Aufgabe. Zwei Rollen A und B sind durch eine massive Stange, welche mit den Achsen der Rollen eine gerade Linie bildet, fest mit einander verbunden und durch einen feinen Metalldraht bifilar so aufgehängt, dass sie sich um den Mittelpunkt der Verbindungsstange in der Horizontalebene drehen können. Der Metalldraht geht von dem einen Aufhängepunkte hinunter bis zum Mittelpunkte der Verbindungsstange, dann dieser parallel bis zur Rolle A, welche er mehreremal umkreist; darauf wieder der Verbindungsstange parallel zur Rolle B, und nachdem er diese mehreremal umkreist hat, zurück nach dem Mittelpunkte der Verbindungsstange, und von da lothrecht in die Höhe nach dem zweiten Aufhängepunkte. Zu jeder Seite des Rollenpaares A B befindet sich ein anderes solches Rollenpaar A_1 B_1 und A_2 B_2, welche sich jedoch nicht drehen können, sondern fest sind und in gleicher Weise mit Leitungsdrähten umwickelt. Gehen alsdann elektrische Ströme durch die Drähte der drei Rollenpaare, so werden die Rollen A und B von den vier äusseren Rollen angezogen oder abgestossen, also in der Horizontalebene um den Mittelpunkt der Verbindungsstange gedreht werden. Es soll die Kraft bestimmt werden, durch welche diese Drehung bewirkt wird.

---

1. Es sei $ds_,$ ein Element des Stromes $s_,$, welcher um die Rolle $A_,$, und ds ein Element des Stromes s, welcher um die Rolle A herumgeführt ist; der Strom $s_,$ habe die Intensität $i_,$ und der Strom s die Intensität i: so sind die Elektrizitätsmengen, welche sich in jedem Augenblick in den Elementen $ds_,$ und ds befinden, entsprechend $i_,ds_,$ und ids, und die Wirkung des Elementes $ds_,$ auf das Element ds ist zunächst dem Produkt $i_,ids_,ds$ proportional. Ferner hängt jede elektrische Wirkung von der Entfernung und die Wirkung zweier elektrischen Ströme auch noch von der Richtung dieser Ströme ab. Es sei daher r die Entfernung des Elementes $ds_,$ von ds, $ds_,$ bilde mit r den Winkel $\alpha_,$ und ds mit r den Winkel α, und endlich sei ν der Neigungswinkel der beiden Ebenen $(r,ds_,)$ und (r,ds); dann ist die Richtung des Elementes $ds_,$ gegen ds eine Funktion der Winkel $\alpha_,$, α und ν; und die Wirkung des Elementes $ds_,$ auf das Element ds wird

$$\frac{i_,ids_,ds}{r^n} f\,(\alpha_,,\alpha,\nu),$$

wenn wir nämlich annehmen, dass diese Wirkung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist; wozu wir berechtigt sind, weil wir wissen, dass die Wirkung der Friktions-elektrizität umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung. Für den Fall, dass $ds_{,}$ und ds mit r zusammenfallen, ist $\alpha_{,} = \alpha = \nu = o$, und somit die Funktion $f\,(\alpha_{,}, \alpha, \nu)$ gleich einer Konstanten c; also die Wirkung

(1) $$\frac{i_{,} i ds_{,} ds}{r^n}\, c.$$

Für den Fall, dass $ds_{,}$ und ds in einer Ebene liegen, und beide auf r senkrecht stehen, also $\alpha_{,} = \alpha = 90^0$ und $\nu = o$, wird $f\,(\alpha_{,}, \alpha, \nu) = 1$, und wir erhalten für die Wirkung von $ds_{,}$ auf ds den Ausdruck

(2) $$\frac{i_{,} i ds_{,} ds}{r^n}.$$

Denken wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen X-Achse mit r zusammenfällt; darauf senkrecht in der Ebene (r, ds) die Y-Achse und auf beiden senkrecht die Z-Achse, und bezeichnen die Projektionen der Elemente $ds_{,}$ und ds auf die drei Achsen entsprechend mit $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ und mit x, y, z; so ist

$$\begin{aligned} x_{,} &= ds_{,} \cos \alpha_{,}, & x &= ds \cos \alpha, \\ y_{,} &= ds_{,} \sin \alpha_{,} \cos \nu, & y &= ds \sin \alpha, \\ z_{,} &= ds_{,} \sin \alpha_{,} \sin \nu, & z &= o; \end{aligned}$$

und wir können, ohne dass die Wirkung sich ändert, für die Wirkung der Elemente $ds_{,}$ und ds die Wirkung ihrer Projektionen substituiren, die wir der Kürze wegen mit $(x_{,}x)$, $(y_{,}x)$, $(z_{,}x)$, $(x_{,}y)$, $(y_{,}y)$ und $(z_{,}y)$ bezeichnen wollen [1]. Es verschwinden aber die Wirkungen zweier Stromelemente, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen; d. h. die vier Komponenten $(y_{,}x)$, $(z_{,}x)$, $(x_{,}y)$ und $(z_{,}y)$ sind gleich Null, und es bleiben als wirksam nur übrig $(x_{,}x)$ und $(y_{,}y)$. Nach (1) ist nun

$$(x_{,}x) = \frac{i_{,} i ds_{,} ds \cos \alpha_{,} \cos \alpha}{r^n}\, c,$$

und nach (2) $$(y_{,}y) = \frac{i_{,} i ds_{,} ds \sin \alpha_{,} \sin \alpha \cos \nu}{r^n};$$

somit die Totalwirkung des Elementes $ds_{,}$ auf ds:

(3) $$W = \frac{i_{,} i ds_{,} ds}{r^n}\,(c \,.\, \cos \alpha_{,} \cos \alpha + \sin \alpha_{,} \sin \alpha \cos \nu).$$

Zur Bestimmung von n muss [2] der Ausdruck (3) unverändert bleiben, wenn wir $mds_{,}$, mds und mr setzen für $ds_{,}$, ds und r; wodurch derselbe übergeht in

$$\frac{m^2\, i_{,} i ds_{,} ds}{m^n\ r^n}\,(c \,.\, \cos \alpha_{,} \cos \alpha + \sin \alpha_{,} \sin \alpha \cos \nu).$$

Dieser Ausdruck ist aber dem Ausdruck (3) nur gleich, wenn $\frac{m^2}{m^n} = 1$, also $n = 2$ ist; und wir erhalten

(4) $$W = \frac{i_{,} i ds_{,} ds}{r^2}\,(c \,.\, \cos \alpha_{,} \cos \alpha + \sin \alpha_{,} \sin \alpha \cos \nu).$$

---

1) Die Wirkung eines geradlinigen Leiters ist dieselbe, als die Wirkung eines andern Leiters, welcher mit jenem zwischen denselben Endpunkten ausgespannt ist und beliebige aber sehr kleine Ausbiegungen macht.

2) Die Wirkung zweier ähnlicher Leiter auf einander bleibt ungeändert, wenn ihre Dimensionen in demselben Verhältnisse verändert werden, in welchem sich ihre Entfernung ändert.

In Betreff des Vorzeichens wollen wir die Kraft als positiv bezeichnen, welche die Entfernung der beiden Elemente zu vergrössern strebt. Nehmen wir deshalb an, dass die Elemente $ds_{,}$ und ds parallel und ihre Ströme gleich gerichtet sind; so findet Anziehung statt, und es ist $\alpha_{,} = \alpha = 90^0$ und $\nu = o$; also nach (2) die Wirkung gleich $-\frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}$; d. h. in (4) ist der vor der Klammer stehende Faktor negativ, und wir schreiben:

$$W = \frac{-i_{,}ids_{,}ds}{r^2}(c.\cos\alpha_{,}\cos\alpha + \sin\alpha_{,}\sin\alpha\cos\nu)\text{ [3]}. \tag{5}$$

Um dem vorstehenden Ausdruck eine bequemere Form zu geben, denken wir uns aus dem Mittelpunkte einer beliebigen Kugel drei Radien parallel mit r, $ds_{,}$ und ds gezogen; so erhalten wir auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Seiten α und $\alpha_{,}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel ν ist; und wenn wir die dritte Seite mit ε bezeichnen, so ist

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_{,}\cos\alpha + \sin\alpha_{,}\sin\alpha\cos\nu;$$

wodurch der Ausdruck (5) die folgende Form erhält:

$$W = -\frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}\Big\{\cos\varepsilon + (c-1)\cos\alpha_{,}\cos\alpha\Big\}. \tag{6}$$

Sind jetzt $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und x, y, z entsprechend die Koordinaten der Elemente $ds_{,}$ und ds, so ist

$$r^2 = (x_{,}-x)^2 + (y_{,}-y)^2 + (z_{,}-z)^2,$$

und es hängen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ allein von der Lage von $ds_{,}$, und x, y, z allein von der Lage von ds ab. Differenziren wir daher die letzte Gleichung zuerst nach $s_{,}$ und dann nach s, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial r}{\partial s_{,}} &= (x_{,}-x)\frac{dx_{,}}{ds_{,}} + (y_{,}-y)\frac{dy_{,}}{ds_{,}} + (z_{,}=z)\frac{dz_{,}}{ds_{,}};\\ -r\frac{\partial r}{\partial s} &= (x_{,}-x)\frac{dx}{ds} + (y_{,}-y)\frac{dy}{ds} + (z_{,}-z)\frac{dz}{ds}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und daraus $\frac{\partial r}{\partial s_{,}} = \cos\alpha_{,}$ und $\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\alpha$.

Differenziren wir die zweite der Gleichungen (7) noch einmal nach $s_{,}$, so ist

$$-\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_{,}} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right) = \frac{dx}{ds}\frac{dx_{,}}{ds_{,}} + \frac{dy}{ds}\frac{dy_{,}}{ds_{,}} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_{,}}{ds_{,}} = \cos\varepsilon.$$

Diese Werthe in den Ausdruck (6) substituirt, so geht derselbe über in

$$W = \frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + c\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s}\right).$$

Multipliciren und dividiren wir jetzt durch r^{c-1}, so wird

$$W = \frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}}\left(r^c\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + cr^{c-1}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s}\right); \tag{8}$$

und wir haben in der Parenthese ein vollständiges Differential, nämlich

$$r^c\frac{\partial^2 r}{\partial s_{,}\partial s} + cr^{c-1}\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial\left(r^c\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s};$$

wodurch wir für W die folgenden Formen erhalten:

---

3) Aus dem negativen Vorzeichen folgt natürlich nicht, dass der Werth des ganzen Ausdrucks negativ ist; denn der Faktor in der Parenthese kann nach den Werthen von $\alpha_{,}$, α und ν sowohl positiv als negativ sein.

$$(9)\begin{cases} W = \dfrac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \dfrac{\partial\left(r^{c}\dfrac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s}, \text{ oder auch} \\ W = \dfrac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \dfrac{\partial\left(r^{c}\dfrac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}. \end{cases}$$

Weil aber $\frac{\partial r}{\partial s} = - \cos\alpha$, so können wir auch schreiben:

$$(10) \qquad W = - \frac{i_{,}ids_{,}ds}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}}.$$

In dieser Form wollen wir den Ausdruck benutzen zur Bestimmung von c. Die Wirkung von $ds_{,}$ auf ds hat die Richtung r. Wir erhalten daher die mit ds parallele Komponente dieser Wirkung, wenn wir (10) mit $\cos\alpha$ multipliziren; und daraus die betreffende Komponente K der Gesammtwirkung des ganzen geschlossenen Leiters $s_{,}$ auf das Element ds, wenn wir in Bezug auf den ganzen geschlossenen Leiter $s_{,}$ integriren; also

$$K = - i_{,}ids \int \frac{\cos\alpha}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}} ds_{,}.$$

Diese Komponente muss verschwinden[4]), und wir haben zur Bestimmung der Konstanten c die folgende Gleichung:

$$- i_{,}ids \int \frac{\cos\alpha}{r^{c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}} ds_{,} = o;$$

oder weil $\qquad \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} = \dfrac{2r^{c}\cos\alpha}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)}{\partial s_{,}},$

so auch $\qquad \dfrac{-i_{,}ids}{2} \displaystyle\int \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} = o.$

Es ist aber $\dfrac{\partial\{(r^{c}\cos\alpha)^2 r^{-2c-1}\}}{\partial s_{,}} = \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} - (2c+1)\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial s_{,}},$

d. h. $\left[\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 = \displaystyle\int \dfrac{1}{r^{2c+1}} \dfrac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} - (2c+1)\int \dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \dfrac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,};$ folglich

$$\frac{-i_{,}ids}{2} \int \frac{1}{r^{2c+1}} \frac{\partial(r^{c}\cos\alpha)^2}{\partial s_{,}} ds_{,} = \frac{-i_{,}ids}{2} \left\{\left[\frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 + (2c+1)\int \frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \frac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,}\right\} = o.$$

Hierin ist $\left[\dfrac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+1}}\right]_0^0 = o$, weil der Leiter $s_{,}$ geschlossen ist, und daher die obere und die untere Grenze zusammenfallen. Daher muss

$$- \tfrac{1}{2}\, i_{,}ids\, (2c+1) \int \frac{(r^{c}\cos\alpha)^2}{r^{2c+2}} \frac{\partial r}{\partial s_{,}} ds_{,} = o$$

sein. Nun kann der Factor $\frac{1}{2} i_{,}ids$ nicht verschwinden, weil dann überhaupt von keiner Wirkung die Rede sein könnte; und dass das Integral wenigstens nicht für alle Fälle verschwindet, davon überzeugt man sich leicht; folglich ist

$$2c + 1 = 0, \text{ d. h. } c = -\tfrac{1}{2};$$

und wenn wir das auf (9) anwenden, so erhalten wir

---

4) Die Resultante eines beliebig geformten aber geschlossenen Leiters auf ein beliebiges Element eines andern Stromes steht senkrecht auf dem Element.

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{i_{,} i ds_{,} ds}{\sqrt{r}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s_{,}}\right)}{\partial s}, \text{ oder auch} \\ W &= \frac{i_{,} i ds_{,} ds}{\sqrt{r}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Es seien wiederum $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Koordinaten des Elementes $ds_{,}$ und x, y, z die Koordinaten des Elementes ds in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem; so haben wir, um die Komponenten X, Y, Z der Wirkung W zu erhalten, den Ausdruck (11) mit $-\frac{x_{,}-x}{r}$, $-\frac{y_{,}-y}{r}$, $-\frac{z_{,}-z}{r}$ zu multipliziren[5]), und es werden die Komponenten der Wirkung des Stromes $s_{,}$ auf das Element ds folgende Werthe haben:

$$X = -i_{,} i\, ds \int \frac{x_{,}-x}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,},$$

$$Y = -i_{,} i\, ds \int \frac{y_{,}-y}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,},$$

$$Z = -i_{,} i\, ds \int \frac{z_{,}-z}{\sqrt{r^3}} \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,}.$$

Jetzt ist $u dv = \frac{1}{2}\, d\,(uv) + \frac{1}{2}\, u^2 d\,\left(\frac{v}{u}\right)$,

folglich $\int u \frac{\partial v}{\partial s_{,}}\, ds_{,} = \frac{1}{2}\left[u v\right]_0^0 + \frac{1}{2}\int u^2 \frac{\partial\left(\frac{v}{u}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,}$.

Setzen wir daher $\frac{x_{,}-x}{\sqrt{r^3}} = u$ und $\sqrt{\frac{1}{r^3}}\,\frac{\partial r}{\partial s} = v$, so erhalten wir

$$X = -i_{,} i ds \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x_{,}-x}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right]_0^0 + \frac{1}{2}\int \frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,} \right\}.$$

Weil aber $s_{,}$ ein geschlossener Strom ist, so wird, wenn wir die Grenzen einsetzen, das erste Glied in der Klammer gleich Null, und

$$X = -\tfrac{1}{2}\, i_{,} i ds \int \frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,}. \qquad (12)$$

Aus (7) erhalten wir aber

$$\frac{r}{x_{,}-x}\,\frac{\partial r}{\partial s} = -\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y_{,}-y}{x_{,}-x}\,\frac{dy}{ds} + \frac{z_{,}-z}{x_{,}-x}\,\frac{dz}{ds}\right);$$

und wenn wir diese Gleichung nach $s_{,}$ differenziren und mit $\frac{(x_{,}-x)^2}{r^3}\, ds_{,}$ multipliziren, so

$$\frac{(x_{,}-x)^2}{r^3} \frac{\partial\left(\frac{r}{x_{,}-x}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s_{,}}\, ds_{,} = \frac{1}{r^3}\left[\left\{(z_{,}-z)\, dx_{,} - (x_{,}-x)\, dz_{,}\right\}\frac{dz}{ds} - \left\{(x_{,}-x)\, dy_{,} - (y_{,}-y)\, dx_{,}\right\}\frac{dy}{ds}\right].$$

---

5) Dabei denken wir uns ds dem Anfangspunkt des Systems näher als $ds_{,}$; dann wird die Wirkung die Koordinaten des Angriffspunktes verkleinern, und wir haben das negative Vorzeichen zu schreiben.

Dies auf (12) angewandt, ds unter das Integralzeichen geschrieben, und für Y und Z dieselben Entwicklungen gemacht, so erhalten wir:

$$X = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{ (z_{,}-z)dx_{,} - (x_{,}-x)dz_{,} \big\} dz - \big\{ (x_{,}-x)dy_{,} - (y_{,}-y)dx_{,} \big\} dy \Big],$$
$$Y = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{ (x_{,}-x)dy_{,} - (y_{,}-y)dx_{,} \big\} dx - \big\{ (y_{,}-y)dz_{,} - (z_{,}-z)dy_{,} \big\} dz \Big],$$
$$Z = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i \int \frac{1}{r^3}\Big[\big\{ (y_{,}-y)dz_{,} - (z_{,}-z)dy_{,} \big\} dy - \big\{ (z_{,}-z)dx_{,} - (x_{,}-x)dz_{,} \big\} dx \Big].$$

Dies sind die Komponenten der Wirkung eines geschlossenen Stromes $s_{,}$ auf ein Element ds eines beliebigen andern Stromes s, der geschlossen sein kann und auch nicht.

2. Setzen wir

(14) $$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int \frac{(y_{,}-y)\,dz_{,} - (z_{,}-z)\,dy_{,}}{r^3} &= A,\\ \tfrac{1}{2}\int \frac{(z_{,}-z)\,dx_{,} - (x_{,}-x)\,dz_{,}}{r^3} &= B,\\ \tfrac{1}{2}\int \frac{(x_{,}-x)\,dy_{,} - (y_{,}-y)\,dx_{,}}{r^3} &= C;\end{aligned}\right.$$

so lassen sich die Ausdrücke (13) unmittelbar also schreiben:

(15) $$X = i_{,}i\,(Cdy - Bdz),\quad Y = i_{,}i\,(Adz - Cdx),\quad Z = i_{,}i\,(Bdx - Ady);$$

und wenn wir eine Richtung D annehmen, welche mit den Koordinatenachsen Winkel bildet, deren Kosinus entsprechend die Werthe $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ haben; so nennt man die Richtung D die Direktrix des Stromes $s_{,}$ und die Grössen A, B, C die Komponenten der Direktrix. Die Ebene, welche durch r und das feste Element $ds_{,}$ bestimmt wird, heisst die Radiusvektorebene. Dann seien α', β', γ' die Kosinus der Winkel, welche die Normale der Radiusvektorebene mit den Koordinatenachsen bildet; n das Perpendikel von dem Anfangspunkt der Koordinaten auf die Radiusvektorebene; so erhalten wir:

$$\alpha' x_{,} + \beta' y_{,} + \gamma' z_{,} - n = o,$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - n = o,$$

woraus $\alpha' dx_{,} + \beta' dy_{,} + \gamma' dz_{,} = o,$

und $\alpha'(x_{,}-x) + \beta'(y_{,}-y) + \gamma'(z_{,}-z) = o;$

hiezu noch $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$

so haben wir drei Gleichungen und finden daraus:

$$\alpha' = \mu\,\big\{ (z_{,}-z)\,dy_{,} - (y_{,}-y)\,dz_{,} \big\},$$
$$\beta' = \mu\,\big\{ (x_{,}-x)\,dz_{,} - (z_{,}-z)\,dx_{,} \big\},$$
$$\gamma' = \mu\,\big\{ (y_{,}-y)\,dx_{,} - (x_{,}-x)\,dy_{,} \big\},$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\big\{(y_{,}-y)dx_{,} - (x_{,}-x)dy_{,}\big\}^2 + \big\{(x_{,}-x)dz_{,} - (z_{,}-z)dx_{,}\big\}^2 + \big\{(z_{,}-z)dy_{,} - (y_{,}-y)dz_{,}\big\}^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\big\{(x_{,}-x)^2 + (y_{,}-y)^2 + (z_{,}-z)^2\big\}\big\{(dx_{,})^2 + (dy_{,})^2 + (dz_{,})^2\big\} - \big\{(x_{,}-x)dx_{,} + (y_{,}-y)dy_{,} + (z_{,}-z)dz_{,}\big\}^2}}.$$

Nun ist aber

$$(x_{,}-x)^2 + (y_{,}-y)^2 + (z_{,}-z)^2 = r^2,$$
$$(dx_{,})^2 \;+\; (dy_{,})^2 \;+\; (dz_{,})^2 \;=\; (ds_{,})^2,$$
$$(x_{,}-x)dx_{,}+(y_{,}-y)dy_{,}+(z_{,}-z)dz_{,}=r\cos\alpha_{,}ds_{,};$$

somit

$$\mu = \frac{1}{r\sin\alpha_{,}ds_{,}},$$
$$\alpha' r\sin\alpha_{,}ds_{,} = (z_{,}-z)\,dy_{,}-(y_{,}-y)dz_{,}\,,$$
$$\beta' r\sin\alpha_{,}ds_{,} = (x_{,}-x)dz_{,}-(z_{,}-z)dx_{,}\,,$$
$$\gamma' r\sin\alpha_{,}ds_{,} = (y_{,}-y)dx_{,}-(x_{,}-x)dy_{,}\,;$$ und deshalb nach (14)
$$C = -\tfrac{1}{2}\int\frac{r\gamma'\sin\alpha_{,}ds_{,}}{r^3}.$$

Aber $\frac{1}{2}\,r\sin\alpha_{,}ds_{,}$ ist das Dreieck, welches durch r, $ds_{,}$ und den Punkt xyz bestimmt wird; und weil γ' der Kosinus des Winkels, den die Normale der Radiusvektorebene mit der Z-Achse bildet, d. h. der Kosinus des Winkels, welchen die Radiusvektorebene mit der XY-Ebene bildet; so ist $\frac{1}{2}\,r\gamma'\sin\alpha_{,}ds_{,}$ die Projektion des betreffenden Elementes der Radiusvektorebene auf die XY-Ebene. Denken wir uns daher den ganzen Strom $s_{,}$ auf die XY-Ebene projicirt und legen den Anfangspunkt der Koordinaten in das Element ds; dann ist das Dreieck, welches entsteht, wenn man die Endpunkte der Projektionen des Elementes $ds_{,}$ mit dem Anfangspunkt der Koordinaten verbindet, gleich unserem schon bestimmten Dreieck $\frac{1}{2}\,r\gamma'\sin\alpha_{,}ds_{,}$. Bezeichnen wir mit w die Projektion von r und mit ψ den Winkel dieser Projektion mit der X-Achse, dann kann man offenbar $\gamma' ds_{,}$ ansehen als das Bogenstück eines Kreises, der mit w um ds beschrieben ist, und erhält

$$\tfrac{1}{2}\,r\gamma'\sin\alpha_{,}ds_{,} = \frac{w^2\pi d\psi}{360} = \tfrac{1}{2}\,w^2 d\psi,$$ und daraus
$$C = -\tfrac{1}{2}\int\frac{w^2 d\psi}{r^3},$$

worin die Integration auf den ganzen Strom $s_{,}$ auszudehnen ist. Nun entspricht aber jedem Element $ds_{,}$ ein anderes Element, welches man erhält, wenn man die Projektionen der Radiusvektorebene, welche nach den Endpunkten des Elementes $ds_{,}$ gezogen sind, verlängert, bis sie die Projektion der Stromkurve zum zweitenmal schneiden; bezeichnet man die den zweiten Durchschnitten entsprechenden Werthe mit $w_{,}$ und $r_{,}$, und die Werthe von ψ, welche Radienvektoren zugehören, deren Projektionen die Projektion der Stromkurve berühren, durch ψ_1 und ψ_2; so erhält man

$$\int\frac{w^2 d\psi}{r^3} = \int_{\psi_{,}}^{\psi_2}\frac{w^2 d\psi}{r^3} + \int_{\psi_2}^{\psi_{,}}\frac{w_{,}^2 d\psi}{r_{,}^3} = \int_{\psi_{,}}^{\psi_2}\left(\frac{w^2}{r^3}-\frac{w_{,}^2}{r_{,}^3}\right)d\psi,$$ und
$$C = \tfrac{1}{2}\int_{\psi_{,}}^{\psi_2}\left(\frac{w_{,}^2}{r_{,}^3}-\frac{w^2}{r^3}\right)d\psi.$$

Der vorstehende Ausdruck gilt ganz allgemein, ohne jede Voraussetzung. Jetzt aber wollen wir den Strom $s_{,}$ unendlich klein annehmen und deshalb, wenn wir

$$w_{,} = w + dw \text{ und } r_{,} = r + dr$$

setzen, von den Inkrementen dw und dr nur die ersten Potenzen berücksichtigen. Alsdann erhalten wir

$$\frac{w_{,}^{2}}{r_{,}^{3}} = (w+dw)^2(r+dr)^{-3} = (w^2+2wdw)(r^{-3}-3r^{-4}dr) = \frac{w^2}{r^3} + \frac{2w}{r^3}\,dw - \frac{3w^2}{r^4}\,dr, \text{ und somit}$$

$$C = \tfrac{1}{2}\int_{\psi_{,}}^{\psi_2} wdw\left(\frac{2}{r^3} - \frac{3w}{r^4}\frac{dr}{dw}\right)d\psi.$$

Drücken wir dw und dr durch die Koordinaten aus, so

$$wdw = x_{,}dx_{,} + y_{,}dy_{,} \quad \text{und} \quad dr = \frac{1}{r}\,(x_{,}dx_{,} + y_{,}dy_{,} + z_{,}dz_{,})\,.$$

Ferner ist $tg\psi = \frac{y_{,}}{x_{,}}$; und wenn wir den unendlich kleinen Strom als das Element einer Ebene ansehen, so haben wir noch die Gleichung der Ebene des Stromes

$$\frac{x_{,}}{a} + \frac{y_{,}}{b} + \frac{z_{,}}{c} = 1,$$

wenn nämlich a, b und c die Abschnitte bedeuten, welche durch die Ebene des Stromes auf den Koordinatenachsen gemacht werden. Differenziren wir jetzt auch die beiden letzten Gleichungen, so erhalten wir

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{x_{,}dy_{,} - y_{,}dx_{,}}{x_{,}^2} \text{ und } \frac{dx_{,}}{a} + \frac{dy_{,}}{b} + \frac{dz_{,}}{c} = o.$$

Aber es ist $\cos^2\psi = \left(\frac{x_{,}}{w}\right)^2$, daher $w^2d\psi = x_{,}dy_{,} - y_{,}dx_{,}$; und wenn wir bedenken, dass ψ von den Dimensionen des unendlich kleinen Stromes abhängt, also $d\psi = o$ ist; so haben wir folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} dr &= \frac{1}{r}\,(x_{,}dx_{,} + y_{,}dy_{,} + z_{,}dz_{,}), \\ wdw &= x_{,}dx_{,} + y_{,}dy_{,}, \\ o &= x_{,}dy_{,} - y_{,}dx_{,}, \\ o &= \frac{dx_{,}}{a} + \frac{dy_{,}}{b} + \frac{dz_{,}}{c}; \text{ und daraus} \end{aligned}$$

$$dx_{,} = \frac{x_{,}dw}{w},\ dy_{,} = \frac{y_{,}dw}{w},\ dz_{,} = \frac{dw}{w}\,(z_{,} - c).$$

Substituiren wir diese Werthe in die erste der vorstehenden Gleichungen, so

$$dr = \left\{x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}(z_{,} - c)\right\}\frac{dw}{rw} = (r^2 - cz_{,})\,\frac{dw}{rw},$$

$$\frac{dr}{dw} = \frac{r^2 - cz_{,}}{rw}; \text{ und deshalb}$$

$$C = -\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3cz_{,}}{r^5}\right)wdwd\psi.$$

Da der Strom unendlich klein ist, so können wir r und $z_{,}$ als konstant für alle Werthe von ψ ansehen und können schreiben

$$C = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3cz_{,}}{r^5}\right)\int_{\psi_{,}}^{\psi_2} wdwd\psi.$$

Jetzt ist $\int_{\psi_{,}}^{\psi_2} wdwd\psi$ der Flächeninhalt der Projektion des unendlich kleinen Stromes. Bezeichnen wir daher diesen Inhalt durch $\lambda_{,}$, das Perpendikel vom Anfangspunkt der Koordinaten auf die Ebene des unendlich kleinen Stromes durch p, und durch ε, ζ, η die Winkel, welche p, mit den Koordinatenachsen bildet, so wird

$$\int_{\psi_{,}}^{\psi_2} w dw d\psi = \lambda_{,} \cos\eta, \quad p_{,} = a\cos\varepsilon = b\cos\zeta = c\cos\eta;$$ und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} C &= -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\left(\frac{\cos\eta}{r^3} - \frac{3p_{,}z_{,}}{r^5}\right). \text{ In derselben Weise} \\ B &= -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\left(\frac{\cos\zeta}{r^3} - \frac{3p_{,}y_{,}}{r^5}\right), \\ A &= -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^3} - \frac{3p_{,}x_{,}}{r^5}\right). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Dies sind die Komponenten der Direktrix eines unendlich kleinen Stromes $s_{,}$ in Bezug auf ein Element ds eines andern unendlich kleinen Stromes s. Es ist aber

$$x_{,} = p_{,}\cos\varepsilon, \quad y_{,} = p_{,}\cos\zeta, \quad z_{,} = p_{,}\cos\eta; \text{ deshalb}$$

$$\frac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\partial y_{,}}{\partial p_{,}} = \cos\zeta, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial p_{,}} = \cos\eta;$$

ferner $p_{,} = x_{,}\cos\varepsilon + y_{,}\cos\zeta + z_{,}\cos\eta$,

also $p_{,} = x_{,}\dfrac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} + y_{,}\dfrac{\partial y_{,}}{\partial p_{,}} + z_{,}\dfrac{\partial z_{,}}{\partial p_{,}}$; und wenn wir dies in (17) substituiren:

$$A = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\left\{\frac{1}{r^3}\frac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} - \frac{3x_{,}}{r^5}\left(x_{,}\frac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} + y_{,}\frac{\partial y_{,}}{\partial p_{,}} + z_{,}\frac{\partial z_{,}}{\partial p_{,}}\right)\right\}.$$

Weil aber $x_{,}\dfrac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} + y_{,}\dfrac{\partial y_{,}}{\partial p_{,}} + z_{,}\dfrac{\partial z_{,}}{\partial p_{,}} = r\dfrac{\partial r}{\partial p_{,}}$,

so $A = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\left(\dfrac{1}{r^3}\dfrac{\partial x_{,}}{\partial p_{,}} - \dfrac{3x_{,}}{r^4}\dfrac{\partial r}{\partial p_{,}}\right) = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\dfrac{\partial\left(\frac{x_{,}}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}$. Ebenso

$$B = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\frac{\partial\left(\frac{y_{,}}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}, \quad C = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\frac{\partial\left(\frac{z_{,}}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}.$$

Verschieben wir jetzt das Koordinatensystem parallel mit sich selber, bis der alte Anfangspunkt in Bezug auf den neuen die Koordinaten x, y, z hat; so werden die Komponenten der Direktrix

$$A = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\frac{\partial\left(\frac{x_{,}-x}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}, \quad B = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\frac{\partial\left(\frac{y_{,}-y}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}, \quad C = -\tfrac{1}{2}\lambda_{,}\frac{\partial\left(\frac{z_{,}-z}{r^3}\right)}{\partial p_{,}}.$$

Diese Werthe in (15) eingesetzt; so erhalten wir für die Komponenten der Wirkung eines unendlich kleinen Stromes $s_{,}$ auf ein Element ds eines andern unendlich kleinen Stromes s, wenn wir bedenken, dass x, y, z von $p_{,}$ unabhängig sind, und wir deshalb dx, dy, dz unter das Differentiationszeichen nach $p_{,}$ schreiben können, die folgenden Ausdrücke:

$$X = -\tfrac{1}{2}i_{,}i\lambda_{,}\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(z_{,}-z)\,dy - (y_{,}-y)\,dz\right\}\right]}{\partial p_{,}}$$

$$Y = -\tfrac{1}{2}i_{,}i\lambda_{,}\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(x_{,}-x)\,dz - (z_{,}-z)\,dx\right\}\right]}{\partial p_{,}}$$

$$Z = -\tfrac{1}{2}i_{,}i\lambda_{,}\frac{\partial\left[r^{-3}\left\{(y_{,}-y)\,dx - (x_{,}-x)\,dy\right\}\right]}{\partial p_{,}};$$

und hieraus durch Integration nach s die Komponenten der Wirkung eines unendlich kleinen geschlossenen Stromes $s_,$ auf einen unendlich kleinen geschlossenen Strom s:

$$
(17)\quad\left\{\begin{aligned}
X' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \frac{\partial}{\partial p_,} \cdot \int \frac{(z_, - z)\, dy - (y_, - y)\, dz}{r^3}, \\
Y' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \frac{\partial}{\partial p_,} \cdot \int \frac{(x_, - x)\, dz - (z_, - z)\, dx}{r^3}, \\
Z' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \frac{\partial}{\partial p_,} \cdot \int \frac{(y_, - y)\, dx - (x_, - x)\, dy}{r^3}.
\end{aligned}\right.
$$

Die hierin vorkommenden Integrale sind nichts anderes als die negativen Komponenten der Direktrix des zweiten geschlossenen Stromes s, wie man aus der Vergleichung mit (14) sieht. Bezeichnen wir daher die den Grössen $\lambda_,$ und $p_,$ in Bezug auf den Strom s entsprechenden Grössen mit λ und p, so erhalten wir analog den obigen Entwickelungen:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(z_, - z)\, dy - (y_, - y)\, dz}{r^3} &= \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{x_, - x}{r^3}\right), \\
\int \frac{(x_, - x)\, dz - (z_, - z)\, dx}{r^3} &= \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{y_, - y}{r^3}\right), \\
\int \frac{(y_, - y)\, dx - (x_, - x)\, dy}{r^3} &= \lambda \frac{\partial}{\partial p} \cdot \left(\frac{z_, - z}{r^3}\right);
\end{aligned}
$$

und darnach

$$
(18)\quad\left\{\begin{aligned}
X' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \lambda \frac{\partial^2}{\partial p_, \partial p} \cdot \left(\frac{x_, - x}{r^3}\right), \\
Y' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \lambda \frac{\partial^2}{\partial p_, \partial p} \cdot \left(\frac{y_, - y}{r^3}\right), \\
Z' &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i\, \lambda_, \lambda \frac{\partial^2}{\partial p_, \partial p} \cdot \left(\frac{z_, - z}{r^3}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Dies sind die Komponenten der Wirkung zweier unendlich kleiner geschlossener Ströme $s_,$ und s auf einander, welche sich entsprechend in den Punkten $x_, y_, z_,$ und xyz befinden; deren Ebenen vom Anfangspunkt der Koordinaten um $p_,$ und p, während sie von einander um r entfernt sind; deren Flächeninhalte $\lambda_,$ und λ, und deren Intensitäten $i_,$ und i sind.

3. Unter einem Solenoid versteht man ein System unendlich kleiner Ströme, deren Ebenen senkrecht auf einer beliebigen Kurve stehen, und die unendlich nahe an einander liegen, so dass sie einen unendlich dünnen Kanal bilden. Jene Kurve heisst die Achse und die Endpunkte der Achse die Pole des Solenoids. Es seien $d\sigma_,$ und $d\sigma$ zwei Elemente der Achsen zweier Solenoide $\sigma_,$ und σ; $x_,$, $y_,$, $z_,$ und x, y, z die Koordinaten der Elemente $d\sigma_,$ und $d\sigma$; $n_,$ und n die Anzahl der unendlich kleinen Ströme, welche sich auf einer Längeneinheit der Solenoidachsen befinden: dann ist $n_, d\sigma_,$ die Anzahl der unendlich kleinen Ströme auf dem Element $d\sigma_,$, und $n d\sigma$ die Anzahl der unendlich kleinen Ströme auf dem Element $d\sigma$. Da wir $d\sigma_,$ und $d\sigma$ unendlich klein annehmen, so werden $x_,$, $y_,$, $z_,$, x, y, z, und somit auch r für alle unendlich kleinen Ströme auf den Elementen $d\sigma_,$ und $d\sigma$ dieselben Werthe haben; und wenn wir noch bedenken, dass $dp_, = d\sigma_,$ und $dp = d\sigma$; so erhalten wir für die Komponenten der Wirkung des Elementes $d\sigma_,$ auf das Element $d\sigma$ aus (18) unmittelbar die folgenden Werthe:

$$
\begin{aligned}
X_, &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i \lambda_, \lambda n_, n \frac{\partial^2}{\partial \sigma_, \partial \sigma} \cdot \left(\frac{x_, - x}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma, \\
Y_, &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i \lambda_, \lambda n_, n \frac{\partial^2}{\partial \sigma_, \partial \sigma} \cdot \left(\frac{y_, - y}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma, \\
Z_, &= -\tfrac{1}{2}\, i_, i \lambda_, \lambda n_, n \frac{\partial^2}{\partial \sigma_, \partial \sigma} \cdot \left(\frac{z_, - z}{r^3}\right) d\sigma_, d\sigma;
\end{aligned}
$$

und daraus die Komponenten der Gesammtwirkung des Solenoids $\sigma_{,}$ auf das Solenoid σ:

$$X_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,}\partial\sigma} \cdot \left(\frac{x_{,}-x}{r^3}\right) d\sigma_{,}d\sigma,$$

$$Y_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,}\partial\sigma} \cdot \left(\frac{y_{,}-y}{r^3}\right) d\sigma_{,}d\sigma,$$

$$Z_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \iint \frac{\partial^2}{\partial\sigma_{,}\partial\sigma} \cdot \left(\frac{z_{,}-z}{r^3}\right) d\sigma_{,}d\sigma.$$

Bezeichnen wir jetzt die Koordinaten der Pole $\pi_{,}$ und $\pi_{,,}$ des Solenoids $\sigma_{,}$ mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ und die Koordinaten der Pole π' und π'' des Solenoids σ mit x', y', z' und mit x'', y'', z''; ferner die Entfernungen der Pole π' von $\pi_{,}$, π' von $\pi_{,,}$, π'' von $\pi_{,}$ und π'' von $\pi_{,,}$ entsprechend mit $r_{,}$, r_2, r_3 und r_4, und führen zuerst die angedeuteten Integrationen nach $\sigma_{,}$ aus: so erhalten wir

$$X_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{x_{,}-x}{r_{,}^3} - \frac{x_{,,}-x}{r_2^3}\right) d\sigma,$$

$$Y_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{y_{,}-y}{r_{,}^3} - \frac{y_{,,}-y}{r_2^3}\right) d\sigma,$$

$$Z_2 = -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \int \frac{\partial}{\partial\sigma} \cdot \left(\frac{z_{,}-z}{r_{,}^3} - \frac{z_{,,}-z}{r_2^3}\right) d\sigma;$$

und wenn wir auch die Integrationen nach σ ausführen:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \left[\frac{x_{,}-x'}{r_{,}^3} - \frac{x_{,}-x''}{r_3^3} - \frac{x_{,,}-x'}{r_2^3} + \frac{x_{,,}-x''}{r_4^3}\right], \\ Y_2 &= -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \left[\frac{y_{,}-y'}{r_{,}^3} - \frac{y_{,}-y''}{r_3^3} - \frac{y_{,,}-y'}{r_2^3} + \frac{y_{,,}-y''}{r_4^3}\right], \\ Z_2 &= -\tfrac{1}{2}\, i_{,}i\lambda_{,}\lambda n_{,}n \left[\frac{z_{,}-z'}{r_{,}^3} - \frac{z_{,}-z''}{r_3^3} - \frac{z_{,,}-z'}{r_{,}^3} + \frac{z_{,,}-z''}{r_4^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

4. Bei den bisherigen allgemeinen Untersuchungen ist der Unterzeichnete einer Vorlesung über Galvanismus seines hochverehrten Lehrers Professor Dr. Neumann zu Königsberg gefolgt. Um nun zur Lösung der gestellten Aufgabe überzugehen, denken wir uns die Fläche einer Kreiswindung der Rolle $A_{,}$ auf beliebige Weise in unendlich viele und unendlich kleine Elemente getheilt und alle diese Elemente von gleichen Strömen in demselben Sinne umflossen; dann können wir für die Wirkung der gedachten Kreiswindung die Summe der Wirkungen jener unendlich kleinen Ströme substituiren[6]), und haben, um die Wirkung der ganzen Kreiswindig zu erhalten, den Ausdruck für die Wirkung eines der unendlich kleinen Ströme in Bezug auf die ganze Fläche der Kreiswindung zu integriren. Stellen wir uns alsdann eine Schicht von neben einander liegenden Kreiswindungen der Rolle $A_{,}$ vor, denken uns den Leitungsdraht sehr dünn und die einzelnen Windungen unmittelbar neben einander liegend; so können wir für ein solches System von Kreiswindungen substituiren ein System von Solenoiden, deren Achsen sämmtlich parallel sind der Achse der Rolle, und deren Pole in den äusseren Kreisflächen der gedachten Schicht liegen. Und um die Wirkung eines solchen Systems unmittelbar neben einander liegender Kreiswindungen, welche sämmtlich senkrecht stehen auf ihrer gemeinschaftlichen Achse, zu erhalten, haben wir den Ausdruck für die Wirkung eines Solenoids zu integriren nach den Flächen der äusseren Kreise des Systems. Dieselben Schlüsse gelten auch in Bezug auf jede Schicht von Kreiswindungen der Rolle A; und wir erhalten die Komponenten der Wirkung einer Schicht von Windungen der Rolle $A_{,}$ auf eine ebensolche Schicht der Rolle A, wenn wir die Ausdrücke (19) integriren nach den vier äusseren Kreisflächen der beiden Schichten; also

6) Zwei gleiche Leiter, von gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen, üben gleiche aber entgegengesetzte Wirkungen aus.

$$
(20)\left\{
\begin{aligned}
X_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{x_{,}-x'}{r_1^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{x_{,}-x''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{x_{,,}-x'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{x_{,,}-x''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right], \\
Y_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{y_{,}-y'}{r_1^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{y_{,}-y''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{y_{,,}-y'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{y_{,,}-y''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right], \\
Z_3 &= -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{z_{,}-z'}{r_1^3}\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du' - \iiiint \frac{z_{,}-z''}{r_3^3}\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du'' - \\ &- \iiiint \frac{z_{,,}-z'}{r_2^3}\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du' + \iiiint \frac{z_{,,}-z''}{r_4^3}\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''\end{aligned}\right];
\end{aligned}\right.
$$

indem wir $i_{,}=i$ und $n_{,}=n$ setzen, was man am einfachsten dadurch erreicht, dass man um die drei Rollenpaare denselben Strom durch denselben Leitungsdraht führt, und auf die Einheit der Achse der Rolle $A_{,}$ ebenso viele Windungen legt als auf die Einheit der Achse der Rolle A; indem wir ferner durch die ϱ die Entfernungen der λ von den Mittelpunkten der entsprechenden Kreiswindungen und durch die u die Winkel bezeichnen, welche die ϱ mit einer als fest gedachten Richtung bilden, welche den Ebenen der Kreiswindungen parallel ist, so dass $\lambda = \varrho d\varrho du$.

Die Lage des Koordinatensystems ist bis jetzt beliebig. Legen wir den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der äusseren Kreiswindung der Rolle $A_{,}$, und zwar so, dass die XY-Ebene in die Ebene dieser äusseren Kreiswindung fällt; und nehmen die X-Achse als die feste Richtung an, in Bezug auf welche die Winkel u gezählt werden; bezeichnen ferner die Entfernung der beiden Rollen durch m, die Länge der Achse jedes Systems durch l, indem wir beide Achsen gleich annehmen; und setzen endlich voraus, dass die Achsen der beiden Rollen jedes Systems in eine gerade Linie fallen: so wird:

$$
\begin{array}{llll}
x_{,}=\varrho_{,}\cos u_{,}, & x_{,,}=\varrho_{,,}\cos u_{,,}, & x'=\varrho'\cos u', & x''=\varrho''\cos u'', \\
y_{,}=\varrho_{,}\sin u_{,}, & y_{,,}=\varrho_{,,}\sin u_{,,}, & y'=\varrho'\sin u', & y''=\varrho''\sin u'', \\
z_{,}=l; & z_{,,}=o; & z'=m+2l; & z''=m+l;
\end{array}
$$

und darnach

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')}, & r_2 &= \sqrt{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u_{,,}-u')}, \\
r_3 &= \sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')}, & r_4 &= \sqrt{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir diese Werthe in die Ausdrücke (20) für die Komponenten einsetzen, so nehmen dieselben folgende Formen an:

$$
X_3 = -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{(\varrho_{,}\cos u_{,}-\varrho'\cos u')\,d\varrho_{,}d\varrho' du_{,}du'}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')\}^3}} - \iiiint \frac{(\varrho_{,}\cos u_{,}-\varrho''\cos u'')\,d\varrho_{,}d\varrho'' du_{,}du''}{\sqrt{\{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')\}^3}} - \\ &- \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\cos u_{,,}-\varrho'\cos u')\,d\varrho_{,,}d\varrho' du_{,,}du'}{\sqrt{\{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u_{,,}-u')\}^3}} + \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\cos u_{,,}-\varrho''\cos u'')\,d\varrho_{,,}d\varrho'' du_{,,}du''}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')\}^3}}\end{aligned}\right],
$$

$$
Y_3 = -\tfrac{1}{2}i^2n^2\left[\begin{aligned}&\iiiint \frac{(\varrho_{,}\sin u_{,}-\varrho'\sin u')\,d\varrho_{,}d\varrho' du_{,}du'}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,}\varrho'\cos(u_{,}-u')\}^3}} - \iiiint \frac{(\varrho_{,}\sin u_{,}-\varrho''\sin u'')\,d\varrho_{,}d\varrho'' du_{,}du''}{\sqrt{\{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,}\varrho''\cos(u_{,}-u'')\}^3}} - \\ &- \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\sin u_{,,}-\varrho'\sin u')\,d\varrho_{,,}d\varrho' du_{,,}du'}{\sqrt{\{(m+2l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho'^2-2\varrho_{,,}\varrho'\cos(u''-u')\}^3}} + \iiiint \frac{(\varrho_{,,}\sin u_{,,}-\varrho''\sin u'')\,d\varrho_{,,}d\varrho'' du_{,,}du''}{\sqrt{\{(m+l)^2+\varrho_{,,}^2+\varrho''^2-2\varrho_{,,}\varrho''\cos(u_{,,}-u'')\}^3}}\end{aligned}\right],
$$

$$Z_3 = -\tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[\begin{array}{l} -(m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} + m \iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} + \\ +(m+2l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du_{,}}{r_{,}^3} - (m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho'' d\varrho_{,,} d\varrho'' du_{,,} du''}{r_4^3} \end{array}\right].$$

In Bezug auf die sämmtlichen u ist von o bis 2π zu integriren; und wenn wir sämmtliche Kreise der beiden Schichten als gleich annehmen und den gemeinschaftlichen Radius mit R bezeichnen, so ist in Bezug auf die sämmtlichen ϱ von o bis R zu integriren. Jetzt wissen wir, dass eine Wirkung nur in der Richtung der Centrale stattfinden kann, dass also $X_3 = o$ und $Y_3 = o$ sein muss. Um das auch aus unseren Werthen für X_3 und Y_3 zu ersehen, zerlegen wir das erste Glied in dem Ausdruck für X_3 in

$$\int_0^R\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho_{,}^2 \cos u_{,} \varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} - \int_0^R\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho'^2 \cos u' \varrho_{,} d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} \text{*)}$$

und denken uns die angedeuteten Integrationen ausgeführt und die Grenzen eingesetzt; so erhält das erste der vorstehenden Integrale denselben Werth als das zweite, d. h. ihre Differenz ist gleich Null. Dasselbe gilt von jedem der drei anderen Glieder in dem Ausdruck für X_3 und von jedem Gliede für Y_3; und es bleibt Z_3 übrig für die Wirkung einer Schicht von neben einander liegenden Kreiswindungen der Rolle A, auf eine kongruente Schicht der Rolle A. Schreiben wir daher P für Z_3, so ist

$$P = \tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[2(m+l)\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} - m\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} - (m+2l)\iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du'}{r_2^3} \right], \quad (21)$$

weil das erste Glied in Z_3 offenbar gleich dem dritten ist. Setzen wir endlich

$$\iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho' d\varrho_{,} d\varrho' du_{,} du'}{r_{,}^3} = Q_{,}, \quad \iiiint \frac{\varrho_{,}\varrho'' d\varrho_{,} d\varrho'' du_{,} du''}{r_3^3} = Q, \quad \iiiint \frac{\varrho_{,,}\varrho' d\varrho_{,,} d\varrho' du_{,,} du'}{r_2^3} = Q_2;$$

so wird

$$P = \tfrac{1}{2} i^2 n^2 \left[2(m+l) Q_{,} - mQ - (m+2l) Q_2\right],$$

und unsere Aufgabe besteht zunächst darin, die drei Integrale Q, $Q_{,}$ und Q_2 auszuführen.

5. Es ist klar, dass durch eins der drei Integrale Q auch die beiden anderen gefunden sind. Wir wählen zur Ausführung

$$Q = \int_0^R\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varrho_{,}\varrho d\varrho_{,} d\varrho du_{,} du}{\sqrt{\left\{m^2 + \varrho_{,}^2 + \varrho^2 - 2\varrho_{,}\varrho\cos(u_{,} - u)\right\}^3}},$$

indem wir der Bequemlichkeit halber ϱ und u für ϱ'' und u'' schreiben. Um nun zunächst nach $u_{,}$ zu integriren, schreiben wir

$$Q = \int_0^R\int_0^R \varrho_{,}\varrho d\varrho_{,} d\varrho \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left\{\sin(u_{,} - u)\right\} du_{,} du,$$

und setzen für den Augenblick $u_{,} - u = o$ und $u = v$; so wird, weil $u_{,}$ und u von einander unabhängig sind, $du_{,} = do$ und $du = dv$; folglich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left\{\sin(u_{,} - u)\right\} du_{,} du = \int_{-u}^{2\pi - u}\int_0^{2\pi} f(\sin o)\, do\, dv = 2\pi \int_{-u}^{2\pi - u} f(\sin o)\, do.$$

*) Im ersten Gliede des Ausdrucks für X_3 ist der Faktor $\varrho_{,}\varrho'$ im Zähler beim Abschreiben weggelassen; und ebenso die entsprechenden Faktoren in sämmtlichen Gliedern der Ausdrücke für X_3 und für Y_3.

Jetzt ist es gleichgültig, ob man von $-u$ bis $2\pi-u$, oder von o bis 2π integrirt, da man in beiden Fällen um die ganze Peripherie herumzugehen hat; und ebenso gleichgültig, ob wir in $\int f(\sin o)\,do$ den Winkel mit o oder mit u oder irgend anders bezeichnen, weil das auf den Werth des Integrals keinen Einfluss hat. Daher können wir schreiben

$$2\pi \int\limits_{-u}^{2\pi-u} f(\sin o)\,do = 2\pi \int\limits_{o}^{2\pi} f(\sin u)\,du,$$

und deshalb

$$Q = 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \frac{\varrho_{,}\varrho\,d\varrho_{,}\,d\varrho\,du}{\sqrt{(m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u)^3}}.$$

6. Zur Integration nach $\varrho_{,}$ schreiben wir

$$m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u = m^2+\varrho^2\sin^2 u+(\varrho_{,}-\varrho\cos u)^2$$

und setzen

$$m^2+\varrho^2\sin^2 u = g^2, \quad \varrho_{,}-\varrho\cos u = gz;$$

dann wird

$$\varrho_{,} = gz+\varrho\cos u, \quad d\varrho_{,} = g\,dz;$$

und wir erhalten

$$Q = 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,du \int \frac{(gz+\varrho\cos u)\,g\,dz}{\sqrt{(g^2+g^2z^2)^3}} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,du \Big[\int \frac{z\,dz}{g\sqrt{(1+z^2)^3}} + \int \frac{\varrho\cos u\,dz}{g^2\sqrt{(1+z^2)^3}}\Big] =$$

$$= 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,du \Big[-\frac{1}{g\sqrt{1+z^2}} + \frac{\varrho\cos u}{g^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\Big] =$$

$$= 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,du \Big[-\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u}} + \frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{\varrho_{,}-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho_{,}^2+\varrho^2-2\varrho_{,}\varrho\cos u}}\Big]_{o}^{R} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{o}^{R}\int\limits_{o}^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,du \Big[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}} + \frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}} + \frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}} +$$

$$+ \frac{\varrho^2\cos^2 u}{(m^2+\varrho^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+\varrho^2}}\Big].$$

Weil aber

$$\frac{\varrho^2\cos^2 u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}} = -\frac{1}{\sqrt{m^2+\varrho^2}} + \frac{\sqrt{m^2+\varrho^2}}{m^2+\varrho^2\sin^2 u},$$

so

$$Q = 2\pi \iint \varrho\,d\varrho\,du \Big[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}} + \frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2 u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}} + \frac{\sqrt{m^2+\varrho^2}}{m^2+\varrho\sin^2 u}\Big].$$

Das letzte Glied in der Parenthese können wir weglassen; denn es verschwindet, wenn wir es nach u von o bis 2π integriren. Es ist nämlich

$$\int\frac{du}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\int\frac{du}{m^2+\varrho^2-\varrho^2\cos^2u}=\int\frac{du}{(\sqrt{m^2+\varrho^2}+\varrho\cos u)(\sqrt{m^2+\varrho^2}-\varrho\cos u)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{m^2+\varrho^2}}\int\frac{du}{\sqrt{m^2+\varrho^2}+\varrho\cos u}+\frac{1}{2\sqrt{m^2+\varrho^2}}\int\frac{du}{\sqrt{m^2+\varrho^2}-\varrho\cos u}=$$

$$=\frac{1}{2(m^2+\varrho^2)}\int\frac{du}{1+\frac{\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}}+\frac{1}{2(m^2+\varrho^2)}\int\frac{du}{1-\frac{\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}}.$$

Da nun $\frac{\varrho}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}<1$ ist, so setzen wir $\frac{\varrho}{\sqrt{m^2+\varrho^2}}=\cos\varphi$ und, der Kürze wegen, $m^2+\varrho^2=h^2$, und erhalten:

$$\int\frac{du}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1+\cos\varphi\cos u}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1-\cos\varphi\cos u}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1+\frac{1}{2}\cos(\varphi+u)+\frac{1}{2}\cos(\varphi-u)}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{1-\frac{1}{2}\cos(\varphi+u)-\frac{1}{2}\cos(\varphi-u)}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\frac{1+\cos(\varphi+u)}{2}+\frac{1+\cos(\varphi-u)}{2}}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\frac{1-\cos(\varphi+u)}{2}+\frac{1-\cos(\varphi-u)}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi+u)+\cos^2\frac{1}{2}(\varphi-u)}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{\sin^2\frac{1}{2}(\varphi+u)+\sin^2\frac{1}{2}(\varphi-u)}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}u+2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\sin^2\frac{1}{2}u}+\frac{1}{2h^2}\int\frac{du}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}u+2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sin^2\frac{1}{2}u}=$$

$$=\frac{1}{2h^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}u(1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}u)}+\frac{1}{2h^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\int\frac{du}{2\cos^2\frac{1}{2}u(1+\mathrm{cotg}^2\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}u)}=$$

$$=\frac{1}{h^2\sin\varphi}\Big[\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}u)+\mathrm{arctg}(\cot\tfrac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}u)\Big]_o^{2\pi}=o.$$

Mithin haben wir

$$Q=2\pi\iint\varrho\,d\varrho\,du\left[-\frac{1}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{\varrho\cos u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{R-\varrho\cos u}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right]=$$

$$=2\pi\int du\left[-\int\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\int\frac{R\varrho^2\cos u-\varrho^3\cos^2u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right].$$

Jetzt ist

$$\frac{R^2\cos u-\varrho^3\cos^2u}{m^2+\varrho^2\sin^2u}=\varrho-\frac{\varrho-R\cos u}{\sin^2u}+\frac{m^2\cos u}{\sin^2u}\cdot\frac{\varrho\cos u-R}{m^2+\varrho^2\sin^2u},$$

folglich

$$Q=2\pi\int du\left[-\int\frac{(\varrho-R\cos u)\,d\varrho}{\sin^2u\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}+\frac{m^2\cos u}{\sin^2u}\int\frac{\varrho\cos u-R}{m^2+\varrho^2\sin^2u}\cdot\frac{d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}\right].$$

In dem ersten Gliede in der Parenthese die Integration ausgeführt und das zweite Glied gleich V gesetzt, so

$$Q=2\pi\int du\left\{V-\left[\frac{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}{\sin^2u}\right]_o^R\right\}=$$

$$=2\pi\int du\left\{V-\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}{\sin^2u}+\frac{\sqrt{m^2+R^2}}{\sin^2u}\right\}.$$

Weil $$\int_o^{2\pi} \frac{du}{\sin^2 u} = -\Big[\cot\!g\, u\Big]_o^{2\pi} = o,$$

(22) so $$Q = 2\pi \int du \left\{ V - \frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}{\sin^2 u} \right\};$$

und es bleibt, um die Integration nach ϱ vollständig zu absolviren, noch folgendes Integral auszuführen:

$$V = \frac{m^2 \cos u}{\sin^2 u} \int_o^R \frac{\varrho \cos u - R}{m^2+\varrho^2 \sin^2 u} \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u}}.$$

Wir setzen zunächst

$$m^2+R^2\sin^2 u = a^2 \text{ und } \varrho - R\cos u = ax,$$

so wird

$$V = \frac{m^2\cos u}{\sin^2 u} \int \frac{ax\cos u - R\sin^2 u}{m^2+(ax+R\cos u)^2\sin^2 u} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

und um den Ausdruck unter dem Integralzeichen rational zu machen, sei

$$x + \sqrt{1+x^2} = z;$$

also $$x = \frac{z^2-1}{2z}, \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dz}{z};$$

so wird

$$V = \frac{m^2\cos u}{\sin^2 u} \int \frac{2\left\{a(z^2-1)\cos u - 2Rz\sin^2 u\right\} dz}{4m^2z^2 + \left\{a(z^2-1)+2Rz\cos u\right\}^2 \sin^2 u};$$

und wenn wir in Partialbrüche zerlegen,

$$V = \frac{m^2\cos u}{\sin^2 u} \int \frac{a(1+\cos u)dz}{m^2(1+\cos u)^2 + \left\{az+R(1+\cos u)\right\}^2 \sin^2 u} - \frac{m^2\cos u}{\sin^2 u} \int \frac{a(1-\cos u)dz}{m^2(1-\cos u)^2 + \left\{az-R(1+\cos u)\right\}^2 \sin^2 u}.$$

Diese beiden Integrationen lassen sich ausführen durch folgende Substitutionen:

$$\left\{az+R(1+\cos u)\right\}\sin u = m(1+\cos u)y, \text{ und } \left\{az-R(1+\cos u)\right\}\sin u = m(1-\cos u)y_{,};$$

wodurch einmal

$$dz = \frac{m(1+\cos u)dy}{a\sin u},$$

und das anderemal

$$dz = \frac{m(1-\cos u)dy_{,}}{a\sin u};$$

deshalb

$$V = \frac{m\cos u}{\sin^3 u} \int \frac{dy}{1+y^2} - \frac{m\cos u}{\sin^3 u} \int \frac{dy_{,}}{1+y_{,}^2} = \frac{m\cos u}{\sin^3 u}\Big[\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_{,}\Big].$$

Weil aber

$$y = \frac{(\varrho+R+\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1-\cos u)}{m\sin u}$$

und

$$y_{,} = \frac{(\varrho-R+\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1+\cos u)}{m\sin u}$$

so wird schliesslich

$$V = \frac{m\cos u}{\sin^3 u}\Big[\operatorname{arctg}\Big\{\frac{(\varrho+R+\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1-\cos u)}{m\sin u}\Big\} -$$

$$-\operatorname{arctg}\Big\{\frac{(\varrho-R+\sqrt{m^2+R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos u})(1+\cos u)}{m\sin u}\Big\}\Big]_o^R =$$

$$= \frac{m\cos u}{\sin^3 u}\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\Big\{\dfrac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})(1-\cos u)}{m\sin u}\Big\} - \operatorname{arctg}\Big\{\dfrac{(R+\sqrt{m^2+R^2})(1-\cos u)}{m\sin u}\Big\} \\ -\operatorname{arctg}\Big\{\dfrac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}(1+\cos u)}{m\sin u}\Big\} + \operatorname{arctg}\Big\{\dfrac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)(1+\cos u)}{m\sin u'}\Big\}\end{array}\right].$$

6. Die Integration nach ϱ ist nun vollständig durchgeführt. Wir wollen jedoch, bevor wir den vorstehenden Werth für V in (22) einsetzen, denselben zuerst nach u integriren, weil er dadurch um vieles vereinfacht wird. Es ist

$$\int x\,dy = xy - \int y\,dx\,.$$

Setzen wir daher

$$\frac{\cos u\,du}{\sin^3 u} = dy\,,$$

$$\operatorname{arctg}\Big\{\frac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})\;(1-\cos u)}{m\sin u}\Big\} = x\,,$$

$$\operatorname{arctg}\Big\{\frac{(R+\sqrt{m^2+R^2})\;(1-\cos u)}{m\sin u}\Big\} = x_,\,,$$

$$\operatorname{arctg}\Big\{\frac{\sqrt{m^2+2R^2\;(1-\cos u)}\;(1+\cos u)}{m\sin u}\Big\} = x_2\,,$$

$$\operatorname{arctg}\Big\{\frac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)\;(1+\cos u)}{m\sin u}\Big\} = x_3\,;$$

so erhalten wir:

$$\int V\,du = m\Big[(x-x_,-x_2+x_3)y - \int y\;(dx-dx_,-dx_2+dx_3)\Big],$$

$$y = -\frac{1}{2\sin^2 u}\,,$$

$$dx = \frac{mR\cos u\,du}{m^2+R^2\sin^2 u} - \frac{m\,du}{2\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + \frac{m(m^2+R^2)\,du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$-\frac{mR^2\cos u\,du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}\,,$$

$$dx_, = \frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)} + \frac{mR\cos u\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)}\,,$$

$$dx_2 = -\frac{m\,du}{2\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - \frac{m(m^2+R^2)}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + \frac{mR^2\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}},$$

$$dx_3 = -\frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)} - \frac{mR\cos u\,du}{2(m^2+R^2\sin^2 u)}\,;$$

folglich

$$dx-dx_,-dx_2+dx_3 = -\frac{m\sqrt{m^2+R^2}\,du}{m^2+R^2\sin^2 u} - \frac{m\,du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+\frac{2m^3}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + \frac{2mR^2(1-\cos u)}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Mithin

$$\int V du = -\left[\frac{m}{2\sin^2 u}\left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\left\{\frac{(2R+\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{(R+\sqrt{m^2+R^2})(1-\cos u)}{m\sin u}\right\} - \\ -\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}(1+\cos u)}{m\sin u}\right\} + \operatorname{arctg}\left\{\frac{(\sqrt{m^2+R^2}-R)(1+\cos u)}{m\sin u}\right\}\end{array}\right]\right]_0^{2\pi} -$$

$$-\tfrac{1}{2}m^2\sqrt{m^2+R^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sin^2 u} - \tfrac{1}{2}m^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^4\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^2R^2\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos u)du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes verschwindet, wenn wir die Grenzwerthe einsetzen. Ebenso ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)} = \frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u} - \frac{R^2}{m^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{m^2+R^2\sin^2 u} = o,$$

wie wir uns oben überzeugt haben. Es bleibt also:

$$\int V du = -\tfrac{1}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Dies auf (22) angewandt, giebt

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{1}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+ m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - \int\frac{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}du}{\sin^2 u},$$

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{3}{2}m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} + m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} +$$

$$+ m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - 2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Hierin ist

$$m^4\int\frac{du}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = m^2\int\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$-m^2R^2\int\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}},$$

und

$$m^2R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u(m^2+R^2\sin^2 u)}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = R^2\int\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$-R^4\int\frac{1-\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

Dies in den letzten Ausdruck für $\frac{1}{2\pi}Q$ substituirt, giebt

$$\frac{1}{2\pi}Q = -\tfrac{1}{2}m^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{\sin^2 u\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - R^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} -$$

$$- m^2R^2\int_0^{2\pi}\frac{du}{(m^2+R^2\sin^2 u)\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} - R^4\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos u}{m^2+R^2\sin^2 u}\cdot\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}}.$$

7. Die jetzt noch auszuführenden Integrale sind elliptische. Um dieselben auf die Normalform zurückzuführen, setzen wir

$$\tfrac{1}{2}u = 90 - \varphi;$$

wodurch

$$1-\cos u = 2\cos^2\varphi,\ \sin^2 u = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi,\ du = -2d\varphi$$

wird; und

$$\frac{du}{\sqrt{m^2+2R^2(1-\cos u)}} = -\frac{kd\varphi}{R\Delta\varphi},$$

wenn wir nämlich noch

$$\frac{2R}{\sqrt{m^2+4R^2}} = k \text{ und } \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi\ ^{7)}$$

setzen. Dadurch erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}Q = \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\Delta\varphi} + \tfrac{1}{2}Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + m^2Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi} +$$

$$+ 2kR^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$\frac{1}{2\pi}Q = \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} + \frac{m^2k}{8R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + \tfrac{1}{2}Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\Delta\varphi} + m^2Rk\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi} + \tag{23}$$

$$+ 2kR^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Zur weitern Entwicklung ist

$$\frac{d.(tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi} = -\frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}; \tag{24}$$

und wenn wir $1-k^2 = k_,^2$ [8]) setzen und einige Reduktionen machen; so

$$\frac{d.(tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi} = \frac{k_,^2}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - \frac{k_,^2}{\Delta\varphi} + \Delta\varphi,$$

$$\text{und} \int\frac{d(.tg\varphi\Delta\varphi)}{d\varphi}d\varphi = k_,^2\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\Delta\varphi} - k_,^2\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\Delta\varphi d\varphi.$$

---

7) Durège. Theorie der ellept. Funkt. Leipzig, 1861. S. 8-

8) Durège. S. 8.

Somit endlich

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\varDelta\varphi} = \frac{1}{k_{,}^2}\Big[tg\varphi\,\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{1}{k_{,}^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi \;^{9)}.$$

Es ist aber

$$\Big[\mathrm{tg}\,\varphi\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = \Big[\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,u\sqrt{1-k^2\cos^2\tfrac{u}{2}}\Big]_{o} = o,$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -2\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -2K \;^{10)}$$

und

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi = -2\int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi = -2E \;^{11)};$$

deshalb schliesslich

(25)
$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\varDelta\varphi} = \frac{2E}{k_{,}^2} - 2K.$$

In derselben Weise ist

$$\frac{d\,.\,(\mathrm{cotg}\,\varphi\varDelta\varphi)}{d\varphi} = -\frac{k^2\cos^2\varrho}{\varDelta\varphi} - \frac{\varDelta\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi\varDelta\varphi} + \frac{1}{\varDelta\varphi} - \varDelta\varphi,$$

und daher

(26)
$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\varDelta\varphi} = -\Big[\mathrm{cotg}\,\varphi\varDelta\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \varDelta\varphi d\varphi \;^{12)} = -2K + 2E.$$

In dem Ausdruck (23) bleibt uns endlich noch auszuführen:

$$m^2Rk\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\varDelta\varphi} + 2R^3k\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\varDelta\varphi} = Rk\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

---

9) Durège S. 66. — 10) Durège S. 16. — 11) Durège S. 68. — 12) Durège S. 70.

Dazu ist

$$\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{m^2+4R^2\cos^4\varphi}{m^2\cos^2\varphi+m^2\sin^2\varphi+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{m^2+4R^2}{2m^2}\cdot\frac{\dfrac{m^2+4R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}-\dfrac{4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}}{\cos^2\varphi+\dfrac{m^2+4R^2}{m^2}\sin^2\varphi\left(\dfrac{m^2+4R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2}\right)}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2k_{,}^2}\cdot\frac{1-k^2\sin^2\varphi-k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+\dfrac{1}{k_{,}^2}\sin^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)}=$$

$$=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2k_{,}^2}\cdot\frac{\dfrac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-k^2\sin^2\varphi}{1+\dfrac{1}{k_{,}^2}\operatorname{tg}^2\varphi\,\Delta\varphi};$$

und wenn wir mit $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multipliziren und von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ integriren, so

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\tfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{1}{2k_{,}^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{d\,.\,(\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi)}{1+\frac{1}{k_{,}^2}\operatorname{tg}^2\varphi\,\Delta\varphi};$$

und nach (24)

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{m^2+2R^2\cos^2\varphi}{m^2+4R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=-K+\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{k_{,}}\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi\Big)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=-K, \tag{27}$$

weil

$$\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi}{k_{,}}\Big)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2k_{,}}\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{k_{,}}\operatorname{cotg}\frac{u}{2}\sqrt{1-k^2\cos^2\frac{u}{2}}\Big)\Big]_{o}^{2\pi}=o.$$

Jetzt die Werthe (25), (26) und (27) in (23) eingesetzt, so

$$\frac{1}{2\pi}Q=\frac{m^2kE}{4Rk_{,}^2}-\frac{m^2kK}{2R}+\frac{m^2kE}{4R}-2RkK+RkE=$$

$$=\frac{k}{R}\Big[E\Big\{\frac{m^2(1+k_{,}^2)}{4k_{,}^2}+R^2\Big\}-K\frac{m^2+4R^2}{2}\Big]=$$

$$=\frac{k}{R}\Big[\Big(\frac{m^2+4R^2}{2}\Big)E-\Big(\frac{m^2+4R^2}{2}\Big)K\Big]=\frac{2R}{k}(E-K);$$

und daher

$$Q=\frac{4\pi R}{k}(E-K).$$

8. Für die wirkliche Berechnung machen wir noch die folgenden Bemerkungen. Es ist

$$K-E=\frac{\pi^2 C}{4K}\;{}^{13)},$$

13) Durège S. 235.

und somit

(28) $$Q = -\frac{\pi^3 R}{kK}\, C,$$

worin

$$K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos^2\frac{1}{2}\Theta \cos^2\frac{1}{2}\Theta_0 \cos^2\frac{1}{2}\Theta_{00} \ldots\ldots}\text{[14]},$$

$$C = 8\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right)\text{[15]},$$

$$q = \frac{k_0}{4(k'_0)^2}\left[(k'_0)^{\frac{1}{2}}(k'_{00})^{\frac{1}{4}}(k'_{3_0})^{\frac{1}{8}}(k'_{4_0})^{\frac{1}{16}}\ldots\right]^3\text{[16]};$$

oder durch die Θ ausgedrückt,

$$q = \frac{\sin\Theta_0}{4\cos^2\Theta}\left(\cos^{\frac{1}{2}}\Theta_0 \cos^{\frac{1}{4}}\Theta_{00} \cos^{\frac{1}{8}}\Theta_{3_0} \ldots\right)^2;$$

und endlich

$$\sin\Theta = k = \frac{2R}{\sqrt{m^2+4R^2}},\quad \sin\Theta_0 = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta,\quad \sin\Theta_{00} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta_0,\quad \sin\Theta_{3_0} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta_{00},\ \text{u. s. w.}$$

9. Hiermit sind die Hauptschwierigkeiten unserer Aufgabe gelöst, und wir fügen nur noch die folgenden Bemerkungen hinzu.

a. Aus dem Ausdruck (28) für Q erhält man unmittelbar $Q_,$ und Q_2, wenn man $m+l$ und $m+2l$ für m schreibt. Denken wir uns alsdann die Werthe für Q, $Q_,$ und Q_2 in den Ausdruck (21) für P eingesetzt: so ist P die Wirkung einer Schicht von Kreiswindungen der Rolle $A_,$ auf eine Schicht von Kreiswindungen der Rolle A; wenn die Achsen dieser Schichten, d. h. der Rollen $A_,$ und A, in gerader Linie liegen; wenn alle entsprechenden Dimensionen der beiden Schichten einander gleich sind; und wenn beide Schichten von demselben Leitungsdraht gebildet werden und gleich viele Kreiswindungen enthalten.

b. Wenn wir annehmen, dass der gemeinschaftliche Leitungsdraht nach den Rollenpaaren $A_,B_,$ und A_2B_2 in derselben Weise geführt ist, wie es die gestellte Aufgabe für das Rollenpaar AB vorschreibt; wenn wir ferner annehmen, dass die Drahttheile der bifilaren Aufhängungen sowohl, als auch die Theile, welche längs der Verbindungsstangen der einzelnen Rollenpaare herlaufen, so dicht als möglich neben einander und parallel sind: so können wir die Wirkung aller dieser Drahttheile unbeachtet lassen, weil gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Ströme gleiche aber entgegengesetzte Wirkungen ausüben; und es bleiben nur die Wirkungen übrig, welche von den vier äusseren Rollen selber ausgeübt werden.

c. Ebenso dürfen die Wirkungen der kreuzweis zu einander stehenden Rollen, d. h. die Wirkungen der Rollen $A_,$ und A_2 auf B, und der Rollen $B_,$ und B_2 auf A, unbeachtet bleiben; wenn wir annehmen, dass die Durchmesser sämmtlicher Rollen klein sind im Verhältniss zur Länge der Verbindungsstangen. Denn man denke sich unter dieser Voraussetzung ein beliebiges Element α des Leitungsdrahtes der Rolle A und zwei Elemente β und γ des Leitungsdrahtes etwa auf der Rolle $B_,$, welche sich auf derselben Kreiswindung der Rolle B, befinden, aber um 180° von einander abstehen; so sind β und γ von gleichen aber entgegengesetzten Strömen durchflossen, und ihre Wirkungen auf das Element α werden sich daher um so mehr aufheben, je mehr die Annahme zutrifft, dass β und γ gleiche Abstände von α haben. Der Unterschied dieser Abstände wird sich aber um so mehr der Null nähern, je kleiner wir uns den Durchmesser der betreffenden Kreiswindung, d. h. die Entfernung des Elementes α von β, im Ver-

14) Durège S. 176. — 15) Durège S. 233. — 16) Durège S. 199.

hältniss zur Länge der Verbindungsstangen denken. Unter der gedachten Voraussetzung bleiben also nur die Wirkungen der Rollen A_1 und A_2 auf A, und der Rollen B_1 und B_2 auf B übrig.

d. Wenn wir ferner annehmen, dass die Rollen A und B von dem elektrischen Strom in demselben Sinne, die Rollen A_1 und B_2 in gleichem, dagegen die Rollen A_2 und B_1 in entgegengesetztem Sinne als die Rollen A und B umflossen werden; so haben alle vier äussern Rollen das Bestreben, das Rollenpaar AB in demselben Sinne zu drehen; und unter der Bedingung, dass wir alle entsprechenden Dimensionen und Entfernungen, so wie die Anzahl der über einander liegenden Schichten und die Zahl der Kreiswindungen in jeder einzelnen Schicht für alle Rollen als gleich annehmen, welche Bedingungen praktisch sämmtlich sehr leicht auszuführen sind, können wir die Wirkungen der vier äusseren Rollen als gleich ansehen; haben also die Wirkung der Rolle A_1 auf A vierfach zu nehmen, um die Wirkung des ganzen Systemes zu erhalten. Dabei darf freilich nicht übersehen werden, dass der Ausdruck (21) nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Achsen der Rollen A_1 und A in einer geraden Linie liegen. Diese Bedingung wird sich aber leicht erfüllen lassen durch eine mechanische Vorrichtung, welche dazu dient, für jede neue Gleichgewichtslage des Rollenpaares AB die äusseren Rollenpaare A_1B_1 und A_2B_2 so zu stellen, dass so wohl die Achsen der Rollen A, A_1 und A_2, als auch die Achsen der Rollen B, B_1 und B_2 in geraden Linien liegen.

e. Schliesslich ist der Ausdruck P in (21) nur die Wirkung einer einzigen Schicht von Kreiswindungen der Rolle A_1 auf eine einzige Schicht von Kreiswindungen der Rolle A. Befinden sich also mehr Schichten auf jeder Rolle, so haben wir die folgenden Möglichkeiten. Entweder führen wir die Integrationen in Q, Q_1 und Q_2 in Bezug auf ϱ von o bis R und in Bezug auf ϱ_1 von o bis R_1 aus, und nehmen den Radius der untersten Schicht gleich R und den Radius der obersten gleich R_1 an; oder wir denken uns den Leitungsdraht so dünn und so wenig Schichten übereinander, dass die Differenz zwischen dem Radius der untersten und dem Radius der obersten Schicht verschwindet, und die Wirkungen aller einzelnen Schichten gleich werden; so dass wir, um die Totalwirkung der Rolle A_1 auf A zu erhalten, den Ausdruck (21) nur mit dem Quadrat der Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten zu multipliziren haben. Unter der letzten Voraussetzung sei a die Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten, so erhalten wir für die Gesammtwirkung W der Rollenpaare A_1B_1 und A_2B_2 auf das Rollenpaar AB den Schlusswerth

$$W = 4a^2P,$$

d. h.

$$W = 2i^2n^2a^2\left[2(m+l)Q_1 - mQ - (m+2l)Q_2\right],$$

worin i gleich der Intensität des um die drei Rollenpaare geführten Stromes, n die Anzahl der auf der Längeneinheit jeder Achse neben einander liegenden Kreiswindungen, und a die Anzahl der auf jeder Rolle über einander liegenden Schichten ist; worin ferner m die Entfernungen der Rollen A_1 und A_2 von A, und der Rollen B_1 und B_2 von B; und endlich l die Länge der Achsen der einzelnen über einander liegenden Schichten bedeutet.

Braunsberg, im Mai 1867.

J. Tietz.