Erster Abschnitt.

Von dem ebenen Verschiebungsrahmen.

§ 1.

Stellt *abcd* (Fig. 1) ein Viereit vor, dessen gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist dasselbe, wenn diese Seiten sich in *einer* Ebene befinden, bekanntlich ein Parallelogramm, unter welchem Winkel sich auch zwei anstossende Seiten schneiden mögen. Ist die Linie *mn* parallel mit einer der Seiten des Parallelogramms (in Fig. 1 mit *ad*) und denkt man sich diese Linie von unveränderlicher Länge und mit ihren unveränderlichen Endpunkten in den Punkten *n* und *m* der Linien *ab* und *cd* befestigt, so wird dieselbe noch immer die Verschiebungen des Parallelogramms *abcd* in *einer* Ebene gestatten und stets der Seite *ad* parallel bleiben. Denkt man sich die beiden Linien *ab* und *cd* unbegrenzt und eine unendliche Schaar von unbegrenzten Linien, die wie *mn* mit *ab* und *cd* parallel sind, und die ganze Ebene, in der das Parallelogramm *abcd* liegt, einnehmen, so werden auch diese noch immer die Verschiebungen des Parallelogramms *abcd* in *einer* Ebene gestatten und diesen zugleich mitunterworfen sein. Befindet sich in der Ebene des Parallelogramms irgend eine Figur, so nehme man an, die Punkte des Umfangs derselben lägen auf jener Schaar von Linien; und es entsteht die Frage, welchen Veränderungen wird die Figur bei den Verschiebungen des Parallelogramms unterworfen sein? — Die Elemente zur Beantwortung dieser Frage sollen in dem Folgenden entwickelt werden.

Geht ein Punkt durch Verschiebung in eine andere Lage über, so soll dieser neue Punkt der *verschobene* von jenem heissen; ebenso soll jede Figur, die durch Verschiebung einer gegebenen entsteht, die *verschobene* heissen. Auch soll die unendliche Schaar der parallelen Linien, die wie *mn* bestimmt sind, und welche die ganze Ebene des Parallelogramms einnehmen, kurzweg die *Parallel-Schaar* heissen.

§ 2.

Beschreibung des Verschiebungsrahmens.

Um eine sinnliche Anschauung von der gestellten Aufgabe zu gewinnen, kann man sich eines Instrumentes bedienen, welches ich den *Verschiebungsrahmen* nenne, und dessen Beschreibung und Gebrauch hier mitgetheilt werden soll.

Der Verschiebungsrahmen *abcd* (Fig. 2) besteht zunächst aus zwei hölzernen Leisten *ad* und *bc*, in welche bei *a*, *b*, *c* und *d* vier hölzerne cylindrische Axen fest eingelassen sind — die Entfernung *ad* muss gleich *bc* sein, — ferner aus den beiden Leisten *ab* und *cd*, die bei *a*. *b*. *c* und *d* durchbohrt sind, um jene Axen aufnehmen zu können; auch muss *ab* gleich *dc* sein. Genau in der geraden Linien *ab* und *cd* sind die gleichnamigen Leisten mit einer Anzahl von Löchern versehen, von denen immer je zwei gegenüberstehende gleichweit von den Drehungspunkten entfernt sind; durch diese Löcher wird eine lange Schnur gezogen, wie die Figur 2 zeigt, so dass jede übergespannte Strecke derselben mit der Linie *ad* oder *bc* parallel wird. Beim Aufziehen der Schnur zieht man aber auf jede Strecke derselben, die frei über den Rahmen gespannt ist, etwa fünf Perlen, die sich mit Reibung auf der Schnur verschieben lassen. Dann befestigt man die Enden der Schnur fest an den Rahmenstükken, und der Apparat ist nun zum Gebrauch geeignet. Es wird zweckmässig sein, alle Leisten des Rahmens gleich lang zu machen, so dass *abcd* in jeder Lage ein verschobenes Quadrat ist.

Um den Verschiebungsrahmen in Gebrauch zu setzen, zeichne man irgend eine Figur, die den Umfang des Verschiebungsrahmens nicht überschreitet, auf Papier, lege den Verschiebungsrahmen darüber und rücke die Perlen, so dass sie sich über den Umrissen der Zeichnung befinden. Beim Verschieben des Rahmens ergeben sich nun die fraglichen Veränderungen der Figur.

Beim Experimentiren mögen die Schüler zunächst die Veränderungen untersuchen, denen die nach verschiedenen Richtungen aufgestellten graden Linien unterworfen sind, dann einige einfache gradlinige Figuren und dann verschiedene Kreise derselben experimentellen Untersuchung unterwerfen und die Bemerkungen daran knüpfen, die jeder Mensch von gesundem Sinne selbst machen wird.

Anmerkung. Man kann den Verschiebungsrahmen auch so einrichten, dass man unmittelbar auf denselben mit Kreide zeichnen kann, wenn man die Schaar der parallelen Linien durch Drähte darstellt, deren jeder sich um einen Stift als Axe drehen kann, der senkrecht auf den Leisten und in der Richtung zweier Drehungsaxen des Verschiebungsrahmens befestigt ist. Die Drähte kann man mit einem passenden Firniss überziehen und dann unmittelbar darauf zeichnen. So zugerichtet eignet sich der Verschiebungsrahmen besonders für verschiedene perspectivische Untersuchungen.

§ 3. Lehrsatz.

Jede grade Linie geht durch Verschiebung wieder in eine grade Linie über. Zwei Strecken auf derselben werden in demselben Verhältniss stehen, wie die verschobenen Strecken.

Anleitung zum Beweise. I. *abcd* (Fig. 3) stelle den Verschiebungsrahmen vor. Die Linie gehe durch die beiden Punkte k und k_1, so denke man zu diesen die beiden Linien mn und m_1n_1 aus der Parallel-Schaar und bedenke, dass der Schnittpunkt von kk_1 mit der Basis des Rahmens, oder dass x unabhängig von der Lage des Rahmens sein müsse. kk_1 muss also nach der Verschiebung noch durch x gehen u. s. w.

II. Denkt man sich noch eine zweite Strecke, wie kk_1 auf dieser Linie, bezeichnet sie durch KK_1 und das von mm_1 analoge Stück mit MM_1, so wird $kk_1 : KK_1 = mm_1 : MM_1$ sein u. s. w.

Fragen: Wie kann man m_1x berechnen, wenn blos mk_1 m_1 k_1 und mm_1 gegeben sind? — Weshalb ist x der äussere Aehnlichkeitspunkt der Linien mk und m_1k_1? — Wie müssen die Punkte k und k_1 liegen, damit der innere Aehnlichkeitspunkt in Kraft trete?

Zusatz. Parallele Linien bleiben nach der Verschiebung auch parallel, und irgend zwei Strecken auf beiden behalten nach der Verschiebung noch dasselbe Verhältniss, wie vorher. — Beweis zu finden.

§ 4.

Geht eine geschlossene Figur durch Verschiebung in eine andere über, so verhalten sich die Inhalte beider Figuren, wie die Höhen des Rahmens vor und nach der Verschiebung.

Anleitung zum Beweise. Man beweist den Satz erst für ein Dreieck, dessen Grundlinie der Basis des Rahmens parallel ist, dann für jedes Dreieck, welches man als die Summe zweier solcher Dreiecke ansehen kann oder als deren Differenz, und dann allgemein.

§ 5.

Nimmt man auf den beiden Linien SA und SB (Fig. 4) zwei Punktenpaare a und a_1, b und b_1 an, denkt SB fest, SA aber sich um den Punkt S drehend, und für jede Lage, die SA einnimmt, die Transversalen ba und b_1a_1 gezogen, so werden die Verhältnisse $ma : mb$ und $ma_1 : mb_1$ unabhängig von der Lage SA sein, wo m den veränderlichen Durchschnittspunkt der beiden Transversalen ba und b_1a_1 bezeichnet, und m wird bei der Drehung einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt (c) der Schnittpunkt von SB mit einer Parallelen von SA ist, die durch m geht.

Anleitung zum Beweise. Man sehe SB und SA als zwei Seiten des Verschiebungsrahmens an, so ist mc eine Linie der Parallelschaar (beim Verschiebungsrahmen giebt mc die Lage einer Schnur an), und der Satz wird aus dem Vorhergehenden klar sein.

Zieht man nun noch eine dritte Transversale a_2b_2 durch die beiden Linien SA und SB, so gilt natürlich von den beiden Schnittpunkten n und q mit den ersteren Transversalen dasselbe wie von m; man kann aber auch sagen, dass das Verhältniss der auf jeder Transversale abgeschnittenen Strecken, wie etwa $bq : qm$ unabhängig von der Lage von SA sein wird, woraus dann folgt, dass, wenn sich drei oder mehr Transversalen in einem Punkte schneiden, sie sich bei jeder Drehung von SA in einem Punkte schneiden müssen.

Hieran schliessen sich noch folgende Betrachtungen:

1) Denkt man sich in der Ebene ASB irgend eine gradlinige Figur gegeben, so kann man jede Seite derselben als Transversale von SA und SB auffassen. Hält man nun die Schnittpunkte jeder Transversale mit SA und SB fest, und dreht SA

um den Punkt S, so wird hierdurch die urpsrüngliche Figur in eine neue übergehen, in welcher jede Seite durch die übrigen in Strecken getheilt wird, deren gegenseitiges Verhältniss constant ist.

2) Denkt man sich jeden Punkt der Ebene ASB als die Spitze eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen die Linien SA und SB in den Punkten $a_{\shortparallel}$ und $b_{\shortparallel}$ schneiden, dreht SB um S um einen beliebigen Winkel, verbindet dann wieder jeden Punkt $a_{\shortparallel}$ mit dem zugehörigen $b_{\shortparallel}$, so gehen die ursprünglichen Punkte in neue Punkte auf dieselbe Weise über, als wenn sie auf dem Verschiebungsrahmen ASB lägen.

3) Nimmt man an, die beiden Schenkel SA und SB seien mit elastischen Schnüren überspannt, welche einer proportionalen Ausdehnung und Zusammenziehung fähig sind, so werden sich an den Kreuzungspunkten der Schnüre bei der Drehung von SB stets dieselben materiellen Punkte befinden.

Als specieller Fall der vorigen Betrachtung verdient noch der folgende hervorgehoben zu werden.

Ist (Fig. 5) $ca = cb$, $cd = ce$ und o der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ae und db, ferner cf parallel ab parallel de, und man dreht den Schenkel cb, so wird o einen Kreis um m beschreiben, (om parallel ac); ferner wird $oa : od$ stets gleich sein $ac : dc$, und der Winkel foc wird stets ein Rechter sein; mithin entsteht der bekannte Satz: Stehen zwei Schenkel eines Winkels in constantem Verhältniss, so ist der Ort der Spitze ein Kreis u. s. w.

Anmerkung. Nimmt man in dem Dreieck ABC (Fig. 6) die Seite AC fest, die Seite AB aber um A drehbar an und setzt voraus, die beiden Punkte β und γ seien auf den beiden Seiten AC und AB fest, und nennt man den Schnittpunkt der Transversalen $B\beta$ und $C\gamma$, o, so sind die Ausdrücke $\frac{o\gamma}{oC}$ und $\frac{o\beta}{oB}$ natürlich constant. Zieht man durch o zwei Parallelen mit AC und AB, so findet man durch die entstehenden ähnlichen Dreiecke

$$\frac{o\gamma}{oC} = \frac{B\gamma}{AB} \cdot \frac{A\beta}{\beta C} \text{ und } \frac{o\beta}{oB} = \frac{C\beta}{AC} \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

Es ist zu empfehlen, den Schüler diesen Satz ableiten und durch Anwendung desselben sowohl den ptolomäischen Lehrsatz über die Transversalen des Dreiecks, als auch über die harmonischen Verhältnisse der Diagonalen des Vierseits ($A\beta o\gamma$) beweisen zu lassen.

§ 6.

Stellt $abcd$ (Fig. 7) ein Parallelogramm vor, und denkt man sich alle Punkte der Ebene auf eine Schaar bezogen, die mit ad parallel ist, so kann man jeden auf das Parallelogramm $abcd$ bezogenen Punkt p auf folgende Weise auf das Parallelogramm a_1b_1cd beziehen. Man ziehe durch den Punkt p eine Parallele mit ad, welche die Linie dc in s schneide, ziehe durch s eine Linie parallel mit da_1, mache $sp : sp_1 = da : da_1$, so ist p_1 der dem Punkt p entsprechende Punkt in der Ebene a_1b_1cd.

Es wird behauptet, dass die Punkte p durch Verschiebung in die Lage der Punkte p_1 übergehen können. Errichtet man nämlich in den Halbirungspunkten von aa_1 und bb_1 die Lothe $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ und nennt γ und δ die Schnittpunkte mit dc, so sind beide Figuren $\gamma ab\delta$, wie $\gamma a_1b_1\delta$ Parallelogramme, die ineinander durch Verschiebung übergehen können, so dass also $\gamma ab\delta$ den Verschiebungsrahmen darstellt, welcher durch Verschiebung in die Lage $\gamma a_1 b_1 \delta$ übergeht. Bezieht man die Punkte p auf $\gamma ab\delta$, so gehen sie, wenn dies durch Verschiebung in $\gamma a_1 b_1 \delta$ übergeht, in die Punkte p_1 über. Stehen die Linien aa_1 und bb_1 senkrecht auf dc, so befinden sich die Drehungspunkte in der Unendlichkeit. Bezieht man also die Punkte einer Ebene vermöge einer Schaar Paralleler auf eine zu diesen senkrechte grade Linie in der Ebene, indem man jeden Punkt mit der graden Linie durch eine jener Parallelen verbunden denkt, verändert hernach diese parallelen Strecken nach einem bestimmten Verhältniss, indem man die Schnittpunkte mit den Graden unverändert lässt; so wird die sich ergebende neue Figur als eine solche zu betrachten sein, die aus der ersten durch Verschiebung hervorgeht, und mithin auch den allgemeinen Gesetzen der Verschiebung genügen.

§ 7.

Nachdem die Veränderung der Punkte auf dem Verschiebungsrahmen unter den Hauptgesichtspunkten aufgefasst ist, und erkannt ist, dass die Veränderung, welche grade Linien erleiden, durch ihre Richtung bedingt sei, wird es zweckmässig sein, zu untersuchen, wie diese Veränderung von der Lage abhängig ist.

Wir stellen mithin zunächst folgende Aufgabe:

In der Ebene des Verschiebungsrahmens befindet sich ein Kreis; die Radien zu finden, die durch Verschiebung die grösste Verlängerung und die grösste Verkürzung erleiden.

Zunächst nehme man an, bei der ersten Stellung des Verschiebungsrahmens seien die Winkel desselben Rechte. Man ziehe nun durch den Kreis (Fig. 8) einen Durchmesser ln parallel der Basis dc und denke in jedem Punkte dieses Durchmessers ein Perpendikel bis zur Peripherie (wie ef) gezogen. Setzt man nun $me = x$ und $ef = y$, so hat man

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wo r den Radius des Kreises bezeichnet. Geht nun der Rahmen durch Verschiebung in die andere Lage (Fig. 9) über, so werden sämmtliche Linien ef unter sich parallel bleiben; bezeichnet man nun das verschobene mf durch ρ, so ist:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xp,$$

wenn p die Projection von ef auf mn bedeutet und der Winkel mef (Fig. 9) ein stumpfer ist. Da nun $x^2 + y^2 = r^2$ und $2xp = 2xy\left(\frac{p}{y}\right)$ ist, und ferner $\frac{p}{y}$ eine constante Zahl ist, wie man sich leicht überzeugt, so ist $\rho^2 = r^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right)$ und wird mithin ein Maximum, wenn xy ein Maximum wird. Es handelt sich also um die Frage: Wann wird xy ein Maximum, wenn $x^2 + y^2 = r^2$. Zu dem Ende denke man sich über r eine Halbkreis errichtet, so werden die Katheten jedes Peripheriewinkels, der auf dem Halbkreis steht, zwei Grössen wie x und y vorstellen; xy wird aber den doppelten Inhalt des Dreiecks darstellen, welches von den beiden Katheten und der Hypothenuse r gebildet wird. Damit dieser aber ein Maximum werde, muss die Höhe auf r ein Maximum, d. h. $= \frac{r}{2}$ werden; dann ist x auch $= y$. Ist (in Fig. 8) $me = ef$, so ist mf parallel db, wenn der Verschiebungsrahmen ein Quadrat ist, woraus dann folgt, dass die Linie der grössten Verlängerung stets mit der Diagonole des rhombischen Rahmens parallel ist, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt. Durch eine ähnliche Betrachtung findet man, dass die Linie der grössten Verkürzung stets mit der Diagonale parallel ist, die dem spitzen Winkel des rhombischen Rahmens gegenüberliegt, und da die Diagonalen eines Rhombus sich stets unter rechten Winkeln schneiden, so folgt, dass die Linien der grössten Verlängerung und der grössten Verkürzung **senkrecht** auf einander stehen.

Hat der Rahmen bereits eine schiefe Lage, so ziehe man wieder den Durchmesser parallel mit der Basis des Rahmens, ziehe aber die Linie y parallel mit der Seite des Rahmens, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right).$$

Durch Verschiebung erhält man:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p_1}{y}\right), \text{ mithin ist}$$

$$\rho^2 = r^2 + 2xy\left[\left(\frac{p_1}{y}\right) - \left(\frac{p}{y}\right)\right]$$

Da der Werth in der Klammer constant ist, so muss auch hier, soll ρ^2 ein Maximum werden, $x = y$ sein, wodurch man durch vollständige Betrachtung den Satz erhält: Unter allen graden Linien, die sich in irgend einer Lage auf dem Verschiebungsrahmen befinden, stehen die Linien, welche durch Verschiebung die grösste Verlängerung und Verkürzung erleiden, stets senkrecht auf einander und sind immer mit den Diagonalen des rhombischen Rahmens parallel.

§ 8.

Mann nennt die krumme Linie, in welche der Kreis durch Verschiebung übergeht, eine *Ellipse:* derjenige Durchmesser des Kreises, der die grösste Verlängerung bei der Verschiebung erleidet, heisst deshalb *grosse Axe* der Ellipse, und derjenige, der die grösste Verkürzung erleidet, die *kleine Axe* derselben.

Zwei Ellipsen, die gleiche grosse und kleine Axen haben, sind congruent.

Zieht man nämlich durch den Mittelpunkt o (Fig. 10) eines Kreises im Verschiebungsrahmen zwei senkrechte Durchmesser parallel den Diagonalen und errichtet in irgend einem Punkte m des einen ein Perpendikel mn bis zur Peripherie des Kreises, so ist

$$\frac{om^2}{oa^2} + \frac{mn^2}{ob^2} = 1.$$

Bei der Verschiebung bleibt der Winkel omn ein Rechter und es verändern sich auch die Quotienten $\frac{om}{oa}$ und $\frac{mn}{ob}$ nicht; nimmt man an, dass bei der Verschiebung oa in A, ob in B übergeht, ferner om in x, mn in y, so erhält man für die Ellipse mit der halben grossen Axe A und der halben kleinen Axe B die Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B_2} = 1,$$

woraus der obige Satz folgt.

§ 9.

Denkt man sich in einem Kreise eine Schaar paralleler Sehnen gezogen und verbindet ihre sämmtlichen Halbirungspunkte, so erhält man einen Durchmesser, der auf jenen senkrecht steht. Der zur Schaar gehörige Durchmesser bildet daher auch mit dem erhaltenen Durchmesser einen rechten Winkel, und die Tangenten, welche man in den Endpunkten des erhaltenen Durchmessers errichtet, sind der Schaar ebenfalls parallel. — Daraus folgt für die Ellipse ebenfalls der Satz:

Die Mittelpunkte einer Schaar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

Zieht man durch den Endpunkt des Durchmessers eine Linie parallel mit der Schaar, so ist dieselbe eine Tangente.

Zwei rechtwinklige Durchmesser des Kreises gehen bei der Verschiebung in zwei Durchmesser der Ellipse über, welche conjugirte heissen.

Hat man zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse und zieht mit dem einen eine Schaar paralleler Linien, so werden diese durch den anderen halbirt.

In jeder Ellipse giebt es zwei gleiche conjugirte Durchmesser; denkt man sich die Ellipse durch den Verschiebungsrahmen entstanden, so sind dieselben mit Basis und Seite desselben parallel.

§ 10.

Aufgabe. Es ist die grosse und kleine Axe einer Ellipse gegeben; man soll die Richtung der Basis und Seite des ursprünglich rechtwinkligen Verschiebungsrahmens finden, auf welchem man sie durch Verschiebung eines Kreises entstanden denken kann.

Auflösung. Der Rhombus, von dem die grosse und kleine Axe Diagonalen sind, ist der Verschiebungsrahmen.

Die Durchmesser, welche mit den Seiten des Rhombus parallel sind, sind die beiden conjugirten, welche einander gleich sind.

§ 11.

Es ist ein Durchmesser der Ellipse gegeben; man soll den conjugirten finden.

Anleitung zur Auflösung. Verbindet man die Endpunkte zweier senkrechter Durchmesser eines Kreises (Fig. 11a), so entsteht ein Quadrat. Zieht man durch den Mittelpunkt o noch zwei senkrechte Linien mn und pq, so kann man leicht beweisen, dass die alternirenden Stücke der Seiten gleich sind $(ma = dq = cq = bn;$ $dm = cq = bp = an)$. Verbindet man also die Endpunkte der grossen und kleinen Axe (Fig. 11b) und bestimmt auf jeder Seite des entstehenden Rhombus einen Punkt, so dass die alternirenden Stücke gleich sind, so liegen je zwei gegenüberliegende Punkte der Seiten auf einem Durchmesser und alle vier auf zwei conjugirten Durchmessern. — Hiernach kann auch die Aufgabe gelöst werden: An einen gegebenen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Anmerkung. Sind statt der beiden Hauptaxen zwei conjugirte Durchmesser gegeben, so ist das Viereck, welches dieselben zu Diagonalen hat, kein Rhombus, sondern ein Parallelogramm. Wie kann man mit Hülfe eines solchen Parallelogramms zu einem Durchmesser den conjugirten finden? Und wie heisst der Satz von den alternirenden Abschnitten?

§ 12.

Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser sind, hat einen Inhalt gleich $2AB$, wenn A die halbe grosse und B die halbe kleine Axe bezeichnet.

Beweis. Im Kreise haben alle Parallelogramme, deren Diagonalen zwei rechtwinklige Durchmesser sind, einen Inhalt gleich $2r^2$, wenn r den Radius des Kreises bedeutet, und da diese alle durch Verschiebung wieder in unter einander gleiche Parallelogramme übergehen müssen (siehe § 4), und das Parallelogramm, dessen Diagonalen die beiden Hauptaxen sind, gleich $2AB$ ist, so ist der Satz bewiesen.

§ 13.

Der Inhalt der Ellipse ist gleich $A\ B\ \pi$, wenn A die halbe grosse und B die halbe kleine Axe bezeichnet.

Beweis. Indem bei der Betrachtung des vorigen Paragraphen $2r^2$ in $2AB$ übergeht, geht der Kreis in die entsprechende Ellipse über; man hat daher, wenn man den Inhalt der Ellipse mit E bezeichnet:

$$2r^2 : 2AB = r^2\pi : E \ (\S\ 4),$$

woraus der Satz folgt.

§ 14.

Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser der Ellipse ist constant und gleich $A^2 + B^2$, wenn A und B die halbe grosse und halbe kleine Axe bezeichnen.

Beweis. Sind oa und ob zwei rechtwinklige Halbmesser im Kreise o (Fig. 12) und man zieht auf irgend einen Durchmesser mn die senkrechten Linien ad und bc, so sind die Dreiecke aod und boc congruent. Ist mn der Basis des Rahmens parallel, so erleidet bei der Verschiebung doc keine Veränderung. Setzt man nun $oc = x$, $cb = y$ und nimmt an, dass bei der Verschiebung b in β, a in α übergeht, so wird

$$o\beta^2 = x^2 + y^2 + 2xy\left(\frac{p}{y}\right) \text{ und}$$

$$o\alpha^2 = x^2 + y^2 - 2xy\left(\frac{p_1}{x}\right)$$

sein, wenn p und p_1 die Projektionen von α und β auf mn bezeichnen. Da nun

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p}{y} \text{ ist, so folgt durch Addition}$$

$$o\beta^2 + o\alpha^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2r^2.$$

Mithin ist die Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser constant etc.

§ 15.

Sind oa und ob die conjugirten gleichen Halbaxen (Fig. 13), und zieht man eine Sehne dc parallel oa, so stellen die Radien oc und od der Grösse, aber nicht der Lage nach zwei conjugirte Halbmesser vor. Es ist nämlich $oc^2 + od^2 = 2cm^2 + 2mo^2$. Da aber om und mc bei der Verschiebung ihre Grösse nicht ändern, so ist $om^2 + mc^2 = r^2$, mithin $oc^2 + ad^2 = 2r^2$, wo r den Radius des Kreises bedeutet, aus dessen Verschiebung die Ellipse hervorgegangen ist, wenn die ursprüngliche Lage desselben rechtwinklig war. Schlägt man mithin mit oc und od zwei Kreise um o, so werden diese die Ellipse in acht Punkten schneiden, welche auf vier Durchmessern liegen, von denen je zwei conjugirt sind.

§ 16.

Aufgaben und Sätze über das Vorhergehende.

1) Von einer Ellipse sind die grosse und die kleine Axe der Lage und der Richtung nach gegeben, die Schnittpunkte einer Geraden mit der Ellipse zu finden.

2) Der Schwerpunkt einer verschobenen Figur ist der verschobene Schwerpunkt der ursprünglichen Figur. Denn der Schwerpunkt des Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittellinien; die Mittellinien bleiben aber bei der Verschiebung Mittellinien, mithin ist auch bei der Verschiebung ihr Durchschnittpunkt der Schwerpunkt des verschobenen Dreiecks.

Jedes Viereck kann man sich in zwei Dreiecke zerlegen. Theilt man die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Dreiecke umgekehrt nach dem Verhältniss der Inhalte der Dreiecke, das bei der Verschiebung stets dasselbe bleibt, so erhält man den Schwerpunkt des Vierecks, der daher bei der Verschiebung in den Schwerpunkt der verschobenen Figur übergeht.

Jedes Fünfeck kann man sich in ein Viereck und ein Dreieck zerlegen etc.

3) Vier verschobene harmonische Punkte bleiben nach der Verschiebung h a r m o n i s ch.

4) Ein harmonisches Büschel bleibt durch die Verschiebung harmonisch.

5) Die Sätze von Pol und Polaire gelten auch für die Ellipse.

6) Ist die Ellipse tbc (Fig. 14) gegeben und ein Punkt a ausserhalb derselben, und man zieht von a eine Tangente at und eine Sekante abc, so ist, wenn man die mit diesen beiden Linien parallelen Radien der Ellipse mit ρ und r bezeichnet: $\frac{ab \cdot ac}{r^2} = \frac{at^2}{\rho^2}$, da beim Kreise $\frac{ab \cdot ac}{R^2} = \frac{at^2}{R^2}$ ist, wenn r den Radius des Kreises bezeichnet.

4) Hat man die beiden sich schneidenden Ellipsen tbc und bt_1c (Figur 14) und zieht man die gemeinschaftliche Sekante abc, so ist in der einen Ellipse

$$\frac{ab \cdot ac}{r^2} = \frac{at^2}{\rho^2}, \text{ in der anderen } \frac{ab \cdot ac}{r_1^{\,2}} = \frac{at_1^{\,2}}{\rho_1^{\,2}},$$

wenn r_1 und ρ_1 die der Sekante und der Tangente parallelen Radien der Ellipse bt_1c bezeichnen; mithin ist $\frac{at^2}{at_1^{\,2}} \cdot \frac{\rho_1^{\,2}}{\rho^2} = \frac{r_1^{\,2}}{r^2}$ oder $\frac{at}{at_1} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{\rho}{\rho_1}$.

8) Zwei concentrische Ellipsen haben stets zwei und nur zwei gemeinschaftliche conjugirte Axen.

Denn denkt man sich die beiden Ellipsen auf einem Verschiebungsrahmen, dessen Seiten den conjugirten gleichen Halbaxen der einen parallel sind, und verschiebt den Rahmen bis diese Ellipse in einen Kreis übergeht, so hat der Kreis mit der andern verschobenen Ellipse nur die beiden Hauptaxen der Ellipse als conjugirte Axen gemein. Verschiebt man nun den Rahmen, so bleiben diese für beide Ellipsen gemeinschaftliche conjugirte Axen etc.