Vier und funfzig trigonometrische Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Die dem mathematischen Unterrichte zugewiesene Zeit (an unserm Gymnasium in der Regel drei Stunden wöchentlich) gestattet nicht immer das zur Befestigung der Theorie erforderliche mehrseitige Einüben einzelner Abschnitte. Zur Unterstützung des häuslichen Fleißes gebe ich meinen Schülern deßhalb eine Reihe trigonometrischer Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck in die Hand. Sie finden darin eine Ergänzung unserer gemeinschaftlichen Arbeiten und die Anleitung zum Lösen anderer Aufgaben dieser Art.

Von den mannigfaltigen Stücken, die zur Lösung solcher Aufgaben gegeben sein können, habe ich die einzelnen Seiten, ihre Summen und Differenzen, die beiden spitzen Winkel, den Inhalt, den Radius des innern Kreises, die zur Hypotenuse gehörende Höhe und deren gegenseitige Verbindungen gewählt. — Alle Aufgaben, mit Ausnahme der vier auf höhere Gleichungen führenden (16, 17, 47 und 48), sind der bezweckten Uebung halber goniometrisch entwickelt, selbst da, wo die algebraische Behandlung auf kürzerem Wege ein Resultat liefert. In den Anmerkungen habe ich die zur algebraischen Lösung erforderlichen Gleichungen angegeben.

§. 1.

Aus der Hypotenuse c, den beiden Katheten a und b, den diesen gegenüberliegenden Winkeln α und β und dem Inhalte F ergeben sich folgende Aufgaben:

1., c, a; c, b. — 2., a, b. —3., c, α (β). — 4., a, α (β); b, β, (α). — 5., c, F. — 6., a, F; b, F. — 7., α (β), F.

Aufgabe 1., Gegeben I., c, II., a.

1., $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. — 2., $\sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)} =$

$= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{[(c+a)\,(c-a)]}$. — 3., $b =$

$= c\sin\beta = \sqrt{[(c+a)\,(c-a)]}$. — 4., $F = \frac{1}{2}ab =$

$= \frac{1}{2}a\sqrt{[(c+a)\,(c-a)]}$.

Anmerk. Aus $c^2 = a^2 + b^2$ hat man unmittelbar b und daraus $\sin\beta$ und F.

Aufgabe 2., Gegeben I., a, II., b.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$ folgt

1., $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$. — 2., $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a}$. — Ferner ist

3., $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. — 4., $F = \frac{1}{2}ab$.

Aufgabe 3., Gegeben I., c, II., α (β).

1., $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$. — 2., $b = c\cos\alpha = c\sin\beta$. —

3., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\beta$.

Aufgabe 4., Gegeben I., a, II., α (β).

1., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta}$. — 2., $b = c\cos\alpha = a\,\mathrm{cotg}\,\alpha = a\,\mathrm{tg}\,\beta$. — 3., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{tg}\,\beta$. —

Aufgabe 5., Gegeben I., c, II., F.

Aus $F = \frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$ folgt

1., $\sin 2\alpha = \frac{4F}{c^2}$. — Um Ausdrücke für die übrigen Größen zu erhalten, setze man $\frac{2F}{c^2} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\sin\alpha = \frac{1}{c}\sqrt{\left[\frac{1}{2}c^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2+2F\right)\left(\frac{1}{2}c^2-2F\right)}\right]}$; und hieraus folgt $\sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{(1-\sin\alpha^2)} = \frac{1}{c}\sqrt{\left[\frac{1}{2}c^2 \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2+2F\right)\left(\frac{1}{2}c^2-2F\right)}\right]}$. Es ist also

2., $a = c\sin\alpha = \sqrt{\left[\frac{1}{2}c^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2+2F\right)\left(\frac{1}{2}c^2-2F\right)}\right]}$.

3., $b = c\sin\beta = \sqrt{\left[\frac{1}{2}c^2 \mp \sqrt{\left(\frac{1}{2}c^2+2F\right)\left(\frac{1}{2}c^2-2F\right)}\right]}$.

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $c^2 \geqq 4F$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \leqq 1$, und a und b sind reell. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 = c^2 \geqq 2ab$, d. i. $c^2 \geqq 4F$. — Ist $c^2 = 4F$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $a = b = c\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{(2F)}$. —

Für $c^2 > 4F$ sind, da $\frac{1}{2} c^2 > \sqrt{(\frac{1}{4} c^4 - 4F^2)}$ ist, beide Wurzeln zulässig; und weil beide Winkel und Katheten in Bezug auf c und F verwechselt werden können, so folgt, daß, während die eine für $\sin\alpha$ und a genommen wird, die andere für $\sin\beta$ und b gilt.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $F = \frac{1}{2} ab$ kann man auch zunächst a und b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 6., Gegeben I., a, II., F.

Aus $F = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ac \cos\alpha$ und $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta}$ folgt $F = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{cotg}\alpha$ und $F = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg}\beta$. Also ist

1., $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2}{2F}$. — 2., $\operatorname{tg}\beta = \frac{2F}{a^2}$. — Ferner ist 3., $b = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2F}{a}$. — 4., $c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{1}{a} \sqrt{(a^4 + 4F^2)}$.

Anmerk. Aus $F = \frac{1}{2} ab$ folgt unmittelbar der Werth für b, woraus die übrigen Größen sich ergeben.

Aufgabe 7., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., F.

Aus $F = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$ folgt

1., $c = 2\sqrt{\frac{F}{\sin 2\alpha}} = 2\sqrt{\frac{F}{\sin 2\beta}}$. — Ferner ergiebt sich aus $F = \frac{1}{2} ac\cos\alpha$ 2., $a = \frac{2F}{c\cos\alpha} = \sqrt{(2F \operatorname{tg}\alpha)} = \sqrt{(2F \operatorname{cotg}\beta)}$; und aus $F = \frac{1}{2} cb \sin\alpha$ 3., $b = \frac{2F}{c\sin\alpha} = \sqrt{(2F \operatorname{cotg}\alpha)} = \sqrt{(2F \operatorname{tg}\beta)}$.

§. 2.

Verbindet man die Summen oder Differenzen zweier Seiten mit den einzelnen Seiten, dann erhält man, weil in a, c + a und ähnlichen Verbindungen unmittelbar zwei Seiten enthalten sind, folgende neue Aufgaben:

8., a, c + b; b, c + a. — 9., a, c — b; b, c — a. — 10., c, a + b. — 11., c, a — b; c, b — a.

Aufgabe 8., Gegeben I., a. II., c + b = s.

Aus $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, also $1 + \cos\alpha = \frac{c+b}{c} = \frac{s}{c}$, und $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ folgt $\frac{a}{s} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha^2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Also ist 1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{s}$. — Da ferner $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}(45^0 - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\operatorname{tg}45^0 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}45^0 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ ist, so erhält man 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{s-a}{s+a}$. Aus $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sec\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}}$ ergiebt sich $\sin\alpha = \frac{2as}{s^2+a^2}$, woraus 3., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{s^2+a^2}{2s}$ folgt. — Ferner ist 4., $b = s - c = \frac{(s+a)(s-a)}{2s}$. — 5., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{a(s+a)(s-a)}{4s}$.

Anmerk. Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $c + b = s$ kann man auch zuerst c und b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 9., Gegeben I., a, II., c — b = d.

Nach Analogie der Aufgabe 8., erhält man $\frac{d}{a} =$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha^2}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Es ist also 1., $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{a}$. — Daraus wird wie in der Aufgabe 8., abgeleitet 2., $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a - d}{a + d}$. — Ferner folgt wie dort $\sin \alpha = \frac{2ad}{a^2 + d^2}$. Also ist 3., $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a^2 + d^2}{2d}$. — 4., $b = c - d = \frac{(a + d)(a - d)}{2d}$.

5., $F = \frac{1}{2} ab = \frac{a(a + d)(a - d)}{4d}$.

Anmerk. Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $c - b = d$ kann man auch zuerst c und b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 10., Gegeben I., c, II., a + b = s.

Aus $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin \alpha + \cos \alpha =$ $= \frac{a + b}{c} = \frac{s}{c}$, woraus sich $\sin \alpha^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha^2 =$ $= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha = \frac{s^2}{c^2}$, also

1., $\sin 2\alpha = \frac{s^2}{c^2} - 1 = \frac{(s + c)(s - c)}{c^2}$ ergiebt. —

Wie in der Aufg. 5., folgt ferner $\sin \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c^2 \pm \sqrt{[c^4 - (s^2 - c^2)^2]}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{c^2 \pm \sqrt{[(c^2 + s^2 - c^2)(c^2 - s^2 + c^2)]}}{2c^2}} = \sqrt{\frac{2c^2 \pm 2s \sqrt{(2c^2 - s^2)}}{4c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{s^2 \pm 2s \sqrt{(2c^2 - s^2)} + 2c^2 - s^2}{4c^2}} = \frac{s \pm \sqrt{(2c^2 - s^2)}}{2c}$$

Denselben Ausdruck erhält man durch Anwendung der Reductionsformel

$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich $\sin\beta = \frac{s \mp \sqrt{(2c^2 - s^2)}}{2c}$. Es ist daher 2., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[s \pm \sqrt{(2c^2 - s^2)}\right]$. — 3., $b = c\sin\beta = \frac{1}{2}\left[s \mp \sqrt{(2c^2 - s^2)}\right]$. — 4., $F = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{4}(s + c)(s - c)$.

Anmerk. 1. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $2c^2 \geqq s^2$ sei; denn dann sind a und b reell und wegen $c^2 \geqq s^2 - c^2 = (s + c)(s - c)$ ist $\sin 2\alpha \leqq 1$. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, also $s^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqq 2a^2 + 2b^2 \leqq 2c^2$. — Ist $2c^2 = s^2$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $a = b = \frac{1}{2}s = c\sqrt{\frac{1}{2}}$, $F = \frac{1}{8}s^2 = \frac{1}{4}c^2$. — Für $2c^2 > s^2$ sind beide Wurzeln zulässig, weil $s > c$, also $2s^2 > 2c^2$, $s^2 > 2c^2 - s^2$, $s > \sqrt{(2c^2 - s^2)}$ ist.

Anmerk. 2., Aus $\frac{s}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sin 45^\circ \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ folgt $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}}$.

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $a + b = s$ kann man auch zunächst a und b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 11., Gegeben I., c, II., a — b = d.

Nach Analogie der Aufgabe 10., ergiebt sich $\sin\alpha - \cos\alpha =$ $= \frac{d}{c}$, also $\frac{d^2}{c^2} = 1 - \sin 2\alpha$. Folglich ist

1., $\sin 2\alpha = 1 - \frac{d^2}{c^2} = \frac{(c+d)(c-d)}{c^2}$. — Hieraus folgt wie dort $\sin\alpha = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c^2 \pm \sqrt{[c^4 - (c^2-d^2)^2]}}{2}}$ und $\sin\beta =$ $= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c^2 \mp \sqrt{[c^4 - (c^2-d^2)^2]}}{2}}$. In sofern aber d positiv angenommen, also $\sin\alpha > \sin\beta$ ist, gilt für $\sin\alpha$ nur das positive, für $\sin\beta$ nur das negative Zeichen. — Für $-d$ wäre es die Aufgabe c, b — a, so wie für $d = 0$ die Aufgabe: Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus c zu berechnen. Beide Fälle sind, weil sie sich aus diesem leicht ergeben, hier, wie bei den nachfolgenden ähnlichen Aufgaben, nicht berücksichtigt. — Es ist daher $\sin\alpha = \frac{d + \sqrt{(2c^2 - d^2)}}{2c}$ und $\sin\beta = \frac{-d + \sqrt{(2c^2 - d^2)}}{2c}$. — Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $d < \sqrt{(2c^2 - d^2)}$, d. i. $d < c$ sei, wie es offenbar der Natur jedes Dreiecks entspricht. Daher darf, wenn man $\sin\beta$ aus $\sin\beta^2 = 1 - \sin\alpha^2 =$ $= \frac{d^2 - 2d\sqrt{(2c^2-d^2)} + 2c^2 - d^2}{4c^2}$ entwickelt, die Wurzel nicht $=$ $= \frac{d - \sqrt{(2c^2 - d^2)}}{2c}$ gesetzt werden. Weil ferner $d^2 < 2c^2$ ist, so sind diese Ausdrücke reell; und aus $c^2 > c^2 - d^2 > (c+d)(c-d)$ folgt $\sin 2\alpha < 1$. — Es ist daher 2., $a = c\sin\alpha =$ $= \frac{1}{2}\left[d + \sqrt{(2c^2 - d^2)}\right]$. — 3., $b = c\sin\beta = \frac{1}{2}\left[-d + \sqrt{(2c^2 - d^2)}\right]$. — 4. $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(c+d)(c-d)$.

Anmerk. Aus $\frac{d}{c} = \sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\beta =$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ folgt } \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{d}{c\sqrt{2}}.$$

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $a - b = d$ kann man auch zunächst a und b und dann die übrigen Größen finden.

§. 3.

Aus der Verbindung der Summen oder Differenzen zweier Seiten mit einem spitzen Winkel ergeben sich folgende Aufgaben:
12., $\alpha(\beta), c+a$; $\beta(\alpha), c+b$. — 13., $\alpha(\beta), c-a$; $\beta(\alpha), c-b$. — 14., $\alpha(\beta), a+b$. — 15., $\alpha(\beta), a-b$; $\beta(\alpha), b-a$.

Aufgabe 12., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., $c + a = s$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, also $1 + \sin\alpha = \frac{c+a}{c} = \frac{s}{c}$, und weil $1+\sin\alpha = \sin 90^\circ + \sin\alpha = 2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\cos\frac{\beta}{2}^2$ ist, folgt

$$1.,\ c = \frac{s}{1+\sin\alpha} = \frac{s}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{s}{2\cos\frac{\beta}{2}^2}.$$

$$2.,\ a = c\sin\alpha = \frac{s\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{s\cos\beta}{2\cos\frac{\beta}{2}^2} = \frac{s\operatorname{cotg}\beta\sin\beta}{2\cos\frac{\beta}{2}^2} =$$

$$= s\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = s\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = s\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$3.,\ b = c\sin\beta = \frac{2s\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}^2} = s\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = s\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$= s \operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$. — 4., $F = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,s^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}\,s^2 \operatorname{cotg}\beta \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}^2$.

Aufgabe 13., Gegeben I., $\alpha\,(\beta)$, II., $c - a = d$.

Nach Analogie der Aufg. 12., erhält man $\frac{d}{c} = 1 - \sin\alpha =$

$= \sin 90^0 - \sin\alpha = 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\sin\frac{\beta^2}{2}$. Also

1., $c = \frac{d}{1 - \sin\alpha} = \frac{d}{2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{d}{2\sin\frac{\beta}{2}^2}$

2., $a = c\cos\beta = \frac{d\cos\beta}{2\sin\frac{\beta^2}{2}} = \frac{d\operatorname{cotg}\beta\sin\beta}{2\sin\frac{\beta^2}{2}} = d\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} =$

$= d\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = d\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$. — 3., $b =$

$= c\sin\beta = \frac{d\sin\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}^2} = d\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = d\operatorname{cotg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= d\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$. — 4., $F = \frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,d^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}\,d^2\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}^2$.

Aufgabe 14., Gegeben I., $\alpha\,(\beta)$, II., $a + b = s$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt $\frac{a+b}{c} = \frac{s}{c} =$

$= \sin\alpha + \sin\beta = \sin(90^0 - \beta) + \sin\beta = 2\sin 45^0\cos(45^0 - \beta) =$

$= \sin(45^0 + \beta)\sqrt{2} = \sin(45^0 + \alpha)\sqrt{2}$. Also ist

1., $c = \frac{s}{\sin(45^0 + \alpha)\sqrt{2}} = \frac{s}{\sin(45^0 + \beta)\sqrt{2}}$. — 2., $a =$

$= c \sin\alpha = \frac{s \sin\alpha}{\sin(45^0+\alpha)\sqrt{2}} = \frac{s\cos\beta}{\sin(45^0+\beta)\sqrt{2}}$. —

3., $b = c\cos\alpha = \frac{s\cos\alpha}{\sin(45^0+\alpha)\sqrt{2}} = \frac{s\sin\beta}{\sin(45^0+\beta)\sqrt{2}}$. —

4., $F = \frac{1}{2}\,ab = \frac{s^2 \sin\alpha\cos\alpha}{4\sin(45^0+\alpha)^2} = \frac{s^2\sin 2\alpha}{8\sin(45^0+\alpha)^2} = \frac{s^2\sin 2\beta}{8\sin(45^0+\beta)^2}$.

Anmerk. Aus $\frac{s}{c} = \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ folgt $c = \frac{s}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{2}}$, woraus ebenfalls die andern Größen abgeleitet werden können.

Aufgabe 15., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., $a - b = d$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt $\frac{a-b}{c} = \frac{d}{c} = \sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha - \sin(90^0-\alpha) = 2\cos 45^0 \sin(\alpha - 45^0) = \sin(\alpha-45^0)\sqrt{2} = \cos(45^0+\beta)\sqrt{2}$. Also ist

1., $c = \frac{d}{\sin(\alpha-45^0)\sqrt{2}} = \frac{d}{\cos(45^0+\beta)\sqrt{2}}$. — 2., $a = c\sin\alpha = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha-45^0)\sqrt{2}} = \frac{d\cos\beta}{\cos(45^0+\beta)\sqrt{2}}$. —

3., $b = c\cos\alpha = \frac{d\cos\alpha}{\sin(\alpha-45^0)\sqrt{2}} = \frac{d\sin\beta}{\cos(45^0+\beta)\sqrt{2}}$. —

4., $F = \frac{1}{2}\,ab = \frac{d^2\sin\alpha\cos\alpha}{4\sin(\alpha-45^0)^2} = \frac{d^2\sin 2\alpha}{8\sin(\alpha-45^0)^2} = \frac{d^2\sin 2\beta}{8\cos(45^0+\beta)^2}$.

Anmerk. Wie in der Aufgabe 14., Anmerk. erhält man auch $c = \frac{d}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{2}}$.

§. 4.

Verbindet man die Summen oder Differenzen zweier Seiten mit dem Inhalte, dann erhält man folgende Aufgaben:

16., F, $c + a$; F, $c + b$. — 17., F, $c - a$; F, $c - b$. — 18., F, $a + b$. — 19., F, $a - b$; F, $b - a$.

Aufgabe 16., Gegeben I., F, II., $c + a = s$.

Aus $c^2 - a^2 = b^2$ und $c + a = s$ folgt $\frac{c^2 - a^2}{c + a} = c - a = \frac{b^2}{s}$; hieraus und aus $c + a = s$ ferner $a = \frac{s^2 - b^2}{2s}$. Daher ist $F = \frac{1}{2}\, ab = \frac{bs^2 - b^3}{4s}$, d. i.

$$b^3 = s^2 b - 4Fs.$$

Die Möglichkeit dieser Aufgabe verlangt, daß $\frac{s^4}{27} \geqq 4F^2$, d. i. $\frac{s^2}{2F} \geqq 3\sqrt{3}$ sei. Ist nehmlich $\frac{s^2}{2F} < 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung nur Eine reelle, und zwar wegen $- 4Fs$ eine negative, also für diese Aufgabe unbrauchbare Wurzel. [1])

a., Ist $\frac{s^2}{2F} = 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung zwei gleiche, und zwar wegen $-4Fs$ positive Wurzeln. Die dritte Wurzel ist negativ, also für diese Aufgabe unbrauchbar. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $c = 2a$ ist; denn dann ist $s = c + a = 3a$,

---

[1]) Für das rechtwinklige Dreieck ist $s = c + a = c + c \sin\alpha = c(1 + \sin\alpha)$ und $2F = ab = c^2 \sin\alpha \cos\alpha$, also $\frac{s^2}{2F} = \frac{(c+a)^2}{ab} = \frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\sin\alpha \cos\alpha}$. Diese Function wird für $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ein Minimum. Für $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ aber ist $\frac{s^2}{2F} = \frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\sin\alpha \cos\alpha} = 3\sqrt{3}$. Also wird $\frac{s^2}{2F}$ für die andern Werthe von $\sin\alpha$ größer als $3\sqrt{3}$.

$s^2 = 9a^2$, $b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = a\sqrt{3}$; also wird $2F = ab =$ $= a^2\sqrt{3}$, folglich $\frac{s^2}{2F} = \frac{9a^2}{a^2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. — Es ist also für diesen Fall $a = \frac{1}{3}s = \sqrt{\left(\frac{2}{3}F\sqrt{3}\right)}$, $c = 2a = \frac{2}{3}s =$ $= 2\sqrt{\left(\frac{2}{3}F\sqrt{3}\right)}$, $b = a\sqrt{3} = \frac{1}{3}s\sqrt{3} = \sqrt{(2F\sqrt{3})}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

b., Ist $\frac{s^2}{2F} > 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von welchen wegen $-4Fs$ zwei positiv sind, die dritte negativ, also für diese Aufgabe unbrauchbar ist. Setzt man

$$\frac{6F}{s^2}\sqrt{3} = \sin\psi, \text{ dann wird } b = \begin{cases} \frac{2}{3}s\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{3} \\ \frac{2}{3}s\sin\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right)\sqrt{3}. \end{cases}$$

Unter dieser Bedingung erhält man also zwei Dreiecke.*) Die übrigen Größen ergeben sich unmittelbar aus Aufgabe 6., oder 8.,

Aufgabe 17., Gegeben I., F., II., $c - a = d$.

Aus $c^2 - a^2 = b^2$ und $c - a = d$ folgt $\frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a =$ $= \frac{b^2}{d}$; hieraus und aus $c - a = d$ ferner $a = \frac{b^2 - d^2}{2d}$.

Daher ist $F = \frac{1}{2}ab = \frac{b^3 - bd^2}{4d}$, d. i.

$$b^3 = d^2b + 4dF.$$

---

*) Kroll findet in seinen „Aufgaben über Dreiecke rc., Halle 1826" S. 23 bei dem von ihm gewählten Beispiele (allgemein hat er die Aufgabe nicht gelöst) irrthümlicherweise nur Eine reelle Wurzel, also nur Ein Dreieck.

Die Möglichkeit dieser Aufgabe gestattet, daß $\frac{d^4}{27} \overset{=}{\gtrless} 4F^2$, d. i. $\frac{d^2}{2F} \overset{=}{\gtrless} 3\sqrt{3}$ sei. [2])

a., Ist $\frac{d^2}{2F} = 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung zwei gleiche, und zwar wegen $+ 4dF$ negative, also für diese Aufgabe unbrauchbare Wurzeln. Die dritte Wurzel ist positiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $c = 7a$ ist; denn dann ist $c - a = d = 6a$, $d^2 = 36a^2$, $b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = 4a\sqrt{3}$; also wird $2F = ab =$ $= 4a^2\sqrt{3}$, folglich $\frac{d^2}{2F} = \frac{36a^2}{4a^2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. — Es ist also für diesen Fall $a = \frac{1}{6}\,d = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\,F\sqrt{3}\right)}$, $c = 7a = \frac{7}{6}\,d =$ $= \frac{7}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\,F\sqrt{3}\right)}$, $b = 4a\sqrt{3} = \frac{2}{3}\,d\sqrt{3} = 2\sqrt{(2F\sqrt{3})}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{7}$, $\alpha = 8^\circ\,12'\,47''$, $\beta = 81^\circ\,47'\,13''$.

---

[2]) Für das rechtwinklige Dreieck ist $d = c - a = c - c\sin\alpha =$ $= c(1 - \sin\alpha)$ und $2F = ab = c^2 \sin\alpha\cos\alpha$, also $\frac{d^2}{2F} =$ $= \frac{(c-a)^2}{ab} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Diese Function hat weder ein Maximum noch ein Minimum. Von den vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung $\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}} = 3\sqrt{3}$, nehmlich $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{7}$ ist aber die letzte für diese Aufgabe anwendbar. Ist demnach $\sin\alpha = \frac{1}{7}$, also $\cos\alpha = \frac{4}{7}\sqrt{3}$, dann wird $\frac{d^2}{2F} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = 3\sqrt{3}$, während für die andern Werthe von $\sin\alpha$ der Ausdruck $\frac{d^2}{2F} \gtrless 3\sqrt{3}$ ist.

b., Ist $\frac{d^2}{2F} > 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von welchen wegen $+ 4dF$ zwei negativ, also für diese Aufgabe unbrauchbar sind. Die dritte Wurzel ist positiv. Setzt man $\frac{6F}{d^2}\sqrt{3} = \sin\psi$, dann wird $b = \frac{2}{3} d \sin(60^\circ + \frac{\psi}{3})\sqrt{3}$. Die übrigen Größen ergeben sich unmittelbar aus Aufgabe 6., oder 9.

c., Ist $\frac{d^2}{2F} < 3\sqrt{3}$, dann hat die Gleichung eine reelle, und zwar wegen $+ 4dF$ positive, und zwei imaginäre Wurzeln. Setzt man $\frac{d^2}{6F\sqrt{3}} = \sin\varphi$ und $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi$, dann wird $b = \frac{2d}{\sin 2\psi\sqrt{3}}$. Die übrigen Größen ergeben sich unmittelbar aus der Aufgabe 6., oder 9.,

Aufgabe 18., Gegeben I., F, II., $a + b = s$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = = \frac{a+b}{c} = \frac{s}{c}$. Folglich ist $a = \frac{s\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ und $b = \frac{s\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. Daher wird $F = \frac{1}{2}ab = \frac{s^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$ oder $\frac{2F}{s^2} = = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4F}{s^2 - 4F}$ folgt. Wie in der Aufgabe 10., erhält man ferner $\sin\alpha = \frac{s \pm \sqrt{(s^2 - 8F)}}{2\sqrt{(s^2 - 4F)}}$ und $\sin\beta = \frac{s \mp \sqrt{(s^2 - 8F)}}{2\sqrt{(s^2 - 4F)}}$. Hieraus folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{\sqrt{(s^2 - 4F)}}$. Also ist 2., $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sqrt{(s^2 - 4F)}$. — 3., $a = c\sin\alpha = = \frac{1}{2}\left[s \pm \sqrt{(s^2 - 8F)}\right]$. — 4., $b = c\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[s \mp \sqrt{(s^2 - 8F)}\right]$.

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $s^2 \overline{\overline{>}} 8F$ sei; denn dann sind a und b reell, und wegen $s^2 - 4F \overline{\overline{>}} 4F$ wird $\sin 2\alpha \overline{\overline{<}} 1$. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 \overline{\overline{>}} 2ab$, also $a^2 + 2ab + b^2 = s^2 \overline{\overline{>}} 4ab \overline{\overline{>}} 8F$. — Ist $s^2 = 8F$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $c = s\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{F}$, $a = b = \frac{1}{2}s = \sqrt{2F}$.

Anmerk. 2., Aus $a + b = s$ und $F = \frac{1}{2}ab$ kann man auch zuerst a und b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 19., Gegeben I., F, II., $a - b = d$.

Nach Analogie der Aufgabe 18., erhält man $F = \frac{d^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}$, oder $\frac{2F}{d^2} = \frac{{}^1/_2 \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4F}{d^2 + 4F}$ folgt. Hieraus ergiebt sich wie in der Aufgabe 11., $\sin\alpha = \frac{d + \sqrt{(d^2 + 8F)}}{2\sqrt{(d^2 + 4F)}}$ und $\sin\beta = \frac{-d + \sqrt{(d^2 + 8F)}}{2\sqrt{(d^2 + 4F)}}$. Also ist $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\beta = \frac{d}{\sqrt{(d^2 + 4F)}}$. Hieraus folgt 2., $c = \frac{d}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sqrt{(d^2 + 4F)}$. — 3., $a = c \sin\alpha = \frac{1}{2}[d + \sqrt{(d^2 + 8F)}]$. — 4., $b = c \cos\alpha = \frac{1}{2}[-d + \sqrt{(d^2 + 8F)}]$.

Anmerk. Aus $a - b = d$ und $F = \frac{1}{2} ab$ kann man auch zuerst a und b und dann die übrigen Größen finden.

§. 5.

Die Verbindungen der sieben Summen und Differenzen zweier Seiten unter einander geben ein und zwanzig Combinationen. Unter diesen ist $a - b$, $b - a$ eine unmögliche Aufgabe; $c + a$, $c - a$ und die ähnlichen Verbindungen enthalten zwei einzelne Seiten unmittelbar. Daher bleiben folgende neue Aufgaben:

20., $c + b$, $c + a$. — 21., $c + b$, $c - a$; $c + a$, $c - b$. — 22., $c - b$, $c - a$. — 23., $c + b$, $a + b$; $c + a$, $a + b$. — 24., $c + b$, $a - b$; $c + b$, $b - a$; $c + a$, $b - a$; $c + a$, $a - b$. — 25., $c - a$, $a + b$; $c - b$, $a + b$. — 26., $c - a$, $a - b$; $c - a$, $b - a$; $c - b$, $b - a$; $c - b$, $a - b$.

Aufgabe 20., Gegeben I., $c + b = S$, II., $c + a = s$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $1 + \sin\alpha = \frac{c+a}{c} = \frac{s}{c}$ und $1 + \cos\alpha = \frac{c+b}{c} = \frac{S}{c}$ und hieraus $\frac{s}{S} =$

$$= \frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha^2}{2}-\sin\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha^2}{2}}{2\cos\frac{\alpha^2}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\cos\frac{\alpha^2}{2}},\ \sqrt{\frac{2s}{S}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1.$$

Also ist 1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{\frac{2s}{S}}$. — Nach der Aufgabe 8., ist 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = -1 + \sqrt{\frac{2S}{s}}$. — Leitet man $\sin\alpha$ nach der in derselben Aufgabe entwickelten Formel $\sin\alpha =$

$= \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha^2}{2}}$ ab und setzt vorläufig $-1 + \sqrt{\frac{2s}{S}} = A$, dann erhält man $1 + \sin\alpha = 1 + \frac{2A}{1+A^2} = \frac{(1+A)^2}{1+A^2} = \frac{s}{c}$, woraus 3., $c = \frac{s(1+A^2)}{(1+A)^2} = S + s - \sqrt{(2Ss)}$ folgt. — 4., $a = s - c = -S + \sqrt{(2Ss)}$. — 5., $b = S - c = -s + \sqrt{(2Ss)}$. — 6., $F = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2}\left[3Ss - (S+s)\sqrt{(2Ss)}\right]$.

Anmerk. 1., Weil $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ positiv und < 1 sein muß, so hängt die Möglichkeit der Aufgabe davon ab, daß $\sqrt{\frac{2s}{S}} > 1$ und < 2, also $2s > S$ und $2S > s$ sei, welche Bedingungen auch der Natur jedes Dreiecks entsprechen, nehmlich $c + 2a > b$ und $c + 2b > a$.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $S = c + b$ und $s = c + a$ ergiebt sich $c = S + s - \sqrt{(2Ss)}$, wobei die positive Wurzel nicht genommen werden darf, weil $c < S + s$ ist. Mit Benutzung des Werthes für c lassen sich dann die übrigen Größen ableiten.

Bei den folgenden sechs Aufgaben läßt sich ein diesem ähnliches Verfahren anwenden, so wie es großentheils in den zusammenhängenden Aufgaben der frühern Paragraphe geschehen ist. Man kann dergleichen Aufgaben aber mit Rücksicht auf die Zeichenveränderung und Verwechselung der sich entsprechenden Data auch von einander ableiten, was bei den folgenden geschehen soll.

Aufgabe 21., Gegeben I., $c + b = S$, II., $c - a = d$.

Wegen des negativen Werthes von a setze man in die Ausdrücke der Aufgabe 20., d für s und nehme die Werthe von a und F negativ. Dann wird

1., $c = d + S - \sqrt{(2dS)}$. — 2., $a = S - \sqrt{(2dS)}$. — 3., $b = -d + \sqrt{(2dS)}$. — 4., $F = \frac{1}{2}\left[-3dS + (d+S)\sqrt{(2dS)}\right]$.

Weil ferner s ($=c+a$) hier $d+2S-2\sqrt{(2dS)}$ ist, so wird 5., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$

$$=-1+\sqrt{\frac{2d+4S-4\sqrt{(2dS)}}{S}}=-1+\sqrt{\frac{4S^2-4S^2\sqrt{\frac{2d}{S}}+2dS}{S^2}}=$$

$=-1+\dfrac{2S-S\sqrt{\frac{2d}{S}}}{S}=1-\sqrt{\frac{2d}{S}}$. Diese Umwandlung kann, wie bei später folgenden ähnlichen Ausdrücken, auch mit Anwendung der in der Aufgabe 10., angeführten Reductionsformel geschehen. — Da ferner $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ ist, so wird 6., $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=-1+\sqrt{\frac{2S}{d}}$.

Anmerk. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S>2d$ sei, welche Bedingung auch der Natur jedes Dreiecks entspricht, nehmlich $b>c-2a$.

Aufgabe 22., Gegeben I., $c-b=D$, II., $c-a=d$.

Wegen der negativen Werthe von b und a setze man in die Ausdrücke der Aufgabe 20., D für S, d für s und nehme die Werthe für a und b negativ. Weil aber $c<a+b$, also $o>c-a-b$ oder $c>c-b+c-a>D+d$ ist, so kann nur die positive Wurzel gelten. Es ist also

1., $c=D+d+\sqrt{(2Dd)}$. — 2., $a=D+\sqrt{(2Dd)}$. — 3., $b=d+\sqrt{(2Dd)}$. *) — 4., $F=\frac{1}{2}\left[3Dd+(D+d)\sqrt{(2Dd)}\right]$. Weil ferner S ($=c+b$) hier in $D+2d+2\sqrt{(2Dd)}$, und

---

*) Setzt man $\sqrt{(2Dd)}=n$, dann ist $d=\frac{n^2}{2D}$. Nimmt man nun für D und n beliebige rationale Zahlen an, so wird auch d rational; also sind es auch die Werthe für c, a und b. Diese drei Formeln lassen sich daher zur Bildung von rechtwinkligen Dreiecken mit rationalen Seiten benutzen.

s ($= c + a$) in $2D + d + 2\sqrt{(2Dd)}$ übergeht, so wird $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 1:\left(1 + \sqrt{\frac{4D + 2d + 4\sqrt{(2Dd)}}{D + 2d + 2\sqrt{(2Dd)}}}\right)$. Es ist aber

$$\sqrt{\frac{4D + 2d + 4\sqrt{(2Dd)}}{D + 2d + 2\sqrt{(2Dd)}}} = \sqrt{\frac{4D^2 + 4D^2\sqrt{\frac{2d}{D}} + 2Dd}{D^2 + 2D^2\sqrt{\frac{2d}{D}} + 2Dd}} =$$

$$= \frac{2D + D\sqrt{\frac{2d}{D}}}{D + D\sqrt{\frac{2d}{D}}} = \frac{2 + \sqrt{\frac{2d}{D}}}{1 + \sqrt{\frac{2d}{D}}}.$$ Also wird 5., $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} =$

$$= 1:\left(1 + \frac{2 + \sqrt{\frac{2d}{D}}}{1 + \sqrt{\frac{2d}{D}}}\right) = 1 + \sqrt{\frac{2d}{D}}.$$ — Da ferner $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} =$

$$= \operatorname{cotg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{cotg} 45^0 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg} 45^0} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1}$$

ist, so ist 6., $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = 1 + \sqrt{\frac{2D}{d}}$.

Aufgabe 23., Gegeben I., $c + b = S$, II., $a + b = s$.

Aus $b = S - c$ und $a = s - b = s - S + c$ folgt $c + a = 2c + s - S$. Setzt man in den für c gefundenen Werth der Aufgabe 20., statt s den Ausdruck $2c + s - S$, so ergiebt sich $c = S + 2c - S + s - \sqrt{[2S(2c - S + s)]}$ oder $\sqrt{[2S(2c - S + s)]} = c + s$, woraus $c - (2S - s) = \pm\sqrt{[2S(S - s)]}$ folgt. Weil aber $2c + b - a > c$, also $2c + 2b - (a + b) = 2S - s > c$ ist, so darf nur die negative Wurzel genommen werden. Also ist

1., $c = 2S - s - \sqrt{[2S(S - s)]}$. — 2., $a = s - S + c = S - \sqrt{[2S(S - s)]}$. — 3., $b = S - c = -S + s + \sqrt{[2S(S - s)]}$.

4., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\left[-3S(S - s) + (2S - s)\sqrt{2S(S - s)}\right]$.

Weil ferner $c + b = S$, $c + a = 3S - s - 2\sqrt{[2S(S-s)]}$ ist, so wird 5., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{\frac{6S - 2s - 4\sqrt{[2S(S-s)]}}{S}} =$

$$= -1 + \sqrt{\frac{6S^2 - 2Ss - 4S\sqrt{[2S(S-s)]}}{S^2}} =$$

$$= -1 + \sqrt{\frac{4S^2 - 4S^2\sqrt{\frac{2(S-s)}{S}} + 2S(S-s)}{S^2}} =$$

$$= -1 + \frac{2S - S\sqrt{\frac{2(S-s)}{S}}}{S} = 1 - \sqrt{\frac{2(S-s)}{S}}. \text{ — } 6.,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = -1 + \sqrt{\frac{2S}{S-s}}.$$

Anmerk. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S > s$ und $S > 2(S-s)$, d. i. $S < 2s$ sei. Jenes entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks, bei welchem $c > a$, $c + b > a + b$, d. i. $S > s$ ist; und dieses liegt in der Beschaffenheit jedes Dreiecks, nehmlich $c < 2a + b$, also $c + b < 2a + 2b$, d. i. $S < 2s$.

Aufgabe 24., Gegeben I., $c + b = S$, II., $a - b = d$.

Weil $c + b + a - b = c + a = d + S$ ist, so hat man durch die Gleichungen $c + b = S$ und $c + a = d + S$ die Data der Aufgabe 20., Also wird

1., $c = d + 2S - \sqrt{[2S(d+S)]}$. — 2., $a = -S + \sqrt{[2S(d+S)]}$. — 3., $b = -d - S + \sqrt{[2S(d+S)]}$. — 4., $F = \frac{1}{2}\left[3S(d+S) - (d+2S)\sqrt{2S(d+S)}\right]$. — 5., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{\frac{2(d+S)}{S}}$. — 6., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -1 + \sqrt{\frac{2S}{d+S}}$.

Anmerk. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S > d$ sei, welche Bedingung auch der Natur jedes Dreiecks entspricht, nehmlich $c + b > a - b$, d. i. $S > d$.

Aufgabe 25., Gegeben I., $c - a = d$, II., $a + b = S$.

Weil $c - a + a + b = c + b = d + S$, also $b = d + S - c$, ferner $a = S - b = c - d$ ist, so hat man in den beiden Gleichungen $c + b = d + S$ und $c + a = 2c - d$ die Data der Aufgabe 20., Man setze daher in den dort für c gefundenen Ausdruck $d + S$ statt S und $2c - d$ statt s, dann ergiebt sich $c = d + S + 2c -$ $- d - \sqrt{[2(2c - d)(d + S)]}$ oder $\sqrt{[2(2c - d)(d + S)]} = c + S$, woraus $c - (2d + S) = \pm \sqrt{[2d(d + S)]}$ folgt. Weil aber $2d + S > c$ ist, so darf nur die negative Wurzel genommmen werden. Also ist

1., $c = 2d + S - \sqrt{[2d(d + S)]}$. — 2., $a = c - d = d + S -$ $- \sqrt{[2d(d + S)]}$. — 3., $b = d + S - c = - d + \sqrt{[2d(d + S)]}$. — 4., $F = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \left[-3d(d + S) + (2d + S)\sqrt{2d(d + S)} \right]$. Weil S in der Aufg. 20., hier in $d + S$ und s in $3d + 2S - \sqrt{[2d(d + S)]}$ übergeht, so wird 5., $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{\frac{6d + 4S - 4\sqrt{[2d(d + S)]}}{d + S}} =$

$$= -1 + \sqrt{\frac{4S(d + S) + 6d(d + S) - 4(d + S)\sqrt{[2d(d + S)]}}{(d + S)^2}} =$$

$$= -1 + \sqrt{\frac{4(d + S)^2 - 4(d + S)^2\sqrt{\frac{2d}{d + S}} + 2d(d + S)}{(d + S)^2}} =$$

$$= -1 + \frac{2(d + S) - (d + S)\sqrt{\frac{2d}{d + S}}}{d + S} = 1 - \sqrt{\frac{2d}{d + S}}. \text{ —}$$

$$6., \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = -1 + \sqrt{\frac{2(d + S)}{d}}.$$

Anmerk. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S > d$ sei, welche Bedingung auch der Natur jedes Dreiecks entspricht, nehmlich $a + b > c - a$, d. i. $S > d$.

Aufgabe 26., Gegeben I., $c - a = D$, II., $a - b = d$.

Aus $a = c - D$ und $b = a - d = c - D - d$ folgt $c + b =$ $= 2c - D - d$ und $c + a = 2c - D$. Setzt man in den für c gefundenen Werth der Aufgabe 20., $2c - D - d$ statt S und $2c - D$ statt s, dann wird $c = 2c - D - d + 2c - D - \sqrt{[2(2c-D)(2c-D-d)]}$, oder $\sqrt{[2(2c-D)(2c-D-d)]} = 3c - 2D - d$, woraus $c - (2D + d) = \pm\sqrt{[2D(D+d)]}$ folgt. Weil aber $c < a + b$, also $0 > c - a - b$, $c > 2c - 2a + a - b > 2D + d$ ist, so ist nur der positive Werth der Wurzel zulässig. Es wird also

1., $c = 2D + d + \sqrt{[2D(D+d)]}$. — 2., $a = c - D = D + d + \sqrt{[2D(D+d)]}$. — 3., $b = c - D - d = D + \sqrt{[2D(D+d)]}$. — 4., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\left[3D(D+d) + (2D+d)\sqrt{2D(D+d)}\right]$. — Weil ferner $S = c + b = 3D + d + 2\sqrt{[2D(D+d)]}$ und $s = c + a = 3D + 2d + 2\sqrt{[2D(D+d)]}$ ist, so wird $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} =$

$$= 1 : \left(-1 + \sqrt{\frac{6D + 2d + 4\sqrt{[2D(D+d)]}}{3D + 2d + 2\sqrt{[2D(D+d)]}}}\right).$$ Es ist aber

$$\sqrt{\frac{6D+2d+4\sqrt{[2D(D+d)]}}{3D+2d+2\sqrt{[2D(D+d)]}}} = \sqrt{\frac{4D^2+4D^2\sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}+2D(D+d)}{D^2+2D^2\sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}+2D(D+d)}} =$$

$$= \frac{2D + D\sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}}{D + D\sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}} = \frac{2 + \sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}}{1 + \sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}}.$$ Also ist 5., $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} =$

$$= 1 : \left(-1 + \frac{2 + \sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}}{1 + \sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}}\right) = 1 + \sqrt{\frac{2(D+d)}{D}}. \text{ —}$$

6., $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + 1}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - 1} = 1 + \sqrt{\frac{2D}{D+d}}.$$

§. 6.

Werden die Summen der drei Seiten und die Summen von je zweien weniger der dritten mit den einzelnen Seiten verbunden, dann erhält man Aufgaben, welche sich leicht auf die im §. 4. gelösten zurückführen lassen. Ist z. B. $c + a + b = S$ und a gegeben, dann hat man in $c + a + b - a = c + b = S - a$ und a die Data der Aufgabe 8., so daß nur $S - a$ für s in jene Ausdrücke gesetzt werden darf. Es ist also 1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{S-a}$. — 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{S-2a}{S}$. — 3., $c = \frac{(S-a)^2 + a^2}{2(S-a)}$. — 4., $b = \frac{S(S-2a)}{2(S-a)}$. — 5., $F = \frac{aS(S-2a)}{4(S-a)}$.

§. 7.

Aus der Verbindung der eben angeführten vier Größen mit einem spitzen Winkel ergeben sich folgende Aufgaben:

27., $\alpha(\beta)$, $c + a + b$. — 28., $\alpha(\beta)$, $c + b - a$; $\alpha(\beta)$ $c + a - b$. — 29., $\alpha(\beta)$, $a + b - c$.

Aufgabe 27., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., $c + a + b = S$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{a+b}{c}$ und $1 + \sin\alpha + \sin\beta = \frac{c+a+b}{c} = \frac{S}{c}$. Daher ist $\frac{1 + \sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{S}{a}$ und $\frac{1 + \sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta} = \frac{S}{b}$. Es ist aber $1 + \sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta = (1 + \cos\beta)\sin\alpha + (1 + \cos\alpha)\sin\beta =$

$$= 4\cos\frac{\beta^2}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 4\cos\frac{\alpha^2}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Also ist 1., $c = \frac{S}{1 + \sin\alpha + \sin\beta} = \frac{S\sqrt{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= \frac{S\sqrt{2}}{4\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}. \text{ — 2., } a = c\sin\alpha = \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{S\cos\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{2}}. \text{ — 3., } b = c\sin\beta = \frac{S\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{S\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}}. \text{ 4., } F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}S^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}S^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right).$$

Aufgabe 28., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., $c + b - a = s$.

Nach Analogie der Aufgabe 27., ist $1 + \sin\beta - \sin\alpha =$
$= \frac{c + b - a}{c} = \frac{s}{c}$, $\frac{1 + \sin\beta - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{s}{a}$, $\frac{1 + \sin\beta - \sin\alpha}{\sin\beta} =$
$= \frac{s}{b}$ und $1 + \sin\beta - \sin\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} =$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Folglich wird

$$1., \ c = \frac{s}{1 + \sin\beta - \sin\alpha} = \frac{s\sqrt{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{s\sqrt{2}}{4\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}. - 2., \ a = c\sin\alpha = \frac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{s\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{2}}. - 3., \ b = c\sin\beta = \frac{s\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{s\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}}. - 4., \ F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}s^2\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}s^2\cot g\frac{\beta}{2}\cot g\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right).$$

Aufgabe 29., Gegeben I., α (β), II., $a + b - c = s$.

Nach Analogie der Aufgabe 27., ist $\sin\alpha + \sin\beta - 1 =$

$$= \frac{a + b - c}{c} = \frac{s}{c}, \ \frac{\sin\alpha + \sin\beta - 1}{\sin\alpha} = \frac{s}{a}, \ \frac{\sin\alpha + \sin\beta - 1}{\sin\beta} =$$

$= \frac{s}{b}$ und $\sin\alpha + \sin\beta - 1 = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} =$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Also wird $1., \ c = \frac{s}{\sin\alpha + \sin\beta - 1} = \frac{s\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= \frac{s\sqrt{2}}{4\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}. - 2., \ a = c\sin\alpha = \frac{s\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{s \sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2} \sqrt{2}}. \text{ — } 3., \; b = c \sin\beta = \frac{s \cos \frac{\beta}{2}}{\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{s \sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{2}}. \text{ — } 4., \; F = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{4} s^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} s^2 \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right).$$

§. 8.

Aus der Verbindung dieser vier Größen mit dem Inhalte entstehen die Aufgaben

30., $F, c+a+b$. — 31., $F, c+b-a$; $F, c+a-b$. — 32., $F, a+b-c$.

Aufgabe 30., Gegeben I., F., II., $c + a + b = S$.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c}$ und $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{c+a+b}{c} = \frac{S}{c}$. Also ist $\frac{S}{a} = \frac{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $\frac{S}{b} = \frac{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}$. Da ferner $2F = ab$ ist, so erhält man $\frac{S^2}{2F} = \frac{(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha \cos\alpha} =$
$= \frac{[1 + \sqrt{(1 + \sin 2\alpha)}]^2}{{}^1/_2 \sin 2\alpha}$, oder $\frac{S^2}{4F} = \frac{1 + 2\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + 1 + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$
$= \frac{2 + 2\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)}}{\sin 2\alpha} + 1$, also $\frac{S^2 - 4F}{8F} = \frac{1 + \sqrt{(1 + \sin 2\alpha)}}{\sin 2\alpha}$, woraus 1., $\sin 2\alpha = \frac{16FS^2}{(S^2 - 4F)^2}$ folgt. — Hieraus ergiebt sich wie in der Aufgabe 10., $\sin\alpha = \frac{S^2 + 4F \pm \sqrt{[(S^2 - 4F)^2 - 16FS^2]}}{2(S^2 - 4F)}$ und $\sin\beta = \frac{S^2 + 4F \mp \sqrt{[(S^2 - 4F)^2 - 16FS^2]}}{2(S^2 - 4F)}$. Da ferner $1 +$

$$+ \sin\alpha + \cos\alpha = 1 + \sin\alpha + \sin\beta = 1 + \frac{S^2+4F}{S^2-4F} = \frac{2S^2}{S^2-4F}$$

ist, so wird 2., $c = \dfrac{S}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{S^2-4F}{2S}$. —

3., $a = c\sin\alpha = \dfrac{S^2+4F \pm \sqrt{[(S^2-4F)^2-16FS^2]}}{4S}$. —

4., $b = c\cos\alpha = \dfrac{S^2+4F \mp \sqrt{[(S^2-4F)^2-16FS^2]}}{4S}$. —

Setzt man $\dfrac{4S\sqrt{(2F)}}{S^2+4F} = \sin\varphi$, dann wird $\left.\begin{array}{l} a \\ \\ b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für} + \\ = \\ \text{für} - \end{array} \left\{\begin{array}{l} \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \end{array}\right.$

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S^2 > 4F$ sei, welches offenbar der Natur jedes Dreiecks entspricht. Ferner muß $(S^2-4F)^2 \overline{\overline{>}} 16FS^2$ sein; denn dann ist $\sin\alpha \overline{\overline{<}} 1$, und a und b sind reell. Weil in diesem Falle auch $S^4 + 8FS^2 + 16F^2 \overline{\overline{>}} 32FS^2$, $S^2 + 4F \overline{\overline{>}} 4S\sqrt{(2F)}$ ist, so wird $\sin\varphi \overline{\overline{<}} 1$. Auch liegt diese Bedingung in der Beschaffenheit des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $S^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, $S^2-4F = 2c^2+2ac+2bc = 2cS$, also $(S^2-4F)^2 = 4c^2S^2$. Es ist aber, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $c^2 = a^2+b^2 \overline{\overline{>}} 2ab \overline{\overline{>}} 4F$, also $(S^2-4F)^2 \overline{\overline{>}} 16FS^2$. — Ist $(S^2-4F)^2 = 16FS^2$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90°$, $\alpha = 45° = \beta$, $c = 2\sqrt{F} = S(\sqrt{2}-1)$, $a = b = \sqrt{(2F)} = \frac{1}{2}S(2-\sqrt{2})$.

Anmerk. 2., Wenn man $\dfrac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{(1+\sin\alpha+\sin\beta)^2}{\sin\alpha\sin\beta}$ wie in der Aufgabe 27., umwandelt, dann wird $\dfrac{S^2}{2F} = \dfrac{\left(4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = 2\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}},\text{ woraus } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{S^2+4F}{S^2-4F}\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ folgt.}$$

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $F = \frac{1}{2}ab$ und $c + a + b = S$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 31., Gegeben I., F., II., $c + b - a = s$.

Nach Analogie der Aufgabe 30., erhält man $\frac{s^2}{2F} =$
$= \frac{(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{[1-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}]^2}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$, woraus wie dort

1., $\sin 2\alpha = \frac{16Fs^2}{(4F+s^2)^2}$ folgt. Hieraus findet man wie in der Aufgabe 11., $\sin\alpha = \frac{\pm(s^2-4F)+\sqrt{[(4F+s^2)^2+16Fs^2]}}{2(4F+s^2)}$

und $\sin\beta = \frac{\mp(s^2-4F)+\sqrt{[(4F+s^2)^2+16Fs^2]}}{2(4F+s^2)}$. — Ist $s^2 = 4F$, also $(c+b-a)^2 = 2ab$, $c^2 + 2bc + b^2 - 2ac - 2ab + a^2 = 2ab$, $a^2 - 2ab + b^2 = 2ac - 2bc - c^2 + 2ab = 2c(a-b) - (a^2 - 2ab + b^2)$, $2(a-b)^2 = 2c(a-b)$, $(a-b)(a-b) = c(a-b)$, dann muß, weil $c > a - b$ ist, $a - b = 0$, $a = b$ sein. — Für diesen Fall wird $(4F + s^2)^2 = 64F^2 = 16Fs^2$, also $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$. — Ist $s^2 > 4F$, dann wird $(a-b)(a-b) > c(a-b)$, was, weil $c > a - b$ ist, nur sein kann, wenn $a - b$ negativ, also $a < b$ ist. Für diesen Fall ist also $\sin\alpha < \sin\beta$, folglich gilt für $\sin\alpha$ das negative, für $\sin\beta$ das positive Zeichen. Ist dagegen $s^2 < 4F$, dann wird $(a-b)(a-b) < c(a-b)$, also $a > b$, $\sin\alpha > \sin\beta$. Für diesen Fall muß also, weil $s^2 - 4F$ negativ wird, für $\sin\alpha$ ebenfalls das negative, für $\sin\beta$ das positive Zeichen genommen werden. — Es ist also

$\sin\alpha = \frac{4F - s^2 + \sqrt{[(4F + s^2)^2 + 16Fs^2]}}{2(4F + s^2)}$ und $\sin\beta =$
$= \frac{s^2 - 4F + \sqrt{[(4F + s^2)^2 + 16Fs^2]}}{2(4F + s^2)}$. Also ist $1 + \cos\alpha -$
$- \sin\alpha = 1 + \sin\beta - \sin\alpha = 1 + \frac{s^2 - 4F}{s^2 + 4F} = \frac{2s^2}{s^2 + 4F}$.
Folglich wird 2., $c = \frac{s}{1 + \cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{4F + s^2}{2s}$. Ist
$s^2 = 4F$, dann wird $c = s = 2\sqrt{F}$. — 3., $a = c\sin\alpha =$
$= \frac{4F - s^2 + \sqrt{[(4F + s^2)^2 + 16Fs^2]}}{4s}$. — 4., $b = c\cos\alpha =$
$= \frac{s^2 - 4F + \sqrt{[(4F + s^2)^2 + 16Fs^2]}}{4s}$. — Ist $s^2 = 4F$, dann
wird $a = b = \frac{\sqrt{[(4F + s^2)^2 + 16Fs^2]}}{4s} = s\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(2F)}$.
Für $s^2 \gtrless 4F$ setze man $\frac{4s\sqrt{(2F)}}{s^2 - 4F} = \operatorname{tg}\varphi$; und es wird für

$$s^2 > 4F \quad \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \\ \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \end{matrix}\right.$$

Für $s^2 < 4F$ müssen die Werthe von a und b verwechselt werden, weil dann $\operatorname{tg}\varphi$ in $-$
$- \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi)$, also $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ in $\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) =$
$= \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$, und umgekehrt $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ in $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ übergeht.

Anmerk. 1., Wenn man $\frac{(1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} =$
$= \frac{(1 - \sin\alpha + \sin\beta)^2}{\sin\alpha\sin\beta}$ wie in der Aufgabe 28., umwandelt,
dann wird $\frac{s^2}{2F} = \frac{\left(4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\beta}{2}} = 2\,\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\text{, woraus } \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4F-s^2}{4F+s^2}\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ folgt.}$$

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $F = \frac{1}{2}ab$ und $c + b - a = s$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 32., Gegeben I., F, II., $a + b - c = s$.

Nach Analogie der Aufgabe 30., erhält man $\frac{s^2}{2F} =$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{[\sqrt{(1+\sin 2\alpha)} - 1]^2}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\text{, woraus}$$

wie dort 1., $\sin 2\alpha = \frac{16Fs^2}{(4F-s^2)^2}$ folgt. — Hieraus ergiebt sich wie in der Aufgabe 10., $\sin\alpha = \frac{4F+s^2 \pm \sqrt{[(4F-s^2)^2 - 16Fs^2]}}{2(4F-s^2)}$ und $\sin\beta = \frac{4F+s^2 \mp \sqrt{[(4F-s^2)^2-16Fs^2]}}{2(4F-s^2)}$. Da ferner $\sin\alpha +$ $+ \cos\alpha - 1 = \sin\alpha + \sin\beta - 1 = \frac{4F+s^2}{4F-s^2} - 1 = \frac{2s^2}{4F-s^2}$ ist, so wird 2., $c = \frac{s}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} = \frac{4F-s^2}{2s}$. — 3., $a = c\sin\alpha = \frac{4F+s^2 \pm \sqrt{[(4F-s^2)^2-16Fs^2]}}{4s}$. — 4., $b =$ $= c\cos\alpha = \frac{4F+s^2 \mp \sqrt{[(4F-s^2)^2-16Fs^2]}}{4s}$. — Setzt man

$$\frac{4s\sqrt{(2F)}}{4F+s^2} = \sin\varphi\text{, dann wird } \left.\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{für } + \\ = \\ \text{für } - \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \end{matrix}\right.$$

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $4F > s^2$ sei. Dieses entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Da nehmlich $a + b > c$ ist, so ist $2ac + 2bc > 2c^2 > a^2 + b^2 + c^2$, $2ab > a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2 > (a + b - c)^2$, d. i, $4F > s^2$. Ferner muß $(4F - s^2)^2 \overset{=}{>} 16Fs^2$ sein; denn dann ist $\sin 2\alpha \overset{=}{<} 1$, und a und b sind reell. Weil in diesem Falle auch $16F^2 + 8Fs^2 + s^4 \overset{=}{>} 32Fs^2$, $(4F + s^2)^2 \overset{=}{>} 2s\sqrt{(2F)}$ ist, so wird $\sin \varphi \overset{=}{<} 1$. Auch diese Bedingung liegt in der Beschaffenheit des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$, $4F - s^2 = 2ac + 2bc - 2c^2 = 2cs$, $(4F - s^2)^2 = 4c^2s^2$. Es ist aber, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $c^2 = a^2 + b^2 \overset{=}{>} 2ab \overset{=}{>} 4F$; also $(4F - s^2)^2 \overset{=}{>} 16Fs^2$. — Ist $(4F - s^2)^2 = 16Fs^2$, dann ist $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $c = 2\sqrt{F} = s(1 + \sqrt{2})$, $a = b = \sqrt{(2F)} = s(1 + \sqrt{1/2})$.

Anmerk. 2., Wenn man $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \sin\beta - 1)^2}{\sin\alpha\sin\beta}$ wie in der Aufgabe 29., umwandelt, dann wird $\frac{s^2}{2F} =$

$$= \frac{\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}},$$ woraus

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{s^2 + 4F}{s^2 - 4F}\sqrt{\frac{1}{2}}$$ folgt.

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $F = \frac{1}{2}ab$ und $a + b - c = s$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

§. 9.

Aus den acht und zwanzig Verbindungen dieser vier Größen mit den Summen oder Differenzen je zweier Seiten entstehen Aufgaben, welche sich leicht auf die im §. 1. oder §. 2. gelösten zurückführen lassen. Ist z. B. $c+b+a=S$ und $c+a=s$ gegeben, dann hat man durch $c+b+a-c-a=b=S-s$ und $c+a=s$ die Aufgabe 8., — Ist $c+b+a=S$ und $c-a=d$ gegeben, dann wird $b=d+S-2c$, $a=c-d$; und diese Werthe, in die Gleichung $c^2=a^2+b^2$ gesetzt, geben $c=\frac{3d+2S\pm\sqrt{[d(d+4S)]}}{4}$, wobei die positive Wurzel aber nicht zulässig ist, weil $0<c-a$, um so mehr $0<c+2b-a$, also auch $4c<5c+2b-$ $-a<2c+2b+2a+3c-3a<2(c+b+a)+3(c-a)<2S+3d$ oder $c<\frac{3d+2S}{4}$ ist. Daher ist $a=c-d=\frac{2S-d-\sqrt{[d(d+4S)]}}{4}$. Durch c und a hat man aber die Aufgabe 1.,

§. 10.

Aus den sechs Verbindungen dieser vier Größen unter einander entstehen Aufgaben, welche sich leicht auf die im §. 2. gelösten zurückführen lassen. Ist z. B. $c+b+a=S$ und $c+b-a=s$ gegeben, dann wird $c+b+a+c+b-a=2c+2b=S+s$, also $c+b=\frac{S+s}{2}$ und $c+b+a-(c+b-a)=2a=S-s$, also $a=\frac{S-s}{2}$. Man hat daher durch a und $c+b$ die Aufgabe 8.,

§. 11.

Da der Radius des äußern Kreises gleich der halben Hypotenuse ist, alle von ihm abhängenden Aufgaben also mit denjenigen zusammenfallen, in welchen c unter den gegebenen Größen sich findet, so darf nur der Radius ϱ des innern Kreises beachtet werden. — Die Lösung dieser Aufgaben wird durch Anwendung des bekannten Satzes abgekürzt, daß die Summe der beiden

Katheten gleich der Summe aus der Hypotenuse und dem doppelten Radius des innern Kreises ist: $a + b = c + 2\varrho$.

Zunächst ergeben sich aus der Verbindung dieses Radius mit einer der drei Seiten, einem spitzen Winkel oder dem Inhalte folgende Aufgaben:

33., c, ϱ. — 24., a, ϱ; b, ϱ. — 35., $\alpha(\beta), \varrho$. — 36., F, ϱ.

Aufgabe 33., Gegeben I., c, II., ϱ.

Aus $a = c \sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ und $a + b = 2\varrho$ folgt $c\sin\alpha + c\cos\alpha - c = 2\varrho$, $\frac{2\varrho}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} - 1$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4\varrho(c+\varrho)}{c^2}$ folgt. — Hieraus ergiebt sich wie in der Aufgabe 10., $\sin\alpha = \frac{c + 2\varrho \pm \sqrt{[c^2 - 4\varrho(c+\varrho)]}}{2c}$ und $\sin\beta = \frac{c + 2\varrho \mp \sqrt{[c^2 - 4\varrho(c+\varrho)]}}{2c}$. Also ist 2., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[c + 2\varrho \pm \sqrt{c^2 - 4\varrho(c+\varrho)}\right]$. — 3., $b = c\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[c + 2\varrho \mp \sqrt{c^2 - 4\varrho(c+\varrho)}\right]$. Setzt man $\frac{2\sqrt{[2\varrho(c+\varrho)]}}{c + 2\varrho} = \sin\varphi$, dann wird $\left.\begin{matrix} a \\ \\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{für} + \\ = \\ \text{für} -\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\cot g\frac{\varphi}{2}\sqrt{[2\varrho(c+\varrho)]} \\ \\ tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{[2\varrho(c+\varrho)]}\end{matrix}\right.$

— 4., $F = \frac{1}{2}ab = \varrho(c+\varrho)$.

Anmerk. 1. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $c^2 \overline{\overline{>}} 4\varrho(c+\varrho)$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \overline{\overline{<}} 1$, und a und b sind reell. Weil unter dieser Voraussetzung $c^2 + 4c\varrho + 4\varrho^2 \overline{\overline{>}} 8c\varrho + 8\varrho^2$, $c + 2\varrho \overline{\overline{>}} 2\sqrt{[2\varrho(c+\varrho)]}$ ist, so wird $\sin\varphi \overline{\overline{<}} 1$. Jene Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 \overline{\overline{>}} 2ab$, also $c^2 \overline{\overline{>}} a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \overline{\overline{>}} 2ac + 2bc - 2c^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc + c^2 \overline{\overline{>}} 2c(a + b - c) +$

$+(a+b-c)^2 \overset{=}{>} 4c\varrho + 4\varrho^2 \overset{=}{>} 4\varrho(c+\varrho)$. — Ist $c^2 = 4\varrho(c+\varrho)$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $a = b =$ $= c\sqrt{^1/_2} = \varrho(2+\sqrt{2})$, $F = {^1/_4}\, c^2 = \varrho^2(3+2\sqrt{2})$.

Anmerk. 2., Nennt man jede der beiden von der Spitze des Winkels β ausgehenden Tangenten μ, die beiden von der Spitze des Winkels α ausgehenden ν, dann ist $\mu = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$ und $\nu = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, folglich $\mu + \nu = c = \varrho \left(\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)$,

$$\frac{c}{\varrho} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2\sqrt{^1/_2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sqrt{^1/_2}},\quad \text{woraus}$$

$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c+2\varrho}{c\sqrt{2}}$ folgt. — Aus dem Inhalte des von der Hypotenuse und den beiden die spitzen Winkel halbirenden Linien gebildeten Dreiecks $\dfrac{c^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{2}c\varrho$ ergiebt sich derselbe Ausdruck für $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. — Man erhält denselben Ausdruck auch, wenn man $\frac{2\varrho}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1$ nach der Aufgabe 29., in $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\sqrt{2} =$ $= \left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]\sqrt{2}$ umformt.

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch zuerst a oder b und dann die übrigen Größen finden. — Man kann auch aus der bei jedem Dreieck stattfindenden Gleichung

$F = \frac{1}{2}\varrho\,(a+b+c)$ zuerst $F = \varrho\,(c+\varrho)$ und dann aus F und c nach Aufgabe 5., die übrigen Größen ableiten.

Aufgabe 34. Gegeben I., a, II., ϱ.

Aus $b = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ und $a + b = c + 2\varrho$ folgt $a + \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} + 2\varrho$, $\frac{2\varrho}{a} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Also ist 1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a - 2\varrho}{a}$. — Nach der Aufgabe 8., ist 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\varrho}{a - \varrho}$. — Nach derselben Aufgabe wird ferner $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}^2} = \frac{a\,(a - 2\varrho)}{\varrho^2 + (a - \varrho)^2}$ und $\sin\beta = \frac{2\varrho\,(a - \varrho)}{\varrho^2 + (a - \varrho)^2}$. Es ist daher 3., $b = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha} =$ $= \frac{2\varrho(a - \varrho)}{a - 2\varrho}$. — 4., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\varrho^2 + (a - \varrho)^2}{a - 2\varrho}$. — 5., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{a\varrho\,(a - \varrho)}{a - 2\varrho}$.

Anmerk. 1., Nach der Aufgabe 33., Anmerk. 2., ist $\mu =$ $= \varrho\,\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, also $\varrho + \mu = a = \varrho + \varrho\,\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} =$ $= \varrho\,\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)$, folglich $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{a - \varrho}$, woraus sich $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$ $= \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{a - 2\varrho}{a}$ ergiebt.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch zuerst b oder c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 35., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt $\frac{a+b}{c} = \sin\alpha + \sin\beta$, also $\frac{a+b-c}{c} = \frac{2\varrho}{c} = \sin\alpha + \sin\beta - 1 =$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} = 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(nach der Aufgabe 29). Also ist

1., $c = \frac{2\varrho}{\sin\alpha + \sin\beta - 1} = \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}} =$

$= \frac{\varrho}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2}}$. — 2., $a = c\sin\alpha =$

$= \frac{\varrho\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}}{\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\varrho\sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$. — 3., $b = c\sin\beta =$

$= \frac{\varrho\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{2}}{\cos\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\varrho\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. — 4., $F = \frac{1}{2}ab =$

$= \varrho^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \varrho^2\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)$.

Anmerk. Mit Benutzung der in der Aufgabe 33., Anmerk. 2., angeführten Ausdrücke erhält man $\varrho + \mu = a = \varrho + \varrho\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, also $a - \varrho = \varrho\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$; und so ist $\varrho + \nu = b = \varrho + \varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, also $b - \varrho = \varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Auch folgt aus der dort angegebenen Inhaltsformel $\frac{c^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{2}c\varrho$ unmittelbar der Ausdruck für c.

Aufgabe 36., Gegeben I., F, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c}$, $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \frac{a+b-c}{c} = \frac{2\varrho}{c}$, also $(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)^2 = \frac{4\varrho^2}{c^2}$. Da ferner $\frac{ab}{c^2} = \frac{2F}{c^2} = \sin\alpha\cos\alpha$ ist, so wird $\frac{4\varrho^2}{2F} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-1}{{}^1/_2 \sin 2\alpha}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4F\varrho^2}{(F-\varrho^2)^2}$ folgt. — Wie in der Aufgabe 10., erhält man ferner $\sin\alpha = \frac{F+\varrho^2 \pm \sqrt{[(F-\varrho^2)^2 - 4F\varrho^2]}}{2(F-\varrho^2)}$ und $\sin\beta = \frac{F+\varrho^2 \mp \sqrt{[(F-\varrho^2)^2 - 4F\varrho^2]}}{2(F-\varrho^2)}$. Es ist also $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \frac{2\varrho^2}{F-\varrho^2}$, folglich 2., $c = \frac{2\varrho}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \frac{F-\varrho^2}{\varrho}$. — 3., $a = c\sin\alpha = \frac{F+\varrho^2 \pm \sqrt{[(F-\varrho^2)^2 - 4F\varrho^2]}}{2\varrho}$. — 4., $b = c\cos\alpha = \frac{F+\varrho^2 \mp \sqrt{[(F-\varrho^2)^2 - 4F\varrho^2]}}{2\varrho}$. — Setzt man $\frac{2\varrho\sqrt{(2F)}}{F+\varrho^2} = \sin\varphi$, dann wird

$$\left.\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{für } + \\ = \\ \text{für } - \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(2F)} \end{matrix}\right.$$

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $(F-\varrho^2)^2 \geqq 4F\varrho^2$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \leqq 1$, und a und b sind reell. Weil in diesem Falle auch $F^2 + 2F\varrho^2 + \varrho^4 \geqq 8F\varrho^2$, $F + \varrho^2 \geqq 2\varrho\sqrt{(2F)}$ ist, so wird $\sin\varphi \leqq 1$. Jene Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Nach Aufgabe 33., ist nehmlich $c^2 \geqq 4\varrho(c+\varrho)$, und da $c = \frac{F-\varrho^2}{\varrho}$ ist, so wird $c^2 = \frac{(F-\varrho^2)^2}{\varrho^2} \overset{=}{>} 4\varrho\left(\frac{F-\varrho^2}{\varrho} + \varrho\right) \overset{=}{>} 4F$, d. i. $(F-\varrho^2)^2 \overset{=}{>} 4F\varrho^2$. — Ist $(F-\varrho^2)^2 = 4F\varrho^2$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $c = 2\varrho(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{F}$, $a = b = \varrho(2+\sqrt{2}) = \sqrt{(2F)}$.

Anmerk. 2., Mit Anwendung des (Aufgabe 33., Anmerk. 2) gefundenen Ausdrucks $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c+2\varrho}{c\sqrt{2}}$ und des aus der Gleichung $F = \varrho(c+\varrho)$ (Aufgabe 33.,) für c ermittelten Werthes erhält man $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{F+\varrho^2}{(F-\varrho^2)\sqrt{2}}$.

Anmerk. 3. Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $F = \frac{1}{2}ab$ und $a + b = c + 2\varrho$ oder aus der eben angeführten Gleichung $F = \varrho(c+\varrho)$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

§. 12.

Die Verbindung des Radius ϱ mit den Summen oder Differenzen zweier Seiten führt zu folgenden Aufgaben:

37., $c + a, \varrho$; $c + b, \varrho$. — 38., $c - a, \varrho$; $c - b, \varrho$. — 39. $a + b, \varrho$. — 40., $a - b, \varrho$; $b - a, \varrho$.

Aufgabe 37., Gegeben I., $c + a = s$, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ folgt $1 + \sin\alpha = \frac{c+a}{c} = \frac{s}{c}$. Also ist $c = \frac{s}{1+\sin\alpha}$. Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $1 + \sin\alpha = \frac{s}{c}$ ergiebt sich $a = \frac{s\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Aus $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ und $1 + \sin\alpha = \frac{s}{c}$ erhält man $b = \frac{s\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$. Setzt man diese drei Werthe für c, a und b in die Gleichung $a + b - c = 2\varrho$, dann wird $s\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha}\right) = 2\varrho$, also

$$\frac{s}{2\varrho} = \frac{1+\sin\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha-1)} = \frac{\sin\frac{\alpha^2}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha^2}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}-2\,\sin\frac{\alpha^2}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1}{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}\right)},$$ woraus

1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s-2\varrho\pm\sqrt{[s\,(s-8\varrho)]}}{2\,(s+\varrho)}$ folgt. — Nach Aufgabe 8., ist 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{s\mp\sqrt{[s\,(s-8\varrho)]}}{2s}$.

Setzt man $\frac{2\sqrt{[\varrho(s+\varrho)]}}{s-2\varrho} = \sin\varphi$, dann wird $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{s+\varrho}} \text{ für} + \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{s+\varrho}} \text{ für} -\end{cases}$

Setzt man $2\sqrt{\frac{2\varrho}{s}} = \sin\psi$, dann wird $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \begin{cases}\sin\frac{\psi^2}{2} \text{ für} + \\ \cos\frac{\psi^2}{2} \text{ für} -\end{cases}$

Nach der Aufg. 8., wird $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{s^2-4\varrho^2\pm s\sqrt{[s(s-8\varrho)]}}{s^2+(s-2\varrho)^2}$

und $\sin\beta = \frac{s\,(s+2\varrho)\mp(s-2\varrho)\sqrt{[s\,(s-8\varrho)]}}{s^2+(s-2\varrho)^2}$. Daraus folgt

3., $c = \frac{s}{1+\sin\alpha} = \frac{1}{4}\left[3s-4\varrho\mp\sqrt{s\,(s-8\varrho)}\right]$. — 4., $a = = s-c = \frac{1}{4}\left[s+4\varrho\pm\sqrt{s\,(s-8\varrho)}\right]$. — 5., $b = c+2\varrho-a = = \frac{1}{2}\left[s\mp\sqrt{s(s-8\varrho)}\right]$. — 6., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{\varrho}{4}\left[3s\mp\sqrt{s(s-8\varrho)}\right]$.

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $s \geqq 8\varrho$ sei; denn dann werden alle Ausdrücke reell. Weil aus

$s \geqq 8\varrho$ auch $s^2 - 4\varrho s + 4\varrho^2 \geqq 4\varrho s + 4\varrho^2$, $s - 2\varrho \geqq 2\sqrt{[\varrho(s+\varrho)]}$ folgt, so ist unter dieser Bedingung $\sin\varphi \leqq 1$. Aus $s \geqq 8\varrho$ folgt ferner $\sqrt{s} \geqq 2\sqrt{(2\varrho)}$, also $\sin\psi \leqq 1$. — Jene Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn je nachdem $4a$ und $3b$ gleich oder ungleich sind, ist $(4a - 3b)^2 \geqq 0$, $16a^2 - 24ab + 9b^2 \geqq 0$, $25a^2 + 25b^2 = 25c^2 \geqq 9a^2 + 24ab + 16b^2$, $5c \geqq 3a + 4b$, $c + a \geqq 4a + 4b - 4c$, d. i. $s \geqq 4(a + b - c) \geqq 8\varrho$. — Ist $s = 8\varrho$, dann wird $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s - 2\varrho}{2\,(s+\varrho)} = \frac{1}{3}$, $\alpha = 36^\circ\, 52'\, 12''$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, $\beta = 53^\circ\, 7'\, 48''$, $c = 5\varrho = \frac{5}{8}s$, $a = 3\varrho =$ $= \frac{3}{8}s$, $b = \frac{1}{2}s = 4\varrho$, $F = 6\varrho^2 = \frac{3}{32}s^2$. — Für $s > 8\varrho$ ist außerdem $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, also auch $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, < 1, und alle Ausdrücke sind positiv; denn offenbar ist $s - 2\varrho > \sqrt{[s\,(s - 8\varrho)]}$, ferner $\sqrt{[s(s - 8\varrho)]} < s + 4\varrho$, $s - 2\varrho + \sqrt{[s(s - 8\varrho)]} < 2s + 2\varrho$, also $\frac{s - 2\varrho + \sqrt{[s(s - 8\varrho)]}}{2\,(s+\varrho)}$, um so mehr $\frac{s - 2\varrho - \sqrt{[s(s - 8\varrho)]}}{2\,(s+\varrho)} < 1$; und weil $s > 2\varrho$ ist, so wird $s^2 > 2\varrho s$, um so mehr $s^2 + 2\varrho^2 > 2\varrho s$, $8s^2 + 16\varrho^2 > 16\varrho s$, $8s^2 - 24\varrho s + 16\varrho^2 > -8\varrho s$, $9s^2 - 24\varrho s +$ $+ 16\varrho^2 > s^2 - 8\varrho s$, d. i. $3s - 4\varrho > \sqrt{[s(s - 8\varrho)]}$, also ist auch c positiv. Für a, b und F folgt dasselbe unmittelbar aus den Ausdrücken. Unter dieser Bedingung erhält man also zwei Dreiecke.

Anmerk. 2. Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $c + a = s$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch zuerst eine Seite und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 38., Gegeben I., $c - a = d$, II., ϱ.

Nach Analogie der Aufg. 37., erhält man $\frac{2\varrho}{d} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{1 - \sin\alpha} =$ $= \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} - 1$. Also ist $\frac{2\varrho}{d} + 1 = \frac{d + 2\varrho}{d} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} =$

$$= \frac{\sin\beta}{1-\cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta^2}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

Folglich ist

1., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{d}{d+2\varrho}$. — Nach der Aufg. 8., ist 2., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\varrho}{d+\varrho}$. — Nach derselben Aufgabe folgt ferner

$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{2\varrho(d+\varrho)}{d^2+2\varrho(d+\varrho)}$ und $\sin\beta = \frac{d(d+2\varrho)}{d^2+2\varrho(d+\varrho)}$. Also ist

3., $c = \frac{d}{1-\sin\alpha} = \frac{d^2+2\varrho(d+\varrho)}{d}$. — 4., $a = c-d = \frac{2\varrho(d+\varrho)}{d}$.

5., $b = c+2\varrho-a = d+2\varrho$. — 6., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{\varrho(d+\varrho)(d+2\varrho)}{d}$.

Anmerk. 1. Da $c-a=d$ und $c-a=b-2\varrho$, also $b-2\varrho=d$, $b-\varrho=d+\varrho$ ist, so folgt mit Anwendung des (Aufgabe 35. Anmerk.) gefundenen Ausdrucks $b-\varrho=\varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ unmittelbar $\varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=d+\varrho$, also $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{d+\varrho}$. — Ein Ableiten dieser Aufgabe aus der vorhergehenden dadurch, daß man d für s und die Werthe von a und F negativ nimmt, wie es bei den Aufgaben des §. 5., geschehen ist, läßt sich hier nicht anwenden, weil $c+a=2c+2\varrho-b$ und $c-a=2c+2\varrho-b-2a$ ist, jener Ausdruck also durch Zeichenveränderung in diesen nicht übergeht.

Anmerk 2., Aus $c-a=d$ und $a+b=c+2\varrho$ kann man auch unmittelbar b und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 39., Gegeben I., $a+b=s$, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ und $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha+\cos\alpha=$

$= \frac{a+b}{c} = \frac{s}{c}$. Da ferner $c = a + b - 2\varrho = s - 2\varrho$ ist, so wird $\frac{s}{c} = \frac{s}{s-2\varrho} = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{(1 + \sin 2\alpha)}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4\varrho(s-\varrho)}{(s-2\varrho)^2}$ folgt. — Wie in der Aufgabe 10., erhält man ferner $\sin\alpha = \frac{s \pm \sqrt{[s^2 - 8\varrho(s-\varrho)]}}{2(s-2\varrho)}$ und $\sin\beta = \frac{s \mp \sqrt{[s^2 - 8\varrho(s-\varrho)]}}{2(s-2\varrho)}$. Also ist 2., $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = s - 2\varrho$. — 3., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[s \pm \sqrt{s^2 - 8\varrho(s-\varrho)}\right]$. — 4., $b = c\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[s \mp \sqrt{s^2 - 8\varrho(s-\varrho)}\right]$. 5., $F = \frac{1}{2}ab = \varrho(s-\varrho)$.

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $s^2 \geqq 8\varrho(s-\varrho)$ sei; denn dann sind a und b reell, und wegen $s^2 - 4\varrho s + 4\varrho^2 = (s-2\varrho)^2 \geqq 4\varrho(s-\varrho)$ ist $\sin 2\alpha \leqq 1$. Diese Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $c^2 = a^2 + b^2 = s^2 - 2ab$. Je nachdem ferner a und b gleich oder ungleich sind, ist $a^2 + b^2 = c^2 \geqq 2ab$, also $c^2 \geqq s^2 - c^2$; und da $c = s - 2\varrho$ ist, so wird $(s-2\varrho)^2 \geqq s^2 - (s-2\varrho)^2$, d. i. $s^2 \geqq 8\varrho s - 8\varrho^2 \geqq 8\varrho(s-\varrho)$. — Ist $s^2 = 8\varrho(s-\varrho)$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $c = 2\varrho(1+\sqrt{2}) = s\sqrt{\frac{1}{2}}$, $a = b = \frac{s}{2} = \varrho(2+\sqrt{2})$, $F = \frac{1}{8}s^2 = \varrho^2(3+2\sqrt{2})$.

Anmerk. 2. In der Aufg. 33., Anmerk. 2., ist $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c+2\varrho}{c\sqrt{2}}$ gefunden. Da nun $c = a + b - 2\varrho = s - 2\varrho$ ist, so wird $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{s}{(s-2\varrho)\sqrt{2}}$.

Anmerk. 3., Aus $a + b = s$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch unmittelbar c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 40., Gegeben I., $a - b = d$, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{a-b}{c} = \frac{d}{c}$. Also ist $\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$, $\frac{b}{d} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$. Setzt man die hieraus folgenden Werthe für c, a und b in die Gleichung $a + b = c + 2\varrho$, dann erhält man $\frac{d\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \frac{d\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{d}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 2\varrho$, $\frac{2\varrho}{d} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}}$, woraus

$$1.,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d - 2\varrho + \sqrt{(d^2 + 8\varrho^2)}}{2(d+\varrho)}$$ folgt. Weil nehmlich $d - 2\varrho < \sqrt{(d^2 + 8\varrho^2)}$ ist, so darf die negative Wurzel nicht genommen werden. — Die Möglichkeit der Aufgabe gestattet, daß $d \gtreqless 2\varrho$ sei. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $c \gtreqless 2b$, also $a - b \gtreqless a + b - c$, d. i. $d \gtreqless 2\varrho$ sein kann. — Ist $d = 2\varrho$, dann wird $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\alpha = 60°$. — Ist $d \gtrless 2\varrho$, dann ist zufolge jenes Ausdrucks $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ positiv und, weil $d^2 + 8\varrho^2 < d^2 + 8d\varrho + 16\varrho^2$, $\sqrt{(d^2 + 8\varrho^2)} < d + 4\varrho < 2d + + 2\varrho - d + 2\varrho$, $d - 2\varrho + \sqrt{(d^2 + 8\varrho^2)} < 2(d+\varrho)$ ist, auch < 1. — Für $d > 2\varrho$ wird, $\frac{2\sqrt{[\varrho(d+\varrho)]}}{d - 2\varrho} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{d+\varrho}}$ und für $d < 2\varrho$ ist (Aufg. 31.,) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{d+\varrho}}$. — Nach der Aufg. 8., folgt $2.,\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{d + 2\varrho - \sqrt{(d^2 + 8\varrho^2)}}{2(d-\varrho)}$

Für $d = 2\varrho$ wird $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 2-\sqrt{3}$, $\beta = 30^{\circ}$. — Die Möglichkeit der Aufgabe gestattet, daß $d \overset{=}{\underset{<}{>}} \varrho$ sei. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $c+a \overset{=}{\underset{<}{>}} 3b$, also $2a-2b \overset{=}{\underset{<}{>}} a+b-c$, $a-b \overset{=}{\underset{<}{>}} \frac{a+b-c}{2}$, d.i. $d \overset{=}{\underset{<}{>}} \varrho$ sein kann. — Wenn $d=\varrho$, also $d-\varrho=0$ ist, dann muß man, weil 0 als Divisor nicht zulässig ist, diesen Werth zuvor in die Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ setzen. Für diesen Fall ergiebt sich $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, $\alpha = 53^{\circ} 7' 48''$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$, $\beta=36^{\circ} 52' 12''$. — Ist $d>\varrho$, dann setze man, weil $\frac{4\varrho d-4\varrho^2}{d^2+4\varrho d+4\varrho^2} = \frac{4\varrho(d-\varrho)}{(d+2\varrho)^2} < 1$ ist, $\frac{2\sqrt{[\varrho(d-\varrho)]}}{d+2\varrho} = \sin\varphi$, und es wird $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{d-\varrho}}$. — Ist $d<\varrho$, dann wird, $\frac{2\sqrt{[\varrho(\varrho-d)]}}{d+2\varrho} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho-d}}$.

— Nach der Aufgabe 8., ist ferner $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{d(d-2\varrho)+(d+2\varrho)\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}}{2(d^2+4\varrho^2)}$, $\sin\beta = \frac{d(d+2\varrho)-(d-2\varrho)\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}}{2(d^2+4\varrho^2)}$. Daher ist $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha-\sin\beta = d\,\frac{-2\varrho+\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}}{d^2+4\varrho^2}$, also 3., $c = \frac{d}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2\varrho+\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}$. Für $d=2\varrho$ wird $c=2\varrho(1+\sqrt{3})=d(1+\sqrt{3})$; für $d=\varrho$ wird $c=5\varrho=5d$. 4., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{2}[d+4\varrho+\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}]$. Für $d=2\varrho$ wird $a=\varrho(3+\sqrt{3})=\frac{1}{2}d(3+\sqrt{3})$; für $d=\varrho$ wird $a=4\varrho=4d$. — 5., $b = a-d = \frac{1}{2}[4\varrho-d+\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}]$. Für $d=2\varrho$ wird $b=\varrho(1+\sqrt{3})=\frac{1}{2}d(1+\sqrt{3})$; für $d=\varrho$ wird $b=3d=3\varrho$. — 6., $F=\frac{1}{2}ab=\varrho[3\varrho+\sqrt{(d^2+8\varrho^2)}]$. Für $d=2\varrho$ wird $F= \varrho^2(3+2\sqrt{3})=\frac{1}{4}d^2(3+2\sqrt{3})$; für $d=\varrho$ wird $F=6\varrho^2=6d^2$.

Anmerk. Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $a - b = d$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch zuerst eine Seite und dann die übrigen Größen finden.

§. 13.

Verbindet man den Radius ϱ mit der Summe der drei Seiten oder mit der Summe von je zweien weniger der dritten, dann erhält man, weil $a + b - c$, ϱ wegen $a + b - c = 2\varrho$ eine unmögliche Aufgabe ist, folgende:

41., $c + a + b$, ϱ. — 42., $c + b - a$, ϱ; $c + a - b$, ϱ.

Aufgabe 41., Gegeben I., $c + a + b = S$, II., ϱ.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a + b}{c}$, also $\sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \frac{a + b + c}{c} = \frac{S}{c}$ und $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \frac{a + b - c}{c} = \frac{2\varrho}{c}$. Es ist also $\frac{2\varrho}{S} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} - 1}{\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + 1}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{8\varrho S}{(S - 2\varrho)^2}$ folgt. — Wie in der Aufgabe 10., erhält man ferner $\sin\alpha = \frac{2\varrho + S \pm \sqrt{[S^2 - 4\varrho(3S - \varrho)]}}{2(S - 2\varrho)}$ und $\sin\beta = \frac{2\varrho + S \mp \sqrt{[S^2 - 4\varrho(3S - \varrho)]}}{2(S - 2\varrho)}$. Es ist also $\sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sin\alpha + \sin\beta + 1 = \frac{2S}{S - 2\varrho}$, folglich 2., $c = \frac{S}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{1}{2}S - \varrho$. — 3., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{4}[2\varrho + S \pm \sqrt{[S^2 - 4\varrho(3S - \varrho)]}$ — 4., $b = c\cos\alpha = \frac{1}{4}[2\varrho + S \mp \sqrt{[S^2 - 4\varrho(3S - \varrho)]}$. — Setzt man

$$\frac{4\sqrt{(\varrho S)}}{2\varrho + S} = \sin\varphi, \text{ dann wird } \begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix} \left.\begin{matrix} \text{für } + \\ = \\ \text{für } - \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(\varrho S)} \\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{(\varrho S)} \end{matrix}\right.$$

— 5., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\varrho S$.

Anmerk. 1. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S^2 \geqq 4\varrho\,(3S-\varrho)$ sei; denn dann sind a und b reell, und wegen $S^2 - 12\varrho S \geqq -4\varrho^2$, $S^2 - 4\varrho S + 4\varrho^2 \geqq 8\varrho S$, $(S-2\varrho)^2 \geqq 8\varrho S$ ist $\sin 2\alpha \leqq 1$. Weil in diesem Falle auch $S^2 + 4\varrho S + 4\varrho^2 \geqq 16\varrho S$, $S + 2\varrho \geqq 4\sqrt{(\varrho S)}$ ist, so wird $\sin\varphi \leqq 1$. Jene Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $S^2 = a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 = 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$; und da $2\varrho = a + b - c$, $4\varrho^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc + c^2 = 2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$ ist, so wird $S^2 + 4\varrho^2 = 4c^2 + 4ab$. Je nachdem nun a und b gleich oder ungleich sind, ist $a^2 + b^2 = c^2 \geqq 2ab$, also $S^2 + 4\varrho^2 \geqq 8ab + 4ab \geqq 12ab$. Ferner ist $2\varrho S = (a+b+c)(a+b-c) = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2ab$, also $S^2 + 4\varrho^2 \geqq 12\varrho S$, $S^2 \geqq 4\varrho\,(3S-\varrho)$. — Ist $S^2 = 4\varrho\,(3S-\varrho)$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $c = 2\varrho\,(1 + \sqrt{2}) = S(\sqrt{2} - 1)$, $a = b = \varrho\,(2 + \sqrt{2}) = S\,(1 - \sqrt{1/2})$, $F = \varrho^2\,(3 + 2\sqrt{2}) = 1/4\, S^2\,(3 - 2\sqrt{2})$.

Anmerk. 2. Aus $c + a + b = S$ und $a + b = c + 2\varrho$ kann man auch unmitlelbar $c = 1/2\, S - \varrho$ und dann die übrigen Größen finden. — Setzt man den Werth für c in die (Aufgabe 33., Anmerk. 2.) gefundene Gleichung $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c + 2\varrho}{c\sqrt{2}}$, dann ergiebt sich

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{S+2\varrho}{S-2\varrho}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 42. Gegeben I., $c + b - a = s$, II., ϱ.

Nach Analogie der Aufg. 41., ist $\frac{2\varrho}{s} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\cos\alpha - \sin\alpha + 1} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha^2}{2}}{2\cos\frac{\alpha^2}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Also ist

1., $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\varrho}{s}$. — Nach der Aufgabe 8., ist 2., $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{s-2\varrho}{s+2\varrho}$. — Da ferner nach derselben Aufgabe $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{4\varrho s}{4\varrho^2+s^2}$ und $\sin\beta = \frac{(s+2\varrho)(s-2\varrho)}{4\varrho^2+s^2}$, also $\cos\alpha - \sin\alpha + 1 = \sin\beta - \sin\alpha + 1 = \frac{2s\,(s-2\varrho)}{4\varrho^2+s^2}$ ist, so wird 3., $c = \frac{s}{\cos\alpha - \sin\alpha + 1} = \frac{4\varrho^2+s^2}{2\,(s-2\varrho)}$. — 4., $a = c\sin\alpha = \frac{2\varrho s}{s-2\varrho}$. — 5., $b = c\cos\alpha = \varrho + \frac{1}{2}s$. — 6., $F = \frac{1}{2}ab = \frac{\varrho s(s+2\varrho)}{2(s-2\varrho)}$.

Anmerk. Aus $c+b-a=s$ und $a+b=c+2\varrho$ kann man auch unmittelbar c und dann die übrigen Größen finden.

§. 14.

Aus der Verbindung der zur Hypotenuse gehörenden Höhe h mit einer der drei Seiten, einem spitzen Winkel oder dem Inhalte ergeben sich folgende Aufgaben:

43., c, h, — 44., a, h; b, h. — 45., $\alpha(\beta)$, h. — 46., F, h.

Aufgabe 43., Gegeben I., c, II., h.

Aus $h = a\cos\alpha$ und $h = b\sin\alpha$ folgt $h^2 = ab\sin\alpha\cos\alpha$; und weil $ab = ch$ ist, so erhält man $h^2 = ch\sin\alpha\cos\alpha$, $h = \frac{1}{2}c\sin 2\alpha$. Also ist

1., $\sin 2\alpha = \frac{2h}{c}$. — Hieraus folgt wie in der Aufg. 5., $\sin\alpha = \sqrt{\frac{c \pm \sqrt{[(c+2h)(c-2h)]}}{2c}}$ und $\sin\beta = \sqrt{\frac{c \mp \sqrt{[(c+2h)(c-2h)]}}{2c}}$.

Es ist daher 2., $a = c \sin\alpha = \sqrt{\left(c\,\frac{c \pm \sqrt{[(c+2h)(c-2h)]}}{2}\right)}$. — 3., $b = c \sin\beta = \sqrt{\left(c\,\frac{c \mp \sqrt{[(c+2h)(c-2h)]}}{2}\right)}$. — 4., $F = \frac{1}{2} ch$.

Anmerk. 1. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $c \overline{\overline{>}} 2h$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \overline{\overline{<}} 1$, und a und b sind reell. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 = c^2 \overline{\overline{>}} 2ab$, $c \overline{\overline{>}} \frac{2ab}{c} \overline{\overline{>}} 2h$. — Ist $c = 2h$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $a = b = c\sqrt{^1/_2} = h\sqrt{2}$, $F = {}^1/_4\, c^2 = h^2$.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst eine Kathete und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 44., Gegeben I., a, II., h.

1., $\sin\beta = \frac{h}{a}$. — 2., $\sin\alpha = \sqrt{(1 - \cos\alpha^2)} = \sqrt{(1 - \sin\beta^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{[(a+h)(a-h)]}$. — 3., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a^2}{\sqrt{[(a+h)(a-h)]}}$. — 4., $b = c\sin\beta = \frac{ah}{\sqrt{[(a+h)(a-h)]}}$. — 5., $F = \frac{1}{2} ab = \frac{a^2 h}{2\sqrt{[(a+h)(a-h)]}}$.

Anmerk. Aus $c^2 = a^2 + b^2$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 45., Gegeben I., $\alpha(\beta)$, II., h.

1., $a = \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{h}{\sin\beta}$. — 2., $b = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h}{\cos\beta}$. — 3., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2h}{\sin 2\alpha} = \frac{2h}{\sin 2\beta}$. — 4., $F = \frac{1}{2} ab = \frac{h^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\beta}$.

Aufgabe 46., Gegeben I., F, II., h.

Wie in der Aufgabe 43., erhält man $h^2 = ab \sin\alpha \cos\alpha$; und weil $ab = 2F$ ist, so wird $h^2 = 2F \sin\alpha\cos\alpha = F \sin 2\alpha$. Also ist 1., $\sin 2\alpha = \frac{h^2}{F}$. — Hieraus folgt wie in der Aufgabe 5., $\sin\alpha = \sqrt{\frac{F \pm \sqrt{[(F+h^2)(F-h^2)]}}{2F}}$ und $\sin\beta =$ $= \sqrt{\frac{F \mp \sqrt{[(F+h^2)(F-h^2)]}}{2F}}$. — Also ist 2., $a = \frac{h}{\sin\beta} =$ $= \frac{1}{h}\sqrt{\left[2F\left(F \pm \sqrt{(F+h^2)(F-h^2)}\right)\right]}$. — 3., $b = \frac{h}{\sin\alpha} =$ $= \frac{1}{h}\sqrt{\left[2F\left(F \mp \sqrt{(F+h^2)(F-h^2)}\right)\right]}$. — 4., $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2F}{h}$.

Anmerk. 1. Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $F \overset{=}{>} h^2$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \overset{=}{<} 1$, und a und b sind reell. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn es ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 =$ $= c^2 \overset{=}{>} 2ab$, $c \overset{=}{>} \frac{2ab}{c}$, $\frac{hc}{2} = F \overset{=}{>} \frac{ab}{c} h \overset{=}{>} h^2$. — Ist $F =$ $= h^2$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $a =$ $= b = h\sqrt{2} = \sqrt{(2F)}$, $c = 2h = 2\sqrt{F}$.

Anmerk. 2., Aus $F = \frac{1}{2} ch$ kann man auch unmittelbar c und dann die übrigen Größen finden.

§. 15.

Aus der Verbindung der Höhe h mit den Summen oder Differenzen zweier Seiten ergeben sich folgende Aufgaben:

47., $c + a$, h; $c + b$, h. — 48., $c - a$, h; $c - b$, h. — 49., $a + b$, h. — 50., $a - b$, h; $b - a$, h.

Aufgabe 47., Gegeben I., $c + a = s$, II., h.

Aus $ch = ab$, $c = \frac{ab}{h}$, $c^2 = \frac{a^2b^2}{h^2}$ und $c^2 = a^2 + b^2$ folgt $\frac{a^2b^2}{h^2} = a^2 + b^2$, $a^2(b^2 - h^2) = b^2h^2$, $a = \frac{bh}{\sqrt{(b^2-h^2)}}$. Da

ferner $c + a = s$, $\frac{ab}{h} + a = s$, $a(b + h) = hs$ ist, so wird $\frac{bh(b+h)}{\sqrt{(b^2 - h^2)}} =$
$= hs$, $b\sqrt{\frac{b+h}{b-h}} = s$, also $b^2 \frac{b+h}{b-h} = s^2$, woraus

$$b^3 + hb^2 - s^2 b + hs^2 = 0 \text{ folgt.}$$

Setzt man $b = x - \frac{1}{3} h$, dann erhält man die Gleichung

$$x^3 = \frac{1}{3}(h^2 + 3s^2)\, x - \frac{2}{27} h\, (h^2 + 18s^2).$$

Die Möglichkeit dieser Aufgabe verlangt, daß $(h^2 + 3s^2)^3 \geqq h^2 (h^2 + 18s^2)^2$, d. i. $\frac{s}{h} \geqq \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$ sei. Ist nehmlich $\frac{s}{h} < \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$, dann hat die Gleichung nur Eine reelle, und zwar wegen $-\frac{2}{27} h(h^2 + 18s^2)$ negative, also für diese Aufgabe wegen $b = x - \frac{1}{3} h$ unbrauchbare Wurzel. [3])

a., Ist $\frac{s}{h} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$, dann hat die Gleichung zwei gleiche, u. zwar wegen $-\frac{2}{27} h(h^2 + 18s^2)$ positive Wurzeln. Die dritte Wurzel ist negativ, also für diese Aufgabe wegen $b = x - \frac{1}{3} h$ unbrauchbar. Die positiven Wurzeln sind $\frac{1}{3}\sqrt[3]{[h(h^2 + 18s^2)]} = \frac{h}{3}\sqrt[3]{[5(20 + 9\sqrt{5})]}$. Folglich wird $b = x - \frac{1}{3} h$ positiv. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $c = \frac{1}{2} a(1 + \sqrt{5})$ ist; denn

---

[3]) Für das rechtwinklige Dreieck ist $s = c + a = c + c\sin\alpha = c(1 + \sin\alpha)$ und $h = \frac{ab}{c} = c \sin\alpha \cos\alpha$, also $\frac{s}{h} = \frac{c(c+a)}{ab} = \frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha}$. Diese Function wird für $\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ein Minimum. Für $\sin\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ aber, also $\cos\alpha = \sqrt{[\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)]}$ ist $\frac{s}{h} = \frac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$. Also wird $\frac{s}{h}$ für die andern Werthe von $\sin\alpha$ größer als $\sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$.

dann ist $s = c + a = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, $b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = a\sqrt{[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]}$, also $h = \frac{ab}{c} = a\sqrt{[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)]}$, folglich $\frac{s}{h} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$. — Es ist also für diesen Fall $a = \frac{2s}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}s(3-\sqrt{5}) = h\sqrt{[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]}$, $c = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}s(\sqrt{5} - 1) = h\sqrt{(2 + \sqrt{5})}$, $b = a\sqrt{[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]} = s\sqrt{(\sqrt{5}-2)} = \frac{1}{2}h(1+\sqrt{5})$ $F = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}h^2\sqrt{(2 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}s^2(13\sqrt{5} - 29)$, $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $\alpha = 38^\circ\, 10'\, 21''$, $\beta = 51^\circ\, 49'\, 39''$.

b., Ist $\frac{s}{h} > \sqrt{[\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})]}$, dann hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von welchen wegen $-\frac{2}{27}h(h^2 + 18s^2)$ zwei positiv sind, die dritte negativ, also für diese Aufg. wegen $b = x - \frac{1}{3}h$ unbrauchbar ist. Setzt man $\frac{h(h^2 + 18s^2)}{(h^2 + 3s^2)\sqrt{(h^2 + 3s^2)}} = \sin\psi$,

$$\text{dann wird } x = \begin{cases} \frac{2}{3}\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(h^2+3s^2)} \\ \frac{2}{3}\sin\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(h^2 + 3s^2)} \end{cases}. \text{ Folglich ist}$$

$$b = x - \frac{1}{3}h = \begin{cases} \frac{1}{3}\left[2\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(h^2 + 3s^2)} - h\right] \\ \frac{1}{3}\left[2\sin\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(h^2 + 3s^2)} - h\right]. \end{cases}$$

Beide Werthe sind positiv. Aus der bekannten Gleichung $\sin 3\psi = 3\sin\psi - 4\sin\psi^3$ oder $\sin\frac{\psi}{3}\left(\frac{3}{4} - \sin\frac{\psi}{3}^2\right) - \frac{1}{4}\sin\psi = 0$ folgt nehmlich, wenn man für $\sin\psi$ den angenommenen Werth einsetzt, $\sin\frac{\psi}{3}\left(\frac{3}{4} - \sin\frac{\psi}{3}^2\right) - \frac{h(h^2+18s^2)}{4(h^2+3s^2)\sqrt{(h^2+3s^2)}} = 0$. Wollte man für $\sin\frac{\psi}{3}$ in diese Gleichung $\frac{h}{2\sqrt{(h^2+3s^2)}}$ setzen, dann würde der Werth derselben $-27s^2$ werden. Da aber der Werth $=0$ sein soll, so muß der positive Theil $\sin\frac{\psi}{3}\left(\frac{3}{4}-\sin\frac{\psi^2}{3}\right)$ größer werden, also $\sin\frac{\psi}{3} > \frac{h}{2\sqrt{(h^2+3s^2)}}$ sein. Also ist $2\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(h^2+3s^2)} > h$. Weil ferner $\frac{\psi}{3} < 30^0$ ist, so ist $60^0 - \frac{\psi}{3} > 30^0 > \frac{\psi}{3}$, also $\sin\left(60^0-\frac{\psi}{3}\right) > \sin\frac{\psi}{3}$. Um so mehr ist daher $2\sin\left(60^0-\frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(h^2+3s^2)} > h$. — Unter dieser Bedingung erhält man also zwei Dreiecke. Die übrigen Größen ergeben sich unmittelbar aus Aufgabe 8., oder 44.,

Aufgabe 48., Gegeben I., $c-a=d$, II., h.

Wie in der Aufgabe 47., ist $c=\frac{ab}{h}$ und $a=\frac{bh}{\sqrt{(b^2-h^2)}}$. Da ferner $c-a=d$, $\frac{ab}{h}-a=d$, $a(b-h)=dh$ ist, so wird $\frac{bh\,(b-h)}{\sqrt{(b^2-h^2)}}=dh$, $b\sqrt{\frac{b-h}{b+h}}=d$, also $b^2\frac{b-h}{b+h}=d^2$, woraus

$$b^3-hb^2-d^2b-d^2h=0 \text{ folgt.}$$

Setzt man $b=x+{}^1/_3\,h$, dann erhält man die Gleichung

$$x^3={}^1/_3\,(3d^2+h^2)\,x+{}^2/_{27}\,h\,(18d^2+h^2).$$

Die Möglichkeit dieser Aufgabe gestattet, daß $(3d^2+h^2)^3 \gtreqless h^2\,(18d^2+h^2)^2$, d. i. $\frac{d}{h}\gtreqless\sqrt{[{}^1/_2(11+5\sqrt{5})]}$ sei. *)

---

*) Für das rechtwinklige Dreieck ist $d=c-a=c-c\sin\alpha=c\,(1-\sin\alpha)$ und $h=\frac{ab}{c}=c\sin\alpha\cos\alpha$, also $\frac{d}{h}=\frac{c\,(c-a)}{ab}=\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Diese Function hat weder ein Maximum noch ein Minimum. Von den vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung

a., Ist $\frac{d}{h} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$, dann hat die Gleichung zwei gleiche, und zwar wegen $+\frac{2}{27}h(18d^2+h^2)$ negative Wurzeln. Die dritte Wurzel ist positiv. Die positive Wurzel ist $\frac{2}{3}\sqrt[3]{[h(18d^2+h^2)]} = \frac{2h}{3}\sqrt[3]{[5(20+9\sqrt{5})]}$, die beiden negativen sind $-\frac{h}{3}\sqrt[3]{[5(20+9\sqrt{5})]}$. Da aber $b = x + \frac{h}{3}$ ist, so wird b bei den negativen Wurzeln negativ, also für diese Aufgabe unbrauchbar. — Jene Bedingung aber ist erfüllt, wenn $c = a(2+\sqrt{5})$ ist; denn dann ist $d = c - a = a(1+\sqrt{5})$, $b = \sqrt{(c^2-a^2)} = 2a\sqrt{(2+\sqrt{5})}$, folglich $h = \frac{ab}{c} = 2a\sqrt{(\sqrt{5}-2)}$, also $\frac{d}{h} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$. Für diesen Fall ist also $a = \frac{1}{4}d(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{2}h\sqrt{(\sqrt{5}+2)}$, $c = a(2+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}d(\sqrt{5}+3) = \frac{1}{2}h\sqrt{(38+17\sqrt{5})}$, $b = 2a\sqrt{(2+\sqrt{5})} = d\sqrt{[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})]} = h(\sqrt{5}+2)$, $F = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{4}h^2\sqrt{(38+17\sqrt{5})} = \frac{1}{4}d^2\sqrt{[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)]}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \sqrt{5}-2$, $\alpha = 13^\circ\, 39'\, 16''$, $\beta = 76^\circ\, 20'\, 44''$.

b., Ist $\frac{d}{h} > \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$, dann hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von welchen wegen $+\frac{2}{27}h(18d^2+h^2)$ zwei negativ sind. Die dritte ist positiv. Die beiden negativen Wurzeln sind,

---

$\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$, nehmlich $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, 1, $\sqrt{5}-2$ ist aber die letzte für diese Aufgabe anwendbar. Ist demnach $\sin\alpha = \sqrt{5}-2$, also $\cos\alpha = \sqrt{(\sqrt{5}-2)}$, dann wird $\frac{d}{h} = \frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$, während für die andern Werthe von $\sin\alpha$ der Ausdruck $\frac{d}{h} \gtrless \sqrt{[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})]}$ ist.

wenn man $\frac{h\,(18d^2 + h^2)}{(3d^2 + h^2)\sqrt{(3d^2 + h^2)}} = \sin\psi$ setzt, $-\frac{2}{3}\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(3d^2+h^2)}$ und $-\frac{2}{3}\sin\left(60^\circ-\frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(3d^2+h^2)}$. Es wird also $b = x + \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\left[h - 2\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(3d^2+h^2)}\right]$ und $= \frac{1}{3}\left[h - 2\sin\left(60^\circ-\frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(3d^2+h^2)}\right]$. Wie in der Aufg. 47., b., läßt sich zeigen, daß $2\sin\frac{\psi}{3}\sqrt{(3d^2+h^2)} > h$, um so mehr $2\sin\left(60^\circ-\frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(3d^2+h^2)} > h$ ist, daß also beide Werthe für b negativ, also für diese Aufgabe unbrauchbar sind. — Die positive Wurzel ist $\frac{2}{3}\sin\left(60^\circ+\frac{\psi}{3}\right)\sqrt{(3d^2+h^2)}$. Man hat also $b = x + \frac{1}{3}h$ und nach der Aufg. 9., oder 44., die übrigen Größen.

c., Ist $\frac{d}{h} < \sqrt{\left[\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})\right]}$, dann hat die Gleichung nur Eine reelle, und zwar wegen $+\frac{2}{27}h\,(18d^2+h^2)$ positive Wurzel. Setzt man $\frac{(3d^2+h^2)\sqrt{(3d^2+h^2)}}{h(18d^2+h^2)} = \sin\varphi$ und $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi$, dann wird $x = \frac{2}{3\sin 2\psi}\sqrt{(3d^2+h^2)}$. Hieraus findet man $b = x + \frac{1}{3}h$ und dann nach der Aufg. 9., oder 44., die übrigen Größen.

Aufgabe 49., Gegeben I., $a + b = s$, II., h.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c} = \frac{s}{c}$, ferner $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{ab}{c^2} = \frac{ch}{c^2} = \frac{h}{c}$. Also ist $\frac{h}{s} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}}$. Hieraus folgt

1., $\sin 2\alpha = \frac{2h\,[h + \sqrt{(h^2+s^2)}]}{s^2} = \frac{2h}{s}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}$ für $\frac{s}{h} =$ $= \mathrm{tg}\,\varphi$. — Wie in der Aufgabe 10., erhält man ferner $\sin\alpha =$ $= \frac{s \pm \sqrt{[s^2 + 4h\,(h - \sqrt{h^2+s^2})]}}{2\,[\sqrt{(h^2+s^2)} - h]}$ und $\sin\beta =$ $= \frac{s \mp \sqrt{[s^2 + 4h\,(h - \sqrt{h^2+s^2})]}}{2\,[\sqrt{(h^2+s^2)} - h]}$. Daraus folgt $\sin\alpha + \cos\alpha =$ $= \sin\alpha + \sin\beta = \frac{s}{\sqrt{(h^2+s^2)} - h}$. Also ist 2., $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$ $= \sqrt{(h^2+s^2)} - h$. — 3., $a = c\,\sin\alpha =$ $= \frac{1}{2}\left[s \pm \sqrt{\left(s^2 + 4h\,[h - \sqrt{h^2+s^2}\,]\right)}\right]$. — 4., $b = s -$ $- a = \frac{1}{2}\left[s \mp \sqrt{\left(s^2 + 4h\,[h - \sqrt{h^2+s^2}\,]\right)}\right]$. — Setzt man $\frac{s}{h} = \mathrm{tg}\,\varphi$ und $2\sqrt{\frac{h\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{s}} = \sin\psi$, dann wird

$$\left.\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\right\}\begin{matrix} \text{für } + \\ = \\ \text{für } - \end{matrix}\left\{\begin{matrix} s\cos\frac{\psi^2}{2} \\ \\ s\sin\frac{\psi^2}{2} \end{matrix}\right. .\text{— 5., } F = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}h[\sqrt{(h^2+s^2)} - h].$$

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $s^2 + 4h^2 \geqq 4h\sqrt{(h^2+s^2)}$, d. i. $s^2 \geqq 8h^2$ sei; denn dann sind a und b reell, und wegen $s^2 - 4h^2 \geqq 4h^2$, $s^4 - 4h^2s^2 \geqq 4h^2s^2$, $s^4 - 4h^2s^2 + 4h^4 \geqq 4h^4 + 4h^2s^2$, $s^2 - 2h^2 \geqq 2h\sqrt{(h^2+s^2)}$, $s^2 \geqq 2h[h + \sqrt{(h^2+s^2)}]$ ist $\sin 2\alpha \leqq 1$. Weil aus $s^2 \geqq 8h^2$ ferner $h^2 + s^2 \geqq 9h^2$, $\sqrt{(h^2+s^2)} \geqq 3h$, $h + \sqrt{(h^2+s^2)} \geqq 4h$ folgt, so ist dann auch, da $\frac{2h[h + \sqrt{(h^2+s^2)}]}{s^2} = \frac{2h}{s}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}$, also $h + \sqrt{(h^2+s^2)} = s\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}$ war, $s\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} \geqq 4h$, $\frac{4h}{s\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}} \leqq 1$, also $2\sqrt{\frac{h \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{s}} = \sin\psi \leqq 1$. — Jene Bedingung entspricht auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, ist $a^2+b^2 \geqq 2ab$, $a^2+2ab+b^2 = s^2 \geqq 4ab \geqq 4ch$; ferner $a^2+b^2=c^2 \geqq 2ab \geqq 2ch$, $c \geqq 2h$. Mithin ist $s^2 \geqq 8h^2$. — Ist $s^2=8h^2$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 = \beta$, $c = 2h = s\sqrt{{}^1/_2}$, $a = b = h\sqrt{2} = {}^1/_2\, s$, $F = h^2 = {}^1/_8\, s^2$.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2+b^2$, $a+b=s$ und $ab=ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden. — Setzt man den für c gefundenen Werth in den (Aufgabe 10., Anmerk. 2.,) gefundenen Ausdruck $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{s}{c\sqrt{2}}$, dann erhält man $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sqrt{(h^2+s^2)}+h}{s\sqrt{2}}$.

Aufgabe 50., Gegeben I., $a-b=d$, II., h.

Nach Analogie der Aufgabe 49., erhält man $\frac{h}{d} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{{}^1/_2\sin 2\alpha}{\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$. Hieraus folgt

1., $\sin 2\alpha = \frac{2h\,[\sqrt{(d^2+h^2)}-h]}{d^2} = \frac{2h}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ für $\frac{d}{h} = \operatorname{tg}\varphi$. — Hieraus ergiebt sich wie in der Aufgabe 11., $\sin\alpha = \frac{d+\sqrt{[d^2+4h\,(h+\sqrt{d^2+h^2})]}}{2\,[h+\sqrt{(d^2+h^2)}]}$ und $\sin\beta = \frac{-d+\sqrt{[d^2+4h\,(h+\sqrt{d^2+h^2})]}}{2\,[h+\sqrt{(d^2+h^2)}]}$. Also ist $\sin\alpha-\cos\alpha = \sin\alpha-\sin\beta = \frac{d}{h+\sqrt{(d^2+h^2)}}$, folglich 2., $c = \frac{d}{\sin\alpha-\cos\alpha} = h+\sqrt{(d^2+h^2)}$. — 3., $a = c\sin\alpha = \frac{1}{2}\Big[d+\sqrt{\big(d^2+4h[h+\sqrt{d^2+h^2}]\big)}\Big]$

4., $b = a - d = \frac{1}{2}\left[-d + \sqrt{\left(d^2 + 4h[h + \sqrt{d^2 + h^2}]\right)}\right]$. — Setzt man $\frac{d}{h} = \operatorname{tg}\varphi$ und $2\sqrt{\frac{h}{d\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}} = \operatorname{tg}\psi$, dann wird

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{dh}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}} \\ \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{dh}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}} \end{matrix}\right. . — 5., F = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}h[h + \sqrt{(d^2 + h^2)}].$$

Anmerk. 1. Aus $d^2 > 0$ (S. Aufgabe 11.) folgt $d^2 + 4h^2 > 4h^2$, $d^4 + 4d^2h^2 + 4h^4 > 4d^2h^2 + 4h^4 > 4h^2(d^2 + h^2)$, $d^2 + 2h^2 > 2h\sqrt{(d^2 + h^2)}$, $d^2 > 2h\sqrt{(d^2 + h^2)} - 2h^2 > 2h[\sqrt{(d^2 + h^2)} - h]$; also ist $\sin 2\alpha < 1$.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $a - b = d$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden. — Setzt man den für c gefundenen Werth in den (Aufgabe 11., Anmerk. 1.,) gefundenen Ausdruck $\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{d}{c\sqrt{2}}$, dann erhält man $\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{(d^2 + h^2)} - h}{d\sqrt{2}}$.

§. 16.

Aus der Verbindung der Höhe h mit der Summe der drei Seiten oder mit der Summe von je zweien weniger der dritten ergeben sich folgende Aufgaben:

51., $c + a + b$, h. — 52., $c + b - a$, h; $c + a - b$, h. — 53., $a + b - c$, h.

Aufgabe 51., Gegeben I., $c + a + b = S$, II., h.

Aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ folgt $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a + b}{c}$ und $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{c + a + b}{c} = \frac{S}{c}$. Da ferner $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{ab}{c^2} = \frac{ch}{c^2} = \frac{h}{c}$ ist, so wird $\frac{h}{S} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{1 + \sqrt{(1 + \sin 2\alpha)}}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4h(h+S)}{S^2}$ folgt. — Wie in der Aufgabe 10., findet man ferner $\sin\alpha = \frac{2h + S \pm \sqrt{[S^2 - 4h(h+S)]}}{2S}$ und $\sin\beta = \frac{2h + S \mp \sqrt{[S^2 - 4h(h+S)]}}{2S}$. Also wird $1 + \sin\alpha + {}$ $+ \cos\alpha = 1 + \sin\alpha + \sin\beta = \frac{2(h+S)}{S}$. Folglich ist 2., $c = \frac{S}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{S^2}{2(h+S)}$. — 3., $a = c\sin\alpha =$ $= S\,\frac{2h + S \pm \sqrt{[S^2 - 4h(h+S)]}}{4(h+S)}$. — 4., $b = c\sin\beta =$ $= S\,\frac{2h + S \mp \sqrt{[S^2 - 4h(h+S)]}}{4(h+S)}$. Setzt man $\frac{2\sqrt{[2h(h+S)]}}{2h+S} =$

$$= \sin\varphi, \text{ dann wird } \left.\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{für} + \\ = \\ \text{für} - \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \cot g \frac{\varphi}{2}\, S\sqrt{\frac{h}{2(h+S)}} \\ \\ tg \frac{\varphi}{2}\, S\sqrt{\frac{h}{2(h+S)}} \end{matrix}\right. . \text{ —}$$

5., $F = \frac{1}{2}ch = \frac{hS^2}{4(h+S)}$.

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $S^2 \geqq 4h(h+S)$ sei; denn dann ist $\sin 2\alpha \leqq 1$ und a und b sind reell. Weil dann auch $S^2 + 4hS + 4h^2 \geqq 8h^2 + 8hS$, $S + {}$ $+ 2h \geqq 2\sqrt{[2h(h+S)]}$ ist, so wird $\sin\varphi \leqq 1$. Auch entspricht jene Bedingung der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2c^2 + 2ab + 2ac +$ $+ 2bc = 2cS + 2ab = 2cS + 2ch = 2c(h+S)$. Ferner ist, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 =$ $= c^2 \geqq 2ab \geqq 2ch$, also $c \geqq 2h$. Also ist $S^2 \geqq 4h(h+S)$. Ist $S^2 = 4h(h+S)$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^0$, $\alpha = 45^0 =$ $= \beta$, $c = 2h = S(\sqrt{2} - 1)$, $a = b = h\sqrt{2} = \frac{1}{2}s(2 - \sqrt{2})$, $F = h^2 = \frac{1}{4}S^2(3 - 2\sqrt{2})$.

Anmerk. 2., Da nach der Aufgabe 27., $\sin\alpha + \cos\alpha + 1 = 1 + \sin\alpha + \sin\beta = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so wird $\frac{h}{S} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{2} = \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$, woraus $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2h+S}{S\sqrt{2}}$ folgt.

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $c + a + b = S$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen ableiten.

Aufgabe 52., Gegeben I., $c + b - a = s$, II., h.

Nach Analogie der Aufgabe 51., erhält man $\frac{h}{s} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{1 - \sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4h(s-h)}{s^2}$ folgt. — Hieraus findet man wie in der Aufgabe 11., $\sin\alpha = \frac{\pm(s-2h) + \sqrt{[s^2 + 4h(s-h)]}}{2s}$ und $\sin\beta = \frac{\mp(s-2h) + \sqrt{[s^2+4h(s-h)]}}{2s}$. — Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, daß $s > h$ sei, woraus zugleich $s - h > h - s$, $4hs - 4h^2 > 4h^2 - 4hs$, $s^2 + 4hs - 4h^2 > s^2 - 4hs + 4h^2$, $\sqrt{[s^2 + 4h(s-h)]} > \pm(s-2h)$ folgt; denn dann werden die vorstehenden Ausdrücke reell und positiv. Auch entspricht dieses der Natur des rechtwinkligen Dreiecks, in welchem aus $c - a > 0$, und weil $b > h$ ist, $c + b - a = s > h$ folgt. — Aus $(s - 2h)^2 \geqq 0$, $s^2 - 4hs + 4h^2 \geqq 0$ folgt ferner, daß $s^2 \geqq 4h(s-h)$, also, was die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, $\sin 2\alpha \leqq 1$ ist, daß mithin $s \gtreqless 2h$ sein kann. Auch dieses entspricht der Natur des rechtwinkligen Dreiecks; denn je nachdem $a \gtreqless b$ ist, wird, weil $c > a - b$ ist, $(a-b)(a-b) \gtreqless c(a-b)$, $a^2 - 2ab + b^2 \gtreqless ac - bc$,

$c^2+bc-ac \gtreqless 2ab$, $c+b-a \gtreqless \frac{2ab}{c}$, d. i. $s \gtreqless 2h$. — Ist $s=2h$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$. — Ist $s > 2h$, dann ist $a < b$, also $\sin\alpha < \sin\beta$; folglich gilt für $\sin\alpha$ das negative, für $\sin\beta$ das positive Zeichen. — Ist dagegen $s < 2h$, dann ist $a > b$, also $\sin\alpha > \sin\beta$. Weil aber in diesem Falle $s-2h$ negativ ist, so muß für $\sin\alpha$ ebenfalls das negative, für $\sin\beta$ das positive Zeichen genommen werden. Also ist $\sin\alpha = \frac{2h-s+\sqrt{[s^2+4h(s-h)]}}{2s}$, $\sin\beta = \frac{s-2h+\sqrt{[s^2+4h(s-h)]}}{2s}$.

Es ist daher $\cos\alpha - \sin\alpha + 1 = \sin\beta - \sin\alpha + 1 = \frac{2(s-h)}{s}$; folglich 2., $c = \frac{s}{\cos\alpha - \sin\alpha + 1} = \frac{s^2}{2(s-h)}$. Für $s = 2h$ wird $c = s = 2h$. — 3., $a = c\sin\alpha = s\frac{2h-s+\sqrt{[s^2+4h(s-h)]}}{4(s-h)}$. 4., $b = c\sin\beta = s\frac{s-2h+\sqrt{[s^2+4h(s-h)]}}{4(s-h)}$. Für $s = 2h$ wird $a = b = s\sqrt{\frac{1}{2}} = h\sqrt{2}$. — Ist $s \gtrless 2h$, dann setze man $\frac{2\sqrt{[2h(s-h)]}}{s-2h} = \operatorname{tg}\varphi$; und es wird für $s > 2h$

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, s\sqrt{\frac{h}{2(s-h)}} \\ \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\, s\sqrt{\frac{h}{2(s-h)}} \end{matrix}\right.$$

Für $s < 2h$ müssen (Aufgabe 31.,) die Werthe von a und b verwechselt werden. — 5., $F = \frac{1}{2}ch = \frac{hs^2}{4(s-h)}$. Für $s = 2h$ wird $F = \frac{1}{4}s^2 = h^2$.

Anmerk. 1., Da nach der Aufgabe 28., $\cos\alpha - \sin\alpha + 1 = 1 + \sin\beta - \sin\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{1/2}$ ist, so wird $\frac{h}{s} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha + 1} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{2} = \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$, woraus $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2h-s}{s\sqrt{2}}$ folgt.

Anmerk. 2., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $c+b-a = s$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

Aufgabe 53., Gegeben I., $a + b - c = s$, II., h.

Nach Analogie der Aufgabe 51., erhält man $\frac{h}{s} =$ $= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)} - 1}$, woraus

1., $\sin 2\alpha = \frac{4h(h-s)}{s^2}$ folgt. — Wie in der Aufgabe 10., ist ferner $\sin\alpha = \frac{2h - s \pm \sqrt{[s^2 - 4h(h-s)]}}{2s}$ und $\sin\beta =$ $= \frac{2h - s \mp \sqrt{[s^2 - 4h(h-s)]}}{2s}$. Also wird $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 =$ $= \frac{2(h-s)}{s}$. Folglich ist 2., $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \frac{s^2}{2(h-s)}$. —

3., $a = c\sin\alpha = s\,\frac{2h - s \pm \sqrt{[s^2 - 4h(h-s)]}}{4(h-s)}$. —

4., $b = c\sin\beta = s\,\frac{2h - s \mp \sqrt{[s^2 - 4h(h-s)]}}{4(h-s)}$. —

Setzt man $\frac{2\sqrt{[2h(h-s)]}}{2h - s} = \sin\varphi$, dann wird

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{für} + \\ = \\ \text{für} - \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \cot g\frac{\varphi}{2}\, s\sqrt{\frac{h}{2(h-s)}} \\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\, s\sqrt{\frac{h}{2(h-s)}} \end{matrix} \right. . - 5.,\ F = \frac{1}{2}ch = \frac{hs^2}{4(h-s)}.$$

Anmerk. 1., Die Möglichkeit der Aufgabe verlangt erstens, daß $h > s$ sei, woraus zugleich $h - s > s - h$, $4h^2 - 4hs > 4hs - 4h^2$, $4h^2 - 4hs + s^2 > s^2 + 4hs - 4h^2$, $2h - s > \sqrt{[s^2 - 4h(h-s)]}$ folgt; ferner, daß $s^2 \geqq 4h(h-s)$ sei; denn dann werden alle Ausdrücke reell und positiv, und $\sin 2\alpha$ wird $\leqq 1$. Weil aus $s^2 \geqq 4h^2 - 4hs$ auch $4h^2 - 4hs + s^2 \geqq 8h^2 - 8hs$, $2h - s \geqq 2\sqrt{[2h(h-s)]}$ folgt, so wird $\sin\varphi \leqq 1$. — Jene Bedingungen entsprechen auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks. Es ist nehmlich $s^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc + c^2 = 2ab - 2c(a + b - c) = 2ch - 2cs = 2c(h-s)$, also $h > s$. Da ferner, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind, $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $c^2 \geqq 2ch$, $c \geqq 2h$ ist, so wird $s^2 \geqq 4h(h-s)$. — Ist $s^2 = 4h(h-s)$, dann wird $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$, $c = 2h = s(1 + \sqrt{2})$, $a = b = h\sqrt{2} = s(1 + \sqrt{1/2})$, $F = h^2 = \frac{1}{4} s^2 (3 + 2\sqrt{2})$.

Anmerk. 2., Da nach der Aufgabe 29., $\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \sin\alpha + \sin\beta - 1 = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so wird $\frac{h}{s} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sqrt{2} = \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}},$$ woraus

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2h-s}{s\sqrt{2}}$$ folgt.

Anmerk. 3., Aus $c^2 = a^2 + b^2$, $a + b - c = s$ und $ab = ch$ kann man auch zuerst c und dann die übrigen Größen finden.

§. 17.

Die Verbindung der Höhe h mit dem Radius ϱ giebt die Aufgabe 54., ϱ, h.

Aufgabe 54., Gegeben I., ϱ, II., h.

Nach Analogie der Aufgabe 51., kommt man auf $\frac{h}{2\varrho} =$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{{}^1\!/_2\sin 2\alpha}{\sqrt{[(1+\sin 2\alpha)-1]}}$$, woraus man $\sin 2\alpha$ und dann die übrigen Größen findet. Da aber $a+b-c=2\varrho$ ist, in der Aufgabe 53., $a+b-c=s$ war, so ist $2\varrho=s$. Man kann daher diese Aufgabe auch unmittelbar aus jener ableiten, indem man in die dort gefundenen Ausdrücke 2ϱ für s setzt.

Es ist also: 1., $\sin 2\alpha=\frac{h(h-2\varrho)}{\varrho^2}$. — 2., $c=\frac{2\varrho^2}{h-2\varrho}$. — 3., $a=\varrho\,\frac{h-\varrho\pm\sqrt{[\varrho^2-h(h-2\varrho)]}}{h-2\varrho}$. 4., $b=\varrho\,\frac{h-\varrho\mp\sqrt{[\varrho^2-h(h-2\varrho)]}}{h-2\varrho}$. — Setzt man $\frac{\sqrt{[2h(h-2\varrho)]}}{h-\varrho}=\sin\varphi$, dann wird

$$\left.\begin{matrix}a\\=\\b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{für}+\\ \\ \text{für}-\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\,\varrho\sqrt{\frac{2h}{h-2\varrho}}\\ \\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,\varrho\sqrt{\frac{2h}{h-2\varrho}}\end{matrix}\right. .—5.,\ F=\frac{h\varrho^2}{h-2\varrho}.-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{h-\varrho}{\varrho\sqrt{2}}.$$

Anmerk. Die Determination dieser Aufgabe folgt unmittelbar aus der der vorhergehenden.

Verbesserungen.

Außer einigen minder störenden Druckfehlern ist folgendes zu ändern:

S. 28. Anmerk. 1., wird besser aus $(S^2-4F)^2 \overset{=}{>} 16FS^2$ abgeleitet: $S^2-4F \overset{=}{>} 4S\sqrt{F}$, $S^2 \overset{=}{>} 4S\sqrt{F}+4F$, also $S^2>4F$.

S. 29. Z. 10. v. o. fehlt vor Ist: Aus $(s^2-4F)^2 \overset{=}{>} 0$, $s^4-8Fs^2+16F^2 \overset{=}{>} 0$ folgt, daß $16F^2+8Fs^2+s^4=(4F+s^2) \overset{=}{>} \overset{=}{>} 16Fs^2$, also, was die Möglichkeit der Aufgabe verlangt, $\sin 2\alpha \overset{=}{<} 1$ ist, daß mithin $s^2 \overset{=}{\underset{<}{>}} 4F$ sein kann, was auch der Natur des rechtwinkligen Dreiecks entspricht.

S. 32. Anmerk. 1., wird besser aus $(4F-s^2)^2 \overset{=}{>} 16Fs^2$ abgeleitet: $4F-s^2 \overset{=}{>} 4s\sqrt{F}$, $4F \overset{=}{>} 4s\sqrt{F}+s^2$, also $4F>s^2$.

S. 53. Z. 5. v. u. ist zu lesen $h^2(18d^2+h^2)^2$ für $h^2(18d^2+h^2)$.

Auch das schiefe Parallelepipedum wird unter Bedingungen durch die Diagonalebene in zwei congruente dreiseitige Prismen getheilt.

Der Satz des Euklid: Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπ' ἐναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (στοιχ. ια. πρότ. κη. θεώρ.) wird aus einem sehr allgemeinen, in der Definition: Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει (στοιχ. ια. ὅρ. ι.) enthaltenen Satze abgeleitet; ein Beweis, der nur für das gerade Parallelepipedum genügen kann, bei welchem die beiden Prismen congruent sind. Mit Recht sind daher Erörterungen veranlaßt worden. — Karsten (Lehrbegriff der Mathematik Geom. §. 343.) beweist die Gleichheit der beiden Prismen für jedes Parallelepipedum durch die Exhaustionsmethode. — Andere geben diesem Satze eine andere Stelle im System und nehmen auf die Congruenz gleichfalls keine Rücksicht. — Soll die Congruenz benutzt werden, dann wird aus derselben beim geraden Parallelepipedum mittelst einer einfachen Construction die Gleichheit der beiden Prismen beim schiefen gefolgert, und, so viel mir bekannt ist, überall angenommen, daß im letztern Falle die Prismen nie congruent sind. So sagt Grunert (Stereometrie 2te Ausg. §. 206. Anm.): „Daß bei einem geraden Parallelepipedum die zwei dreiseitigen Prismen sich decken, ist klar. Aber bei einem schiefen ist nicht derselbe Fall, daß also die obige für gerade Parallelepipeda ganz richtige Schlußweise auf schiefe Parallelepipeda, wie dieses von einigen Mathematikern geschehen ist, durchaus nicht ausgedehnt werden darf. Der Grund hievon liegt in dem Unterschiede der Congruenz und Symmetrie.“ Diese Behauptung ist aber nicht allgemein wahr; denn

Auch das **schiefe** Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene in zwei **congruente** dreiseitige Prismen getheilt, wenn die Basen dieser Prismen gleichschenklige Dreiecke, und wenn die zu den Grundlinien dieser Basen gehörenden Seitenflächen Rechtecke sind.

Entweder sind die Grundflächen A B C D, a b c d des Parallelepipedums Rhomben, und die Diagonalebene Ac ist ein Rechteck,

Oder die Grundflächen A B C D, a b c d des Parallelepipedums sind Rhomboide, die Diagonallinien A C, a c den Seiten A D und B C, a d und b c gleich und die zu den andern Seiten gehörenden Seitenflächen Ab, Dc Rechtecke.

Im ersten Falle sind die Ecken D und b und so der Ordnung nach die andern congruent. Im zweiten Falle sind die Ecken A C b B und d a C c und so der Ordnung nach die andern congruent.

Die Beweise für beide Fälle ergeben sich aus den Sätzen über den Neigungswinkel einer Linie zu einer Ebene und dem Satze, daß im körperlichen Dreiecke gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen. Aus jenen leite man zuvor den Satz ab: Wenn in einem dreiseitigen schiefen Prisma die Basen A B C, a b c gleichschenklige Dreiecke sind, und wenn die zu den Grundlinien dieser Basen gehörende Seitenfläche A b ein Rechteck ist, dann bildet die dritte Seitenkante C c mit den Schenkeln der Basen gleiche Winkel: C c a = C c b, c C A = c C B.

Ohne jene Bedingungen findet nicht Congruenz Statt, weil an keinem Paar der körperlichen Ecken die gleichen Winkel und Kanten in derselben Ordnung an einander liegen.

Im Rhomboid können jene Bedingungen nur für die den spitzen Winkeln gegenüberliegende Diagonalebene eintreten. — Hat das Rhomboid rechte Winkel (Rechteck), dann kann keine der beiden Diagonalebenen congruente Prismen geben. — Beim Rhombus, gleichviel ob mit schiefen oder rechten Winkeln (Quadrat), können durch jede der beiden Diagonalebenen congruente Prismen entstehen; findet es aber bei beiden zugleich Statt, dann ist das Parallelepipedum gerade. — Wenn im Rhombus die den spitzen Winkeln gegenüberliegende Diagonale den Seiten gleich ist, also wenn die Dreiecke gleichseitig sind, dann kann Congruenz nach beiden Fällen stattfinden; kommen aber beide zugleich in Anwendung, dann ist das Parallelepipedum gerade.

J. A. Lilienthal.