztes Gebiet ganz übersieht und eine Aufgabe rein und ohne Rest, nicht schlechter als der Gelehrteste löst.

Aber grade in den Grundlagen der Mathematik stellen sich jener Forderung, welche wir im wissenschaftlichen und didaktischen Interesse aufstellen, Schwierigkeiten entgegen. Ich spreche nicht von Fragen, welche der Philosoph oder der theoretisierende Mathematiker an die mathematischen Grundbegriffe knüpft, sondern von innerlichen Schwierigkeiten, ohne deren Bewältigung eine klare Begriffsbildung unmöglich ist.

An die Grundvorstellungen, -Begriffe und Axiome der Mathematik knüpft sich erstens das mathematische Problem: Welches System von Bedingungen ist notwendig und hinreichend, um die Sätze der Mathematik logisch daraus zu entwickeln? zweitens das philosophische: Woher hat der Geist diese Vorstellungen, Begriffe und Gesetze ihrer Verknüpfung? Drücken sie eine ihm innewohnende Gesetzmässigkeit aus, unter der allein ihm die Einwirkungen der Aussenwelt zugänglich sind, oder gehören sie dem Einwirkenden an und sind der Stempel, den das, was er nicht selbst ist, ihm aufdrückt?

Beide Fragen sind vom Lehrgang der Elemente vollständig loszulösen: die Mathematik besteht ganz unabhängig davon, wie die philosophische Frage beantwortet wird; nur die Resultate der auf die andre gerichteten Spekulation finden in den Elementen ihren Ausdruck.

Jeder Lehrgang der Elemente soll eine Probe darauf sein, dass in die Grundlagen nicht mehr und nicht weniger als das Notwendige aufgenommen ist; jedem, der die Elemente lernt, muss es klar werden, dass nicht im Vorhandensein von Axiomen ein Grund liegt, den Wert und die Festigkeit der Mathematik anzuzweifeln; er muss einsehen, dass notwendig die Qualität und Relation unsrer Raum- und Grössenvorstellungen ausgesprochen, also bestehendes festgestellt werden muss, damit man von diesem Ausgang durch Kombinieren und Schliessen weiter gelangen könne. Aber ob das zu grunde gelegte System ein wirklich auf das engste reduciertes, ob es weiter das einzig mögliche und für alle Zeiten gesicherte sei, diese Frage legt der in die Elemente Eintretende sich nicht vor.

Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass das System der Grundbegriffe in der That Veränderungen unterworfen ist. Seit den Zeiten Euklids hat sich Umfang und Inhalt des Zahlbegriffs geändert; es genügt uns nicht mehr seine Definition der Aehnlichkeit; für grade Linie und Ebene lassen wir verschiedene Erklärungen zu; die Parallelentheorie erscheint uns in anderem Lichte. Sehen wir uns auch gelegentlich genötigt, Wortdefinitionen auszusprechen, wo wir genetische wünschten, Axiome, wo wir noch beweisen möchten, müssen wir anerkennen, dass die Grenzen des Axiomatischen und Beweisbaren verrückbar sind, so sind dies doch, so zu sagen, gelehrte Fragen, nicht solche, deren Nichterledigung das Eindringen in die Elemente selbst unsicher machen könnte.

In Betreff des zuletzt angeführten Beispiels, der Parallelenfrage, könnte man wohl andrer Meinung sein. Definiert man parallele Grade als solche, welche in einer Ebene liegen und sich beliebig weit verlängert nicht schneiden, und fügt dazu den Grundsatz, durch einen Punkt ausserhalb einer Graden giebt es nur eine Parallele zu derselben, oder einen gleichwertigen, so gilt das Gesagte unbedingt. Hier kann niemand einen Widerspruch finden, sondern höchstens ein Ungenügen, dass die Definition sich für die Herleitung der Sätze unfruchtbar erweist. Geht man aber von der negativen Aussage: Parallele Linien schneiden sich nicht, soweit man sie auch verlängert denken mag, d. h. nicht in endlicher Entfernung, Definition und Axiom zusammenfassend über zu der positiven, sie haben einen Punkt in unendlicher Entfernung gemein, so tritt ein Widerspruch zwischen Attribut und Prädikat hervor; es wird das Sichnichtschneiden gefasst als besondrer Fall des Sichschneidens, nämlich als Schneiden in unendlicher Entfernung; es wird die im Gattungsbegriff liegende Negation zum Artmerkmal gemacht.[1])

Diese Ausdrucksweise befreit die Sätze von der Aufführung der Ausnahmefälle, sie giebt dem, der den Sprung wagt, einen beherrschenden Ueberblick über alle Beziehungen,

---

[1]) Ganz dasselbe geschieht, wenn in der Arithmetik die Null als Zahl, in der Mechanik die Ruhe als besondrer Fall der Bewegung angesehen wird.

welche aus der Lage grader Linien zueinander hervorgehen. Auch in den Elementen fordert die Determination mancher Konstruktionsaufgabe, in welcher die parallele Lage als besonderer Fall der schneidenden auftritt, zu jener Verallgemeinerung gradezu heraus; aber eine Nötigung dazu liegt in den Elementen nicht vor, und deshalb ist es unzweifelhaft besser, hier ganz im Sinne der alten Geometer die Allgemeinheit der Sätze der Klarheit und Widerspruchlosigkeit der Grundlagen zu opfern, als umgekehrt.[1])

Aber es giebt Steine des Anstosses in den Elementen, welche sich nicht herausreissen lassen, ohne den Zusammenhalt aufzuheben. Sie haften am Gegensatz des Stetigen und Unstetigen.

Das Stetige dem Denken zugänglich zu machen ist die Aufgabe, zu deren Lösung die höhere Analysis die Methode des Einschliessens in Grenzen, der Einführung des Unendlichkleinen geschaffen hat. Diese Methode findet Anwendung, wo immer der Geist das Problem des Stetigen zu bewältigen versucht, mag es sich darstellen als Raum, Zeit, Kraft oder Raumerfüllung, in der analytischen Geometrie, in der Mechanik, in der theoretischen Physik. Der projektivischen Geometrie, welche die Methoden der Analysis zurückweist, bleibt es nicht erspart, sich auf ihre eigene Weise mit ihm abzufinden.

Dasselbe Problem, welches die höhere Mathematik durch das als Grenzbegriff eingeführte Unendlichkleine methodisch fasst, drängt sich auch in die Elementar-Mathematik, allein die Arithmetik bis zur Potenzierung ausgenommen, ein; und dieselben begrifflichen Schwierigkeiten, welche seit Erfindung der Differenzial-Rechnung die Denker beschäftigen, stellen sich schon dem Quartaner in den Weg. Das didak-

---

[1]) Dasselbe gilt für die Auffassung der Tangente als einer Sekante, welche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, der Graden und der Ebene als eines Kreises und einer Kugel mit verschwindender Krümmung.

tische Interesse erlaubt und verlangt, sie zunächst beiseite zu schieben, die Augen gegen sie zu verschliessen; aber sie kehren wieder und können am Ende nicht mehr umgangen werden.

Das bezeichnete Problem tritt auf bei der Definition der geometrischen Grundgebilde, bei der Messung gleichartiger Grössen durcheinander, der graden Linie durch die grade Linie, der ebenen Fläche durch das Quadrat, der Raumgrösse durch den Würfel, in andrer Weise da, wo die genannten Masse zur Auswertung ungleichartiger Grössen benutzt werden, bei der Rektifikation und Quadratur der krummlinig oder krummflächig begrenzten Gebilde, speciell des Kreises und der Kugel. Es drängt sich zeitig an als periodischer Decimalbruch, später als Irrationalzahl und unendlich fallende geometrische Reihe; es fordert sein Recht in der Analyse der Fall-, Central- und Pendelbewegung.

I.

Die geometrischen Grundgebilde.

Die gebräuchlichste Definition der geometrischen Grundgebilde lautet: Der Raum ist teilbar; die gemeinschaftliche Grenze zweier Raumteile heisst Fläche. Die Fläche ist teilbar; die gemeinschaftliche Grenze zweier Flächenteile heisst Linie. Die Linie ist teilbar; die gemeinschaftliche Grenze zweier Linienteile heisst Punkt.

Ich lasse die Frage nach der Entstehung der Raumanschauung gänzlich beiseite; ich nehme die Thatsache hin, dass der Geist die Aussenwelt räumlich erfasst, und untersuche nur, ob Teilung des Raumes und Begrenzung der Teile in der Vorstellung vollziehbar oder wenigstens im Denken ohne Widerspruch erfassbar sind.

Ich gehe aus von der Teilung einer in der Vorstellung zu einem Ganzen zusammengefassten diskreten Mannigfaltigkeit. Denke ich mir zunächst n durchaus gleichartige Sandkörner beliebig im Raume zerstreut. Sie sollen nicht numeriert oder abgezählt werden, wodurch ein andres Merkmal, das der zeitlichen Abfolge im Zählen, sich einschleichen würde. Diese Sandkörner lassen sich in je zwei Gruppen scheiden in soviel Weisen, als die Kombinationslehre angiebt. Für die Vorstellung können diese Teilungen an Wert und Giltigkeit sehr verschieden sein; leicht zu vollziehen sind sie, wenn die demselben Teil angehörigen Elemente benachbart und womöglich von denen des andern durch einen grösseren Zwischenraum getrennt sind als von einander, oder wenn eine geometrische Gesetzmässigkeit der Vorstellung zu Hilfe kommt. Aber eine bestimmte Angabe, wie gross die Abstände sein müssen, oder wie die Elemente geordnet sein müssen, um eine vorstellbare Teilung zu bilden, ist offenbar nicht möglich. Leicht ist, unter 9 Elementen, die angeordnet sind wie ein Kegelspiel, jede Teilung in der Vorstellung zu vollziehen; schwerer, unter 64 schachbrettartig gestellten Kugeln in einer Vorstellung selbst nur die zu vereinigen, welche auf weissen Feldern stehen müssten, für eine gewöhnliche Vorstellungskraft wohl unmöglich, jede beliebige, unregelmässige Anordnung mit einem Schlage intuitiv zu fixieren, nicht abzählend zu durchlaufen.[1])

So ist also das räumliche Teilen einer diskreten Mannigfaltigkeit nicht ein reales Zerfallen, wie das mechanische Teilen durch Lösung des Kraftzusammenhanges es bewirkt, selbst nicht immer eine einheitliche Vorstellung eines solchen, sondern ein in ein Nacheinander sich auflösender oder in der Zahlensprache der analytischen Geometrie sich niederschlagender diskursiver Begriff.

Welche Bedeutung hat nun der Begriff der Grenze, den wir auf räumliche Teilung anzuwenden pflegen? Werden durch die Teilung 2 kompakte Massen A und B von unter sich benachbarten Elementen gegenübergestellt, aus denen die Elemente a und b einander am nächsten treten, z. B. bei linienförmiger Anordnung, so wird man diese äussersten Elemente a und b als Grenzelemente bezeichnen. Bei gewissen Anordnungen wird ein Komplex a aus A einem Komplex b aus B am nächsten stehen, z. B. wenn 64 quadratisch geordnete Elemente in je 32 rechteckig geordnete geteilt

---

[1]) Ich weiss von vorzüglichen Schachspielern, dass sie blind spielend nicht das Bild des Schachfeldes mit seiner augenblicklichen Figurenstellung als Ganzes vor dem inneren Auge haben, sondern die Stellung der einzelnen Figuren nacheinander durch die Vorstellung führen.

werden, und diese Komplexe *a* und *b* werden als Grenzen gelten. Wodurch aber sollen die Grenzelemente bei nicht gesetzmässiger Anordnung oder für eine Teilung fixiert werden, bei welcher die Elemente der beiden Teile durcheinander geschoben sind? Wie gross müssen die Entfernungen sein, um als relativ klein gegen andre zu gelten; wie muss eine Teilung beschaffen sein, damit die als Grenze bezeichneten Elemente selbst noch einheitlich vorgestellt werden können?

Es entspricht also dem Begriff der Grenzelemente bei der Gruppierung einer diskreten Mannigfaltigkeit keine klare Vorstellung. Dies änderte sich auch nicht, wenn man zur Abgrenzung der Teile *A* und *B* eine Zwischengruppe *c*, eine Art Rain, ausschiede. Erstens ist eine solche Ausscheidung wegen der Zahl und Lage der Elemente nicht immer möglich, und zweitens haben die Elemente *c* Lücken untereinander, und sind sie mit denen von *A* und *B* nicht auf Linien vorzustellen, so dass bestimmte *a* und *b* sich immer gegenüber liegen, so ist auch das „Zwischen" und damit diese Art Grenze selbst eine nicht klare Vorstellung.

Also ist die Grenze nicht in der Mannigfaltigkeit selbst zu suchen, sondern muss als eine neue räumliche Vorstellung hinzutreten. Nehmen wir sie als eine ununterbrochene Wand von einer gewissen Dicke, welche sich zwischen *A* und *B* schiebt; d. h. um von einem Element von *A* zu einem Element von *B* zu gelangen, soll man notwendig die Wand durchdringen. Werden die Abstände der Elemente kleiner, so müssen wir diese Wand entsprechend dünn vorstellen; nehmen wir selbst die Elemente so klein und so nahe aneinander gerückt, wie die Physik es für die molekulare Zusammensetzung der Körper lehrt, so gelingt es der Vorstellung auch da noch, die sich immer mehr verengende Scheidewand zwischen den Molekeln hindurchzuführen.

Aber diese Wand, mag sie von grosser oder geringer Dicke vorgestellt werden, muss selbst ein Teil des Raumes sein und selbst Grenzen haben. Wir werden also notwendig, auch wenn wir von der Teilung und Begrenzung räumlich diskontinuierlicher Mannigfaltigkeiten ausgehen, auf Teilung und Begrenzung des Raumes selbst geführt.

Die Geometrie definiert: Die Grenze zweier Raumteile heisst Fläche. Gehört diese Grenze einem von beiden Raumteilen an, oder beiden, oder keinem von beiden? Nicht einem von beiden, denn mit demselben Recht auch dem andern; nicht beiden, denn dann hätten die Raumteile etwas Gemeinschaftliches, was sie als verschiedene Teile des Raumes nicht haben können; nicht keinem von beiden, denn dann ist sie, wenn sie überhaupt etwas sein soll, ein dritter, zwischen beiden liegender Teil des Raumes, was nicht sein soll, und ausserdem kehrte für ihre Begrenzung dieselbe Schwierigkeit wieder.[1])

Stellen wir uns die Begrenzung der Räume zunächst als ihr äusserstes Gemeinschaftliches, Uebergreifendes vor und suchen dieses in sich unbestimmte Gemeinschaftliche immer mehr einzuengen, so sind wir damit auf den Weg eines regressus in infinitum gekommen, der nicht zu Ende zu führen ist. Hier haben wir die Wahl: Gebieten wir der Vorstellung an einer Stelle, die wir vielleicht durch die Genauigkeit unsrer Sinne und Werkzeuge bedingen, halt, so bleiben wir statt bei der gesuchten Grenze wieder bei einem Raumteil stehen. Und wir können wohl durch ein Machtgebot, einen Willensakt, die Vorstellung einer gewissen Grösse festhalten, aber die Möglichkeit des Weiterteilens können wir nicht bestreiten und die Aufforderung dazu nicht ertöten. Jeder Versuch, die Fläche und den Grenzbegriff überhaupt empirisch zu fixieren, führt immer zu dem Eingeständnis, dass sie nur durch ein endlos fortschreitendes Einengen, d. h. aber, da wir das Unendliche nie als vollzogen setzen dürfen, dass sie als Grenze der Raumteile gar nicht vorstellbar ist, dass also auch die Teilung des Raumes

[1]) Vergl. Raab, die Zenonischen Beweise. Progr. Schweinfurt 1880.

in der Vorstellung nicht rein zu vollziehen ist. Oder wir nehmen, um uns aus der Qual des ins Uferlose hindrängenden Processes zu retten, in die Definition der Fläche auf: Sie ist kein Teil des Raumes, ihre Dicke ist Null. Hier wird mit einem Wort anticipiert, wozu der unendliche Regress unter Festhaltung der Vorstellbarkeit hindrängt; aber so wird die Grenze und die Fläche lediglich durch partielle Negation der Raumvorstellung definiert, sie wird zu einem Begriff.

Zwar überreden wir uns wohl, grade die Vorstellung der Fläche aus der Wahrnehmung des Körpers durch Aufgeben aller physisch qualitativen Eigenschaften loslösen zu können. Was sich dem Auge und dem Tastgefühl bietet, sind ja nur Flächen, bekleidet mit optischen und mechanischen Qualitäten. Aber wir müssen uns überzeugen, dass es nicht gelingt, die Fläche rein räumlich, ohne dieses Kraft- und Widerstandsmaass der Sinne vorzustellen: entweder wir scheitern an der molekularen, diskontinuierlichen Zusammensetzung der Körper, oder, füllen wir die Zwischenräume zu einem Kontinuum aus, so sind wir nicht im Stande, die Fläche als zweiseitig und dabei doch unkörperlich vorzustellen. Zwischen dem unendlichen, nicht zu vollendenden Vorstellungsprocess und dem ihm durch die Negation vorgreifenden und ihn zugleich aufhebenden Begriff giebt es kein Drittes.

Dieselbe Ueberlegung gilt für die Linie, die Grenze der Flächenteile, und den Punkt, die Grenze der Linienteile; nur dass hier auch jener Schein der Vorstellbarkeit nicht mehr vorhanden ist. Wir stellen die Linie nie anders als einen sehr schmalen und dünnen Körper, den Punkt als einen nach allen Ausdehnungen sehr eingeengten Körper vor. Verkleinern wir, um bei dem Punkt zu bleiben, den Raum, den er einnimmt, beständig, so streben wir einem nie erreichbaren Ziele zu. Um ein Ende zu machen, greifen wir wiederum entweder dem Resultat des unendlich fortschreitenden Processes vor; dann haben wir den Punkt als die reine Negation alles Räumlichen, als das räumliche oder ebensogut unräumliche Nichts, welches der Vorstellung gänzlich entzogen ist; dann haben wir ebenso viel Recht zu sagen, 2 Linien haben in ihrem Schnitt 1000 Punkte gemein, wie einen. Oder wir machen, die weitere Einengung ablehnend, an einer gewissen Stelle des Vorstellungsvorganges halt, dann haben wir den Punkt als räumliche Einheit,[1]) den Raum als Konglomerat von Atomen, die Fläche, die Linie aus Punkten bestehend; wir geben damit den Raum als Kontinuum auf, dessen Merkmal eben dieses ist, dass kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist.[2]) Dann unterscheidet sich auch die feinste und geübteste Vorstellung, welche die Grösse des Punktes ausserordentlich einzuengen weiss, nur dem Grade nach von der gröbsten, für welche ein Kreidetupf das adäquate Bild des geometrischen Punktes ist. Was hat es dann für eine Bedeutung zu sagen: 2 Linien haben in ihrem Schnitt einen Punkt gemeinsam? Schneiden sich die Linien rechtwinklig, so dass ihr Gemeinsames ein kleines Quadrat ist, so mag dieses Minimalquadrat als Einheit, als Punkt gelten; wie aber, wenn sie sich schräg durchsetzen, so dass sie einen gestreckten, schmalen Rhombus gemeinsam haben, wie lang darf der Punkt dann werden?[3])

---

[1]) Dieser Auffassung entspricht die psychologische Herleitung des Punktes als „des im Raume objektiven Abbildes der im Subjekt empfundenen Unteilbarkeit des Bewusstseins", nicht aber der vorhergehenden, welche Fresenius, (Die psychol. Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden 1868) nicht davon trennt, wenn er S. 23 sagt: „Wo im Verfolge der Geometrie der Punkt vorkommt, immer gelangen wir durch Abstraktion zu ihm als einer Grenze, einem Extrem, kurz einer Negation."

[2]) Nach der hier vorläufig acceptierten Kantschen Definition. Vergl. S. 37 Anm. 1.

[3]) Die Grundzüge der atomistischen Geometrie, der Geometrie Giordano Brunos, und weitere Widersprüche, welche sich in ihr ergeben, findet man in Lasswitz, Giordano Bruno und die Atomistik, Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie. 1884.

Wäre die Linie nur eine sehr schmale Fläche, dann wären Flächensätze direkt auf Linien übertragbar. Da die Projektion einer ebenen Fläche auf eine Ebene gleich der projicierten Fläche multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels ist, so müsste hieraus der falsche Satz gefolgert werden, dass auch für die Projektion einer ebenen geschlossenen Linie auf eine Ebene dieselbe Beziehung besteht.[1]) Es wäre ferner nach dieser Auffassungsweise Liniengrösse mit Flächen- und Körpergrösse vergleichbar; es könnte eine ebene Fläche durch alle in ihr gezogenen unter einander parallelen Linien, ein Körper durch alle Parallelebenen ausgemessen werden.

Dieser Anschauung huldigt von den älteren Mathematikern Cavalieri; auf ihr baut er das nach ihm benannte Princip der Flächen- und Volumenbestimmung auf. In seiner geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bononiae 1635, heisst es Buch II im Scholion zu Theorem 1: „Wenn ich alle Linien oder alle Ebenen einer Figur in betracht ziehe, so vergleiche ich nicht ihre Anzahl, sondern nur ihre (Gesamt-) Grösse, welche dem von ihnen eingenommenen Raume gleichkommt; und weil dieser Raum begrenzt ist, deshalb ist auch ihre Grösse von denselben Grenzen eingeschlossen.“

Was die Definitionen des Euklid betrifft, so gehört die erste „Der Punkt ist das Unteilbare“ der atomistischen Raumauffassung an, die dritte und sechste „Die Grenzen einer Linie sind Punkte“ und „Die Grenzen einer Fläche sind Linien“ enthalten die Unbestimmtheit des Begriffs Grenze, die zweite und fünfte „Die Linie ist eine Länge ohne Breite“ und „Die Fläche hat nur Länge und Breite“ haben als charakteristisches Merkmal die Negation.

---

[1]) Vergl. Duda, Einige Abschnitte aus dem physikalischen Kursus der Gymn.-Prima. Brieg 1884.

In neuerer Zeit ist es von verschiedenen Seiten versucht worden, eine im Empirischen halt machende, oder wenigstens von ihm ausgehende Geometrie zu begründen. Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie", Leipzig 1882, sucht darzulegen, wie die bestehende Geometrie auf der Basis der Erfahrung durch Aneinanderkettung von Grundsätzen und Lehrsätzen sich entwickeln lässt. Indem er Schritt vor Schritt von den als Erweiterungen hinzutretenden Forderungen Rechenschaft giebt, läutert er allmählich die zuerst ausgesprochenen engsten Beobachtungsthatsachen bis zur weitesten Allgemeinheit. Dies gilt besonders für die Grundgebilde selbst, so dass „der Begriff des Punktes erst in seiner letzten Gestalt die Merkmale erhält, welche man sonst von vornherein mit dem sogenannten mathematischen Punkte zu verbinden pflegt." Der Ausgang ist: „Allemal werden diejenigen Körper, deren Teilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt, Punkte genannt"; „auf der begrenzten Linie muss es unmöglich sein, unter Innehaltung der der Beobachtung gesteckten Grenzen verschiedene Wege zwischen denselben Punkten zurückzulegen; je zwei Teile stossen höchstens in einem Punkt aneinander; Teile einer Fläche dürfen nur in Punkten oder Linien aneinander stossen." Pasch spricht also von körperlichen Vorstellungsgebilden, die das schwankende Kennzeichen tragen, dass ihre empirische Teilung sich mit den jedesmaligen Beobachtungsgrenzen nicht verträgt. Demnach schaltet er auch zwischen zwei Punkte einer Strecke nicht beliebig viel, sondern nur soviel Punkte ein, als die Beobachtungsgrenzen noch unterscheiden lassen (S. 18, 126), und wenn er Kongruenz auf Deckung zurückführt, so handelt es sich wiederum nur um die Aussage, dass eine Abweichung der einen Figur von der andern nicht nachzuweisen ist. Die Ausdehnung des Begriffes Punkt in dem Sinne, dass in einer Strecke mehr Punkte zu finden sind, als jede noch so grosse Zahl angiebt, wird erst gewonnen, indem die Punktreihe mit der stetigen Zahlenreihe in Analogie gesetzt wird. Demgemäss ist in der letzten Fassung (S. 191) die Begriffsbestimmung des Punktes rein analytisch und von der Anschauung gänzlich losgelöst: „Jedes System von vier reellen, rationalen oder irrationalen, aber nicht gleichzeitig verschwindenden Zahlen ϱx_1 ϱx_2 ϱx_3 ϱx_4 wird ein in dem zu grunde gelegten Koordinatensystem mit den Koordinaten x_1 x_2 x_3 x_4 behafteter mathematischer Punkt genannt".

Diese Definition halte ich für die Höhe des Gedankenganges; ein nicht konsequenter Rückschritt in das Empirische scheint es mir zu sein, wenn S. 200 an den Punkt wieder die Forderung der konstruktiven Darstellbarkeit gestellt wird: „Wir ordnen dem Punkte p eine stetige Folge von Zahlen zu", nämlich alle zwischen zwei Brüchen $\frac{r}{v}$ und $\frac{s}{v}$, den Grenzen der Unterscheidbarkeit, liegenden. Für die zeichnende Darstellung eines irrationalen Koordinatenwertes ist das gewiss richtig, und auch in der Vorstellung hört das Einschieben von Punkten einmal auf, aber die Forderung einer weiteren Teilung wird dadurch nicht beseitigt; sie liegt vielmehr darin, „dass man die Punkte der Graden in vollständige Analogie mit den Gliedern der aus den rationalen und irrationalen Zahlen bestehenden Reihe bringt." (S. 126.)

Pasch' Methode ist ausserordentlich geeignet, erkennen zu lassen, wie weit sich auf jene empirische oder atomistische Auffassung der Grundgebilde eine Geometrie gründen lässt, wie die der Vorstellung zugänglichen Grundgebilde nur beschränktes und unsicheres Erkennen vermitteln;[1] sie zeigt zugleich, wie der jene Beobachtungsthatsachen bearbeitende Geist die Forderung der Konsequenz und der Allgemeingiltigkeit stellt und so genötigt wird, über die endlich aber nicht scharf umgrenzten Thatsachen, von denen er ausging,

[1] „Die Anwendung dieser Begriffe bleibt mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, wie dies fast bei allen Begriffen, die wir zur Auffassung der Erscheinungen geschaffen haben, der Fall ist." S. 4.

hinauszugehen auf dem Wege einer successiven Annäherung an eine nicht erreichbare Grenze. Es tritt klar heraus, dass der Begriff räumlicher Begrenzung von dem eigentlich analytischen Grenzbegriff nicht zu trennen und erst in ihm einer systematischen Behandlung zugänglich ist.[1])

Bei allem psychologischen und erkenntnistheoretischen Interesse, das dieser Gedankengang bietet, wäre es ein Missgriff, ihn (selbstverständlich abgesehen von dem, was der projektivischen Geometrie angehört,) in die Elemente hineinzutragen. Es erfordert eine grosse Anstrengung des Denkens, den Geist auf dem jedesmaligen beschränkten Standpunkt festzuhalten. Dem Schüler muss das nicht wandelbare System der Geometrie von vornherein vorgeführt werden, welches die schon geläuterten Elemente zu grunde legt. Thatsächlich hat jeder den Process, der zur Forderung der unbeschränkten Teilbarkeit des Raumes führt, schon durchgemacht, ehe er an die Geometrie herantritt. Mathematische Grundbegriffe und Ueberzeugungen sind latent in ihm, sie sind entstanden, indem er sich in der Körperwelt orientieren lernte; er braucht sich ihrer nur bewusst zu werden, freilich wird er sich gleichzeitig der ihnen anhaftenden Rätsel bewusst. Aus Wahrnehmung, Vorstellung, Zusammenfassung von Vorstellungen, darauf gebauten Schlüssen, also aus Induktion lösen sich die geometrischen Grundbegriffe und Sätze heraus; aber es haftet an ihnen, abgesehen von der Entstehung der Raumanschauung selbst, als an Grenzbegriffen etwas, das der Induktion nicht zugänglich ist, weil keine Induktion sich auf unendlich viel Elemente beziehen und das Stetige erschöpfen kann.

Helmholtz, „die Thatsachen in der Wahrnehmung", Berlin 1879, stellt der „reinen Geometrie" eine „physische Geometrie" gegenüber, um eine Entscheidung gegen die Kantsche

---

[1]) Vergl. Funcke, Grundlagen der Raumwissenschaft. Hannover 1875. §§ 23, 24.

Lehre von der apriorischen Natur des Raumes wenigstens insoweit zu gewinnen, dass nicht die Axiome der Geometrie selbst inhaltlich in der transcendentalen Anschauungsform des Raumes schon mit enthalten sein können, sondern dass sie durch die Natur des sinnlich gegebenen Erfahrungsmaterials bestimmt sind. Um den Erfahrungsgehalt der Axiome nachzuweisen, fingiert er, es gäbe eine reine Geometrie, welche allein auf transcendentale Anschauung gegründet sei, und stellt ihr als physische Geometrie den Komplex von Beobachtungsthatsachen gegenüber, welche sich nach rein naturwissenschaftlicher Methode aus dem Vorhandensein starrer Körper und der Möglichkeit ihrer Bewegung ergeben. „Physisch gleichwertig" im Gegensatz zu „mathematisch gleich" nennt er „solche Raumgrössen, in denen unter gleichen Bedingungen und in gleichen Zeitabschnitten die gleichen physikalischen Vorgänge bestehen und ablaufen können". Also gleichwertig sind die von den Spitzen eines starren Zirkels an verschiedenen Stellen hervorgebrachten Figuren; gleichseitig ist ein Dreieck ABC, wenn derselbe Zirkel die Lagen AB, BC, CA einnehmen kann. Drei Punkte a b c liegen in grader Linie, wenn die Konstruktion mit dem Zirkel b als den einzigen Punkt ergiebt, der von a und c die Entfernungen ab und cb hat. „Eine solche rein und absichtlich durchgeführte Geometrie," sagt Helmholtz, „würde offenbar möglich sein und vollständig den Charakter einer Naturwissenschaft haben". Ist sie möglich, und wird unabhängig von ihr eine Transcendental-Geometrie angenommen, so ist es nicht selbstverständlich, dass beide in ihren Aussagen übereinstimmen, und es würde die Anwendung der apriorischen Geometrie auf körperliche Dinge nur dann gestattet sein, „wenn durch Beobachtung und Versuch konstatiert wäre, dass die nach der vorausgesetzten transcendentalen Anschauung gleichwertigen Raumteile auch physikalisch gleichwertig seien." Dann aber wäre „die Annahme einer Kenntnis der Axiome aus transcendentaler Anschauung eine unerwiesene, unnötige und für die Erklärung unserer Kenntnis der wirklichen Welt gänzlich unbrauchbare Hypothese".

Ist eine solche physische Geometrie ohne Seitenblick auf die reine Geometrie wirklich möglich? Die Zirkelspitze ist ein Punkt im Sinne von Pasch, ein Körper, dessen physische Teilung mit mechanischen Mitteln nicht ausführbar und dessen Dicke mit den vorhandenen Massstäben und Beobachtungsmitteln nicht messbar ist. So sind schon die physischen Grundgebilde mit Unbestimmtheit behaftet; diese hängt auch allen weiteren Aussagen an. Die Beurteilung, ob Punkt b auf der Graden ac liegt, ist an ein negatives Kennzeichen geknüpft, also wenn nicht vorher ein Gesetz über das Schneiden der Kreise aufgestellt wird, ist es nur durch eine unendliche, also unvollziehbare Beobachtungsreihe festzustellen, dass nicht ausser b noch ein andrer Punkt von a und c dieselben Entfernungen hat. Brechen wir diesen Process ab, wie es nicht anders sein kann, so haben wir durch die empirische Begegnung zweier Kreise doch nur die ungefähre Lage eines Punktes b gefunden, wiederum behaftet mit der durch die Beobachtungsgrenzen bedingten Unsicherheit. Ebenso können wir im Dreieck Abc, welches entsteht, wenn wir auf den Seiten AB und AC des physisch gleichseitigen Dreiecks ABC die Punkte b und c durch die Bedingung $Ab = Ac$ bestimmen, nicht mit Sicherheit über Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten bc, Ab, Ac entscheiden; wir können nur feststellen, dass die Abweichung eine gewisse Grenze nicht übersteigt. Denken wir uns weiter etwa die Winkel eines aus physischen z. B. Bleistiftlinien hergestellten Dreiecks mit Zirkel oder Transporteur gemessen, so wird wiederholte Messung selbst an demselben Dreieck nicht immer dieselbe Winkelgrösse ergeben, noch weniger dieselbe Winkelsumme; noch weniger wird sich etwa in verschiedenen Dreiecken eine konstante Winkelsumme ergeben. Denn wir haben es nur mit innerhalb der Beobachtungsgrenzen graden Linien zu thun, die Messinstrumente sind an sich mit Unregelmässigkeiten behaftet, auch ihr Anlegen von Punkt auf Punkt, Linie auf Linie ist ungenau. Jede innerhalb der Beobachtungsgrenzen richtig ausgeführte Beobachtung aber hat, wenn nicht zu Unrecht durch die reine Geometrie eine Kontrolle geübt wird, dasselbe Recht; ein Dreieck, dessen Seiten innerhalb der Beobachtungsgrenzen etwas gekrümmt sind, ist ein physisch gradliniges Dreieck; jede Ablesung, die sich nicht mehr als z. B. um eine Bogenminute irrt, jedes Anlegen des Instruments, bei welchem der Scheitel oder die Schenkel um nicht mehr als z. B. 0,1 mm verrückt sind, ist richtig. Wie soll nun eine positive Aussage über die Winkelsumme möglich sein? Führte man mit verschiedenen Instrumenten Winkelmessungen vieler physischen Dreiecke aus, so würden sich alle Winkelsummen wohl in einem gewissen Spielraum um 180^{0} herum ergeben. Da aber keine bestimmte Norm für Herstellung jener Dreiecke und Instrumente gegeben ist, so ist es unmöglich, aus den vorhandenen gleichwertigen Messungen eine z. B. die 180^{0} selbst als die richtige herauszuheben. Auch für physische Naturobjekte existiert ja nur insoweit eine wenigstens ideale Masszahl, als es sich entweder um ein bestimmtes, beharrendes Objekt, oder um eine Vielheit von Objekten handelt, deren Qualitäten durch ein exaktes Gesetz definiert sind. Ein bestimmtes Stück Messing hat mit bestimmtem Wasser verglichen ein bestimmtes specifisches Gewicht, welches wir freilich nicht absolut genau angeben können; von dem specifischen Gewicht des Messings überhaupt können wir nur reden, wenn wir durch die Zahl als ideale Regel eine gewisse Zusammensetzung aus reinem Kupfer und Zink als normale definieren, mag auch in Wirklichkeit für kein einzelnes Stück Messing und für kein Wasser die Bedingung absolut genau, sondern nur innerhalb der Beobachtungsgrenzen genau erfüllt sein. Der in der Idee vorhandenen Masszahl suchen wir uns durch die Methoden der Beobachtung und Rechnung zu nähern; wo aber die Objekte der Beobachtung selbst ihrer Natur nach nur negativ bestimmt sind, wie die Gebilde der physischen Geometrie, da können die Resultate nur unbestimmt sein. Wollte man unter allen durchaus gleichberechtigten Fällen einen, den der 180°, als den richtigsten oder wahrscheinlichsten annehmen, so würde man damit eines jener Dreiecke für das normale oder dem normalen am nächsten kommende erklären, d. h. man würde die Specialitäten aller Einzeldreiecke gegen eine Idealform fallen lassen, in welcher das von Fehlern freie Raumgesetz sich verkörpert. Damit würde man den Weg von Pasch beschreiten, empirische und reine Geometrie nicht als Gegensätze zu denken, sondern die zweite durch Läuterung der ersten als ihren physisch nicht zu verwirklichenden Grenzfall zu entwickeln.

Behandelt die physische Geometrie nur schwankende Gebilde, kommt sie aus sich überhaupt nicht zu positiven, allgemeinen Sätzen, so kann man nicht einmal die Frage stellen, ob ihre Ergebnisse mit denen der Idealgeometrie übereinstimmen. Nichtübereinstimmen heisst hier nur: die Idealzahl 180° fällt ausserhalb des empirischen Winkelspielraums $a \pm \alpha$; Uebereinstimmung hat den unbestimmten Sinn: sie liegt in diesem Spielraum.

Hiernach ist eine Gegenüberstellung der physischen und der reinen Geometrie wegen der Unbestimmtheit der ersteren nicht möglich; damit wird der indirekte Beweis gegen die inhaltliche Bestimmtheit der Kantschen Raumform hinfällig.

Tragen die geometrischen Grundgebilde den Charakter von im Empirischen fussenden, aber über das Empirische hinausreichenden Forderungen,[1]) so sind die auf diese Grenzgebilde bezüglichen Sätze, soweit wir der Funktionen unsers

[1]) Vergl. Erdmann, Die Axiome der Geometrie, Leipzig 1877. S. 37: „Die Definitionen der Geometrie entwickeln daher, streng genommen, nicht Anschauungen, nicht abstrakte Begriffe, sondern Ideen." S. 158: „Die Massbeziehungen der Konstruktionsbegriffe verändern die

Geistes sicher sind, absolut richtig und auf Erfahrung anwendbar. Absolut richtig, weil in ihnen nichts zum Ausdruck kommt, was nicht als Forderung in die Definitionen hineingelegt ist; auf Erfahrung anwendbar, weil jene Forderungen im strengsten Anschluss an die Beobachtung gestellt werden und nur das Unbestimmte derselben zur Bestimmtheit ergänzen. Im mathematisch gradlinigen gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel absolut gleich; denn es liegt in diesem Satz nichts als die im Empirischen vorgebildete Ueberzeuguug von der Verschiebbarkeit fester Gebilde im Raume und der Möglichkeit der sich in allen Lagen deckenden graden Linie, diese Ueberzeugung aber wird durch Postulat von den Mängeln und Einschränkungen der empirischen Konstruktion befreit und als bedingungslose Endforderung eines geistigen Processes hingestellt. So gewährt die Geometrie die Selbstgewissheit, wie wir sie für Vorgänge des Geistes haben. Andrerseits ist sie Regulativ der möglichen Erfahrung. Alle beobachteten und alle nicht beobachteten, aber sicher vorhandenen Abweichungen der Basiswinkel eines gezeichneten gleichschenkligen Dreiecks werden nur als Mängel gegenüber dem Idealgebilde betrachtet und erschüttern den mathematischen Satz nicht, weil dieser Satz grade dadurch entstanden ist, dass wir in dem Vorstellungsbilde die Ursachen jener Abweichungen, Dicke und Ungradheit der Linien, immer mehr beseitigt und schliesslich das von jenen Mängeln gänzlich befreite, aber nicht mehr vorstellbare Gebilde als Grenze hingestellt haben.

Wie die geometrischen Gebilde nicht als vollendete Vorstellungen sondern nur als Forderungen fassbar sind, wie sie also den der Analysis angehörigen Charakter der Grenze an sich tragen, so lehrt die Selbstbesinnung, dass jeder einzelne geometrische Erfindungsakt von der gemischten

---

beobachtbaren Eigenschaften der elementaren Körperformen so, dass sie ideale Musterbilder werden, denen alle Wirklichkeit nur beliebig nahe gebracht werden kann, die sie aber niemals zu erreichen vermag."

Natur der Gebilde Gebrauch macht, durchaus entsprechend den Gedankenoperationen, welche man in der Analysis als Grenzübergang bezeichnet.

Soll der Grenzwert des Verhältnisses aufgesucht werden, welchen das Inkrement der Funktion x^2 zum Inkrement der unabhängigen Veränderlichen x hat, also lim. $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$, so wird man vergeblich den Geist martern, in diesem Verhältnis den Uebergang zum Unendlichkleinen wirklich zu vollziehen. Entweder er bleibt bei irgend einem sehr kleinen Wert h stehen, dann ist $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ nicht das geforderte Grenzverhältnis; oder er setzt das Resultat des unendlichen Processes als vollendet und anticipiert $h = 0$, dann ist das Verhältniss den Grössenbegriffen entzogen $\frac{0}{0}$, also unbestimmt. So lange, als nicht ein von h unabhängiger Teil des Verhältnisses gewonnen ist in der Form $2x + h$, ist es gleichgiltig, wie gross man sich h denkt; es hat nur die negative Eigenschaft, nicht bestimmt zu sein. Ist diese Form erlangt, dann darf der Process in seinem Endziel $h = 0$ als vollendet gesetzt werden und liefert das Grenzverhältnis $2x$.

Ganz ebenso braucht man die geometrische Vorstellung nicht mit der Forderung abzuhetzen, die Punkte, Linien und Flächen, mit denen sie arbeitet, immer weiter und weiter zu verflüchtigen. Was die geübteste und feinste Vorstellungskraft hierin leisten kann, unterscheidet sich nur dem Grade nach von dem, womit sich die rohste begnügt. Während der Erfindung und Bearbeitung ist einzig nötig, dass die Gebilde wirklich Vorstellungen bleiben und sich nicht in Nullbegriffe auflösen; die schaffende geometrische Vorstellung ist thatsächlich immer empirisch oder physisch geometrisch. Die Ausdehnung des Punktes, Breite und Dicke der Linie, Dicke der Fläche sind zunächst nicht Null, sondern unbestimmt und dürfen beim Aufsuchen von Beziehungen nicht in betracht gezogen werden. Hat die Vorstellung eine von ihnen unabhängige, konstante Beziehung fixiert, erst dann wird dieselbe von der empirischen Unbestimmtheit befreit, indem im Denken das Nullresultat des endlosen Vorstellungsprocesses als vollendet behandelt und damit die Vorstellbarkeit selbst aufgegeben wird.

Die Analyse der Begriffe Punkt, Linie, Fläche und die Praxis zeigen: Die vorstellbaren Gebilde sind keine Grenzen, und die Grenzen sind nicht vorstellbar. Vorstellbare Grenzen tragen denselben unauflöslichen Widerspruch in sich, der sich im analytischen Grenzbegriff birgt. Andrerseits liefern die vorgestellten Gebilde nur die unbestimmten Aussagen der physischen Geometrie, die Nullbegriffe nur eine rein analytische Geometrie, ein System von in sich konsequent durchführbaren, abstrakten Zahlenabhängigkeiten. P. Du Bois-Reymond[1]) stellt die beiden Auffassungsweisen, die empiristische und die idealistische, als unversöhnbar gegenüber; sie sind unversöhnbar und können nicht gleichzeitig bestehen, aber die geometrisch thätigen Individuen zerfallen nicht in Empiristen und Idealisten, sondern der Empirist, der zu bestimmten Aussagen gelangen, und der Idealist, der die Vorstellung nicht verlieren will, beide behandeln die ihrem geistigen Auge gegenwärtige, empirisch-geometrische Vorstellung idealistisch, d. h. so, als ob das Ende des unendlichen Grenzprocesses erreichbar wäre.

Es giebt eine zweite Definition der geometrischen Grundgebilde, nicht durch Verminderung der Dimensionenzahl, sondern durch Vermehrung derselben: Die Linie ist die Bahn eines sich bewegenden Punktes, die Fläche der Linie, der Körper der Fläche.

Die erste Entstehungsart bietet sich als die näherliegende dar; denn das empirisch reale Raumbild, welches wir zur Erklärung des in unsern Sinnen gegebenen von uns unab-

---

[1]) P. Du Bois-Reymond, Allgemeine Funktionentheorie I. Tübingen 1882.

hängigen Elementes konstruieren, ist nicht aus Punkten und Linien, sondern aus flächenhaft begrenzten Körpern zusammengesezt. Deshalb ist für die praktische Einführung in die Geometrie dieser Weg wohl der beste. Indess ist doch, abgesehen von den besprochenen Schwierigkeiten der Begrenzung und Teilung, wohl zu beachten, dass das Bild der Aussenwelt nicht anders als durch Bearbeitung der vom Subjekt abhängigen und der von ihm unabhängigen Veränderung entsteht, ja dass das Bild eines Körpers oder einer räumlichen Figur, wenn es auch nicht aus Atomen zusammengesetzt wird, doch auch nicht als Totalität vorhanden ist, sondern dass seine Teile successive durch eine Bewegung der Einbildungskraft durchlaufen werden. Zwar kann ein in der Vorstellung oft durchlaufener Weg sich zu einem Komplexbilde zusammenziehen; wenn ich das Wort Kreis höre, ist mir eine runde, in einem Blick übersichtliche Linie als Ganzes gegenwärtig. Aber eine Gewähr für die Uebereinstimmung des Komplexbildes mit dem im Wort Kreis liegenden Gesetz kann ich nur gewinnen, indem ich den Kreis prüfend durchlaufe, mag die zu grunde gelegte Definition der Form nach genetisch sein oder nicht.

Weil Raumanschauung und geometrische Gebilde ohne Bewegung nicht möglich sind und weil die Entstehung einer Figur die in der Verbaldefinition nicht enthaltene Gewähr ihrer Möglichkeit giebt, tragen wir Neueren im Gegensatz zu den Alten kein Bedenken, die Bewegung im Aufbau der Geometrie zuzulassen; ja es ist das Kennzeichen der „neueren Geometrie“ im engeren Sinne, dass sie nicht nur die Ortsveränderung der Gebilde gestattet, die Bewegung auch nicht nur zur Entstehung dieser Gebilde benutzt, sondern sie in sich veränderlich erhält.

Zwar haben auch die Alten die Bewegung aus der Geometrie nicht ganz ausschliessen können, zunächst schon nicht in Zulassung und Forderung der Konstruktion mit

Lineal und Zirkel, und ferner nicht in Behandlung der Kongruenz, welche nicht anders festzustellen ist, als durch Bewegung und Deckung der Figuren. Aber sie halten die Bewegung in den engsten Grenzen. Sie definieren den Kreis als die ebene Linie, deren Punkte von einem Punkte derselben Ebene gleichen Abstand haben; sie halten die Bewegung vom Begriff des elementaren geometrischen Orts überhaupt fern; sie erlauben sich nicht, den Cylinder- oder Kegelmantel aufzurollen, ebensowenig, eine ebene Figur aus ihrer Ebene herauszuheben.

Löst sich die Elementar-Geometrie aus dieser Gebundenheit los, lässt sie unbedingte Bewegung der Gebilde zu, zieht sie die genetischen den Existenzialdefinitionen vor, so wird sie doch die einzelnen Gebilde im Sinne der Alten im allgemeinen innerlich starr erhalten. Die veränderlichen Gebilde stellen an die Vorstellungskraft zu hohe Anforderungen; der Beweisgang ist schwerer zu behalten und Fehler sind schwerer zu kontrollieren, wenn die im Lehrsatz feste Figur im Beweis in Bewegung gerät. Die Elementar-Mathematik soll sich an den Fortschritten der Wissenschaft befruchten, sie wird für den geometrischen Ort, für die Determination der Konstruktionsaufgabe, für die harmonischen Punkte, für Pol und Polare u. s. w. methodisch und inhaltlich das Bewegungsprincip der höheren Geometrie ausnutzen; aber sie soll Elementar-Mathematik bleiben, sie soll mit ihren um das Notwendige ergänzten Mitteln das Mögliche zu leisten suchen; die in sich veränderlichen Strahlen- und Kreisbüschel, die projektivische Erzeugung und Beziehung der Gebilde können in den Schülerköpfen nur das Gegenteil von Klarheit und Sicherheit hervorrufen.

Die genetischen Definitionen scheinen noch einen weiteren Vorzug zu haben. Eine auch nur in der Vorstellung auszuführende Prüfung, ob alle Punkte einer Linie von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung haben, ist unmöglich, weil sie sich auf unendlich viel Elemente beziehen, also versuchen müsste, das Stetige atomistisch zu erschöpfen. Die genetische Erklärung dagegen, welche den Kreis durch Drehung einer starren Graden um einen festen Punkt entstehen lässt und die Linie überhaupt als Weg des Punktes betrachtet, scheint diese Schwierigkeit zu vermeiden. Aber, sehen wir hier davon ab, dass das sich Bewegende der in der Vorstellung nicht realisierbare Punkt sein soll, jene ganze Schwierigkeit, ja Unmöglichkeit ist in den Begriff der Bewegung hineingeworfen.

Stetige Aenderung des Intensiven und des Extensiven ist unsrer Wahrnehmung und Vorstellung als empirische Realität gegeben, aber sie widersetzt sich durchaus dem zergliedernd vorgehenden Denken. Allen Auflösungsversuchen trotzt der Kern der Zenonischen Zweifel. Das sich Bewegende teilt seine Bahn beständig in zwei Teile, den durchlaufenen und den noch zu durchlaufenden; will ich die Bewegung begreifen, so mag ich mir die Teilung in sehr vielen nacheinander liegenden Punkten ausgeführt denken, dann bleibt zwischen je zwei benachbarten Lagen ein nicht geteiltes Stück, ein Raumatom; soll es aber durchaus und immer teilen, so stehe ich vor der unvollziehbaren Forderung, das Endliche in Unendlichvieles aufzulösen. Zieht man die Zeit hinzu, so nimmt das Problem die Gestalt an: Entweder nimmt das sich Bewegende jede Lage einmal ein, so muss es in jeder Lage eine Zeitlang sein, sonst würde seine Identität aufgehoben; dann kann es in endlicher Zeit nicht ein endliches Stück zurücklegen; oder es bewegt sich springend zeitlos von einer diskreten Lage zur nächsten, nur in diesen ruhend, dann kann das zählende Denken es in jeder dieser Lagen fixieren, und die endliche Zeitsumme ist gesichert, aber damit wird die Frage nur weiter zurückgeschoben: Wie kommt das sich Bewegende in endlicher Zeit aus einer Lage in die nächste? [1])

---

[1]) Raab, Die Zenonischen Beweise.

Auflösungsversuche wie: „Ebenso wie den Raum sind wir genötigt die Zeit unendlich teilbar zu denken," und „Das sich Bewegende bewegt sich nicht zählend," liefern nur negative Resultate: Dadurch, dass für die Zeit dieselbe Unbegreifbarkeit aufgewiesen wird, ist sie für den Raum nicht beseitigt; und die Unverständlichkeit der Bewegung liegt an der Art, wie das Denken sie zu begreifen versucht und seiner Natur nach zu begreifen suchen muss. Das Denken kann nicht anders als sondernd, zergliedernd, zählend vorgehen; damit aber ist das in der inneren und äusseren Wahrnehmung gegebene Stetige nicht zu bewältigen. „Das Stetige und das Diskrete sind ihren Grundbegriffen nach so vollkommen entgegengesetzt, dass die Forderung, das erstere in den Formen des letzteren zu denken, notwendig auf einen Widerspruch führen muss." [1]) Die Bewegung ist der Anschauung grade so wirklich und dem Verstande grade so unzugänglich, [2]) wie die Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks eine reale Vorstellungsgrösse, dabei aber doch durch die Kathete für alle Ewigkeit unmessbar ist.

Indem die Existenzialdefinition die Prüfung aller Punkte eines Ortes fordert, zeigt sie offen die Inkongruenz von Stetigem und Unstetigem. Die genetische Definition verhüllt diese Inkongruenz im Begriff der Bewegung. Zwar die Analyse der Bewegung führt auf das Geheimnisvolle des Unendlichkleinen und des Grenzbegriffs, aber die vollzieh-

---

[1]) Drobisch, Ueber den Begriff des Stetigen und seine Beziehungen zum Kalkül. Berichte der Königl. Ges. der Wiss. Leipzig 1853.

[2]) Dilthey, Einleitung in die Geisteswissenschaften, Leipzig 1883. „Der erkenntnistheoretische Standpunkt erkennt, wie die Wirklichkeit in der Anschauung gegeben ist, und wie die unendliche Freiheit des Willens diese Wirklichkeit beliebig teilen und zusammensetzen, wie sie vermittelst der Abstraktion das reale Kontinuum und die Bewegung durch Punkte, durch Zerlegung der Bahn der Bewegung in solche Punkte nachbilden kann, ohne damit doch jemals die Realität der Anschauungsthatsache selber zu erreichen." (S. 197.)

bare Vorstellung der Bewegung drängt diese Analyse nicht auf. Sie kann vermieden werden, ohne dass das Gefühl einer Lücke entsteht. Da nun die Elementar-Mathematik Schwierigkeiten dieser Art nur aufzunehmen hat, wo sie sich nicht vermeiden lassen, so ist dies Verhalten ein weiterer Grund, der genetischen Definition vor der Existenzialdefinition den Vorzug zu geben.

II.

Das Messen und die Irrationalzahl.

Eine Grösse[1]) messen heisst prüfen, wie oft ein Mass, eine der zu messenden gleichartige Grösse oder das Vorstellungsbild einer solchen, in der ersteren enthalten ist.

Die zu messende Grösse kann eine diskrete Mannigfaltigkeit sein, d. h. aus Elementen zusammengesetzt, welche unter einem die Unteilbarkeit einschliessenden Begriff aufgefasst werden, z. B. die Bürgerschaft einer Stadt als Komplex der zur Reichstagswahl berechtigten Stimmen. Eine solche Mannigfaltigkeit wird gemessen oder ausgezählt, indem in der produktiven Einbildungskraft jeder Bürger an dem Vorstellungsbilde eines Wählers geprüft wird. Jener als unteilbar gedachte messende Grundbegriff ist die Einheit, das Resultat des geistigen Processes ist die ganze Zahl, welche auch 1 oder 0 sein kann.

Zweitens kann das Messende selbst teilbar sein und seine Teile untereinander und mit dem Ganzen gleichartig, also nicht wie die unvergleichbaren im Weiss enthaltenen Spektralfarben, sondern wie die Intensitätszuwächse und Abnahmen des weissen Lichtes selbst, oder wie die in allen Teilen vergleichbare grade Linie. Wir wählen als Vertreter dieser nicht diskreten Grösse die grade Linie selbst, und zwar,

---

[1]) Ebensowenig wie im ersten Abschnitt auf die Entstehung der Raumanschauung gehe ich hier auf die des Grössen- und Zahlbegriffs ein.

da der Begriff des Teilens und Abmessens an der empirischen Linie überhaupt nicht statt hat, die durch den Grenzbegriff idealisierte, mathematische Linie.

Bei der Ausmessung einer Strecke AB durch die Einheitsstrecke sind folgende Fälle möglich: Erstens, das Mass füllt, von A aus mehrmals nacheinander auf AB aufgetragen, die Strecke AB vollständig aus, die Masszahl α_0 ist eine ganze Zahl. Zweitens, nicht das Mass selbst, sondern Teile desselben, z. B. die durch fortgesetzte Zehnteilung[1]) entstehenden Teile, erschöpfen die Strecke AB; die Masszahl[2])

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots \frac{\alpha_n}{10^n} = \alpha_0, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

ist ein Bruch, speciell ein Decimalbruch. In beiden Fällen nennen wir AB und die Einheitsstrecke kommensurabel, die Masszahl rational.

Aber es ist möglich, dass die Strecke AB durch Zehnteilung des Masses sich nicht erschöpfen lässt, wohl aber durch Teilung nach einem andern Gesetz. Ist $AB = \frac{8}{3}$ m, so liefert der Decimal-Metermassstab keine abgeschlossene Masszahl, sondern einen ohne Abschluss fortlaufenden Decimalbruch 2,666 . . . Nehmen wir zunächst an, dass dem Messenden die Grösse von AB nicht anderweitig bekannt ist, so wird zwar, solange er nur mit Decimalteilung weitermisst, keine andere Masszahl auftreten, als die sich stets

---

1) Die Probe auf Messung durch fortlaufende Zehnteilung hat Schlömilch, Grundzüge einer wissensch. Darstellung der Geometrie des Masses, Aufl. 6, Leipzig 1883, auf eine sehr durchsichtige Form gebracht durch das Schema

$$\begin{aligned} b &= \alpha_0 \,.\, a + r \\ 10r &= \alpha_1 \,.\, a + r_1 \\ 10r_1 &= \alpha_2 \,.\, a + r_2 \\ \vdots\;\; & \;\;\vdots \quad + \quad \vdots \end{aligned}$$

Hierdurch erscheint die Masszahl in der Gestalt

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10_2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots .$$

2) Ich benutze die Bezeichnungsweise von Du Bois-Reymond, allgemeine Funktionentheorie.

wiederholende 6; aber er hat nicht die Möglichkeit, durch blosses Messen diese Wiederholung der 6 als ein Gesetz hinzustellen. Da er die Messung doch irgend einmal abbrechen muss, bleibt ihm nichts anderes übrig, als zu erklären, dass auf diese Weise die Strecke AB für ihn nicht genau ausmessbar ist, sondern nur mit einer Genauigkeit, welche empirisch durch die Schärfe der Werkzeuge im weitesten Sinne bedingt wäre, idealistisch als eine ganz beliebige vorgestellt werden darf. Macht der Messende dagegen, ehe er den Decimalmassstab anwendet, die Probe des gemeinschaftlichen Masses:[1] Es möge die Masseinheit CD sich auf AB 2mal auftragen lassen bis E, EB 1mal auf CD bis F, und FD gehe in CF nach 2maligem Auftragen auf, so ist $AB = \frac{8}{3}\, CD$. Jetzt lässt sich diese $\frac{8}{3}$ Strecke rechnend oder messend in Decimalmass übertragen: 1 m geht in $\frac{8}{3}$ m 2mal auf, 1 dm in $\frac{2}{3}$ m $= \frac{20}{3}$ dm $= 6\frac{2}{3}$ dm 6mal, 1 cm in $\frac{2}{3}$ dm $= \frac{20}{3}$ cm $= 6\frac{2}{3}$ cm 6mal u. s. w.; also $AB = 2{,}666\ldots$ m, worin nunmehr die Gesetzmässigkeit der sich wiederholenden 6, die periodische Natur des Decimalbruchs festgestellt ist.

So lässt sich das gesetzlose direkte Massresultat 2,666 in das gesetzmässige 2,666 . . . überführen. Dieses Resultat fordert, um die Strecke AB decimal auszudrücken, einen Fortgang des Messens oder des gesetzmässigen Vorstellungsvorganges ins Unendliche. Wollen wir nun diesen Ausdruck, der nur eine unvollziehbare Forderung ausspricht, als Masszahl der ganz bestimmten und auf andre Weise endlich messbaren Strecke AB gelten lassen; wollen wir auch das Umgekehrte zugeben, dass durch einen solchen periodischen Decimalbruch eine Strecke AB eindeutig bestimmt ist, d. h. dass, wenn von A angefangen die Strecken 2 m 6 dm 6 cm 6 mm . . . nacheinander aufgetragen werden, dadurch ein bestimmter Punkt B aus allen ihren Punkten heraus bezeichnet ist?

---

[1] Euklid, Elemente X, 3.

Derselbe Punkt, der sich durch Konstruktion herstellen und durch die Masszahl $\frac{8}{3}$ genau kennzeichnen lässt, ist auf dem Wege der Decimalteilung absolut unzugänglich. Das Teilen und Messen führt nur zu einer immer weiter gehenden Einengung des fraglichen Punktes durch die successiven Grenzen 2,6 und 2,7 2,66 und 2,67 u. s. w., also auf eine immer kleiner werdende Strecke, aber nicht auf einen Punkt. Auch der hypothetische Ausdruck: wenn man in der Reihe 2,666 . . . ins Unendliche fortgehen könnte, würde man den Punkt $\frac{8}{3}$ erreichen, hilft nicht aus der Unbestimmtheit heraus. Ich kann das Unendliche nicht denken, also darf ich auch nicht annehmen, dass ich es denken könnte.

Für den, der sich auf den rein empirischen Standpunkt stellt, ist 2,666 . . nicht gleich $\frac{8}{3}$, ja für ihn ist 2,666 . . mit seiner unendlichen Fortsetzbarkeit überhaupt keine Zahl, und bezeichnet auf der graden Linie keinen Punkt. Soll $2{,}666\,.\,. = \frac{8}{3}$ sein und einen bestimmten Punkt der Graden bezeichnen, so muss hier schon ein Grundsatz über das Endresultat des nicht zu Ende vollziehbaren Reihenvorganges, eine Erweiterung des Massbegriffs und der Gleichheit aufgestellt werden.

Dieser Grundsatz liegt in dem von der Analysis eingeführten Begriff der Grenze. Wir legen dem Decimalbruch $\alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots$ einen Grenzwert L bei, wenn die Differenz $L - \alpha_0, \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n$ mit wachsendem n kleiner als jede beliebige Grösse wird.

In alle Rechnungs- und Grössenbeziehungen, also auch in die der Gleichheit, tritt der geschlossene Grenzwert für den nichtgeschlossenen Reihenwert gleichberechtigt ein.

Die Natur der im Grenzbegriff liegenden Forderung tritt grade in dem Falle, wo derselbe Punkt- und Zahlenwert auf andre Weise genau erreichbar ist, deutlich ans Licht. Durch den Grenzbegriff wird hier nicht eine neue Zahl geschaffen, sondern nur die Einheit zwischen verschiedenen geistigen Vorgängen hergestellt. Die Forderung dieser Einheit ist eine unausweichliche, sie ist Selbsterhaltungstrieb des Geistes, Erhaltung des Identitätsgesetzes. Die Vorstellung kann thatsächlich nie den Moment erreichen, in dem Achill die Schildkröte einholt, wenn sie sich, wie das Zenonische Paradoxon es verlangt, einmal darauf eingelassen hat, den Weg in der Form des successiven Erreichens des von der Schildkröte verlassenen Platzes, also in der Form der unendlichen Reihe $\alpha + \frac{\alpha}{10} + \frac{\alpha}{100} \ldots$ zu erfassen; aber wir dürfen daraus nicht herleiten, dass er sie nie erreicht. Denn eine andre Ueberlegung sagt uns ebenso sicher, dass wenn die Schildkröte die Geschwindigkeit a m hat, Achill die Geschwindigkeit $10\,a$ m, und die ursprüngliche Entfernung α m beträgt, derselbe Weg des Achill $\frac{10\,\alpha}{9}$ m ist. Wir wahren nur die Begreifbarkeit der Natur und die Uebereinstimmung unsrer Denkakte dadurch, dass wir festsetzen: das Unbestimmte muss dem Bestimmten weichen, das Unbestimmte hat zur Grenze das Bestimmte.

Mit der Forderung der Erreichbarkeit einer rationalen Bruchzahl und des entsprechenden Punktes durch endlos sich verkleinernde Schritte ist thatsächlich an dieser Stelle schon die Stetigkeit der Zahlen- und Punktreihe in der Nachbarschaft aller rationalen Werte (nicht in allen Werten) ausgesprochen. Es ist ferner der vorher nur auf Kongruenz beruhende Begriff der Gleichheit dahin erweitert, dass gleich nunmehr nicht nur Grössen genannt werden, welche unter einander oder mit derselben dritten Grösse zur Deckung gebracht werden können, sondern auch solche, deren Unterschied kleiner als jede beliebige Grösse erwiesen werden kann. Indem ich mir die Ausführung dieser sich schon hier darbietenden Gedanken auf eine spätere Stelle aufbewahre, kehre ich zu den beim Ausmessen einer Strecke möglichen Fällen zurück.

Es ist möglich, dass die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Masses einer Strecke AB und der Massstrecke *1 m* zu keinem Resultat führt. Durch blosses empirisches Messen freilich würde sich nur die Aussage begründen lassen: bis zu dieser Stelle des Processes hat sich kein gemeinschaftliches Mass ergeben, aber nicht: für AB und $1\ m$ existiert kein gemeinschaftliches Mass. Aber eine Kombination des Zahlen- und Konstruktionsbegriffs hat schon den Alten gezeigt, dass ideal- oder reingeometrisch dergleichen Punkte und Strecken auf der Graden wirklich herstellbar sind.[1]) Die Hypotenuse AB eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks mit der Einheit als Kathete ist nicht durch rationale Bruchteile der Einheit ausmessbar. Die hypothetische Masszahl von AB müsste ein Quadrat haben, in dem das Einheitsquadrat zweimal enthalten ist; wir können uns ihr durch rationale Zahlen mit beliebiger Genauigkeit nähern und bezeichnen sie als $\sqrt{2}$, womit zunächst nicht eine Zahl, sondern eine nicht realisierbare Aufgabe ausgedrückt wird. Ebenso lassen alle andern Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen sich als geometrische Längen, nicht als Zahlen darstellen.

Wir stehen vor der Erneuerung und Erweiterung der schon einmal aufgestellten und zum Teil beantworteten Frage: wenn der Versuch, eine Strecke AB auszumessen, einen nicht endenden, für den Messenden gesetzlosen Decimalbruch ergiebt, ist dann die Strecke messbar, entspricht ihr eine Zahl; und umgekehrt: wenn wir die aufeinander folgenden Streckenwerte des Decimalbruchs, der von $\sqrt{2}$ beliebig wenig abweicht, auf eine Grade auftragen, entspricht dann der Zahlforderung $\sqrt{2}$ ein bestimmter Punkt? Und weiter; haben wir erst die Erfahrung gemacht, dass auf der Graden Punkte vorhanden sind, welche mit der Einheit inkommensurabel sind, deren Masszahlen also nicht rationale Brüche sein können, so können wir die Frage nicht ablehnen, ob

[1]) Euklid, Elemente X, 117. Die Auffindung des Irrationalen wird Pythagoras zugeschrieben. Bretschneider, Geometrie und Geometer vor Euklid, Leipzig 1870, S. 83.

nicht auch höheren Wurzeln, obgleich sie nicht wie die Quadratwurzeln mit Lineal und Zirkel zu konstruieren sind, bestimmte Punkte entsprechen, und ob nicht schliesslich jedem Punkte der Graden eine Zahl, wenn auch nicht eine rationale, zugeordnet ist.

Wenn wir die geometrischen Gebilde als Endresultate eines Grenzprocesses aufgefasst haben, wenn wir dem periodischen Decimalbruch durch den Grenzbegriff einen bestimmten Zahlen- und Streckenwert beilegen, so können wir auch hier nicht anders als durch Erweiterung des Grenzbegriffs über die rationalen Werte hinaus, durch eine neue Forderung, diese Fragen bejahen.

Einen empirisch korrekten Standpunkt, einen Standpunkt des Nichtwissens, nimmt der ein, welcher an einer durch die Genauigkeit des Messens oder der Vorstellungsweise bedingten Stelle der Reihe stehen bleibt; ihm ist $\sqrt{2}$ nicht eine Zahl, sondern ein Zahlenspielraum, und auf die Linie aufgetragen nicht ein Punkt, sondern eine kleine Strecke. Aber auch der Empiriker ist nur soweit Empiriker, als er sich innerhalb der praktischen Ausführbarkeit hält; er kann seine Vorstellung nicht an einer Stelle festschrauben, die Möglichkeit des Weitergehens muss er zugeben; auch er kann die Forderung, Anschauen und Denken zu versöhnen, nicht ertöten, sondern nur durch einen Gewaltakt zum Schweigen bringen.

Wir stellen demnach auch für nichtrationale Stellen die durchgehende Korrespondenz zwischen Zahl und Linie her, indem wir festsetzen: Durch einen unendlichen Process ist ein Punkt und ebenso eine Zahl bestimmt, die Grenze L dieses Processes, wenn wir in dem Prozesse beliebig weit gehend die Abweichung des erhaltenen Punktes oder der erhaltenen Zahl von L kleiner machen können, als jede noch so kleine Strecke oder Zahl. Oder: Zerfallen durch einen beliebig weit zu verfolgenden Process z. B. Ausziehung der $\sqrt{2}$ oder Auftragen der Werte 1,4 1,5 1,41

1,42 . . . alle Zahlen und alle Punkte der Graden in zwei Gruppen, so dass jede Zahl der einen Gruppe grösser ist als jede der andern, und jeder Punkt der einen Gruppe rechts von jedem der andern, so ist durch den Process in der Zahlenreihe eine ganz bestimmte Zahl und auf der Graden ein ganz bestimmter Punkt definiert.

Durch diesen Grundsatz ist die Stetigkeit der Zahlenreihe ausgesprochen und die stetige Natur der Linie für das unstetige, messende, zählende Vorgehen des Verstandes erst angreifbar gemacht.[1]) Der Grenzbegriff ist, wie Dedekind darlegt,[2]) das diskursive Korrelat des in der Anschauung vorhandenen Stetigen, die Definition des Stetigen selbst. Dass die verstandesmässige Erfassung des Stetigen nur durch einen axiomatischen Hilfsbegriff möglich ist, müssen wir als Thatsache hinnehmen.[3])

---

[1]) Nicht durch Definitionen wie: stetig ist, was Zusammenhang in den kleinsten Teilen hat; denn der Begriff des Zusammenhangs sowohl wie der kleinsten Teile ist unklar, und die Analyse ergiebt nie Zusammenhang, sondern immer Isoliertheit der Teile (vergl. Abschn. I); auch nicht durch die negative Kantsche Definition: stetig ist, von dem kein Teil der kleinste ist; diese Eigenschaft kommt nicht nur der stetigen Punkt- und Zahlenreihe zu, sondern auch der unstetigen Reihe der rationalen Punkte und Zahlen.

[2]) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.

[3]) Die Auflösung der vorgeblichen Beweise der Grenze s. bei Du Bois-Reymond, Allgemeine Funktionentheorie S. 60—66. Denselben Gedanken spricht Schellbach, Bedeutung des math. Unterrichts, Berlin 1866, S. 10 aus: „Wer jemals über die Natur des Stetigen nachgedacht hat, weiss, dass der Geist das Stetige nicht fassen kann,“ und Drobisch, Ueber den Begriff des Stetigen und seine Beziehungen zum Kalkül S. 173: „Die Mathematik zeigt thatsächlich, dass wir die Gesetze dieses Phänomens des Stetigen durch Denken zu erkennen vermögen, aber auch, dass beim Denken des Stetigen der Widerspruch im Unendlichkleinen sich nicht beseitigen lässt. Ob sich hierdurch eben das blosse Scheinwesen des Stetigen verrät, oder dieser Widerspruch das Anzeichen einer übrigbleibenden Inkommensurabilität zwischeu Denken und Anschauen ist, wodurch das Anschauliche sich als ein in seiner tiefsten Wurzel dem Denken Unerreichbares, Unzugängliches darstellt, — darüber darf man, ohne Feststellung der letzten metaphysichen Principien des Seins und Erkennens, zu entscheiden auch nicht einmal versuchen wollen.“

Nicht nur für die grade Linie selbst ist die unbedingte Anwendbarkeit des Mass- und Zahlbegriffs jetzt auszusprechen. Die angewandte Mathematik, wozu hier auch die rechnende Geometrie gehört, hat ihr Forschungsprincip darin, alles der innern und äussern Erfahrung als Zustand, Qualität Gegebene durch Einführung einer Einheit der Vergleichung und Messung zugänglich zu machen, die Qualitas als Quantitas zu fassen, die Reihe der Zustande mit der Zahlenreihe in Korrespondenz zu setzen. Erweist sich die zu messende Grösse als in der Vorstellung unbeschränkt teilbar, wie die grade Linie, sind die Teile, wie die der graden Linie, untereinander und mit dem Ganzen gleichartig, so ist ihre Beziehung zur Zahlenreihe dieselbe wie die der Punktreihe; auch sie ist stetig und unterliegt dem Grenzbegriff. Du Bois-Reymond führt für derartige Grössen den Namen „lineare Grössen“ ein. Dahin gehört Raum-, Zeit-, Empfindungsgrösse und alle darin enthaltenen: Linien-, Flächen-, Volumen-, Drehungs-, Krümmungsgrösse, Geschwindigkeit, Intensität. Sämmtliche denkbaren Volumina z. B. sind untereinander vergleichbar; sie sind entweder gleich oder ungleich, der Ueberschuss des einen über das andere ist wieder eine Volumengrösse; sie lassen sich in eine vom kleineren zum grösseren aufsteigende Reihe ordnen. Wählen wir eines als Einheit, so entspricht jedem Volumen eine Zahl, rational oder irrational. Gleichgiltig ist, ob wir die Methode besitzen, diese Zahl wirklich zu bestimmen; wir behaupten nur, dass wenn eine Messungsmethode selbst eine nicht abzuschliessende, sich einem Grenzwert nähernde Reihe von Zahlenwerten ergeben sollte, der Grenzwert als ideale Masszahl anzusehen ist.

Anders verhält es sich mit der Vergleichung solcher Grössen, welche zwar als Arten derselben Grössengattung anzusehen sind, deren specifische Differenz aber ein Qualitätsunterschied ist. So gilt die Reduktion auf den linearen Zahlbegriff nur für Kräfte ihrem absoluten Werte nach, tritt die Qualität der verschiedenen Richtung hinzu, so muss die Vergleichbarkeit erst durch einen besonderen Grundsatz, nach welchem sie in Beziehung zu setzen sind, festgestellt werden. Aehnliches gilt für die Reduktion einer Rotation auf Einzelkräfte; für den Mechanismus der Seelenbewegungen, in dem ebenfalls ungleichartige Grössen, Empfindungen und Strebungen, in Beziehung zu setzen sind; wie schon früher bemerkt, für die Intensitäten verschiedener Spektralfarben, welche zwar sämtlich unter den Begriff Lichtwirkung fallen, aber durch Qualitätsunterschiede direkt unvergleichbar gemacht werden.

So ist in der Geometrie Winkel durch Winkel, als Drehungsgrösse gedacht, direkt messbar; mit Bögen desselben Kreises lässt sich der Centriwinkel durch Proportionalität verknüpfen; mit der graden Linie wird nur künstlich eine Verbindung hergestellt. Ebensowenig ist die Kreislinie oder eine andere Kurve messbar durch die grade Linie, oder eine krumme Fläche durch eine ebene, wenn wir nicht der Vergleichung einen Grundsatz oder eine Definition zu Grunde legen. Die Fläche eines Kreises kann von einem Quadrat umschlossen werden, ein anderes einschliessen; sie ist kleiner als jenes und grösser als dieses, also mit beiden vergleichbar nach dem geometrischen Anschauungssatz, dass die Teile der Ebene unter einander gleichartig sind, und dem allgemeinen Grössensatz, dass das Ganze grösser ist als jeder seiner Theile. Aber auf kein Stück der Kreislinie lässt sich die grade Linieneinheit oder ein Teil derselben auftragen, also Kreislinie und Grade sind unvergleichbar, und es hat von der Länge der Kreisperipherie, welche Vorstellung praktisch durch das Strecken eines kreisförmigen Fadens gerechtfertigt ist, zu reden geometrisch keinen Sinn, wenn nicht durch eine Definition festgestellt wird, was unter Länge der Kreisperipherie verstanden werden soll.

Versuchen wir, uns einem Kreisstück durch einen polygonalen Zug von n Sehnen $A A_1 A_2 \dots A_{n-1} B$, der Einfachheit wegen seien es Seiten eines regulären Polygons, anzuschmiegen, so können wir durch fortgesetzte Zweiteilung der Centriwinkel die Annäherung der Lage nach soweit treiben wie wir wollen; denn die grösste Abweichung des Bogens von der zugehörigen Sehne, die Grösse $r-\varrho$, kann, was allein aus dem pythagoreischen Lehrsatz folgt, kleiner gemacht werden als jede beliebige Grösse. Ebenso liefern die in $A\ A_1\ A_2\ ..\ A_{n-1}\ B$ an den Kreis zu legenden Tangenten einen polygonalen, regelmässigen Linienzug $A\ \alpha_1\ \alpha_2\ ..\ \alpha_{n-1}\ B$, der sich der Lage nach der Kreisperipherie beliebig nahe anschmiegt. Aber eine Grössenvergleichung lässt sich aus der Lagenannäherung nicht erschliessen; denn ein Zusammenfallen des Kreisbogens mit der Graden findet nie statt. Zwei Wege giebt es, eine Beziehung herzustellen. Entweder, bevor der Weg der successiven Annäherung beschritten wird, setzt man axiomatisch die Vergleichbarkeit des Kreisbogens und der Graden fest; dies thut Archimedes durch zwei Grundsätze, in denen liegt: die Sehne AA_1 ist kürzer, der Tangentenzug $A\alpha A_1$ ist länger als der zugehörige Kreisbogen[1]. Alsdann ist die weitere Aufgabe nur der Nachweis, dass die Differenz der Umfänge des um- und einbeschriebenen Polygons kleiner gemacht werden kann als jede beliebige Grösse, und diese Umfänge, zwischen denen gemäss jenen Grundsätzen der Kreis auch der Grösse nach eingeschlossen ist, in der Einheit des Radius zu berechnen. Der andre Weg setzt das Princip der Ausmessbarkeit des Kreises an das Ende des Annäherungsverfahrens: wir definieren die Länge des Kreisbogens AB als die Grenze, welcher sich die Summe der Sehnen $S_n = A\ A_1 + A_1\ A_2\ ...\ + A_{n-1}B$ bei unendlich wachsendem n nähert. Hier bleibt die Aufgabe, nachzuweisen, dass für diese Summe ein Grenzwert L existiert, d. h. dass bei wachsendem n die Differenz $L - S_n$ unter jede Grösse sinkt. Dieser Nachweis gelingt für den Kreis durch

[1]) Archimedes, Ueber Kugel und Cylinder I, Forderungen 1. 2.

Heranziehung der umbeschriebenen regulären Polygone. Man zeigt, dass S_n mit zunehmendem n beständig, aber nicht über jede Grenze wächst; alsdann hat es eine Grenze L nach einem Satze, der sich aus dem oben zu grunde gelegten Dedekindschen Grenzprincip herleiten lässt.[1]) Ganz ebenso ist die Grösse einer unebenen Fläche gemessen durch eine ebene nur dann ein statthafter Begriff, wenn sie durch im Endlichen bleibende Axiome[2]) oder durch den Grenzwert unendlich vieler, ins Unendliche abnehmender ebener Flächenstücke definiert wird.

So ist die Länge des Kreises und jeder krummen Linie, die Grösse der Kugelfläche und jeder krummen Oberfläche im Grunde ein analytischer Begriff, ein bestimmtes Integral[3]), wenn sie in den Elementen auch nicht im Gewande eines solchen auftreten darf; die Kreisfläche und das Kugelvolumen dagegen sind zwar wirklich zu berechnen nur durch Aufsuchung der Grenzwerte von unendlichen Reihen, aber ihr Begriff ist schon durch den der stetigen, linearen Grösse mit der ebenen Flächeneinheit und der Volumeneinheit verknüpft.[4])

[1]) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen § 7.

[2]) Archimedes, Ueber Kugel und Cylinder I, Forderungen 3. 4.

[3]) Die hier vorgetragene Auffassung, dass die Länge einer krummen Linie einer Definition bedarf, ist in den dreissiger Jahren von Dirksen (vergl. Ballauff, Ueber die math. Def. u. Axiome, Progr. Varel 1879), von Dirichlet 1854 in einer Vorlesung über Integral-Rechnung (nach der Mittheilung eines seiner Schüler), von Duhamel (Des méthodes dans les sciences de raisonnement II), neuerdings von Du Bois-Reymond (Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variations-Rechnung, Math. Annalen XV) und von Stolz (Ueber Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimal-Rehnung, Math. Annalen XVIII) vertreten worden.

[4]) Stolz, Math. Annalen XVIII S. 277, leugnet diesen Unterschied; wie mir scheint, weil er Begriffsbildung und Zahlenauswertung nicht genügend scheidet.

Der Versuch, die Definitionen von Kreislinie und Kugeloberfläche dadurch zu umgehen, dass man zuerst Kreisfläche und Kugelvolumen durch r ausdrückt, ist vergeblich; denn die Beziehung zwischen F und P, V und O ist nicht anders herzustellen, als indem man Kreislinie und Kugeloberfläche als Grenzwerte grader Linien- und ebener Flächenzüge definiert.

Den sichersten Beweis dafür, dass schon der Scharfsinn der Alten diesen fundamentalen Unterschied einsah, finde ich darin, dass Euklid im 12. Buche der Elemente bei den Sätzen stehen bleibt: die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, die Volumina zweier Kugeln wie die Kuben derselben. Sätze über das Verhältniss der Kreisperipherien und der Kugeloberflächen stellt er nicht auf; offenbar deshalb nicht, weil er auf sie den linearen Grössenbegriff nicht anzuwenden vermochte.[1])

Es liegt eine grosse Kühnheit darin, Unvergleichbares durch ein Axiom unter einen Begriff zu zwängen. Uns, die wir gewöhnt sind, fast zu wenig an die Schwierigkeiten zu denken, welche dem Uebergang vom Endlichen zum Unendlichkleinen anhaften, ist diese Begriffsdehnung, die Auflösung des Stetigen in Unstetiges etwas Gewöhnliches; wir prägen sie am kühnsten aus, wenn wir den Kreis ein regelmässiges Polygon von unendlich grosser Seitenzahl, die Kugel ein Polyeder von unendlich vielen Begrenzungsflächen mit gleichem Abstand vom Mittelpnnkt nennen, wenn wir, um Cylinder- und Kegelfläche auszuwerten, den Begriff der developpabeln Flächen bilden.

Unter den alten Mathematikern wagte und vermochte zuerst Archimedes die widerstrebende Natur von Kreislinie, Kugel-, Cylinder-, Kegeloberfläche durch jene Axiome zu bändigen, er ist dadurch der Modernste der alten Mathematiker; aber auch ihn fesselte die Scheu vor dem Unendlichkleinen, er schloss seinen Gedankenkreis durch das indirekte Verfahren der Exhaustion ab, und, für einen Alten selbstverständlich, rollte er Cylinder und Kegel nicht auf, wie wir zu thun pflegen. Er hält es für nötig, in der Vorrede zu „Ueber Kugel und Cylinder“ jenen Schritt zu

---

[1]) Er vergleicht Elemente VI, 33 nur Bögen gleicher Kreise miteinander.

verteidigen, indem er sich auf die Sicherheit der Resultate beruft, welche nicht geringer sei, als die anderer durch Exhaustion bewiesener Sätze. Auch Archimedes' Kommentator Eutokius sucht die Annahme des Archimedes, die Kreisperipherie sei gleich einer Länge, zu rechtfertigen.[1]) Seine Rechtfertigung ist nicht glücklich; denn er beruft sich auf die Gleichartigkeit der Graden und des Kreises, da sie beide von einer Dimension seien. Archimedes selbst hat das wahre Verhältniss richtiger erfasst, indem er jene Vergleichungspostulate aufstellte.

Was für eine Bedeutung die Bewältigung des Unendlichkleinen durch den Grenzbegriff in den Elementen hat, erhellt am besten, wenn wir einen Blick auf die Punkte werfen, in denen sich die Geometrie der Alten, besonders die Elemente des Euklid, von unserem elementaren Lehrgang unterscheiden. Es ist in Abschnitt I schon besprochen worden, dass die Alten die Bewegung als Beweismittel principiell auf das Aeusserste einschränken. Diesen Unterschied ausgenommen und zweitens den damit zusammenhängenden, dass wir der Anschauung einen grösseren Spielraum gewähren als die Alten und mehr als sie auf Uebersichtlichkeit des Systems und organischen Zusammenhang der Sätze hinarbeiten, kann man den Hauptfortschritt unsrer Methode gegen die der Alten darin erkennen, dass wir die Elemente durch den in der höheren Analysis entwickelten Grenzbegriff befruchtet haben.

Die Alten vermeiden die Begriffe des Unendlichkleinen und des Unendlichgrossen, sie schliessen sie durch Axiome ausdrücklich aus der Grössenlehre aus. Zu diesem Zwecke stellt Euklid (Elemente X) die Forderung auf: jede Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede Grösse derselben Art übersteigt; Archimed (Ueber Kugel und Cylinder I, Ford. 5, auch in den Einleitungen zu Ueber Spirallinien

[1]) Eutokius, commentationes in dimensionem circuli, in theorema 1. In Heibergs Ausgabe von Archimeds Werken Bd. III.

und Quadratur der Parabel): von zwei ungleichen Grössen derselben Art überragt die grössere die kleinere in der Weise, dass der Unterschied zu sich selbst hinzugefügt jede beliebige Grösse derselben Art übersteigen kann. Hierauf baut Euklid den Satz (X, 1): wenn man von der grösseren unter zwei gegebenen Grössen mehr als die Hälfte abschneidet, vom Rest wieder mehr als die Hälfte u. s. w., so gelangt man zu einer Grösse, welche kleiner ist als die kleinere der beiden gegebenen; und Archimed (Ueber Kugel und Cylinder I, 2): sind zwei ungleiche Grössen gegeben, so lassen sich stets zwei ungleiche Linien der Art finden, dass die grössere Linie zur kleineren ein kleineres Verhältnis hat, als die grössere gegebene Grösse zur kleineren. Diese Sätze ermöglichen es den Alten, in den Problemen, wo nach unsrer Auffassung Stetiges durch Unstetiges erfasst werden soll, von der Forderung einer wirklichen Erschöpfung des Stetigen durch das Unstetige abzusehen. Sie stellen nicht die Forderung, dass in der Auflösung des Kreises in ein regelmässiges Vieleck die Differenz unter jede angebbare Grösse sinke, sondern sie bleiben bei einer beliebig kleinen Differenz stehen und ergänzen die Exhaustion in jedem einzelnen Falle durch ein indirektes Schlussverfahren auf Grund eines jener beiden Sätze. So beweist Euklid den Satz (XII, 5), zwei dreiseitige Pyramiden verhalten sich wie ihre Grundlinien, in folgenden Schritten: I. Jede dreiseitige Pyramide lässt sich in zwei gleiche, untereinander und mit der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen zerlegen, welche mehr als die Hälfte der Pyramide betragen (XII, 3). II. Wird in zwei dreiseitigen Pyramiden V und V_1 von gleichen Höhen und den Grundflächen G und G_1 diese Zerlegung beliebig weit fortgesetzt, so verhält sich die Prismensumme P in V zur Prismensumme P_1 in V_1 wie $G : G_1$ (XII, 4). III. Wie die Prismensummen verhalten sich auch die Pyramiden; denn angenommen, es sei nicht $P : P_1 = V : V_1$, sondern $P : P_1 = V : W$, wo $W > V_1$ sein möge, dann könnte man nach X,1 die Pyramidenzerlegung soweit fortsetzen, bis man auf Prismensummen Q und Q_1 kommt, wo $Q > W$ ist. Alsdann wäre $P : P_1 = Q : Q_1$, mithin $Q : Q_1 = V : W$, oder $Q : V = Q_1 : W$, was nicht möglich ist, da $Q < V$, $Q_1 > W$ ist. Deshalb verhalten sich die Pyramiden von gleichen Höhen wie die Prismensummen, also wie die Grundflächen.[1])

Dass die Exhaustion in ingeniöser Weise den Begriff des Unendlichkleinen umgeht, und dass sie streng ist, lässt sich nicht bestreiten; aber man thut ihr zu viel Ehre an, wenn man einen Ausspruch Kästners[2]) zu dem bekannten Worte steigert: „Die Geometrie verliert umsomehr an Schärfe, je weiter sich die Geometer von Euklid entfernen.“ Die Exhaustionsmethode kann des Axiomatischen grade sowenig entbehren als die Grenzmethode, sie stellt an den Anfang das Postulat der Vergleichbarkeit, durch welches das Unendlichkleine ausgeschlossen, der ganze Process im Unstetigen, Diskreten erhalten, die besondere Natur des Stetigen geleugnet wird. Sind nur endliche Differenzen als giltig anerkannt, so schneidet der indirecte Schlussbeweis den Regress ab; er sagt aus: Eine endliche Abweichung zwischen den Verhältnissen $V : V_1$ und $P : P_1$ kann nicht bestehen. Wir aber begnügen uns nicht mit dieser abweisenden, negativen Antwort; wir erkennen die besondere Natur des Stetigen an und versuchen wenigstens ihr gerecht zu werden; wir verfolgen positiv den Spielraum der Differenzen vom Kleinen ins Kleinste und setzen ans Ende das Axiom: Ununterscheidbarkeit gilt für Gleichheit. Was also die Schärfe anbetrifft, so steht Axiom gegen Axiom; was wir gewinnen, ist ein allgemeines Princip, dem wir nicht nur eine Aufgabe

---

[1]) Die Analyse des Exhaustionsverfahrens bei Hankel, zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, S. 123 ff. S. 148.

[2]) Kästner, Anfangsgründe Aufl. 2. Göttingen 1764 S. 17. „Man wird die math. Methode schwerlich recht kennen lernen, wenn man nicht Euklid und solche, die ihm getreu folgen, liest.“

sondern eine ganze Gattung von Aufgaben, nicht nur geometrische Gebilde sondern auch das Stetige der Zeit, der Kraft, der Empfindung unterwerfen. Die Exhaustion der Alten blieb am einzelnen hängen; sie gelangten nicht einmal dazu, das als III bezeichnete apagogische Verfahren generell zu behandeln.

Wir haben, im Vergleich mit den Alten, den Begriff der Gleichheit und die Anwendbarkeit des Gleichheitszeichens ausgedehnt. Für die Alten sind gleich nur solche Grössen, welche durch dieselben ausreichenden Bedingungen definiert sind, oder welche untereinander oder mit demselben messenden Vorstellungsgebilde zur Deckung gebracht werden können, oder welche entstehen, wenn mit gleichen Grössen gleiche Veränderungen vorgenommen werden. Wir haben zu diesen Gleichheiten per definitionem, per congruentiam, per derivationem [1]) mit dem neuen Erkenntnisgrunde eine neue Gleichheit, man könnte sie per limitationem nennen, eingeführt. Derartige Gleichungen sind $\frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, welche genauer aber umständlicher geschrieben würden $\frac{8}{3} = \lim. 2{,}666\ldots$, $\sqrt{2} = \lim. 1{,}4142\ldots$ Diese Gleichheiten kommen nur zu stande, wenn wir durch den Grenzwert den unendlichen Process als vollendet, „die Tendenz zum Ideal als das Ideal“ [2]) anticipieren, was die alten Mathematiker eben nicht thun.

Und doch, so scheint mir, kommt Euklid durch die fünfte Definition des fünften Buches der Anerkennung dieses Princips sehr nahe. Diese Erklärung heisst in geeigneter Bezeichnung: Wir sagen von 2 Grössen a und b, sie stehen in demselben Verhältniss wie 2 andere c und d, wenn die Gleichvielfachen von a und c (also ma und mc) die Gleichvielfachen von b und d (also nb und nd) gleichzeitig über-

---

[1]) Ich folge zum Teil Fresenius, Psychologische Grundlagen der Raumwissenschaft, S. 73.

[2]) Fresenius, S. 104.

treffen, ihnen gleich sind, oder kleiner sind, (d. h. wenn gleichzeitig $ma \gtreqless nb$ mit $mc \gtreqless nd$ ist).[1] Euklid versteht unter Gleichvielfachen nur ganzzahlige Vielfache; aber da die Teilung der graden Linie in beliebig viele gleiche Teile sich lediglich auf Kongruenz begründen lässt[2]), so könnte er jene Definition auch so umformen, dass sie in unserer Bezeichnungsweise heisst: Das Verhältnis $a : b$ ist dann gleich $c : d$, wenn gleichzeitig immer $\frac{m}{n}\; a \gtreqless b$ und $\frac{m}{n}\; c \gtreqless d$ ist, oder wenn bei geeigneter Wahl von m $\frac{m}{n}\; a < b$, $\frac{m}{n}\; c < d$ und $\frac{m+1}{n}\; a > b$, $\frac{m+1}{n}\; c > d$ ist, d. h. wenn b gemessen durch den n^{ten} Teil von a und d gemessen durch den n^{ten} Teil von c als Nährungswerte immer dieselben ganzen Zahlen ergeben. Hätte Euklid für seine Definition proportionaler Grössen diese Wendung gebraucht, welche inhaltlich durchaus nicht über sie hinausgeht, so hätte er damit das moderne Erkenntnisprincip der Einschliessung in gleiche, beliebig enge Grenzen, die Gleichsetzung durch Nichtunterscheidbarkeit, zur Anwendung gebracht.

Warum aber hat er diesen Schritt, der uns so nahe zu liegen scheint, nicht gethan? Es hindert ihn die allen griechischen Mathematikern eigene Sprödigkeit, Aengstlichkeit nennt es Hankel, welche die Sicherheit der Schlussweise für gefährdet hielt, wenn sie sich auf den Weg eines nicht abschliessbaren, auf den verpönten Begriff des Unendlichkleinen führenden Processes begäben. Lieber verharrt er bei einer Definition, welche unbefriedigend ist und das Kenn-

---

[1]) Diese Definition behandelt auch Hankel, Zur Geschichte der Mathematik, S. 389—393.

[2]) Euklid gründet sie V, 9 auf die Proportionalteilung zweier Seiten eines Dreiecks durch eine zur dritten Parallele, welcher Satz selbst auf V, 2 und damit auf Definition 5 zurückgeführt wird.

zeichen der reinen Negation an der Stirn trägt, aber doch, wenigstens dem Ausdruck nach[1]), sich im Endlichen bewegt.

Und weiter: die Ausmessung von b und d durch $\frac{a}{n}$ und $\frac{c}{n}$ hätte die Definition des Grössenverhältnisses auf Feststellung und Vergleichung der Masszahlen zurückgeführt, sie hätte für den inkommensurabeln Fall die Ergänzung der rationalen Verhältnisszahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ durch eine zwischen ihnen liegende unzugängliche Idealzahl nahegelegt. Diesen Schritt aber, die Ausfüllung der rationalen unstetigen Zahlenreihe durch die Irrationalzahlen, haben die Alten nie gethan. Mit grossem Scharfsinn behandelt das zehnte Buch der Elemente die Eigenschaften derjenigen inkommensurabeln Linien, welche geometrisch construierbar sind, also der quadratischen Irrationalitäten. Aber der Zahlbegriff, welcher bei der Unbehilflichkeit des griechischen Zahlsystems nicht abstrakt sondern unter dem Bilde kommensurabler Liniengrössen (Elemente Buch VII, VIII, IX) behandelt wird, wird auf diese als geometrisch real anerkannten Grössen nicht ausgedehnt. Die Sätze X, 5 und 7 sagen ausdrücklich: kommensurable Grössen verhalten sich wie Zahlen, und inkommensurable Grössen verhalten sich nicht wie Zahlen. So ist eine unübersteigliche Kluft zwischen stetigen Grössen und unstetigen Zahlen errichtet.

Auf dieser Trennung, welche wir durch den Begriff der stetigen Zahlenreihe und der allgemeinen stetigen linearen Grösse überbrücken, beruhen die augenfälligsten Unterschiede der alten Elementar-Mathematik von unsrer Behandlung der Elemente. Von dem Wert einer Reihe 2,666 . . kann bei den Alten keine Rede sein; $\sqrt{2}$ fällt als Strecke betrachtet wohl unter den Grössenbegriff, aber nicht unter den Zahlenbegriff, sie ist eine als Zahl nicht realisierbare Forderung,

[1]) Thatsächlich ist die Forderung, festzustellen, dass alle Gleichvielfachen von a und c zu Gleichvielfachen von b und d dieselbe Beziehung haben, auch nichts als eine Anweisung auf den regressus in infinitum.

eine Frage ohne Antwort. Höhere Wurzeln sind weder Grössen noch Zahlen. Die Proportionslehre wird im fünften Buch für Grössen abgeleitet, im siebenten Buch ganz unabhängig davon für Zahlen. Ein Satz wie: die Masszahl des Flächeninhalts eines Rechtecks wird erhalten, indem man die Masszahlen zweier aneinanderstossenden Seiten multipliciert, ist allgemein ausgesprochen für die Alten sinnlos. Er hat nur Sinn, wenn die Seiten durch die Einheit messbar sind; das Produkt zweier Zahlen heisst deshalb selbst „Flächenzahl"; sind aber die Seiten durch die Einheit nicht messbar, so entsprechen ihnen keine Zahlen, so hat der Begriff der Multiplikation keine Anwendung; die Fläche selbst ist deshalb wohl eine Grösse, aber keine Zahl. Auch in Flächenvergleichungssätzen wie: die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, sind im Sinne der Alten die geometrisch über den Durchmessern zu konstruierenden Quadrate, nicht etwa, was uns gleichbedeutend damit ist, die zweiten Potenzen der Masszahlen gemeint. Können nach der Auffassung der Alten über Flächen- und Volumenberechnung nicht allgemeine, genaue Sätze, sondern nur praktische Näherungsmethoden aufgestellt werden, so ist es nicht zu verwundern, dass Ausrechnungsmethoden in den Elementen des Euklid, welche Allgemeingiltigkeit und Sicherheit verlangen, überhaupt keinen Platz gefunden haben, und dass Euklid nur bis zur Vergleichung der Flächen und Volumina, nicht bis zu ihrer Berechnung, vorschreitet.[1])

So unterscheidet sich unsre Elementar-Mathematik von den Elementen der Griechen durch weitere Begriffe, allgemeine, konsequent durchgebildete Beweismethoden, umfassen-

[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, S. 233, findet den Grund in der Vermeidung der μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, welche Aristoteles fordert; indess vermeidet Euklid diese Vermischung nicht in den Büchern VII, VIII, IX, wo Zahlen durchweg durch Strecken dargestellt werden.

dere, nicht in Einzelfälle zersplitterte Sätze. Dass diese Verallgemeinerungen naturgemäss sind, zeigt die Vereinfachung, welche der elementare Lehrgang durch sie gewonnen hat. Unsre Behandlung der Proportionslehre, des Irrationalen, der Flächen- und Volumenbestimmung stellt die kleinliche, ermüdende Kasuistik Euklids tief in den Schatten.

Das sind die Früchte, welche die Elemente von dem auf dem Boden der Analysis gewachsenen Baume pflücken. Die Elemente haben die Grenzmethode, die stetige Zahlenreihe, die Gleichartigkeit des Zahlen- und Grössenbegriffs in sich aufgenommen und können sie, wie jedes Lehrbuch der Elementar-Mathematik zeigt, nicht mehr entbehren. Volle Klarheit über diesen Gewinn hat nur der Mathematiker, welcher durch die Schule der alten Geometrie und der modernen Analysis gegangen ist; grade wie nur der das Princip der Beweglichkeit der Gebilde, der Anschaulichkeit und Natürlichkeit der Beweise ganz begreift und zu würdigen weiss, der sich an dem klassischen Muster der projektivischen, besonders der Steinerschen Methode gebildet hat und sie den alten Methoden gegenüberstellt.

Aber wie die projektivische Geometrie nur methodisch anregend auf die Elemente wirken, nicht inhaltlich ihnen einverleibt werden kann, so ist es auch ein Missgriff, mit dem Grenz- und stetigen Zahlbegriff zugleich Analysis und analytische Geometrie selbst in die Elemente und in die Schule, soweit sie allgemeine Bildung, nicht Fachausbildung bezweckt, hineinzutragen.

Der geistzermarternde Gegensatz des Stetigen und Unstetigen, der sich in der Zahlenlehre, in der Geometrie und in der Mechanik aufdrängt, muss, wenn die Elemente nicht durch ihn zerrissen werden sollen, wenn die heranwachsende Jugend zur Naturauffassung Galileis, nicht Aristoteles' erzogen werden soll, mit den aus der Rüstkammer der Analysis entnommenen Waffen bekämpft werden. Wie weit das nötig erscheint, ist im Vorigen bezeichnet worden; über das

Nötige hinauszugehen ist, wenn ein so reicher Inhalt wie der der Elementar-Mathematik erschlossen wird, unpädagogisch. Und die Sache ist so schwierig, dass sie mit Erfolg nur angefasst werden kann, wenn die Fragestellung sich von selbst aus einem im übrigen bekannten Zusammenhang hervordrängt; sie muss auf den unteren Stufen umgangen werden, bis der reifende Schüler von selbst in Unruhe und Nichtbefriedigung gerät und das Problem des Stetigen als einen Stein des Anstosses vor sich sieht. Im periodischen Decimalbruch, im Incommensurabeln, in der Irrationalzahl, der unendlich fallenden geometrischen Reihe, der Fallbewegung geschieht dies sicher früher oder später. Diese Probleme müssen behandelt werden und lassen sich behandeln; am besten behandelt sie der, der sie am vorsichtigsten anfasst, selbst die Worte Unendlichklein und Unendlichgross möglichst vermeidend. Der Schüler zieht aus ihnen den ganzen erkenntnistheoretischen Gewinn, zu dem er reif ist, und nebenbei einen Gewinn an Bescheidenheit des Denkens. Werden dagegen dem elementaren Zusammenhange fremde Probleme herangezogen, höhere Reihen, Differenzial- und Integral-Rechnung, wo das Unendliche nicht mehr in vertrauter und beherrschter Umrahmung erscheint, so übersteigen die Anforderungen an Abstraktion das, was man einem nicht specifisch mathematischen Kopfe zumuten darf. Es wird nicht anders sein: jene thatsächlich zu tiefen Aufgaben werden verflacht; höchstens wird mit Verwirrung, Scheinwissen, Ueberhebung der meisten eine ungewöhnliche Förderung sehr weniger erkauft. Und was haben diese wenigen wirklich gewonnen? An mathematischer Abstraktionsfähigkeit vielleicht nicht Unbedeutendes, aber an Fassung des zu grunde liegenden Problems des Stetigen nichts, was sie nicht aus den Elementen auch hätten lernen können.

Aehnliches gilt von der analytischen Geometrie. Ohne die Korrespondenz der stetigen Zahlenreihe und der linearen Grösse, ohne das Entsprechen von Zahl und Punkt ist das

Irrationale, die Ausmessung des Stetigen, rechnende Geometrie und Trigonometrie nicht möglich; auch dass man in einem Gebiet von 2 Ausdehnungen durch 2 Koordinatenangaben Punkte bestimmt, lernt der Schüler an geographischer Länge und Breite, an astronomischen Ortsangaben, an der Konstruktion einzelner Punkte der Wurfparabel nach der Grösse des horizontalen und vertikalen Fortschreitens, an Temperatur- und magnetischen Kurven. Diese Grundprincipien der analytischen Geometrie stecken also auch in den Elementen, und hier ist ihr Bildungswert auszunutzen. Der Schüler, welcher die Anfangsgründe der analytischen Geometrie gelernt hat, wird allerdings manche Aufgabe lösen, die dem andern verschlossen ist, aber über ein stotterndes Uebersetzen des algebraischen Ausdrucks ins Geometrische Punkt für Punkt, Wort für Wort, zur freien Behandlung des Zahlengebildes als eines Symbols des Ausdehnungsgebildes kann er unmöglich kommen; dazu kommt auch ein Student nicht in den ersten Semestern. Ist demnach das, was eigentlich Neues und Begrifferweiterndes in der analytischen Geometrie liegt, dem Schüler nicht zugänglich, so ist sie grade wie die Differenzial- und Integral-Rechnung aus dem Lehrgebiet derjenigen Schule, welche nicht Fachbildung sondern humane Bildung erzielt, auszuschliessen; mindestens ist den Bestrebungen, welche im Interesse gewisser Fächer ihre Aufnahme verlangen, (die Docenten der Mathematik teilen diese Bestrebungen nicht,) vom Standpunkt des allgemeinen Bildungsziels Widerstand zu leisten. Damit ist natürlich die Eröffnung gelegentlicher Ausblicke in die ausserhalb des Schulziels gestellten Gebiete nicht versagt.

Es bleiben auch so noch gegenüber den Elementen der Alten manche Erweiterungen des Umfangs der Schul-Mathematik, welche direkt durch die Dehnung der Begriffe bedingt sind. Wurzeln, Logarithmen, Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, Trigonometrie sind von unserm Lehrgang nicht zu trennen. Auch die elementar zu behandelnden Kegelschnitte gehören durchaus in den Gedankenkreis.

Das, was für Pythagoras und Plato die Mathematik zur besten Vorschule der Philosophie, ja zu einem Teile der Philosophie machte, Schulung der Anschauung und des Denkens, methodische Fassung und Lösung der Naturprobleme, das finden wir auch heute noch wesentlich im Bereich der von den Alten aufgestellten Elemente. Damit sie angesichts der veränderten methodischen Anforderungen und der modernen Naturauffassung den Dienst wirklich leisten, den sie leisten können, ist unsre Aufgabe, nicht ihren Umfang ohne Not zu erweitern, sondern dem vertieften Inhalt gerecht zu werden.