Mascheroni'sche Konstruktionen.

Die folgenden Seiten haben den Zweck, meine Schüler mit einer Konstruktionsmethode bekannt zu machen, die von derjenigen, welche in der Schule vorgetragen wird, sehr verschieden ist; sie haben aber auch den Zweck, wieder einmal an den Erfinder derselben, den Italiener Mascheroni,*) zu erinnern, der von der jüngeren Generation von Mathematikern fast vergessen ist. Zwar bewegen sich die Untersuchungen des alten Meisters — alt, gemessen an dem Fortschritte unserer Wissenschaft — nur auf sehr elementaren Gebieten, doch scheinen sie mir ihrer Originalität wegen werth, gekannt zu werden.

Mascheroni stellte sich die Aufgabe, die Geometrie allein mittelst des Cirkels zu bewältigen, also ohne Lineal sämmtliche Konstruktionen auszuführen, d. h. die Punkte, auf die es in der Konstruktion ankommt, festzulegen. Er verfolgte sein Ziel, dessen Erreichung nicht geringen Scharfsinn verlangte, viele Jahre hindurch mit seltener Beharrlichkeit und löste endlich seine Aufgabe in geistreicher Weise auf das vollständigste. Die so geschaffene Geometrie des Cirkels hatte nicht nur theoretisches Interesse, sondern auch praktischen Werth, nämlich für diejenigen Mechaniker, welche sich mit der Theilung der zu astronomischen Messinstrumenten gehörigen Quadranten abgaben.

Es konnte nicht ausbleiben, dass man sich bald nach dem Bekanntwerden des Mascheroni'schen Werkes auch an die entsprechende Aufgabe machte, die geometrischen Konstruktionen allein mittelst des Lineals ohne Hülfe des Cirkels auszuführen. Französische Mathematiker lösten diese Aufgabe nur zum Theil. Dem grossen Steiner war es vorbehalten, auch dieses Gebiet zum Abschluss zu bringen. In seinem Büchelchen „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises" bewies er, dass man des Cirkels allerdings entbehren könne, wenn ausser dem Lineal noch ein beliebiger fester Kreis in der Ebene der Zeichnung gegeben sei. Trotzdem „Die geometrischen Konstruktionen etc." später als die „Systematische Entwickelung etc." erschienen sind, so habe ich mich doch nie des Gedankens erwehren können, dass die in der erstgenannten Schrift enthaltenen Untersuchungen es gewesen sind, von denen aus Steiner zu seinen grossen Resultaten über den organischen Zusammenhang der geometrischen Gestalten gelangt ist. Wenn dem so wäre, so hätte Mascheroni den Ruhm, einen Gedanken ausgesprochen zu haben, der fortzeugend zu Ergebnissen geführt hat, die unseren geistigen Gesichtskreis um viele Marken vorgerückt haben.

Die Entwickelungen, welche Mascheroni zum Beweise der Richtigkeit seiner Konstruktionen giebt, sind nach unseren heutigen Begriffen äusserst schwerfällig. Daher habe ich dieselben bei denjenigen Aufgaben, die ich zur Mittheilung ausgewählt habe, so weit vereinfacht, als es für das Verständniss meiner Schüler nothwendig schien, ohne mich andererseits — wie Frischauf in Graz,

*) Mascheroni wurde 1750 in Bergamo geboren. Er studirte die alten Sprachen und lehrte sie darauf zuerst am Kolleg seiner Vaterstadt, dann an der Universität zu Pavia. In seinem 27ten Jahre wandte er sich den exakten Wissenschaften zu, denen er von da ab treu blieb. Sein bekanntestes Werk ist die „geometria del compasso (1797)," die von Carette ins Französische und aus diesem von Grüson 1825 ins Deutsche übersetzt worden ist. Man erzählt, Napoleon sei der erste gewesen, der die Pariser Gelehrten (1797) mit diesem Buche bekannt gemacht habe. Im Jahre 1798 ging Mascheroni als Mitglied der Kommission für die Festsetzung des neuen Maass-Systems nach Paris und starb ebendaselbst am 14. August 1800.

der meines Wissens der einzige ist, der in neuerer Zeit über Mascheroni geschrieben hat — so weit von dem Originale zu entfernen, dass der Charakter desselben durch die Reproduction vollständig verwischt würde.

Zur Veranschaulichung des Mascheroni'schen Verfahrens wähle ich die Kreistheilung oder, was dasselbe ist, die Konstruktion der einem Kreise einbeschriebenen regulären Polygone, deshalb, weil diese Aufgaben ein in sich abgeschlossenes, wichtiges Kapitel der elementaren Geometrie bilden.

I. Konstruktion des regulären Sechsecks.

(Fig. I.) Man mache $ab = bc = cd = df = fg = ao$, so sind a, b, c, d, f, g die Ecken des verlangten Sechsecks. Der Beweis ist bekannt.

a, c, f sind die Ecken des dem Kreise einbeschriebenen regulären Dreiecks.

Da ferner $\angle aod = \angle aob + \angle boc + \angle cod = 180^0$ ist, so liegen a, o, d in einer Geraden, a und d sind also die Endpunkte eines Durchmessers, theilen also den Kreis in zwei gleiche Theile.

II. Konstruktion des regulären Vierecks.

Die Lösung dieser Aufgabe verlangt die Zeichnung eines Hülfspunktes p, den man als Durchschnittspunkt zweier von a und d aus mit ac als Radius beschriebener Kreise findet.

Dann mache man $ak = am = op$, so sind a, k, d, m die Ecken des Vierecks.

Bezeichnet nämlich ρ den Radius des gegebenen Kreises, so ist

$$ac^2 = ad^2 - cd^2 = 3\rho^2 \quad \text{und} \quad ak^2 = op^2 = ap^2 - ao^2 = ac^2 - ao^2 = 2\rho^2 = ao^2 + ok^2,$$

folglich ist $\angle aok = 90^0$. Daraus folgt, dass auch $\angle kod = \angle dom = \angle moa = 90^0$ ist; k und m sind also die Endpunkte des auf ad senkrecht stehenden Durchmessers. Da nun p die Spitze eines über ad errichteten gleichschenkligen Dreiecks ist, so liegen p, k, o, m in einer Geraden.

Bedeutet P die ganze Peripherie des Kreises, so ist

$$bk = ak - ab = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6})P = \tfrac{1}{12}P,$$

folglich ist die Gerade bk die Seite des regulären Zwölfecks. Die anderen Ecken dieses Polygons sind leicht zu finden z. B. dadurch, dass man $kn = kq = mr = ms = ao$ macht; n, q, s, r sind dann die neu hinzutretenden Ecken des Zwölfecks.

III. Konstruktion des regulären Achtecks.

Man mache $pt = ao$, so ist die Gerade at die Seite des Achtecks.

Aus der zweiten Konstruktion ergab sich nämlich

$$po^2 = 2\rho^2 = pt^2 + ot^2.$$

Hieraus folgt, dass $\angle pto = 90^0$, also, da Δ pto gleichschenklig ist, dass $\angle pot = 45^0$ ist. Demnach ist auch $\angle aot = 45^0 = \tfrac{1}{8}P$.

Die übrigen Eckpunkte des Achtecks können auf die verschiedenste Weise gefunden werden, z. B. dadurch, dass man $pu = ao$ und $tv = vw = tu$ macht. a, t, k, u, d, w, m, v sind dann die Eckpunkte unseres Polygons.

$$nt \text{ ist gleich } at - an = (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{12})P = \tfrac{1}{24}P,$$

folglich ist die Gerade nt die Seite des einbeschriebenen regulären Vierundzwanzigecks. Es sind daher a, n, t, b, k, c, u, q, d, s, w, f, m, g, v, r 16 Ecken dieses Polygons, die noch fehlenden

8 findet man am elegantesten dadurch, dass man von u aus nach links, von t aus nach rechts den Radius ao als Sehne im Kreise herum einträgt. Man erhält dadurch die Theilpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$.

Dass pt Tangente am Kreise ist, ergiebt sich beiläufig daraus, dass $\angle pto = 90^0$ ist.

IV. Konstruktion des regulären Achtundvierzigecks.

Man konstruire einen zweiten Hülfspunkt p_1 als Durchschnittspunkt zweier mit pn als Radius um a und d beschriebener Kreise. p_1 liegt nach der Konstruktion auf der Geraden km. Macht man nun

$$p_1\varkappa = p_1\lambda = ao, \text{ so ist}$$
$$n\varkappa = q\lambda = \tfrac{1}{48}P.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} op_1^2 &= ap_1^2 - ao^2 \\ &= pn^2 - ao^2 \\ &= no^2 + po^2 - 2po \,.\, oz - ao^2 \\ &= po^2 - 2po \,.\, \tfrac{ok}{2} \\ &= \rho^2 (2 - \sqrt{2}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} at^2 &= ao^2 + ot^2 - 2ao \,.\, oy \\ &= \rho^2 (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

folglich ist $op_1 = at$.

Hieraus folgt die Kongruenz der Dreiecke aot und $\varkappa op_1$, aus dieser Kongruenz die Gleichheit der Winkel $\varkappa op_1$ und tao; der letztere ist aber gleich $\frac{1}{4}R$, folglich ist

$$\begin{aligned} \angle ao\varkappa &= \angle aok - \angle \varkappa op_1 \\ &= \tfrac{1}{4}R \end{aligned}$$

$$\text{folgl. } \begin{aligned} \angle \varkappa on &= \angle aon - \angle aok \\ &= (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})R = \tfrac{1}{12}R \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist: $\varkappa n = \frac{1}{48}P$. q. e. d.

Wie man die übrigen Eckpunkte des Achtundvierzigecks auf geschicktere Weise als durch Abtragen des Bogens $\varkappa n$ auf der Peripherie finden kann, bleibe dem Nachdenken des Lesers überlassen. Als Richtschnur dienen die ähnlichen Konstruktionen bei dem Acht-, Zwölf- und Vierundzwanzigeck.

V. Konstruktion des regulären Zehnecks.

(Theilung des Radius nach dem goldenen Schnitt.)

Man zeichne einen dritten Hülfspunkt p_2 als Durchschnittspunkt zweier von n und q aus mit op als Radius beschriebener Kreise und mache $a\nu = \nu\xi = op_2$, so ist
die Gerade $a\nu$ die Seite des Zehnecks,
$a\xi$ diejenige des Fünfecks.

Es ist bekannt, dass der Beweis hierfür geführt ist, wenn man gezeigt hat, dass om in p_2 nach dem goldenen Schnitt getheilt ist.

Aus der Konstruktion folgt zunächst, dass p_2 auf der Geraden om liegt.

Ferner ist

$$1)\ \begin{aligned} az^2 &= ao^2 + oz^2 \\ &= \tfrac{5}{4}\rho^2 \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} p_2z^2 &= p_2n^2 - nz^2 \\ &= op^2 - (no^2 - oz^2) \\ &= \tfrac{5}{4}\rho^2 \end{aligned}$$

folgl. ist $az^2 = p_2z^2$, oder, was dasselbe ist:

$$ao^2 + oz^2 = (p_2o + oz)^2$$
$$ao^2 - 2p_2o \,.\, oz = p_2o^2,$$
$$om^2 - om \,.\, op_2 =$$

folglich ist om in p_2 nach dem goldenen Schnitt getheilt.

Beiläufig ergiebt sich, dass auch p_2k in o nach dem goldenen Schnitt getheilt ist, denn setzt man $op_2 = kp_2 - ok$, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\frac{(kp_2 - ok)^2 = ok\,(2ok - kp_2)}{kp_2^2 - ok\,.\,kp_2 = ok^2}$$

$$kp_2\,.\,op_2 =$$

$$\text{Da } (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5})P = \tfrac{1}{20}P,$$

$$(\tfrac{5}{24} - \tfrac{1}{5})P = \tfrac{1}{120}P,$$

$$(\tfrac{5}{48} - \tfrac{1}{10})P = \tfrac{1}{240}P$$

ist, so haben wir implicite auch die Seiten des regulären Zwanzig-, Einhundertundzwanzig- und Zweihundertundvierzigecks gefunden.

Es ist nämlich $\xi\varkappa$ die Seite des ersten, $\xi\vartheta$ diejenige des zweiten und, wenn ich $n\sigma = n\varkappa$ mache, $\nu\sigma$ diejenige des dritten Polygons.

Die Radien, mittelst deren wir sämmtliche Konstruktionen ausgeführt haben, sind

$$ao = \rho,\ ac = \rho\sqrt{3},\ op = \rho\sqrt{2},\ pn = \rho\sqrt{3 - \sqrt{2}},\ op_2 = \tfrac{\rho}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

von denen die drei ersten in dem einfachen Verhältniss stehen: $\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Um zu zeigen, dass man alle Kreistheilungsaufgaben, die man mittelst des Cirkels und des Lineals gelöst hat, auch allein mit Hülfe des Cirkels lösen kann, bleibt uns jetzt nur noch übrig, die

Halbirung eines beliebigen Bogens

zu besprechen.

Bemerkt man, dass bc in k halbirt, und dass k mittelst der Punkte a, o, d, p gefunden ist, so ergiebt sich für die Halbirung eines beliebigen Bogens BC (Fig. II.) folgende Konstruktion:

Man beschreibe von B und C aus mit AB als Radius (A sei der Mittelpunkt von BC) die beiden Bogen AD und AE, mache AD = AE = BC, beschreibe von D und E aus mit DC (= EB) als Radius Kreise, die sich in F schneiden und von denselben Punkten aus mit AF als Radius Kreise, die sich in G schneiden, so ist BC in G halbirt.

Beweis: Nach der Konstruktion sind BCAD und BCAE Parallelogramme, folglich liegen D, A, E in einer Geraden, auf welcher sowohl FA, als auch GA senkrecht steht.

Es ist daher

$$\begin{array}{ll} 1)\ DC^2 = DF^2 & 2)\ DC^2 + CE^2 = 2AC^2 + 2AD^2 \\ \quad = DA^2 + AF^2 & \quad \text{folgl. } DC^2 = AC^2 + 2AD^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\text{Hieraus folgt: } AC^2 + AD^2 = AF^2 = DG^2.} \end{array}$$

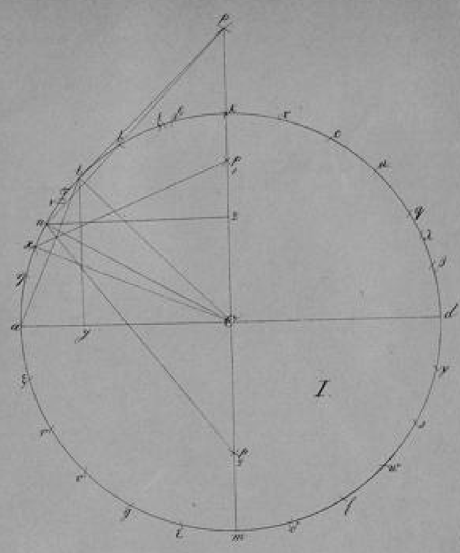
Da aber auch $AG^2 + AD^2 = DG^2$ ist, so ist

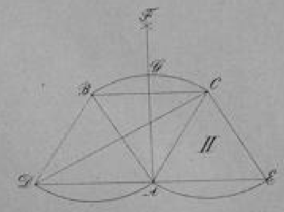
$\overline{AG = AC}$, d. h. G liegt in dem Bogen BC.

Dass nun auch BG = GC oder, was dasselbe ist,

$\angle BAG = \angle CAG$ ist, folgt sofort aus der Gleichheit der Winkel GAD und GAE resp. BAD und CAE.

E. Hutt.


I.


II

1.
2.
3. D
4. D
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.