Dritter Abschnitt.

Vom körperlichen Verschiebungsrahmen.

§ 19.

Stellt man sich vor, die Kanten eines Würfels seien von unveränderlicher Grösse, aber um ihre Endpunkte drehbar, und denkt man sich dieselben so gedreht, dass die ursprünglich parallelen Kanten parallel bleiben, so werden sie stets die Kanten eines verschobenen Würfels bilden. Denkt man nun die untere und obere Grundfläche des Würfels durch Parallel-Schaaren zu Verschiebungsrahmen vervollständigt, und durch jeden Punkt des Raumes eine Linie parallel mit den Seitenkanten des verschobenen Würfels gelegt, so wird die Strecke dieser Linie, welche zwischen die obere und untere Grundfläche bei jeder Lage fällt, gleich der Länge einer Kante des Würfels sein. Diese sämmtlichen, mit der Seitenkante parallelen Linien, kann man mithin als unveränderliche auffassen, die mit zwei festen Punkten an der unteren und oberen Basis des verschiebbaren Würfels befestigt sind. Die Befestigungspunkte erleiden bei der Verschiebung die Veränderungen der Punkte, die auf einen ebenen Verschiebungsrahmen bezogen sind. Die Schaar der parallelen Linien nun, welche die Grundflächen des Würfels anfüllen, soll die erste Parallel-Schaar, und die Schaar der Linien, welche mit den Seitenkanten parallel sind, die zweite Parallel-Schaar heissen. Der verschiebbare Würfel mit seinen Parallel-Schaaren soll ein körperlicher Verschiebungsrahmen genannt werden.

Jeden Punkt irgend eines räumlichen Gebildes kann man als einen festen Punkt einer Linie der zweiten Parallel-Schaar eines körperlichen Verschiebungsrahmens auffassen, und es sind nun die Gesetze aufzustellen, nach welchen die Transformationen der einfachen räumlichen Gebilde durch die Verschiebungen des körperlichen Verschiebungsrahmens vor sich gehen.

Die folgenden Sätze lassen sich nun sehr leicht ableiten:

1) Jede Ebene, die mit den Linien der zweiten Parallel-Schaar parallel ist, geht durch Verschiebung wieder in eine Ebene über, die mit der zweiten Parallelschaar parallel ist.

2) Jede gerade Linie geht durch Verschiebung wieder in eine gerade Linie über.

Parallele Linien bleiben nach der Verschiebung parallel.

Zwei Strecken paralleler Linien, die von bestimmten Punkten begrenzt werden, bewahren nach der Verschiebung dasselbe Verhältniss.

3) Jede Ebene geht durch Verschiebung wieder in eine Ebene über.

Congruente und parallel liegende ebene Figuren gehen durch Verschiebung in congruente und parallel liegende ebene Figuren über.

Ähnliche und parallel liegende ebene Figuren gehen durch Verschiebung in ähnliche und parallel liegende ebene Figuren über.

Folgerungen aus dem Vorhergehenden. Hat man drei gerade Linien im Raume OA, OB und OC, die sich in einem Punkte O schneiden, und denkt sich irgend einen Punkt p als die Spitze eines Ebenen-Büschels und bezeichnet die Schnittpunkte einer der Ebenen, die durch p gehen, mit OA, OB und OC durch a_m, b_m und c_m und dreht hernach OA, OB und OC auf beliebige Weise um O, verbindet darauf wieder a_m, b_m und c_m durch eine Ebene, so werden alle die Ebenen, die man erhält, indem man dem m die verschiedenen in Betracht tretenden Werthe beilegt, sich in einem Punkte schneiden. Hält man OA und OB fest und dreht OC beliebig um O, so wird der Ort des veränderlichen Punktes p eine Kugelfläche sein, deren Mittelpunkt in der Ebene AOB liegt, und zwar im Durchschnittspunkte mit einem Strahl, den man durch p parallel mit CA zieht. Denkt man sämmtliche Punkte des Raumes als Spitzen von Ebenen-Büscheln, so werden diese Punkte durch Drehung von OA, OB und OC um O eine gleiche Transformation erleiden, als wenn sie auf einen körperlichen Verschiebungsrahmen bezogen wären, von dem OA, OB und OC Kanten sind.

Ferner: Denkt man sich die Ebene BOA mit der ersten Parallel-Schaar erfüllt, und die Ebenen COA und COB mit der zweiten, und fasst den Punkt p als die Spitze eines Strahlenbüschels im Raume auf und bezeichnet den Schnittpunkt eines allgemeinen Strahls, der durch p geht, mit der Ebene AOB durch γ_m, mit der Ebene AOC mit β_m und mit der Ebene BOC durch α_m, so werden durch die Drehung von OA, OB und OC um O die Punkte α_m, β_m und γ_m in α_m^1, β_m^1 und γ_m^1 übergehen. Es liegen nun α_m^1, β_m^1 und γ_m^1 wieder in gerader Linie, und alle geraden Linien $\alpha_m^1\ \beta_m^1\ \gamma_m^1$, die man erhält, indem man dem m alle möglichen Werthe beilegt, schneiden sich in demselben Punkte, wie die vorher betrachteten Ebenen. Hält man die Strahlen OA und OB fest und dreht OC so, dass es mit OA stets denselben Winkel bildet, so sind die Punkte γ_m und β_m in ihren Ebenen unveränderlich, und man erhält für die Spitze eines Strahlbüschels im Raume, das auf zwei Ebenen bezogen wird, einen analogen Satz mit § 5.

4) Der Inhalt eines körperlichen Gebildes verhält sich zu dem Inhalt des verschobenen Gebildes, wie der Inhalt des körperlichen Verschiebungsrahmens zu dem Inhalte des verschobenen Rahmens.

5) Der verschobene Schwerpunkt eines körperlichen Gebildes ist der Schwerpunkt des verschobenen körperlichen Gebildes.

§ 20.

Es ist nun die durch den körperlichen Verschiebungsrahmen transformirte Gestalt einer Kugel zu untersuchen. Bezeichnet man dieselbe mit dem Namen Ellipsoid, so sind zunächst die Sätze aufzustellen, die hier unmittelbar für dasselbe durch die Kugel abgeleitet werden können.

1) Da die Kugel einen Mittelpunkt hat, so hat auch das Ellipsoid einen Mittelpunkt.

2) Da die parallelen ebenen Schnitte der Kugel Kreise, also ähnliche Figuren, sind, so sind auch die parallelen ebenen Schnitte des Ellipsoids ähnliche Figuren, und es lässt sich leicht zeigen, dass dieselben Ellipsen sind.

3) Tangenten und Tangenten-Ebenen einer Kugel gehen bei der Verschiebung in Tangenten und Tangenten-Ebenen beim Ellipsoid über.

Da die Berührungs-Curve eines Tangenten-Kegels einer Kugel eben ist, so ist auch die Berührungs-Curve eines Tangenten-Kegels am Ellipsoid eben.

4) Drei rechtwinklige Durchmesser einer Kugel stehen in der Beziehung zu einander, dass eine Ebene, die durch zwei derselben gelegt wird, eine Schaar von Sehnen, die mit der dritten parallel ist, halbirt. Deshalb liegen die Halbirungspunkte einer Schaar paralleler Sehnen des Ellipsoids in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt geht. Diese Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, und irgend zwei conjugirte Durchmesser dieser Ellipse stehen mit dem Durchmesser, welcher zur Schaar der parallelen Sehnen gehört, in der Beziehung, dass jede Schaar von Sehnen des Ellipsoids, die einer dieser Linien parallel ist, durch die Ebene der beiden anderen halbirt wird.

Drei Durchmesser des Ellipsoids, die in der genannten Beziehung zu einander stehen, heissen conjugirte, und es gelten für sie ähnliche Sätze, wie für die conjugirten Durchmesser der Ellipse.

5) Sieht man drei rechtwinklige Durchmesser einer Kugel als die drei Coordinaten-Axen an, und fällt von einem Punkte der Kugeloberfläche auf die drei Coordinaten-Ebenen drei Perpendikel x, y und z, die mit den drei Axen parallel sind, und bezeichnet man den Radius der Kugel durch r, so erhält man bekanntlich

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Bedeuten mithin a, b und c die Werthe dreier conjugirter Halbaxen des Ellipsoids, und man sieht dieselben als drei schiefe Coordinaten-Axen an, und bezeichnet die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche des Ellipsoids mit x_1, y_1 und z_1, so dass x_1 parallel a, y_1 parallel b und z_1 parallel c ist, so erhält man

$$\frac{x_1^2}{a_2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

denn man kann $\frac{x}{r} = \frac{x^1}{a}$, $\frac{y}{r} = \frac{y^1}{b}$ etc. setzen.

§ 21.

Man betrachte jetzt folgenden speciellen Fall:

Die drei Kanten OA, OB und OC (Fig. 19) eines körperlichen Verschiebungsrahmens seien der Bedingung unterworfen, dass $\angle AOC$ und $\angle AOB$ unveränderlich und gleich einem Rechten sei, der Winkel COB sei aber veränderlich. Nimmt man nun an, der Mittelpunkt einer Kugel liege in der Ebene COB und der Winkel COB sei ein beliebiger, so wird dieselbe durch Verschiebung in ein Ellipsoid übergehen, von dem sich leicht drei rechtwinklige conjugirte Axen angeben lassen. Ist nämlich $CO = OB$ und $CODB$ ein verschobenes Quadrat, so folgt, dass bei der Verschiebung die Kugel in ein Ellipsoid übergeht, von dem drei rechtwinklige conjugirte Axen parallel sind mit den Diagonalen des verschobenen Quadrats $COBD$ und mit der Kante OA.

Es folgt ferner, dass bei jeder Verschiebung die zuletzt genannte Axe gleich dem Durchmesser $2r$ der ursprünglich gegebenen Kugel bleibe, und dass von den beiden anderen Axen die eine grösser und die andere kleiner als $2r$ sein müsse.

Stellt der Kreis um m den Durchschnitt der Kugel mit der Ebene $COBD$ vor, und man zieht tmq parallel OB, ms parallel CB, mp parallel OD, pq und st parallel OC, so ist $mq = qp$ und $mt = ts$. Bezeichnet man mq durch u, mt durch v und den $\angle mqp$ durch ϕ, so erhält man $r = 2u \sin. \frac{1}{2}\phi = 2v \cos. \frac{1}{2}\phi$. Geht nun durch Verschiebung ϕ in $\phi + \Delta$ über, so geht der Kreis um m in eine Ellipse über, deren grosse und kleine Axe mit den Diagonalen OD und CB parallel bleiben, und daher durch $u \sin. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ und $v \cos. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ ausgedrückt sind. Die Kugel um m geht nun in ein Ellipsoid über, von dem die drei rechtwinkligen conjugirten Halbaxen sind: $2u \sin. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$, $2v \cos. \frac{1}{2}(\phi + \Delta)$ und r. Bezeichnet man dieselben durch A, B und r, so erhält man nun aus diesen Grössen u, v, ϕ und Δ zu ermitteln die Gleichungen $\frac{r^2}{4u^2} + \frac{r^2}{4v^2} = 1$, $\frac{A^2}{4u^2} + \frac{B^2}{4v^2} = 1$, aus welchen

$$u = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{r^2 - B^2}}, \quad v = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 - r^2}}$$

$$\frac{v}{u} = \mathrm{tg.}\, \tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{r^2 - B^2}{A^2 - r^2}} \text{ und } \mathrm{tg.}\, \tfrac{1}{2}(\phi + \Delta) = \frac{A}{B} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - B^2}{A^2 - r^2}} \text{ folgt.}$$

Schneidet man das Ellipsoid in zwei Ebenen, die mit AOB und AOC parallel sind, so müssen diese Schnitte noch dieselben sein, wie vor der Verschiebung, also Kreise. Man erhält mithin den Satz: Zu jedem Ellipsoid giebt es zwei Schaaren paralleler Ebenen, die dasselbe in Kreisen schneiden. Beide Schaaren sind parallel der mittleren Hauptaxe und bilden sowohl mit der grossen, als auch mit der kleinen Hauptaxe gleiche Winkel.

§ 22.

Es bleibt nun noch zu ermitteln, wie die drei Hauptaxen eines Ellipsoids liegen, in welches eine Kugel durch irgend eine Verschiebung übergeht. Die Lösung dieser Frage kann erhalten werden, wenn man diejenige Diametral-Ebene bestimmt, welche mit einem zu ihr senkrechten Radius noch nach der Verschiebung einen rechten Winkel bildet. Legt man schiefwinklige Coordinaten zu Grunde, welche den Kanten des körperlichen Verschiebungsrahmens parallel sind, so hängt die Richtung dieses Radius von einer Gleichung des dritten Grades ab, wodurch man schliesst, dass dieselbe drei reelle Wurzeln habe, welche sich auf die drei gesuchten Hauptaxen des Ellipsoids beziehen. Diejenigen Radien, welche bei der Verschiebung keine Änderung in ihrer Länge erfahren, liegen im Allgemeinen auf dem Mantel eines Kegels des zweiten Grades, der in besonderen Fällen (vergl. § 21) in zwei Ebenen übergehen kann.

Da die Durchführung dieser Betrachtungen aber Mittel erfordert, welche hier nicht vorausgesetzt werden dürfen, so sei nur noch einer Aufgabe erwähnt, welche in dies Gebiet schlägt und sich leicht beantworten lässt. Es soll næmlich bestimmt werden, wie viele Systeme dreier conjugirter Axen zwei concentrische Ellipsoide gemeinschaftlich haben.

Zu dem Ende denke man beide Ellipsoide im körperlichen Verschiebungsrahmen, bei einer Stellung, wie sie in § 21 betrachtet wurde, so dass die drei Hauptaxen des einen mit den Diagonalen des Rhombus *OBCD* (Fig. 19) und mit der Kante *OA* parallel werden. Dann verschiebe man den Rahmen so, dass dies Ellipsoid in eine Kugel übergeht, so wird das andere Ellipsoid wieder in ein Ellipsoid übergehen. Dies Ellipsoid und die Kugel haben offenbar nur ein gemeinschaftliches System dreier conjugirter Axen, næmlich die drei Hauptaxen des Ellipsoids, mithin haben auch die beiden zuerst betrachteten Ellipsoide nur ein gemeinschaftliches System conjugirter Axen.

Druckfehler.

Im Laufe der ersten zehn Seiten lies immer *gerade* statt grade,

Seite 10, Zeile 1 von oben lies *Diagonalen* statt Diagonolen,

- 10, - 23 - - *man* statt mann.