Ueber Transversalen.

§. 1.

1. Erklärung. Wenn man von einem Punkte P (Fig. 1) nach zwei Geraden AB und CD die Linien PP_1 und PP_2 so zieht, daß die Winkel PP_1B und PP_2D gleich sind, und daß, wenn man sich in den Punkten P_1 oder P_2 mit dem Gesichte nach P denkt, diese gleichen Winkel entweder beide rechts oder beide links liegen: so sagt man, die Linien PP_1 und PP_2 sind „unter gleichen Winkeln und in demselben Sinne" nach den Geraden AB und CD gezogen.

2. Lehrsatz. Beschreibt man um ein Dreieck ABC (Fig. 2) einen Kreis und zieht aus einem beliebigen Punkte P der Peripherie gerade Linien PP_1, PP_2 und PP_3 unter gleichen Winkeln und in demselben Sinne nach den Seiten des Dreiecks: so liegen die Punkte P_1, P_2 und P_3, in welchen die Seiten des Dreiecks von jenen geraden Linien getroffen werden, in einer Geraden. [1])

Beweis. Denken wir uns P_3 mit P_2 und mit P_1 verbunden, so sind $BPAC$, BPP_2P_3 und PP_1CP_3 Sehnenvierecke; mithin ist Winkel $PP_3P_2 =$ W. $PBP_2 =$ W. $PBA =$ W. $PCA =$ $=$ W. $PCP_1 =$ W. PP_3P_1, und daher liegen die Punkte P_3, P_2 und P_1 in einer Geraden.

3. Zusatz. Beschreibt man um ein Dreieck einen Kreis und fällt aus einem Punkte der Peripherie Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die Fußpunkte der Perpendikel in einer Geraden.

4. Lehrsatz. Liegen drei Punkte P_1, P_2 und P_3 (Fig. 2) in einer Geraden, und man verbindet dieselben mit einem beliebigen vierten Punkte P und zieht durch die ersteren Punkte drei Gerade AC, AB und BC, welche entsprechend mit den Verbindungslinien PP_1, PP_2 und PP_3 in demselben Sinne gleiche Winkel bilden: so liegen die Schnittpunkte A, B und C jener drei Geraden mit dem vierten Punkte P in einer Kreislinie.

Beweis. Weil PP_1AP_2 und PP_1CP_3 Sehnenvierecke, so sind folgende Winkel gleich: $PAB = PAP_2 = PP_1P_2 = PP_1P_3 = PCP_3 = PCB$. Wenn aber $PAB = PCB$, so liegen die Punkte P, A, C und B in einer Kreislinie.

5. Erklärung. Bezeichnen wir die gleichen Winkel PP_1A, PP_2B und PP_3B mit X, so heißt die Gerade P_1P_3 „die dem Punkte P unter dem Winkel X zugeordnete Transversale," und der Punkt P „der der Transversale P_1P_3 unter dem Winkel X zugeordnete Punkt." [2])

6. Lehrsatz. Zwei Transversalen P_1P_3 und N_1N_3, welche den beiden Endpunkten P und N eines Durchmessers unter denselben Winkeln und in demselben Sinne zugeordnet sind, stehen auf einander senkrecht.

[1]) Grunert's Archiv. 13. Thl. XXXV. 1. — Die Lehre von den Transversalen von Adams. XXXII. 2.
[2]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 4.

Beweis. Winkel PP_1P_3 = W. PCP_3, W. NN_1N_3 = W. NCN_3, mithin W. PP_1P_3 + + W. NN_1N_3 = W. $PCN = 90^0$. Weil aber PP_1 parallel NN_1, so ist W. PP_1N_1 + W. $NN_1P_1 = 180^0$, und daher W. $P_3P_1N_1$ + W. $N_3N_1P_1 = 90^0$, d. h. N_1N_3 senkrecht auf P_1P_3.

§. 2.

Wenn wir die Seiten des Dreiecks ABC durch eine beliebige Transversale P_1P_3 schneiden, so bildet P_1P_3 mit AC, AB und BC ein vollständiges Vierseit.[3]) Legen wir alsdann durch P_1, A, P_2 und durch P_2, P_3, B Kreise, deren zweiter Schnittpunkt mit P bezeichnet wird: so sind die Winkel PP_3B und PP_1C einander gleich, weil beide dem Winkel PP_2B gleich sind. Daher liegen auch die Punkte P_1, C, P_3 mit P in einer Kreislinie. Ebenso sind die Winkel PAP_1 und PBC einander gleich, weil beide dem Winkel PP_2P_1 gleich sind. Deshalb liegen auch die Punkte A, B, C mit P in einer Kreislinie, und wir erhalten den folgenden Satz:

7. Lehrsatz. Die vier Kreise, welche um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, schneiden sich in einem Punkte.[4])

Es seien nun M_1, M_2, M_3 und M_4 die Mittelpunkte der vier Kreise, welche der Reihe nach um die Dreiecke P_1AP_2, P_1CP_3, BAC und BP_2P_3 beschrieben sind: so ist in dem Kreise P_1CP_3 der halbe Centriwinkel PM_2M_1 gleich dem Peripheriewinkel PCP_1, und in dem Kreise BAC der halbe Centriwinkel PM_3M_1 gleich dem Peripheriewinkel PCA; mithin $PM_2M_1 = PM_3M_1$, d. h. die Punkte P, M_1, M_2 und M_3 liegen in einer Kreislinie. Ebenso ist W. PM_3M_4 = W. PCB, und W. PM_2M_4 = W. PCP_3; mithin $PM_3M_4 = PM_2M_4$, d. h. auch die Punkte P, M_2, M_3 und M_4 liegen in einer Kreislinie. Weil aber durch die drei Punkte P, M_2 und M_3 nur eine einzige Kreislinie möglich ist, so liegen alle fünf Punkte P, M_1, M_2, M_3 und M_4 in ein und derselben Kreislinie, und wir haben folgende Sätze:

8. Lehrsatz. Wenn drei Kreise M_1, M_2 und M_3 sich in einem Punkte P schneiden, während die drei übrigen Schnittpunkte P_1, A und C in einer Geraden liegen: so liegen die Mittelpunkte der drei Kreise mit ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte auf einer neuen Kreislinie.

9. Lehrsatz. Die Mittelpunkte der vier Kreise, welche um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, liegen mit dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte in einer neuen Kreislinie.
Ebenso leicht erhält man umgekehrt folgende Sätze:

10. Lehrsatz. Wenn sich drei Kreise M_1, M_2 und M_3 in einem Punkte P schneiden, während ihre Mittelpunkte mit dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte in einer Kreislinie liegen: so liegen die drei übrigen Schnittpunkte P_1, A, C in einer Geraden.

11. Lehrsatz. Wenn sich vier Kreise in einem Punkte schneiden, während ihre Mittelpunkte mit dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte in einer Kreislinie liegen: so werden durch die sechs übrigen Schnittpunkte die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bestimmt.

---

[3]) Die geometrischen Konstruktionen von J. Steiner. §. 4. — Systematische Entwickelung 2c. von demselben. Seite 72.

[4]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 3. — Die Lehre von den Transv. von Adams. XLIV. 1.

Nach den schon bemerkten Eigenschaften der Fig. 2 sind folgende Winkel gleich:

$$PP_1A = PP_2B = PP_3B,$$
$$PAP_1 = PP_2P_1 = PBP_3,$$
$$PP_1P_2 = PAP_2 = PCB,$$
$$PBP_2 = PP_3P_2 = PCP_1.$$

Diese Gleichungen enthalten den folgenden Satz:

12. Lehrsatz. Jede Seite eines vollständigen Vierseits ist in Bezug auf das Dreieck, welches durch die drei übrigen Seiten gebildet wird, eine Transversale, welche zugeordnet ist dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der vier Kreise, welche um die vier Dreiecke des Vierseits beschrieben werden. [5])

13. Aufgabe. Zu einer gegebenen Transversale P_1P_3 eines Dreiecks ABC den zugeordneten Punkt P zu finden.

Auflösung. Man beschreibe um eins der Dreiecke, etwa um P_1AP_2, welche die Transversale mit je zwei Dreiecksseiten bildet, und um das gegebene Dreieck Kreise: so ist ihr Schnittpunkt P der gesuchte zugeordnete Punkt. Jeder Transversale entspricht nur ein einziger zugeordneter Punkt.

Zieht man von P die Linien PO_1, PO_2, PO_3 und PO_4 so, daß sie mit den Seiten des vollständigen Vierseits $P_1ACP_3BP_2$ in demselben Sinne gleiche Winkel bilden: so liegen nach dem 2. Satze sowohl die Punkte O_1, O_2 und O_3, als auch die Punkte O_2, O_3 und O_4 in einer Geraden. Mithin liegen alle vier Punkte O_1, O_2, O_3 und O_4 in einer Geraden.

14. Lehrsatz. Wenn man aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der vier Kreise, welche um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, Linien zieht, welche mit den Seiten des Vierseits in demselben Sinne gleiche Winkel bilden: so liegen die vier Punkte, in welchen die Seiten des Vierseits von jenen Linien getroffen werden, in einer Geraden.

15. Zusatz. Wenn man aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der vier Kreise, welche um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, Perpendikel fällt auf die Seiten des Vierseits: so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel in einer Geraden. [6])

§. 3.

$$\text{W. } P_1PP_2 = \text{W. } CAB = \text{W. } CPB,$$

d. h. P_1P_2 wird von P aus unter demselben Winkel gesehen, unter welchem BC von P aus gesehen wird.

$$\text{W. } P_2PP_3 = \text{W. } ABC = \text{W. } APC,$$

d. h. P_2P_3 wird von P aus unter demselben Winkel gesehen, unter welchem AC von P aus gesehen wird.

$$\text{W. } P_1PP_3 = \text{W. } N_1CB = \text{W. } APB,$$

d. h. P_1P_3 wird von P aus unter demselben Winkel gesehen, unter welchem AB von P aus gesehen wird. Nun wird durch das Dreieck ABC der umschriebene Kreis in drei Abschnitte APB, BNC und CA getheilt; und da die Winkel CPB, APC und APB, unter welchen die Seiten des Dreiecks von P

[5]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 3.

[6]) Die Lehre von den Transv. von Adams. XLIV. 2.

aus gesehen werden, für alle Punkte P, welche in demselben der drei Kreisabschnitte liegen, ungeändert bleiben: so läßt sich diese Eigenschaft als ein neuer bemerkenswerther Satz aussprechen.

16. Lehrsatz. Wenn man ein Dreieck durch beliebig viele Transversalen schneidet, so werden alle durch dieselben zwei Dreiecksseiten begrenzten Abschnitte derjenigen Transversalen, deren zugeordnete Punkte in einem und demselben der drei Kreisabschnitte liegen, in welche der umschriebene Kreis durch das Dreieck getheilt wird, von den zugeordneten Punkten aus unter gleichem Winkel gesehen; und zwar unter demselben Winkel, unter welchem die dritte Dreiecksseite gesehen wird. [7])

§. 4.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke P_1PP_2 mit O_1PO_3, P_2PP_3 mit O_3PO_4 und P_1PP_3 mit O_1PO_4 ergeben sich der Reihe nach folgende Proportionen:

$$PP_1 : PO_1 = P_1P_2 : O_1O_3,$$
$$PP_2 : PO_3 = P_2P_3 : O_3O_4,$$
$$PP_1 : PO_1 = P_1P_3 : O_1O_4.$$

Weil aber auch die Dreiecke P_1PO_1 und P_2PO_3 einander ähnlich sind, so ist

$$PP_1 : PO_1 = PP_2 : PO_3, \text{ mithin auch}$$
$$P_1P_2 : O_1O_3 = P_2P_3 : O_3O_4 = P_1P_3 : O_1O_4, \text{ oder}$$
$$P_1P_2 : P_2P_3 : P_1P_3 = O_1O_3 : O_3O_4 : O_1O_4.$$

17. Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines Dreiecks durch zwei Transversalen schneidet, welche demselben Punkte zugeordnet sind: so verhalten sich die durch die Dreiecksseiten gebildeten Abschnitte der einen Transversale wie die entsprechenden Abschnitte der anderen.

§. 5.

Schneidet man das Dreieck ABC (Fig. 3) durch eine Transversale P_1P_3, welche dem Punkte P zugeordnet ist, und macht $PO_1 = PP_1$, $PO_2 = PP_2$ und $PO_3 = PP_3$: so ist Dreieck PP_1P_2 kongruent Dreieck PO_1O_2, Dreieck PP_1P_3 kongruent Dreieck PO_1O_3 und Dreieck PP_2P_3 kongruent Dreieck PO_2O_3; mithin

$$P_1P_2 = O_1O_2, \quad P_1P_3 = O_1O_3, \quad P_2P_3 = O_2O_3.$$

18. Lehrsatz. Wenn man ein Dreieck ABC durch zwei Transversalen P_1P_3 und O_1O_3 schneidet, welche demselben Punkte P unter gleichen Winkeln aber in entgegengesetztem Sinne zugeordnet sind: so schneiden dieselben Dreiecksseiten von beiden Transversalen gleiche Stücke ab.

19. Aufgabe. Ein vollständiges Vierseit $P_1ACP_3BP_2$ (Fig. 3) durch eine Transversale so zu schneiden, daß die Theile dieser Transversale gleich sind den entsprechenden Theilen einer Seite P_1P_3 des Vierseits.

Auflösung. Man bestimme den Punkt P, in welchem sich die vier Kreise, welche um die vier Dreiecke des Vierseits beschrieben werden, schneiden, und konstruire die Transversale O_1O_3 so, daß

---

[7]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 5.

sie dem Punkte P unter demselben Winkel, aber in entgegengesetztem Sinne zugeordnet ist als die betreffende Seite P_1P_3 des gegebenen Vierseits: so ist O_1O_3 die gesuchte Transversale.

§. 6.

Mit Hülfe der bisher gefundenen Resultate dürfte sich aus Fig. 2 noch manche bemerkenswerthe Eigenschaft herauslesen lassen. Vorerst führen wir nur die folgende an, welche zu beweisen keine Schwierigkeiten hat.

20. Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC durch zwei Transversalen P_1P_2 und O_1O_4 schneidet, welche demselben Punkte P zugeordnet sind: so werden durch die Seiten des Dreiecks und die beiden Transversalen zehn Dreiecke gebildet; die zehn Kreise, welche um diese Dreiecke beschrieben werden, schneiden sich sämmtlich in dem zugeordneten Punkte; die Mittelpunkte dieser zehn Kreise liegen zu drei in einer Geraden und zu vier mit dem zugeordneten Punkte auf einer Kreislinie, wodurch zehn Gerade und fünf neue Kreise bestimmt werden, deren Mittelpunkte wiederum mit dem zugeordneten Punkte auf einer neuen Kreislinie liegen.

§. 7.

Beschreibt man um die sechs Ecken des vollständigen Vierseits $P_1ACP_3BP_2$ (Fig. 4) Kreise, welche sich in dem Punkte P treffen, in welchem sich die Kreise, welche um die vier Dreiecke des Vierseits beschrieben werden, schneiden: so gehen

die Kreise um P_1, um A und um C durch einen Punkt N_1,
" " " P_1, " P_2 " " P_3 " " " N_2,
" " " B, " P_2 " " A " " " N_3,
" " " B, " P_3 " " C " " " N_4.

Weil aber die Punkte P_1, P, P_3 und C in einer Kreislinie liegen, so liegen nach dem 10. Satze die Punkte N_1, N_2 und N_4 in einer Geraden; und weil die Punkte C, A, P und B in einer Kreislinie liegen, so liegen auch die Punkte N_1, N_3 und N_4 in einer Geraden. Daher liegen aber alle vier Punkte N_1, N_2, N_3 und N_4 in einer Geraden. Zieht man alsdann PN_1, PN_2, PN_3 und PN_4, welche die Seiten des Vierseits entsprechend in den Punkten O_1, O_2, O_3 und O_4 schneiden: so sind die Winkel PO_1P_1, PO_2P_1, PO_3A und PO_4C rechte, und es liegen nach dem 15. Satz die Punkte O_1, O_2, O_3 und O_4 in einer Geraden. Ferner ist $PO_1 : PO_4 = PN_1 : PN_4$, und daher O_1O_4 parallel N_1N_4.

21. Lehrsatz. Wenn man um die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits Kreise beschreibt, welche sich in dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der um die vier Dreiecke des Vierseits beschriebenen Kreise treffen:

a) so schneiden sich je drei Kreise, deren Mittelpunkte drei auf derselben Seite des Vierseits liegende Ecken sind, in einem Punkte.

b) Die hiedurch bestimmten vier Punkte N_1, N_2, N_3 und N_4 liegen in einer Geraden.

c) Diese Gerade ist parallel der Geraden O_1O_4, welche bestimmt wird durch die Fußpunkte der Perpendikel, welche man von dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte P der um die vier Dreiecke des Vierseits beschriebenen Kreise auf die vier Seiten desselben fällt.

d) Endlich ist N_1N_4 doppelt so weit von P entfernt und in allen entsprechenden Theilen doppelt so groß als O_1O_4.

§. 8.

Fällt man in einem Dreieck ABC (Fig. 5) die Höhen AO, BN und CP, so schneiden sich die vier Kreise, welche um die vier Dreiecke ANG, ACO, BOG und BCN des vollständigen Vierseits ANCOBG beschrieben werden, in dem Fußpunkte P der Höhe CP. Wenn wir daher von P auf die Geraden AC, AO, BN und BC die Perpendikel PP_1, PP_2, PP_3 und PP_4 fällen, so liegen nach 15 die Fußpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 dieser Perpendikel in einer Geraden. In derselben Weise erhält man zum Fußpunkte O der Höhe AO die Transversale O_1O_4 und zum Fußpunkte N der Höhe BN die Transversale N_1N_4. Weil PP_4 parallel AO, so ist

$$BP : BA = BP_4 : BO; \text{ und weil } PP_3 \text{ parallel } AN, \text{ so ist}$$
$$BP : BA = BP_3 : BN; \text{ mithin}$$
$$BP_4 : BO = BP_3 : BN;$$

d. h. P_1P_4 ist parallel NO. Ebenso ist O_1O_4 parallel PN und N_1N_4 parallel PO.

Weil sich in den Rechtecken PO_1OO_3 und PP_4OP_2 die Diagonalen halbiren, so schneiden sich die Transversalen P_1P_4 und O_1O_4 im Mittelpunkte D der Geraden PO. Ebenso gehen die Transversalen P_1P_4 und N_1N_4 durch den Mittelpunkt F der Geraden PN, und die Transversalen N_1N_4 und O_1O_4 durch den Mittelpunkt E der Geraden NO. Aus den Rechtecken PO_1OO_3 und PP_4OP_2 sieht man, daß $P_2P_4 = PO = O_1O_3$, und daß $DO_1 = DP_4 = DO_3 = DP_2$; woraus sich wiederum ergiebt, daß O_1P_4 parallel P_2O_3. Weil ferner

$$BP_4 : BO = BP : BA \text{ und}$$
$$BO : BO_1 = BC : BP, \text{ so ist}$$
$$BP_4 : BO_1 = BC : BA,$$

d. h. O_1P_4 ist parallel AC. Weil aber O_1P_4 auch parallel P_2O_3, so auch P_2O_3 parallel AC, und

$$DP_2 : DO_3 = P_2P_1 : O_3O_4,$$

d. h. $P_2P_1 = O_3O_4$, und daher $P_1P_4 = O_1O_4$. In derselben Weise überzeugt man sich, daß $N_1N_2 = O_1O_2$, $N_1N_4 = O_1O_4$, $N_3N_4 = P_3P_4$.

22. Lehrsatz. Wenn man in einem Dreieck ABC die drei Höhen AO, BN und CP konstruirt und aus dem Fußpunkte P einer dieser Höhen auf die beiden anderen Höhen und auf die beiden anderen Seiten Perpendikel PP_1, PP_2, PP_3 und PP_4 fällt:

a) so liegen die Fußpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 dieser Perpendikel in einer Geraden.

b) Von den Transversalen P_1P_4, O_1O_4 und N_1N_4, welche in dieser Weise den drei Höhenfußpunkten P, O und N zugehören, ist jede parallel der Geraden, welche durch die beiden anderen Höhenfußpunkte bestimmt wird.

c) Die Ecken des Dreiecks, welches durch die drei Transversalen gebildet wird, fallen zusammen mit den Mittelpunkten der Geraden, welche die Höhenfußpunkte des ursprünglichen Dreiecks verbinden.

d) Es sind nicht nur die drei Transversalen selbst gleich, sondern auch immer auf je zwei Transversalen die Stücke, welche von einer Dreiecksseite und den auf die beiden anderen Seiten gefällten Höhen begrenzt werden. [8])

Die vorstehenden Eigenschaften des Dreiecks sind specielle Fälle von allgemeineren Sätzen. Denken wir uns statt der Höhen drei beliebige Transversalen AO, BN und CP, welche sich in einem Punkte G schneiden, und ziehen PP_1 parallel BN, PP_2 parallel BC, PP_3 parallel AC und PP_4 parallel AO: so liegen die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in einer Geraden. Denn weil PP_1 parallel BN, so ist

$AP : AB = AP_1 : AN$; und weil PP_2 parallel BC, so ist

$AP : AB = AP_2 : AO$; mithin

$AP_1 : AN = AP_2 : AO$,

d. h. P_1P_2 ist parallel NO. Weil ferner PP_3 parallel AC, so ist

$BP : BA = BP_3 : BN$; und weil PP_4 parallel AO, so ist

$BP : BA = BP_4 : BO$; mithin

$BP_3 : BN = BP_4 : BO$,

d. h. P_3P_4 ist parallel NO. Weil endlich PP_1 parallel BN, so ist

$CP : CG = CP_1 : CN$; und weil PP_4 parallel AO, so ist

$CP : CG = CP_4 : CO$; mithin

$CP_1 : CN = CP_4 : CO$,

d. h. P_1P_4 ist parallel NO. Da somit P_1P_2 parallel NO parallel P_1P_4, so liegen die Punkte P_1, P und P_4 in einer Geraden, weil durch P_1 zu NO nur eine einzige Parallele möglich ist; und da P_3P_4 parallel NO parallel P_1P_4, so liegt auch P_3 in der Geraden P_1P_4. Ebenso ist die Transversale O_1O_4, welche in derselben Weise dem Punkte O zugehört, wie P_1P_4 dem Punkte P, parallel mit PN; und die Transversale N_1N_4, welche dem Punkte N zugehört, parallel mit PO. Wie oben überzeugt man sich ferner, daß P_1P_4 und O_1O_4 sich im Mittelpunkte D der Geraden PO, O_1O_4 und N_1N_4 sich im Mittelpunkte E der Geraden NO, und daß P_1P_4 und N_1N_4 sich im Mittelpunkte F der Geraden PN schneiden. Die vierte obige Bedingung findet allgemein nicht statt.

23. Lehrsatz. Zieht man aus den Ecken eines Dreiecks ABC drei Transversalen AO, BN und CP, welche sich in einem Punkte G schneiden; zieht dann aus dem Fußpunkte P einer dieser Transversalen Parallelen zu den beiden anderen Dreiecksseiten und zu den beiden anderen Transversalen und markirt die beiden Punkte P_1 und P_4, in welchen die den Transversalen parallel gezogenen Linien die entsprechenden Dreiecksseiten, und dann auch die beiden Punkte P_2 und P_3, in welchen die den Dreiecksseiten parallel gezogenen Linien die entsprechenden Transversalen schneiden:

a) so liegen die vier markirten Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in einer Geraden.

b) Von den auf diese Weise bestimmten drei Transversalen P_1P_4, O_1O_4 und N_1N_4, welche den drei Fußpunkten P, O und N der ursprünglichen Transversalen zugehören, ist jede parallel der Geraden, welche die beiden anderen Fußpunkte verbindet.

[8]) Die Lehre von den Transv. von Adams. Zusatz zu XLII.

c) Die Ecken des Dreiecks, welches durch die drei neuen Transversalen gebildet wird, fallen zusammen mit den Mittelpunkten D, E und F der Geraden, welche durch die drei Fußpunkte P, O und N der ursprünglichen Transversalen bestimmt werden.

d) Sind die ursprünglichen Transversalen AO, BN und CP die drei Mittellinien des gegebenen Dreiecks ABC, so ist das Dreieck DEF, welches durch die drei abgeleiteten Transversalen gebildet wird, der sechzehnte Theil von dem gegebenen Dreieck.

Diese Resultate lassen sich wohl noch in mancher anderen Form als bemerkenswerthe Sätze aussprechen. Betrachten wir etwa das vollständige Vierseit ANCOBG, so ist P der Schnittpunkt zweier Diagonalen desselben, und die zu P gehörende Transversale P_1P_4 parallel der dritten Diagonale NO, und P_1P_4 halbirt den Abstand des Punktes P von NO. Was vom Schnittpunkte P der beiden Diagonalen AB und CG gilt, gilt in derselben Weise vom Schnittpunkte H der beiden Diagonalen CG und NO, und ebenso vom Schnittpunkte der beiden Diagonalen AB und NO. Fassen wir ferner eins der einfachen Vierecke[9]) ACBG, welche durch das vollständige Vierseit ANCOBG bestimmt werden, ins Auge: so ist P der Durchschnitt der beiden Diagonalen des Vierecks.

24. Zusatz. Wenn man aus dem Schnittpunkte P der Diagonalen AB und CG eines einfachen Vierecks ACBG Parallelen zieht zu den Seiten des Vierecks und jede dieser Parallelen, etwa PP_1, verlängert, bis sie diejenige Vierecksseite AC schneidet, welche Gegenseite ist zu derjenigen BG, zu welcher die Parallele PP_1 gezogen wurde:

a) so liegen die dadurch bestimmten vier Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 in einer Geraden.

b) Die auf diese Weise bestimmte Transversale P_1P_4 ist parallel der dritten Diagonale NO des vollständigen Vierseits ANCOBG, welches entsteht, wenn man die Gegenseiten des einfachen Vierecks ACBG verlängert, bis sie sich in N und O schneiden.

c) Die dritte Diagonale NO hat vom Schnittpunkte P der beiden anderen einen doppelt so großen Abstand als die Transversale P_1P_4.[10])

25. Zusatz. Wenn man in einem Dreieck ABC zwei Höhenfußpunkte N und O mit dem dritten P verbindet, durch die Mittelpunkte F und D dieser Verbindungslinien eine Transversale legt, welche die beiden Dreiecksseiten AC und BC, auf denen die beiden ersten Höhenfußpunkte liegen, und die darauf errichteten Höhen BN und AO in den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 schneidet; wenn man endlich in diesen Schnittpunkten auf den betreffenden Seiten und Höhen Perpendikel errichtet: so schneiden sich diese Perpendikel im dritten Höhenfußpunkte P.

§. 9.

26. Hülfssatz. Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine beliebige Transversale geschnitten, so ist das Produkt der Abschnitte, welche rechts von den Schnittpunkten liegen, gleich dem Produkte der Abschnitte links.[11])

Anmerkung. Rechts und links wird so bestimmt, daß man sich in dem betreffenden Schnittpunkte denkt, mit dem Gesichte nach der Figur des Dreiecks gekehrt.

---

[9]) Grun. Arch. 2. Thl. XXIII. — Systematische Entwickelung ꝛc. von J. Steiner. Seite 72 und 73.
[10]) Die Lehre von den Transv. von Adams. XLII.
[11]) Die Lehre von den Transv. von Adams. I. — Grun. Arch. 13. Th. XXXV. 8.

27. Hülfssatz. Drei Punkte liegen in einer Geraden, wenn sie die Seiten eines Dreiecks so theilen, daß das Produkt der drei Abschnitte, welche rechts von jenen Punkten liegen, gleich ist dem Produkte links. [12])

28. Hülfssatz. Wenn man aus den Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 6) drei Transversalen AD, BE und CF zieht, welche sich in einem Punkte G schneiden, und dieselben verlängert, bis sie die gegenüberliegenden Seiten treffen: so ist das Produkt der drei Abschnitte, welche auf den Dreiecksseiten gebildet werden, links gleich dem Produkte der drei Abschnitte rechts.

29. Lehrsatz. Zieht man aus den Ecken eines Dreiecks ABC (Fig 6) drei Transversalen AD, BE und CF, welche sich in einem Punkte G schneiden; verbindet dann die Punkte D, E und F, in welchen die Transversalen die gegenüberliegenden Dreiecksseiten treffen, zu je zwei mit einander: so liegen die drei Punkte P_1, P_2 und P_3, in welchen diese Verbindungslinien DE, DF und EF die dritten Dreiecksseiten schneiden, in einer Geraden. [13])

Beweis. Nach dem 26. Satz ist

$$P_1A \cdot EC \cdot DB = P_1B \cdot EA \cdot DC,$$
$$P_2C \cdot FA \cdot DB = P_2A \cdot FB \cdot DC,$$
$$P_3B \cdot FA \cdot EC = P_3C \cdot FB \cdot EA, \text{ mithin}$$
$$P_1A \cdot P_2C \cdot P_3B \cdot EC^2 \cdot DB^2 \cdot FA^2 = P_1B \cdot P_2A \cdot P_3C \cdot EA^2 \cdot DC^2 \cdot FB^2.$$

Nach dem 28. Satz ist aber

$$EC \cdot DB \cdot FA = EA \cdot DC \cdot FB, \text{ und daher auch}$$
$$P_1A \cdot P_2C \cdot P_3B = P_1B \cdot P_2A \cdot P_3C,$$ weshalb nach 27 die Punkte P_1, P_2 und P_3 in einer Geraden liegen.

§. 10.

30. Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 7), welches einem Kreise M_3 eingeschrieben ist, durch eine beliebige Transversale P_1P_3 schneidet; darauf um die übrigen drei Dreiecke des entstandenen vollständigen Vierseits Kreise beschreibt und jeden Mittelpunkt M_1, M_2 und M_4 dieser drei Kreise mit der in demselben Kreise liegenden Ecke A, C und B des ursprünglichen Dreiecks verbindet: so schneiden sich die drei Verbindungslinien AM_1, CM_2 und BM_4 in einem Punkte D, welcher in der Kreislinie um das ursprüngliche Dreieck und zugleich in der Kreislinie liegt, welche durch die Mittelpunkte der vier Dreieckskreise bestimmt wird.

Beweis. Es sei D der Schnittpunkt von AM_1 mit BM_4. Fällt man alsdann von M_1 auf AC das Loth M_1E und von M_4 auf BC das Loth M_4G und verlängert diese Lothe, bis sie sich in F schneiden: so ist W. EM_1A = W. P_1P_2A = W. P_3P_2B = W. BM_4G = W. DM_4F. Daher liegen die vier Punkte D, M_1, F und M_4 in einer Kreislinie, und es ist W. M_1FM_4 + W. M_1DM_4 = 180°. Weil aber auch W. M_1FM_4 + W. ACB = 180°, so ist W. M_1DM_4 = W. ACB, und der Punkt D liegt in dem Kreise um ABC. Ferner ist M_1M_3P als halber Centriwinkel gleich dem entsprechenden

[12]) Die Lehre von den Transv. von Adams. II.
[13]) Die Lehre von den Transv. von Adams. XI.

Peripheriewinkel ACP, und aus demselben Grunde W. PM_3M_4 = W. PCB; daher W. $M_1M_3M_4$ = = W. M_1DM_4, d. h. der Punkt D liegt auch in der Kreislinie, welche durch M_1, M_3 und M_4 bestimmt wird. In derselben Weise überzeugt man sich, daß auch CM_2 durch D geht.

Wir sprechen die eben gefundenen Resultate noch in folgenden Sätzchen aus.

31. Zusatz. Wenn man um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits Kreise beschreibt und die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Ecken des vierten Dreiecks verbindet, und zwar jede Ecke mit dem Mittelpunkte, in dessen Peripherie die Ecke liegt: so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte, in welchem zugleich die um das vierte Dreieck beschriebene Kreislinie geschnitten wird von dem Kreise, welcher durch die vier Kreismittelpunkte bestimmt wird.

32. Zusatz. Wenn man um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits Kreise beschreibt, so schneidet jeder dieser vier Kreise den durch ihre Mittelpunkte bestimmten Kreis. Verbindet man einen dieser Schnittpunkte D mit den drei Ecken A, C und B, in deren Kreislinie der gedachte Schnittpunkt D liegt: so geht jede der drei Verbindungslinien durch denjenigen der drei übrigen Mittelpunkte, in dessen Peripherie die entsprechende Ecke liegt.

33. Zusatz. Beschreibt man um einen Punkt M_3, der auf der Peripherie eines gegebenen Kreises M liegt, einen Kreis, welcher den gegebenen in zwei Punkten D und P schneidet; legt dann durch einen dieser Schnittpunkte D eine gerade Linie DA und beschreibt mit dem Stück M_1A derselben, welches durch die beiden Kreise abgeschnitten wird, einen Kreis um den Schnittpunkt M_1 auf dem gegebenen Kreise:

a) so geht dieser dritte Kreis gleichfalls durch den zweiten Schnittpunkt P der beiden ersteren.

b) Konstruirt man auf dieselbe Weise einen vierten Kreis, etwa mit M_4B um M_4, so geht auch dieser durch den zweiten gemeinschaftlichen Schnittpunkt P, während die drei übrigen Schnittpunkte A, P_2 und B in einer Geraden liegen.

c) Nimmt man dazu endlich einen auf dieselbe Weise konstruirten fünften Kreis, etwa mit M_2C um M_2, so geht auch dieser durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt P, und die übrigen Schnittpunkte mit den vorigen Kreisen liegen zu je drei in einer Geraden, wodurch die vier Seiten eines vollständigen Vierseits bestimmt werden. (Vergleiche den 11. Satz.)

34. Zusatz. Wenn zwei Kreise sich in zwei Punkten P und D schneiden, während der Mittelpunkt M_3 des einen auf der Peripherie des anderen liegt; und man legt durch den einen Schnittpunkt D beliebige Gerade AM_1, BM_4, CM_2 u. s. w. und verbindet die Punkte, in welchen dieselben von den beiden Kreisen geschnitten werden, mit dem zweiten Schnittpunkt P der Kreise: so sind die entstandenen Dreiecke AM_1P, BM_4P, CM_2P u. s. w. alle gleichschenklig und einander ähnlich.

35. Zusatz. Schneidet man ein Dreieck ABC durch eine beliebige Transversale P_1P_3 und beschreibt um die vier Dreiecke des dadurch entstandenen vollständigen Vierseits Kreise, so stehen die Abstände PA, PB und PC der Ecken des gegebenen Dreiecks von dem der Transversale zugeordneten Punkte in demselben Verhältniß zu einander, in welchem die Abstände der entsprechenden Mittelpunkte M_1, M_4 und M_2 von dem zugeordneten Punkte stehen. Also $PA : PB : PC = PM_1 : PM_4 : PM_2$.

§. 11.

Wird das Dreieck ABC (Fig. 8) durch zwei parallele Transversalen P_1P_3 und O_1O_3 geschnitten, und ist M_1 der Mittelpunkt des um P_1AP_2, N_1 der Mittelpunkt des um O_1AO_2 beschriebenen Kreises:

so liegen A, M_1 und N_1 in gerader Linie. Denn denken wir uns A mit M_1 und A mit N_1 verbunden und von M_1 und N_1 auf AO_1 die Lothe M_1E und N_1F gefällt, so ist W. AM_1E = W. AP_2P_1 = = W. AO_2O_1 = W. AN_1F; mithin W. EAM_1 = W. FAN_1, und daher liegen die Punkte A, M_1 und N_1 in einer Geraden. Ebenso liegen die Mittelpunkte M_2 und N_2 der um P_1P_3C und um O_1O_3C beschriebenen Kreise mit C in gerader Linie, und endlich die Mittelpunkte M_4 und N_4 der um P_2P_3B und um O_2O_3B beschriebenen Kreise mit B in gerader Linie. Dies sind dieselben Geraden, von denen im 30. Satz die Rede ist. Um die sich hieraus ergebenden Eigenschaften bequemer aussprechen zu können, wollen wir Dreiecke wie P_1AP_2 und O_1AO_2, welche eine Ecke A des ursprünglichen Dreiecks gemeinschaftlich haben, und in denen die dieser gemeinschaftlichen Ecke gegenüberliegende Seite eine der parallelen Transversalen ist, „entsprechende Dreiecke" und die Ecke A „die entsprechende gemeinschaftliche Ecke" nennen. Das Dreieck ABC würde dann durch die drei gemeinschaftlichen Ecken gebildet sein.

36. Lehrsatz. Wenn man zu einer Seite eines vollständigen Vierseits Parallelen zieht und um alle Dreiecke der dadurch entstandenen vollständigen Vierseite Kreise beschreibt:

a) so liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche um ein System entsprechender Dreiecke beschrieben sind, mit der dem System entsprechenden gemeinschaftlichen Ecke in einer Geraden.

b) Die dadurch bestimmten drei Geraden M_1N_1, M_2N_2 und M_4N_4 schneiden sich in einem Punkte D, welcher in dem Kreise liegt, der durch die drei gemeinschaftlichen Ecken A, B und C bestimmt wird.

c) Alle Kreise, welche durch je vier Kreismittelpunkte, etwa N_1, N_2, N_3 und N_4, eines und desselben der entstandenen vollständigen Vierseite bestimmt werden, schneiden sich in denselben zwei Punkten: einmal in dem Schnittpunkte D der durch die entsprechenden Mittelpunkte bestimmten drei Geraden, und dann in dem Mittelpunkte M_3 des Kreises, der durch die drei gemeinschaftlichen Ecken bestimmt wird.

37. Aufgabe. Ein Dreieck ABC ist durch eine beliebige Transversale P_1P_3 geschnitten: man soll dasselbe durch eine zweite Transversale O_1O_3 schneiden, welche mit der ersten parallel ist und ihrem zugeordneten Punkte O unter einem gegebenen Winkel X und in demselben Sinne zugeordnet ist, in welchem die erste Transversale ihrem Punkte zugeordnet ist.

Auflösung. Man beschreibe um das Dreieck P_1AP_2 einen Kreis, verbinde dessen Mittelpunkt M_1 mit A, ziehe aus dem Mittelpunkte M_3 des um das gegebene Dreieck ABC beschriebenen Kreises nach AM_1 die Gerade M_3N_1 so, daß W. M_3N_1A = X ist; beschreibe dann mit AN_1 um N_1 einen Kreis, der AC in O_1, AB in O_2 und den Kreis um ABC in O schneidet: so ist O_1O_2 die gesuchte Transversale und O ihr zugeordneter Punkt. [14])

§. 12.

38. Lehrsatz. Beschreibt man in einen Kreis M_5 (Fig. 9) ein vollständiges Viereck ABCD und zieht aus einem beliebigen Punkte P der Peripherie Gerade PP_1, PP_2, PP_3, PP_4, PP_5 und PP_6, welche mit den Vierecksseiten in demselben Sinne gleiche Winkel bilden:

[14]) In Crelles Journal, im 5. Bande Seite 165, ist diese Aufgabe für den Fall gelöst, daß die gesuchte Transversale ihrem zugeordneten Punkte unter rechten Winkeln zugeordnet ist.

a) so sind die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6, in welchem die Vierecksseiten von jenen Geraden getroffen werden, die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

b) Je drei Schnittpunkte, z. B. P_1, P_2 und P_6, welche auf drei Vierecksseiten liegen, die in einer Hauptecke A des gegebenen Vierecks zusammentreffen, liegen mit dieser Ecke A und mit dem zugeordneten Punkte P in einer Kreislinie.

c) Die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der dadurch bestimmten vier Kreise, der zugeordnete Punkt P und der Mittelpunkt M_5 des ursprünglichen Kreises liegen auf einer neuen Kreislinie M.

d) Sind die vier Seiten P_1P_3, P_1P_4, P_5P_2 und P_5P_3 des Vierseits ihrem zugeordneten Punkte P unter rechten Winkeln zugeordnet, so ist der Durchmesser des letzten Kreises M gleich dem Radius des ursprünglichen Kreises M_5.

Beweis. Der erste Theil a ergiebt sich leicht aus unserem 2. Satz. Die Winkel PP_2A und PP_6A ergänzen beide den Winkel PP_1A zu zwei rechten. Daher liegen die Punkte P, P_1, A, P_2 und P_6 in einer Kreislinie, was unter b behauptet ist. Die dritte Behauptung c ist eine Folge unseres 8. Lehrsatzes. Sind endlich die Seiten des Vierseits dem Punkte P unter rechten Winkeln zugeordnet, und wir denken uns P mit A, B, C und D verbunden: so werden M_1, M_2, M_3 und M_4 die Mittelpunkte der entsprechenden Durchmesser PA, PD, PC und PB. Denken wir uns daher M_5 mit M_1, M_2, M_3 und M_4 verbunden, so sind die Dreiecke PM_1M_5, PM_2M_5, PM_3M_5 und PM_4M_5 bei M_1, M_2, M_3 und M_4 rechtwinklig, und es liegen M_1, M_2, M_3 und M_4 in einer Kreislinie, deren Durchmesser PM_5 ist.

Gehen wir umgekehrt von dem Kreise um M aus, nehmen auf demselben vier beliebige Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 an und beschreiben um dieselben Kreise, welche sich in einem Punkte P schneiden, der gleichfalls auf der ursprünglichen Kreislinie liegt: so bilden die übrigen Schnittpunkte nach 11 ein vollständiges Vierseit $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. Verbindet man alsdann die sechs Ecken P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 dieses Vierseits mit P und zieht durch dieselben der Reihe nach die Geraden AD, AC, DC, DB, BC und BA, welche mit PP_1, PP_2, PP_3, PP_4, PP_5 und PP_6 in demselben Sinne gleiche Winkel bilden: so liegen nach 4 die Punkte A, D und C, in welchen sich die Geraden AD, AC und DC schneiden, mit P in einer Kreislinie, weil die Punkte P_1, P_2 und P_3 in einer Geraden liegen; und auch die Punkte D, C und B, in welchen sich die Geraden DC, DB und BC schneiden, mit P in einer Kreislinie, weil die Punkte P_3, P_4 und P_5 in einer Geraden liegen. Weil aber durch die drei Punkte D, C und P nur eine Kreislinie möglich ist, so liegen alle fünf Punkte A, D, C, B und P in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt M_5 nach 9 auf dem ursprünglichen Kreise um M liegt.

39. Lehrsatz. Wenn man den Schnittpunkt der vier Kreise, welche um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits beschrieben werden, mit den Ecken des Vierseits verbindet und durch die sechs Ecken Gerade zieht, welche mit jenen Verbindungslinien in demselben Sinne gleiche Winkel bilden:

a) so sind diese Geraden die sechs Seiten eines vollständigen Sehnenvierecks, dessen Kreismittelpunkt in derjenigen Kreislinie liegt, welche durch die Mittelpunkte der vier Kreise bestimmt ist, die um die vier Dreiecke des vollständigen Vierseits beschrieben werden.

b) Wenn die sechs Geraden, welche durch die Ecken des Vierseits gelegt werden, mit den entsprechenden Verbindungslinien rechte Winkel bilden: so ist der Radius des Kreises um das Sehnenviereck gleich dem Durchmesser des Kreises, der durch die Mittelpunkte der vier Dreieckskreise bestimmt ist.

Um die vorstehenden Sätze zu erweitern, denken wir uns auf dem Kreise um M_5 die Punkte P, A, D, C fest, während der Punkt B seine Lage beliebig auf der Peripherie verändert: so bleibt bei dem nämlichen Winkel $PP_1A = PP_2C =$ u. s. w. die Lage der Punkte M_1 und M_2, für jede beliebige Lage des Punktes B, fest und unverändert, weil P_1, P_2 und P_3 unverändert bleiben. Da aber durch P, M_1, M_2 und M_5 nur eine einzige Kreislinie möglich ist, und für jede Lage des Punktes B die Punkte M_3 und M_4 mit M_1, M_2 und P auf einer Kreislinie liegen: so gelten die vorstehenden Eigenschaften auch vom Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, überhaupt von jedem n-Eck.

40. Lehrsatz. Beschreibt man in einen Kreis ein vollständiges n-Eck [15]) und zieht aus einem beliebigen Punkte der Peripherie Gerade, welche mit den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Seiten des n-Ecks in demselben Sinne gleiche Winkel bilden:

a) so liegen immer drei von den $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Punkten, in welchen die Seiten des n-Ecks von jenen Geraden getroffen werden, in einer Geraden, wodurch $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Gerade bestimmt werden.

b) Je $n-1$ Fußpunkte, welche auf $n-1$ Seiten des n-Ecks liegen, die in einer Hauptecke zusammenstoßen, liegen mit dieser Ecke und dem zugeordneten Punkte in einer Kreislinie.

c) Die Mittelpunkte der dadurch bestimmten n Kreise, der zugeordnete Punkt und der Mittelpunkt des ursprünglichen Kreises liegen auf einer neuen Kreislinie. Umgekehrt:

41. Lehrsatz. Wenn man auf einer Kreislinie n beliebige Punkte annimmt und um dieselben Kreise beschreibt, welche in einem und demselben Punkte auf der ursprünglichen Kreislinie zusammentreffen; wenn man alsdann den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der n Kreise mit jedem der übrigen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Schnittpunkte derselben verbindet und durch diese Schnittpunkte Gerade zieht, welche mit jenen Verbindungslinien in demselben Sinne gleiche Winkel bilden: so bestimmen die dadurch erhaltenen $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Geraden ein vollständiges n-Eck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, dessen Mittelpunkt auf der ursprünglichen Kreislinie liegt.

§. 13.

Fällt man aus jeder Hauptecke eines vollständigen Sehnenvierecks ABCD (Fig. 10) Lothe auf die Seiten desjenigen Hauptdreiecks, welches durch die drei anderen Hauptecken bestimmt wird: so liegen sowohl die Fußpunkte A_1, A_2 und A_3 der aus A gefällten Lothe nach unserem 3. Satz in einer Geraden, als auch die Fußpunkte B_1, B_2 und B_3 der aus B gefällten Lothe in einer Geraden, als auch die Fußpunkte C_1, C_2 und C_3 der aus C gefällten Lothe, als endlich auch die Fußpunkte D_1, D_2 und D_3 der aus D gefällten Lothe in einer Geraden. Die hiedurch bestimmten vier Transversalen haben interessante Eigenschaften. Weil die Punkte A, A_1, D, A_2, D_2 und D_1 auf der durch AD als Durchmesser bestimmten Kreislinie liegen, so ist W. $A_1AA_2 =$ W. $CDB =$ W. $CAB =$ W. D_2AD_1; mithin $A_1A_2 = D_1D_2$, und daher A_1D_1 parallel A_2D_2; woraus wiederum $A_1E = D_1E$ sich ergiebt, wenn E der Schnittpunkt von A_1A_2 mit D_1D_2 ist. Weil ferner W. $B_1CB =$ W. $DAD_1 =$ W. DA_1D_1, so ist A_1D_1 auch parallel CB, und daher $A_1A_3 = D_1D_3$. In derselben Weise überzeugt man sich, daß die entsprechenden Stücke aller vier Transversalen gleich sind, und erhält folgende Gleichungen:

---

[15]) Systematische Entwickelung 2c. von J. Steiner. Seite 73.

$$A_1A_2 = D_1D_2 = C_1C_2 = B_1B_2,$$
$$A_1A_3 = D_1D_3 = C_1C_3 = B_1B_3,$$
$$A_2A_3 = D_2D_3 = C_2C_3 = B_2B_3.$$

Ist G der Schnittpunkt der Vierecksseiten AB und CD, so ist

$GA_1 : GD_1 = GA : GD$ und

$GC_1 : GB_1 = GC : GB$, weil aber

$GA : GD = GC : GB$, so auch

$GA_1 : GD_1 = GC_1 : GB_1$;

d. h. die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 liegen in einer Kreislinie. Ebenso beweist man mit Hülfe des Schnittpunktes G_2 der Vierecksseiten AC und BD, daß die Punkte A_2, B_2, C_2 und D_2 in einer Kreislinie liegen; und mit Hülfe des Schnittpunktes G_1 der Vierecksseiten AD und BC, daß die Punkte A_3, B_3, C_3 und D_3 in einer Kreislinie liegen.

Es wurde bereits bemerkt, daß $A_1E = D_1E$. Und wenn wir den Schnittpunkt zwischen D_1D_2 und C_1C_2 mit E_1 und den Schnittpunkt zwischen C_1C_2 und B_1B_2 mit E_2 bezeichnen, so überzeugt man sich ebenso leicht, daß auch $D_1E_1 = C_1E_1$ und $C_1E_2 = B_1E_2$. Weil aber die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 in einer Kreislinie liegen, so schneiden sich die Perpendikel, welche man in den Mittelpunkten der Sehnen A_1D_1, D_1C_1 und C_1B_1 errichtet, in dem Mittelpunkte des entsprechenden Kreises. Diese Perpendikel sind aber die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke A_1ED_1, $D_1E_1C_1$ und $C_1E_2B_1$, folglich fallen die Spitzen E, E_1 und E_2 dieser gleichschenkligen Dreiecke in einen Punkt zusammen.

Endlich haben wir gesehen, daß

A_1D_1	parallel	A_2D_2	parallel	A_3D_3	parallel	BC. Ebenso leicht erkennt man, daß
D_1C_1	„	D_2C_2	„	D_3C_3	„	AB,
C_1B_1	„	C_2B_2	„	C_3B_3	„	AD,
B_1A_1	„	B_2A_2	„	B_3A_3	„	CD,
B_1D_1	„	B_2D_2	„	B_3D_3	„	AC,
A_1C_1	„	A_2C_2	„	A_3C_3	„	BD.

Daraus ergiebt sich aber sofort, daß die vollständigen Vierecke $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ und ABCD sämmtlich unter einander ähnlich sind.

42. Lehrsatz. Wenn man jedes der vier Hauptdreiecke eines vollständigen Sehnenvierecks durch eine Transversale schneidet, welche der vierten Hauptecke des Vierecks unter rechten Winkeln zugeordnet ist: so schneiden sich die dadurch bestimmten vier Transversalen in einem Punkte und sind in allen entsprechenden Theilen einander gleich.[16])

43. Lehrsatz. Wenn man in den vier Hauptdreiecken eines vollständigen Sehnenvierecks die Höhenperpendikel konstruirt,

a) so bilden je vier Fußpunkte derselben, welche auf je zwei Gegenseiten des gegebenen Vierecks liegen, die Ecken eines Sehnenvierecks.

[16]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 15 und 16.

b) Die dadurch bestimmten drei Fußpunktenvierecke sind dem gegebenen Viereck ähnlich.

c) Die um die Fußpunktenvierecke beschriebenen Kreise sind koncentrisch, und ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der vier Transversalen, welche den einzelnen Hauptecken des gegebenen Vierecks in Bezug auf das aus den drei übrigen Ecken gebildete Dreieck unter rechten Winkeln zugeordnet sind. [17])

Anmerkung. Betrachten wir umgekehrt eins der abgeleiteten Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ als gegeben, so erhalten wir daraus das Viereck $ABCD$, indem wir auf zwei Gegenseiten A_1B_1 und C_1D_1 in den vier Ecken A_1, B_1, C_1 und D_1 Perpendikel errichten und jedes dieser Perpendikel verlängern, bis es die gegenüberliegende Seite schneidet. Hierauf kommen wir jedoch noch einmal zurück.

Denken wir uns im Mittelpunkte von D_1C_1 ein Loth errichtet, so geht dasselbe durch E und den Mittelpunkt von DC. Ebenso gehen die Lothe, welche man sich in den Mittelpunkten von A_3D_3, B_1A_1, C_3B_3, A_2C_2 und B_2D_2 errichtet denkt, sämmtlich durch E und der Reihe nach durch die Mittelpunkte der Seiten DA, AB, BC, AC und BD.

44. Lehrsatz. Die sechs Perpendikel, welche man aus den Mittelpunkten der sechs Seiten eines vollständigen Sehnenvierecks auf die Gegenseiten fällt, schneiden sich in einem Punkte, und zwar in dem Schnittpunkte der vier Transversalen, welche den Hauptecken des gegebenen Vierecks in Bezug auf das aus den drei übrigen Ecken gebildete Dreieck unter rechten Winkeln zugeordnet sind. [18])

Bezeichnen wir ferner die Schnittpunkte der Höhenperpendikel in den vier Hauptdreiecken BCD, ACD, ABD und ABC des gegebenen Vierecks mit A^1, B^1, C^1 und D^1, so bestimmen dieselben ein Viereck, welches dem gegebenen Viereck kongruent ist. Weil nämlich die Punkte D, C, D_3 und C_3 in einer Kreislinie liegen, so sind die Winkel DCC_3 und DD_3C_3 einander gleich. Weil außerdem die Winkel C_2CC_3 und D_2DD_3, und daher auch ihre Nebenwinkel A^1CB^1 und A^1DB^1 einander gleich sind: so liegen auch die Punkte A^1, C, D und B^1 in einer Kreislinie, und die Winkel DCB^1 und DA^1B^1 sind einander gleich. Somit ist W. $DD_3C_3 =$ W. $DCC_3 =$ W. $DCB^1 =$ W. DA^1B^1, und deshalb A^1B^1 parallel D_3C_3 parallel AB. Weil aber auch AB^1 parallel BA^1, so ist AB^1A^1B ein Parallelogramm, und A^1B^1 gleich AB. Ebenso überzeugt man sich, daß B^1C^1 gleich und parallel BC, C^1D^1 gleich und parallel CD, und D^1A^1 gleich und parallel AD. Daraus aber folgt, daß $ABCD$ kongruent $A^1B^1C^1D^1$.

45. Lehrsatz. Konstruirt man in den vier Hauptdreiecken eines vollständigen Sehnenvierecks die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel, so bilden dieselben die Ecken eines Vierecks, welches dem gegebenen Viereck kongruent ist, und dessen Seiten den entsprechenden Seiten des gegebenen Vierecks parallel sind. [19])

Anmerkung. Die Ecken des gegebenen Vierecks $ABCD$ sind die Durchschnittspunkte der Höhen der vier Hauptdreiecke des Vierecks $A^1B^1C^1D^1$.

Auch mit den Höhenpunkten A^1, B^1, C^1 und D^1 steht der Punkt E in Zusammenhang. Denken wir uns nämlich noch einmal im Mittelpunkt von A_1B_1 ein Loth errichtet, so geht dasselbe durch E

---

[17]) Grun. Arch. 13. Thl. XXXV. 17.

[18]) Lehrbuch der Geometrie von Kunze. Jena 1842. 4. Anhang zum 6. Kap. III. 2.

[19]) Lehrb. der Geometr. von Kunze. Seite 129. — Grun. Arch. 8. Thl. Seite 105. — Crelles Journal für Mathem. 5. Band. Seite 168.

und auch durch die Mittelpunkte von AB und von A^1B^1, mithin auch durch den Mittelpunkt der Diagonale AA^1 des Parallelogramms AB^1A^1B. In gleicher Weise geht das Loth, welches im Mittelpunkte von A_3D_3 errichtet wird, durch E und durch die Mittelpunkte von AD und A^1D^1, und daher auch durch den Mittelpunkt der Diagonale AA^1 des Parallelogramms ADA^1D^1. Wenn aber die gedachten Lothe beide durch E und beide durch den Mittelpunkt der Diagonale AA^1 gehen, so fallen die beiden letzteren Punkte zusammen, und es ist E der Halbirungspunkt von AA^1. Dann aber ist es auch der Halbirungspunkt von BB^1, von CC^1 und von DD^1.

46. Lehrsatz. Wenn man in den vier Hauptdreiecken eines vollständigen Sehnenvierecks die Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel konstruirt und jede Ecke des gegebenen Vierecks mit dem Schnittpunkte der Höhen desjenigen Dreiecks verbindet, welches durch die drei anderen Ecken gebildet wird: so gehen die vier Verbindungslinien durch den Schnittpunkt der vier Transversalen, welche den einzelnen Hauptecken des gegebenen Vierecks in Bezug auf das durch die drei übrigen Ecken gebildete Dreieck unter rechten Winkeln zugeordnet sind, und werden in diesem Schnittpunkte halbirt.

Denken wir uns zum Schluß über den sechs Seiten des Vierecks ABCD Kreise gezeichnet, deren Durchmesser die Seiten sind: so sagen die Gleichungen

$$ED_2 \cdot ED_1 = EC_2 \cdot EC_1,$$
$$ED_2 \cdot ED_3 = EB_2 \cdot EB_3,$$
$$ED_1 \cdot ED_3 = EC_1 \cdot EC_3$$

der Reihe nach aus, daß der Punkt E in der Linie der gleichen Potenzen[20]) liegt, sowohl in Bezug auf die Kreise über AD und über BC, als auch in Bezug auf die Kreise über CD und über AB, als endlich auch in Bezug auf die Kreise über BD und über AC.

47. Lehrsatz. Beschreibt man über den sechs Seiten eines vollständigen Sehnenvierecks Kreise und konstruirt zu je zwei Kreisen, deren Durchmesser je zwei Gegenseiten des Vierecks sind, die Linien der gleichen Potenzen: so schneiden sich die dadurch bestimmten drei Linien der gleichen Potenzen in dem Schnittpunkte der vier Transversalen, welche den einzelnen Hauptecken des Vierecks in Bezug auf das durch die drei übrigen Ecken gebildete Dreieck unter rechten Winkeln zugeordnet sind.

§. 14.

Es seien AB, AD, EB und EG (Fig. 11) die Seiten eines gegebenen vollständigen Vierseits. Konstruirt man alsdann in dem Dreieck AGF desselben die drei Höhen AH, GK und FI, welche sich im Punkte P schneiden; und im Dreieck FDE die Höhen FL, DO und ER, welche sich im Punkte P_1 schneiden; und beschreibt die Kreise M, M_1 und M_2, deren Durchmesser die drei Diagonalen AE, GD und BF des Vierseits sind: so geht der Kreis M durch die Fußpunkte H und R der Höhen AH und ER, der Kreis M_1 durch die Fußpunkte K und O der Höhen GK und DO, endlich der Kreis M_2 durch die Fußpunkte I und L der Höhen FI und FL. Ferner sind die beiden Dreiecke PHG und PKA und auch die beiden Dreiecke PIG und PKF einander ähnlich, weshalb

$$PH \cdot PA = PG \cdot PK = PI \cdot PF,$$

[20]) Die geometr. Konstruktionen von J. Steiner. 2. Kap. III.

woraus man sieht, daß der Punkt P in den drei Linien gleicher Potenzen liegt, welche zu den drei Kreisen M, M_1 und M_2 gehören. Ebenso ist

$$P_1L \cdot P_1F = P_1D \cdot P_1O = P_1R \cdot P_1E,$$

und daher liegt auch der Punkt P_1 in den drei Linien gleicher Potenzen der Kreise M, M_1 und M_2. Weil aber durch zwei Punkte P und P_1 nur eine einzige Gerade möglich ist, so haben die drei Kreise M, M_1 und M_2 eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Potenzen. Was von den Höhenschnittpunkten P und P_1 der Dreiecke AGF und FDE bewiesen worden ist, gilt in derselben Weise von den Höhenschnittpunkten der Dreiecke ABD und EGB.

Verbinden wir endlich M mit M_1 und mit M_2, so stehen diese beiden Verbindungslinien senkrecht auf der gemeinschaftlichen Linie PP_1 der gleichen Potenzen und fallen daher zusammen, weil von einem Punkte M auf eine Gerade PP_1 nur ein Loth möglich ist.

48. Lehrsatz. Die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, haben eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Potenzen. Wenn daher zwei dieser Kreise sich schneiden, so geht der dritte durch ihre Schnittpunkte; wenn zwei sich berühren, so berührt der dritte beide in ihrem Berührungspunkte.

49. Lehrsatz. Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.[21])

50. Lehrsatz. Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von den Seiten eines vollständigen Vierseits gebildet werden, liegen in einer Geraden, welche auf der durch die Mittelpunkte der Diagonalen bestimmten Transversale senkrecht steht, und welches die gemeinschaftliche Potenzlinie ist für die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen des Vierseits sind.[22])

Nehmen wir nun an, die Kreise M, M_1 und M_2 schneiden sich, und verbinden einen der Schnittpunkte C mit B, A, D und errichten in C auf den Verbindungslinien CB, CA und CD Lothe: so werden diese Lothe der Reihe nach durch die Ecken F, E und G des Vierseits gehen.

51. Lehrsatz. Wenn man auf drei Seiten CB, CA und CD eines vollständigen Vierecks ABCD, welche in einer Hauptecke C zusammentreffen, in dieser Ecke Perpendikel CF, CE und CG errichtet: so liegen die Punkte F, E und G, in welchen diese Perpendikel die entsprechenden Gegenseiten AD, BD und AB des Vierecks schneiden, in einer Geraden.

52. Erklärung. Der Kürze wegen wollen wir diese Transversale EG „die Perpendikeltransversale“ nennen und dieselbe im Folgenden einer etwas genaueren Betrachtung unterwerfen.

---

[21]) Die Lehre von den Transv. von Adams. LIII. — Lehrbuch der Geometrie von Kunze. Seite 200.

[22]) Die Lehre von den Transv. von Adams. XLI. — Crelles Journal für Mathem. 5. Band Seite 167.

§. 15.

53. Lehrsatz. Die Perpendikeltransversalen, welche zu den vier Ecken eines Quadrats oder Rechtecks gehören, sind die Diagonalen.

54. Lehrsatz. Die Perpendikeltransversalen, welche zu den vier Ecken eines Rhombus gehören, sind den Diagonalen desselben parallel und bilden ein Rechteck, dessen Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Mittelpunkte des Rhombus.

55. Lehrsatz. Die Perpendikeltransversalen, welche zu den vier Ecken eines Parallelogramms gehören, bilden ein Parallelogramm, dessen Mittelpunkt zusammenfällt mit dem Mittelpunkte des ursprünglichen Parallelogramms.

Die Beweise der vorstehenden Sätze haben keine Schwierigkeiten. Es sei ferner ABCD (Fig. 12) ein beliebiges vollständiges Viereck, und P_1P_3 die der Ecke A zugehörige Perpendikeltransversale: so ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften.

56. Lehrsatz. Legt man durch die Ecken eines Dreiecks BCD drei Gerade BA, CA und DA, welche in einem Punkte A zusammentreffen, errichtet in diesem Schnittpunkte auf den drei Geraden Perpendikel AP_3, AP_1 und AP_2 und markirt auf jeder Dreiecksseite den Punkt, in welchem sie von dem Perpendikel geschnitten wird, welches auf der durch die dritte Ecke gelegten Geraden errichtet ist: so liegen die dadurch bestimmten drei Schnittpunkte P_3, P_1 und P_2 in einer Geraden.[23])

57. Aufgabe. Die drei Seiten eines Dreiecks BCD werden durch eine beliebige Transversale P_1P_3 geschnitten: man soll einen Punkt A finden, zu welchem die gegebene Transversale P_1P_3 die zugehörige Perpendikeltransversale ist.

Auflösung. Man beschreibe über zwei Diagonalen desjenigen vollständigen Vierseits, welches durch die Seiten des Dreiecks und die gegebene Transversale gebildet wird, Kreise, deren Durchmesser jene beiden Diagonalen sind: so genügen die Schnittpunkte der Kreise der Aufgabe. Die Bedingungen, unter welchen die Aufgabe zwei oder eine oder keine Lösung hat, ergeben sich leicht aus 48.

58. Zusatz. Wenn die beiden Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines einfachen Vierecks BP_2P_3D sind, sich schneiden, und man verbindet einen ihrer Schnittpunkte A mit den Punkten C und P_1, in welchen die Gegenseiten des Vierecks zusammentreffen: so stehen die beiden Verbindungslinien AC und AP_1 auf einander senkrecht.

59. Zusatz. Wählt man in einer Geraden drei beliebige Punkte P_1, P_2, P_3 und verbindet dieselben mit einem beliebigen vierten Punkte A, errichtet in diesem auf den drei Verbindungslinien AP_1, AP_2 und AP_3 die Perpendikel AC, AD und AB, wählt auf einem derselben einen beliebigen Punkt C und verbindet ihn mit den ihm nicht entsprechenden Punkten P_2 und P_3: so liegen die Schnittpunkte B und D, in welchen die Verbindungslinien CP_2 und CP_3 von den nicht entsprechenden Perpendikeln geschnitten werden, mit P_1 in einer Geraden.

---

[23]) Die Lehre von den Transv. von Adams. IX.

§. 16.

Wenn man in einem beliebigen vollständigen Viereck ABCD (Fig. 13) die den vier Hauptecken zugehörigen Perpendikeltransversalen A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 und D_1D_3 konstruirt, so liegen die Punkte A, A_1, B und B_1 in einer Kreislinie, und daher sind die Winkel ABA_1 und AB_1A_1 einander gleich; es liegen aber auch die Punkte A, C_1, C und A_1 in einer Kreislinie, und daher sind auch die Winkel AC_1A_1 und ACA_1 einander gleich. Deshalb aber sind die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ einander ähnlich. Ebenso überzeugt man sich, daß die Dreiecke ADC und $A_1D_1C_1$ einander ähnlich sind, und sieht daraus, daß das Viereck ABCD ähnlich ist dem Viereck $A_1B_1C_1D_1$. Dasselbe gilt von den Vierecken $A_2B_2C_2D_2$ und $A_3B_3C_3D_3$.

60. Lehrsatz. Wenn man in einem beliebigen vollständigen Viereck die den vier Hauptecken zugehörigen Perpendikeltransversalen konstruirt, so bilden je vier Punkte, in welchen diese Transversalen je zwei Gegenseiten des Vierecks schneiden, ein vollständiges Viereck, welches dem gegebenen ähnlich ist. (Vergleiche die Anmerkung zum 43. Satz.)

Denken wir uns im Mittelpunkte von AB ein Loth errichtet, so geht dies durch die Mittelpunkte von A_1B_1, von A_2B_2 und von A_3B_3. Ebenso geht jedes Loth, welches auf einer anderen Seite des gegebenen Vierecks, etwa BC, im Mittelpunkte errichtet wird, durch die Mittelpunkte der entsprechenden Seiten B_1C_1, B_2C_2 und B_3C_3 der abgeleiteten Vierecke. Die sechs Lothe, welche in den Mittelpunkten der sechs Seiten des gegebenen Vierecks ABCD errichtet werden, schneiden sich aber zu drei in den Mittelpunkten der den vier Hauptdreiecken umschriebenen Kreise und bilden daher ein neues vollständiges Viereck.

61. Lehrsatz. Der Mittelpunkt jeder Seite eines gegebenen vollständigen Vierecks liegt mit den Mittelpunkten der entsprechenden Seiten der drei abgeleiteten Vierecke, welche durch die Perpendikeltransversalen auf je zwei Gegenseiten des gegebenen Vierecks bestimmt werden, in einer Geraden, und die hiedurch bestimmten sechs Geraden sind die sechs Seiten eines neuen vollständigen Vierecks.

Anmerkung. Wie man aus einem der abgeleiteten Vierecke $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ oder $A_3B_3C_3D_3$ das ursprüngliche Viereck ABCD wiedererhält, sieht man auf den ersten Blick.

§. 17.

Konstruirt man in einem vollständigen Sehnenviereck ABCD (Fig. 14) die den vier Hauptecken A, B, C und D zugehörigen Perpendikeltransversalen A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 und D_1D_3, so sind die dadurch auf je zwei Gegenseiten bestimmten Vierecke $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ und $A_3B_3C_3D_3$ ebenfalls Kreisvierecke, weil sie nach dem 60. Satz dem gegebenen Viereck ähnlich sind.

Weil die Punkte A, D_2, D und A_2 in einer Kreislinie liegen, so ist W. $AD_2A_2 =$ W. $ADA_2 =$ $=$ W. C_2BC, und daher A_2D_2 parallel CB. Weil die Punkte B, C, B_3, C_3 und auch die Punkte A_3, B_3, C_3, D_3 in einer Kreislinie liegen, so ist W. $D_1CB_3 =$ W. $BC_3B_3 =$ W. $A_3C_3B_3 =$ $=$ W. $A_3D_3B_3$; mithin auch A_3D_3 parallel CB, und daher auch A_2D_2 parallel A_3D_3. Ebenso ist D_2C_2 parallel D_3C_3 und C_2B_2 parallel C_3B_3. Weil aber die Vierecke $A_2B_2C_2D_2$ und $A_3B_3C_3D_3$ einander ähnlich sind, so ist

$$A_2D_2 : A_3D_3 = D_2C_2 : D_3C_3 = C_2B_2 : C_3B_3,$$

und daher schneiden sich die Transversalen A_2A_3, D_2D_3, C_2C_3 und B_2B_3 in einem Punkte.

Sind ferner M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der um die Vierecke $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ und $A_3B_3C_3D_3$ beschriebenen Kreise, und man verbindet M_2 mit M_3, M_2 mit D_2 und M_3 mit D_3: so ist M_2D_2 parallel M_3D_3, und es verhält sich

$$M_2D_2 : M_3D_3 = D_2C_2 : D_3C_3;$$

deshalb geht aber auch M_2M_3 durch den Schnittpunkt der Transversalen D_2D_3 und C_2C_3. In derselben Weise überzeugt man sich, daß auch die Verbindungslinie zwischen M_1 und M_3 durch den Schnittpunkt der Transversalen geht, so daß also die drei Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 mit jenem Schnittpunkte in einer Geraden liegen.

Denken wir uns endlich auf AD im Mittelpunkte ein Loth errichtet, so geht dasselbe durch die Mittelpunkte von A_2D_2 und von A_3D_3, und daher durch den Schnittpunkt der Transversalen A_2A_3 und D_2D_3. Ebenso geht das Loth, welches man im Mittelpunkte von AB errichtet denkt, durch die Mittelpunkte von A_2B_2 und A_3B_3, und daher durch den Schnittpunkt der Transversalen A_2A_3 und B_2B_3. Mithin schneiden sich die in den Mitten von AD und AB errichteten Lothe in dem Schnittpunkte der vier Perpendikeltransversalen, d. h. dieser Schnittpunkt fällt in den Mittelpunkt M des dem gegebenen Viereck ABCD umschriebenen Kreises. Zum Schluß ist

$$MA_1 : MA_2 : MA_3 = MB_1 : MB_2 : MB_3 = MC_1 : MC_2 : MC_3 = MD_1 : MD_2 : MD_3 =$$
$$= M_1D_1 : M_2D_2 : M_3D_3 = D_1C_1 : D_2C_2 : D_3C_3.$$

62. Lehrsatz. Konstruirt man in einem vollständigen Sehnenviereck die den vier Hauptecken zugehörigen Perpendikeltransversalen,

a) so schneiden sich dieselben im Mittelpunkte des Kreises, welcher um das gegebene Viereck beschrieben ist.

b) Die Mittelpunkte der Kreise, welche um die durch die Perpendikeltransversalen auf je zwei Gegenseiten bestimmten Vierecke beschrieben werden, liegen in einer Geraden, welche ebenfalls durch den Mittelpunkt des dem Urviereck umschriebenen Kreises geht.

c) Der Mittelpunkt jeder Seite des Urvierecks liegt mit den Mittelpunkten der entsprechenden Seiten der abgeleiteten Vierecke in einer Geraden, und die hiedurch bestimmten sechs Geraden treffen wiederum im Mittelpunkte des dem Urviereck umschriebenen Kreises zusammen.

d) Jede Perpendikeltransversale und die Gerade, welche durch die Mittelpunkte der den Vierecken umschriebenen Kreise bestimmt wird, werden durch den Mittelpunkt des ursprünglichen Kreises in denselben Verhältnissen getheilt, in welchen die Radien der den abgeleiteten Vierecken umschriebenen Kreise, oder die entsprechenden Seiten der abgeleiteten Vierecke zu einander stehen.

Anmerkung. Auf den innigen Zusammenhang der Fig. 14 mit Fig. 10, so wie der eben ausgesprochenen Eigenschaften mit denjenigen, welche der 42. Satz enthält, führt die dort gemachte Bemerkung.

§. 18.

Legt man durch einen beliebigen Punkt K (Fig. 15) auf der Seite AB eines Dreiecks ABC zwei beliebige Transversalen KEF und KIH, dann durch einen beliebigen Punkt M auf der Seite AC und durch F und I die Transversalen MGF und MID: so schneiden sich die Geraden BC, ED und

GH in einem Punkte L. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß BC und ED sich im Punkte L schneiden, und zeigen, daß die Punkte G, H und L in einer Geraden liegen. Dazu ist nach dem 26. Satz

$$KB \cdot EA \cdot FC = KA \cdot EC \cdot FB,$$
$$KA \cdot IB \cdot HC = KB \cdot IC \cdot HA,$$
$$FB \cdot GA \cdot MC = FC \cdot GB \cdot MA,$$
$$MA \cdot IC \cdot DB = MC \cdot IB \cdot DA,$$
$$EC \cdot DA \cdot LB = EA \cdot DB \cdot LC;$$

und wenn wir diese fünf Gleichungen mit einander multipliciren, so erhalten wir

$$GA \cdot HC \cdot LB = GB \cdot HA \cdot LC,$$

weshalb nach unserem 27. Satz die Punkte G, H und L in einer Geraden liegen.

63. Erklärung. Unter einem einfachen Sechseck versteht man eine geradlinige Figur, welche entsteht, wenn man sechs Punkte durch einen ununterbrochenen Zug so mit einander verbindet, daß man keinen derselben überspringt und wieder zum Ausgangspunkte zurückkommt. Jedes einfache Sechseck hat drei Paar gegenüberliegende Ecken: die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste; ebenso drei Paar gegenüberliegende Seiten. Wenden wir nun das eben gefundene Resultat auf das einfache Sechseck DEFGHID an und verstehen unter „Hauptdiagonalen" desselben diejenigen Diagonalen DG, EH und FI, welche durch die drei Paare gegenüberliegender Ecken bestimmt werden, so haben wir den folgenden Satz:

64. Lehrsatz. Wenn zwei Paar Gegenseiten FE und IH, FG und ID eines einfachen Sechsecks DEFGHID in zwei Punkten K und M zweier Hauptdiagonalen DG und EH zusammentreffen, so schneidet sich das dritte Paar Gegenseiten ED und GH in einem Punkte L der dritten Hauptdiagonale FI.

Das vollständige Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$ (Fig. 16) enthält vier vollständige Vierecke $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_2A_4A_5$ und $A_1A_3A_4A_5$, welche die Ecke A_1 gemeinschaftlich haben. Es seien nun P_1P_3, N_1N_3, O_1O_3 und R_1R_3 die vier Perpendikeltransversalen der genannten Vierecke, welche der gemeinschaftlichen Ecke A_1 zugehören: so schneiden sich in dem einfachen Sechseck $N_2N_1O_1R_2R_3O_2N_2$ die beiden Gegenseiten O_1N_1 und R_3O_2 im Punkte A_5 der Hauptdiagonale N_2R_2, ebenso die beiden Gegenseiten N_2O_2 und O_1R_2 im Punkte A_1 der Hauptdiagonale N_1R_3; und daher schneidet sich nach dem vorstehenden Satze auch das dritte Paar Gegenseiten N_1N_2 und R_2R_3 in einem Punkte P der dritten Hauptdiagonale O_1O_2. In derselben Weise schneiden sich in dem einfachen Sechseck $N_1O_1O_3N_3P_2P_3N_1$ die beiden Gegenseiten N_1O_1 und N_3P_2 im Punkte A_2 der Hauptdiagonale O_3P_3, und die Gegenseiten O_3N_3 und P_3N_1 im Punkte A_1 der Hauptdiagonale O_1P_2; folglich schneidet sich auch das dritte Paar Gegenseiten O_1O_3 und P_2P_3 in einem Punkte P der dritten Hauptdiagonale N_1N_3. Weil aber O_1O_3 und N_1N_3 nur in einem Punkte zusammentreffen können, so schneiden sich die vier Perpendikeltransversalen P_1P_3, N_1N_3, O_1O_3 und R_1R_3 in dem Punkte P.

65. Lehrsatz. Konstruirt man in den vier vollständigen Vierecken eines vollständigen Fünfecks, welche eine Ecke des Fünfecks gemeinschaftlich haben, zu dieser gemeinschaftlichen Ecke die vier Perpendikeltransversalen: so schneiden sich dieselben in einem Punkte.

Bleiben die vier Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 unverändert in ihrer ursprünglichen Lage, während der fünfte Punkt A_5 seine Lage beliebig ändert: so bleibt die Perpendikeltransversale P_1P_3 fest und unverändert, während die drei übrigen für jede neue Lage des Punktes A_5 ihre Lage ändern; jedoch treffen sie immer in einem Punkte auf P_1P_3 zusammen. Nehmen wir daher n beliebige Punkte A_1, A_2, A_3, ... A_n, so bilden die vier als fest angenommenen A_1, A_2, A_3 und A_4 mit jedem der $n-4$ übrigen ein vollständiges Fünfeck. Konstruiren wir alsdann in jedem dieser Fünfecke die Perpendikeltransversalen, welche der Ecke A_1 zugehören: so werden sich diejenigen, welche zu demselben Fünfeck gehören, jedesmal in einem Punkte schneiden; und alle diese Schnittpunkte liegen auf der Perpendikeltransversale P_1P_3, welche in dem festen Viereck der Ecke A_1 zugehört.

66. Lehrsatz. Konstruirt man in den $n-4$ vollständigen Fünfecken eines vollständigen n-Ecks, welche von vier unveränderlichen Ecken und je einer der übrigen des n-Ecks gebildet werden, alle möglichen Perpendikeltransversalen, welche einer und derselben der vier als fest angenommenen Ecken zugehören: so schneiden sich die vier Perpendikeltransversalen, welche demselben Fünfeck zugehören, jedesmal in einem Punkte, und die dadurch bestimmten $n-4$ Schnittpunkte liegen auf der Perpendikeltransversale, welche in dem als fest angenommenen Viereck der gemeinschaftlichen Ecke zugehört.

Braunsberg, den 14. Mai 1862.

J. Tietz.