Theorie des schiefen Schnittes unter bestimmten Kreisen und Graden.

Von A. Anderssen.

I. Allgemeine Bestimmungen für den schiefen Schnitt sowohl von Kreisen und Kreisen, als auch von Kreisen und Graden.

1. Der isodrome und antidrome Schnitt zweier Kreise. Soll um einen Punkt M ein Kreis beschrieben werden, so kann die Drehung des Halbmessers auf zwei einander entgegengesetzte Weisen erfolgen. Zieht man durch den Mittelpunkt M von links nach rechts eine queer liegende Achse, so kann der Halbmesser oberhalb derselben entweder von links nach rechts (also unterhalb derselben von rechts nach links) oder von rechts nach links (also unterhalb derselben von links nach rechts) gedreht werden. Wir wollen die erstere Drehungsrichtung als die positive, die letztere als die negative betrachten. Demgemäss ist auch die Richtung der Tangente in einem beliebigen Peripheriepunkte, jenachdem durch sie die positive oder die negative Drehungsrichtung bestimmt wird, als positiv oder als negativ zu bezeichnen.

Schneiden sich zwei Kreise M und m, und ist B der eine von ihren Schnittpunkten, so können sich beide Kreise im Punkte B entweder mit gleicher Tangentenrichtung (isodrom) oder mit entgegengesetzter Tangentenrichtung (antidrom) begegnen. Es sei $\begin{Bmatrix} BC \\ Bc \end{Bmatrix}$ die positive, $\begin{Bmatrix} BC' \\ Bc' \end{Bmatrix}$ die negative Richtung der Tangente im Punkte B an den Kreis $\begin{Bmatrix} M \\ m \end{Bmatrix}$, so schneiden sich die Kreise isodrom unter dem Winkel CBc (oder C'Bc'), den die positive Tangentenrichtung BC mit der positiven Bc (oder die negative BC' mit der negativen Bc') bildet, dagegen antidrom unter dem Winkel CBc' (oder C'Bc), den die positive Tangentenrichtung BC mit der negativen Bc' (oder die negative BC' mit der positiven Bc) bildet. Schneiden sich zwei Kreise isodrom unter dem Winkel α, so schneiden sie sich antidrom unter dem Winkel $\alpha' = \pi - \alpha$, und umgekehrt. Schneiden sich zwei Kreise orthogonal, so begegnen sie sich sowohl isodrom als auch antidrom unter einem Rechten.

Der isodrome Schnitt zweier Kreise M und m wird bestimmt durch denjenigen Winkel, den die, nach dem einen Schnittpunkt B gezogenen Radien MB und mB einschliessen; also durch den Winkel MBm; denn sowohl $\angle$ CBc als auch $\angle$ MBm ist $= \frac{\pi}{2} \pm$ CBm, wobei das obere Zeichen gilt, wenn CBc ein stumpfer, das untere Zeichen, wenn CBc ein spitzer Winkel ist. Wird gesagt: zwei Kreise schneiden sich unter einem Winkel α, so soll, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, stets der isodrome Schnitt gemeint sein. Ferner mögen die Winkel α, β etc. stets spitze Winkel, dagegen α', β' etc. ihre (stumpfwinkligen) Supplemente bedeuten.

2. Der gleichartige und der ungleichartige Schnitt. Zwei Kreise M u. m werden von einem Kreise K unter dem Winkel α gleichartig geschnitten, wenn beide dem letzteren entweder isodrom oder antidrom unter diesem Winkel begegnen, oder was dasselbe ist, wenn die Kreise M und m vom Kreise K isodrom, aber beide unter dem spitzen Winkel α, oder beide unter dem stumpfen Winkel α' geschnitten werden. Dagegen werden die Kreise M und m von dem Kreise K unter dem Winkel α ungleichartig geschnitten, wenn der eine von ihnen dem letzteren isodrom, der andere antidrom unter diesem Winkel begegnet, oder was dasselbe ist, wenn beide dem letzteren isodrom, aber der eine unter dem Winkel α, der andere unter dem Winkel α', begegnen.

Zwei Kreise M und m werden von einem Kreise K bezüglich unter den Winkeln α und β gleichartig geschnitten, wenn beide dem letzteren entweder isodrom oder antidrom unter dem bezüglichen Winkel begegnen, oder was dasselbe ist, wenn die Kreise M und m vom Kreise K isodrom, aber beide bezüglich unter den spitzen Winkeln α und β, oder beide bezüglich unter den stumpfen Winkeln α' und β' geschnitten werden. Dagegen werden die Kreise M und m von dem Kreise K unter den Winkeln α und β ungleichartig geschnitten, wenn der eine von ihnen dem letzteren isodrom, der andere antidrom unter dem bezüglichen Winkel begegnet, oder was dasselbe ist, wenn beide dem letzteren isodrom, aber der eine unter dem bezüglichen spitzen Winkel, der andere unter dem Supplement des bezüglichen Winkels, begegnen.

Zwei Kreise M_1 und M_2 werden von zwei andern Kreisen K_1 und K_2 bezüglich unter den Winkeln α und β relativ gleichartig geschnitten, wenn der Schnitt eines jeden der Kreise M mit beiden Kreisen K ein, unter dem bezüglichen Winkel gleichartiger ist, also wenn $\left\{\begin{matrix}\text{Kr. } M_1\\ \text{Kr. } M_2\end{matrix}\right\}$ beiden Kreisen K unter demselben Winkel, sei es $\left\{\begin{matrix}\alpha \text{ oder } \alpha'\\ \beta \text{ oder } \beta'\end{matrix}\right\}$, begegnet. Dagegen werden die Kreise M_1 und M_2 von den Kreisen K_1 und K_2 bezüglich unter den Winkeln α und β relativ ungleichartig geschnitten, wenn der Schnitt eines jeden der Kreise M mit beiden Kreisen K ein, unter dem bezüglichen Winkel ungleichartiger ist, also wenn $\left\{\begin{matrix}\text{Kr. } M_1\\ \text{Kr. } M_2\end{matrix}\right\}$ irgend einem der Kreise K unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$, dem andern unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right\}$ begegnet.

3. Bestimmungsstücke des schiefen Schnittes zweier Kreise. Ein Kreis M mit dem Radius R wird von einem Kreise K in den Punkten B und b geschnitten. Ziehen wir die Radien MB und KB, so stellt der Winkel MBK den Schnittwinkel α oder α' beider Kreise vor. Im Punkte B legen wir eine Tangente BC von positiver Richtung an den Kreis M. Ist nun

$\angle$ MBK ein $\left\{\begin{matrix}\text{spitzer}\\ \text{stumpfer}\end{matrix}\right\}$ Winkel, so ist der Radius KB des thätigen Kreises von dem rechten Winkel MBC $\left\{\begin{matrix}\text{eingeschlossen}\\ \text{ausgeschlossen}\end{matrix}\right\}$ und schneidet daher, über $\left\{\begin{matrix}K\\ B\end{matrix}\right\}$ verlängert, (oder auch selbst schon) den leidenden Kreis nochmals im Punkte B'. Die Sehne BB' $= 2$ S hat für alle Kreise K, welche den Kreis M unter dem Winkel α isodrom oder antidrom schneiden, den unveränderlichen Werth $2R\cos\alpha$, sie ist daher rücksichtlich des leidenden Kreises M die B e s t i m m u n g s s e h n e für den Schnittwinkel α, und wir bezeichnen ihre halbe Länge durch S_α. Für den orthogonalen Schnitt ist $S_\alpha = 0$, für die Berührung $= R$. Jede Sehne $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, welche an einen beliebigen Radius $M\mathfrak{B}$ unter dem Winkel α im Punkte $\mathfrak{B}$ angelegt wird, stellt die Bestimmungssehne vor. Ein Loth aus dem Mittelpunkte M auf eine solche Sehne $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ soll das B e s t i m m u n g s l o t h, und ein mit dem letzteren um M beschriebener Kreis soll der B e s t i m m u n g s k r e i s für den Schnittwinkel α heissen.

Soll aus einem gegebenen Punkte K ein Kreis konstruirt werden, der einen gegebenen Kreis M unter einem gegebenen Winkel α schneidet, so beschreibe man um M den Bestimmungskreis, lege an denselben aus K eine Tangente an, welche bei gehöriger Verlängerung den Kr. M in B und B' schneidet, und beschreibe um K zwei Kreise, den einen mit dem Radius KB, den andern mit dem Radius KB', so schneiden beide Kreise den gegebenen M unter dem Winkel α, und zwar beide isodrom, wenn der Mittelpunkt K des thätigen Kreises innerhalb des leidenden Kreises liegt, dagegen der eine isodrom, der andere antidrom, wenn der Punkt K ausserhalb des Kreises M liegt. Ist K ein Peripheriepunkt des Kreises M, so verschwindet der eine jener beiden Kreise in den Punkt K. Die Annäherung dieses Punktes K an den Mittelpunkt M hat, wie sich aus der Konstruktion des Kr. K ergiebt, das Bestimmungsloth zur Grenze. Im Grenzfalle selbst haben beide Kreise K die halbe Bestimmungssehne zum Radius und fallen somit in einen zusammen.

Wird ein Kreis M von zwei Kreisen K' und K'', die einander selbst orthogonal schneiden, in demselben Punkte B unter den Winkeln α und β (isodrom oder antidrom) geschnitten, so stehen die Bestimmungssehnen BB' und BB'' des Kreises M für die Schnittwinkel α und β in B auf einander senkrecht, und $\angle\,\beta$ ist das Komplement des Winkels α. Offenbar ist das Bestimmungsloth für den Schnittwinkel β gleich der halben Bestimmungssehne für den Schnittwinkel α. Daher mag der um M mit dem Radius S_α beschriebene Kreis, als Bestimmungskreis für den Schnittwinkel β, der K o m p l e m e n t ä r k r e i s für den Schnittwinkel α heissen.

4. D e r S c h n i t t e i n e s K r e i s e s d u r c h e i n e G r a d e. Der Kreis M wird von einer Graden L in den Punkten B und b geschnitten. Da die Drehungsrichtung einer Graden (als eines uneigentlichen Kreises, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt) unbestimmt ist, so verstehen wir unter dem Schnittwinkel eines Kreises M und einer Graden L im Allgemeinen nur den spitzen Winkel, den die Tangente in B mit der Graden bildet. Die Bestimmungssehne BB' steht in B auf der Graden L senkrecht, wie überhaupt immer auf der Peripherie des thätigen Kreises. Fällen wir aus dem Mittelpunkte M ein Loth MD auf die Grade L, so ist $\angle$ BMD, wie auch $\angle$ MBB' gleich dem Schnittwinkel α des Kreises und der Graden. Da das Loth MD die halbe Bestimmungssehne, mithin ein Kreis um M mit dem Radius MD den Komplementärkreis (α) vorstellt, so folgt, dass eine Grade, welche den Komplementärkreis (α) berührt, den gegebenen Kreis M unter dem Winkel α schneidet.

Zwei Kreise M und m werden von einer Graden L bezüglich unter den Winkeln α und β (oder auch unter demselben Winkel α) gleichartig oder ungleichartig geschnitten, je nachdem die Mittelpunkte der Kreise auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Graden liegen. Alle Graden, von welchen zwei Kreise unter demselben Winkel $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten werden, gehen durch den $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt der Kreise.

II. Aufgaben über den Schnitt von Kreisen und Graden.

5. **Einen Kreis zu konstruiren, der eine gegebene Grade L unter einem gegebenen Winkel α schneidet und durch zwei, ausserhalb der Graden gegebene Punkte M und N geht.**

Fig. 1. Der gesuchte Kreis schneide die Grade L in den Punkten B und b; sein Mittelpunkt sei K, so ist ein Ort desselben bekannt, nämlich der Perpendikel, auf der Verbindungslinie MN in ihrem Mittelpunkte C errichtet, welcher der Graden L im Punkte E begegnet. Es hat keine Schwierigkeit, aus einem beliebigen Punkte 𝔎 der CE einen Kreis zu beschreiben, der die Grade L ebenfalls unter dem Winkel α (in den Punkten 𝔅 und 𝔟) schneidet. Ist dies geschehen, so haben wir zwei Kreise K und 𝔎, die beide von der Graden L unter demselben Winkel gleichartig oder ungleichartig geschnitten werden. Folglich ist der Punkt E, in welchem die Grade L der Central-linie K𝔎 begegnet, der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise. (4). Demnach ist auch die Verbindungslinie EN des Punktes E mit dem einen der gegebenen Punkte ein äusserer oder innerer Aehnlichkeitsstrahl. Wird daher die Grade CE von dem Kreise 𝔎 in den Punkten 𝔑 und 𝔑′ geschnitten, so ist der eine oder der andere von diesen Punkten dem Punkte N zugeordnet. Mithin ist der Radius KN des gesuchten Kreises dem einen oder dem andern der Radien 𝔎𝔑 und 𝔎𝔑′ des Hülfskreises parallel und daher Punkt K bekannt.

Konstruktion. Man errichte auf der Verbindungslinie MN in ihrem Mittelpunkte C einen Perpendikel, der die Grade L in E schneidet, und verbinde E mit dem einen der gegebenen Punkte, nämlich gleichviel mit welchem, wenn CE auf L senkrecht steht, andernfalls aber mit demjenigen, der in dem spitzen Neigungswinkel der CE gegen L liegt, hier mit dem Punkte N, rechts von CE. Auf derselben Seite von CE wähle man in L einen beliebigen Punkt 𝔅, lege in ihm an die Grade L, unterhalb derselben, einen Winkel E𝔅𝔅′ $= \alpha$ an und errichte auf 𝔅𝔅′ in 𝔅 ein Loth, welches die Grade CE in 𝔎 schneidet. Darauf beschreibe man um den Punkt 𝔎 einen Kreis mit dem Radius 𝔎𝔅, der die beliebig zu verlängernde Grade EN in den Punkten 𝔑 und 𝔑′ schneidet, und ziehe durch N zu den Radien 𝔑𝔎 und 𝔑′𝔎 die Parallelen NK und NK′, welche der beliebig zu verlängernden Graden CE in den Punkten K und K′ begegnen, so erfüllen die, um die Punkte K und K′ mit den Radien KN und K′N beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Denn erstens gehen die Kreise K und K′ durch die gegebenen Punkte M und N. Ferner schneidet zunächst der Hülfskreis 𝔎 die Grade L unter dem gegebenen Winkel α. Da aber die Radien

$\left\{\begin{matrix}KN \text{ und } \mathfrak{K}\mathfrak{N} \\ K'N \text{ und } \mathfrak{K}\mathfrak{N}'\end{matrix}\right\}$ einander parallel und von $\left\{\begin{matrix}\text{gleicher} \\ \text{entgegengesetzter}\end{matrix}\right\}$ Richtung sind, so ist Punkt E für die Kreise $\left\{\begin{matrix}K \text{ und } \mathfrak{K} \\ K' \text{ und } \mathfrak{K}\end{matrix}\right\}$ der $\left\{\begin{matrix}\text{äussere} \\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt. Folglich ist die gegebene Grade L ein $\left\{\begin{matrix}\text{äusserer} \\ \text{innerer}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl der Kreise $\left\{\begin{matrix}K \text{ und } \mathfrak{K} \\ K' \text{ und } \mathfrak{K}\end{matrix}\right\}$ und schneidet daher den Kreis $\mathfrak{K}$ und den Kreis $\left\{\begin{matrix}K \\ K'\end{matrix}\right\}$ unter demselben Winkel α.

Anmerkung 1. Es sei β derjenige Winkel, unter welchem die Verbindungslinie MN der gegebenen Punkte bei gehöriger Verlängerung der Graden L begegnet. So lange $\alpha > \beta$, mithin $\frac{\pi}{2} - \alpha$ d. i. $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{K}\mathfrak{B}E$ $< \frac{\pi}{2} - \beta$ d. i. $\mathfrak{W}.\ \mathfrak{K}E\mathfrak{B}$, wird auch $\mathfrak{K}\mathfrak{B} > \mathfrak{K}E$ sein und der Hülfskreis $\mathfrak{K}$ den Punkt E umfassen. Dann aber sind die Punkte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$, folglich auch die Punkte K und K' durch den Punkt E getrennt, und die Kreise K und K' schneiden die Grade L unter dem gegebenen Winkel ungleichartig. Ist $\angle\, \alpha = \beta$, mithin $\mathfrak{K}\mathfrak{B} = \mathfrak{K}E$, so geht der Kreis $\mathfrak{K}$ durch den Punkt E, und $\mathfrak{N}'$ fällt mit E zusammen. Alsdann fällt der Punkt K' in's Unendliche, und der Kreis K' geht in die Grade MN über.

Ist endlich $\alpha < \beta$, also auch $\mathfrak{K}\mathfrak{B} < \mathfrak{K}E$, so ist der Punkt E von dem Kreise K ausgeschlossen, und die Punkte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ sind durch E nicht getrennt. Daher liegen jetzt auch die Punkte K und K' auf derselben Seite der Graden L, und die Kreise K und K' schneiden dieselbe gleichartig.

Anmerkung 2. Ist die Verbindungslinie der gegebenen Punkte auf der Graden L senkrecht, so dass die Ortslinie der Mittelpunkte K und K' der Graden L parallel läuft, so ist $\mathfrak{K}\mathfrak{B} = KB = KN$. Wenn man daher um den Punkt N mit dem Radius $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$ einen Kreis beschreibt, so sind dessen Schnittpunkte mit jener Ortsgraden die Mittelpunkte der die gestellte Forderung erfüllenden Kreise.

Anmerkung 3. Liegen die Punkte M und N auf verschiedenen Seiten der Graden L, so bleibt die Konstruktion im Wesentlichen dieselbe, wird aber unausführbar, wenn die Abnahme des Winkels α eine bestimmte Grenze überschreitet. Man errichtet nämlich wiederum auf der Verbindungslinie MN, welche der Graden L im Punkte O unter dem Winkel β begegnet, in ihrem Mittelpunkte C den Perpendikel CE und verbindet den Punkt E mit demjenigen der gegebenen Punkte, der von C durch die Grade L getrennt ist, also mit N, wählt hierauf den Punkt $\mathfrak{B}$ auf der Graden L innerhalb des Winkels CEN und fährt in der oben angegebenen Weise fort. Da aber diesmal die Grade EN vom Winkel $CE\mathfrak{B}$ ausgeschlossen ist, so wird der um $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$ beschriebene Kreis die Grade EN zu schneiden aufhören, sobald der Radius $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$ kleiner wird als der, aus $\mathfrak{K}$ auf EN gefällte Perpendikel $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$. Zieht man durch N zu dem letzteren die Parallele Nk, welche der Verlängerung von CE im Punkte k begegnet, so ist der Kreis um k mit dem Radius kN der Grenzkreis, welcher unter allen, durch die Punkte M und N möglichen Kreisen die gegebene Grade unter dem kleinsten Winkel schneidet.

Es sei die halbe Länge der Verbindungslinie MN $= s$, der Abstand CO ihres Mittelpunktes C von ihrem Schnittpunkte O $= d$. Da $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$ mindestens gleich $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$ sein muss, so erhalten wir die Gleichung $\frac{E\mathfrak{K} \cos\beta}{\cos\alpha}$ $> E\mathfrak{K} \sin \mathfrak{K}EN$, also $\cos\alpha \sin \mathfrak{K}EN < \cos\beta$.

Es ist aber $\sin \mathfrak{K}EN = \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} = \dfrac{s \cos\beta}{\sqrt{s^2 \cos^2\beta + d^2 \sin^2\beta}}$; daher $\cos\alpha < \sqrt{\dfrac{\cos^2\beta + d^2 \sin^2\beta}{s^2}}$. Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem der um MN, als Durchmesser, beschriebene Kreis die Grade L schneidet, durch γ, so ist $\cos\gamma = \frac{d \sin\beta}{s}$, und wir erhalten

$$\cos\alpha < \sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma} \text{ oder } \alpha > \text{arc. cos} \sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma}.$$

Diese Gleichung, in welcher das Zeichen $>$ auch die Gleichheit vertritt, liefert alle Werthe des Winkels α, für welche die Aufgabe in dem gegenwärtigen Falle eine Lösung zulässt. Steht MN auf der Graden L senkrecht, so ist im Grenzfalle $\alpha = \gamma$, und der um MN als Durchmesser beschriebene Kreis stellt den Grenzkreis vor.

6. **Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Grade XX′ oder p und YY′ oder q bezüglich unter den Winkeln α und β schneidet.**

Fig. 2. Die Graden p und q, welche sich in einem Punkte O (der auch im Unendlichen liegen kann) begegnen, theilen die Ebene in die beiden Winkelflächen pq und p.q. Die Punkte K und k in der Winkelfläche pq sind die Mittelpunkte zweier, die gestellten Bedingungen erfüllenden Kreise; die Punkte $\left\{ \begin{matrix} \text{B und C} \\ \text{b und c} \end{matrix} \right\}$ sind die, dem Scheitel O zunächstliegenden Schnittpunkte des Kreises $\left\{ \begin{matrix} \text{K} \\ \text{k} \end{matrix} \right\}$ mit den Graden p und q. Demnach werden die Kreise K und k, jenachdem ihre Mittelpunkte durch den Scheitel O nicht getrennt oder getrennt sind, von den Graden p und q bezüglich unter den Winkeln α und β gleichartig oder ungleichartig geschnitten. Im ersten Falle ist der Scheitel O der äussere, im zweiten Falle der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und k. In beiden Fällen liegen daher die Punkte K, k und O auf einer Graden. Ebenso liegen in der Winkelfläche p.q die Mittelpunkte K′ und k′ zweier, der Aufgabe genügenden Kreise in einer Graden mit dem Scheitel O. Da nun die Punkte K und K′ durch die eine der gegebenen Graden, z. B. durch q, getrennt, durch die andere, also durch p, nicht getrennt sind, so werden die Kreise K und K′ von der Graden p unter dem Winkel α gleichartig, dagegen von der Graden q unter dem Winkel β ungleichartig geschnitten. Daher geht die Grade p durch den äusseren, die Grade q durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und K′. Hieraus folgt: **Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Grade p und q bezüglich unter den Winkeln α und β schneiden, liegen auf zwei Graden, welche durch die gegebenen Graden p und q harmonisch getrennt sind** (also auch durch den Schnittpunkt O derselben gehen). Ist daher die eine dieser beiden Ortslinien gefunden, so hat man auch die andere; zur Bestimmung jener einen aber genügt der Mittelpunkt K irgend eines Kreises, der die, in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt. Um sich einen solchen Punkt K zu verschaffen, hat man nur ein Viereck OBCK zu konstruiren, welches durch drei Winkel O, $\text{OBK} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\text{OCK} = \frac{\pi}{2} + \beta$ und durch das Verhältniss $\frac{\text{KB}}{\text{KC}} = 1$ seiner Gestalt nach bestimmt ist.

Konstruktion. Man lege an die Schenkel OX und OY in den beliebigen Punkten D und C, ausserhalb des Winkels XOY, die Winkel $\mathfrak{D}$DX $= \alpha$ und $\mathfrak{C}$CY $= \beta$ an und errichte auf den angelegten Schenkeln $\mathfrak{D}$D und $\mathfrak{C}$C in D und C Perpendikel, so werden dieselben 1. parallel sein, wenn die drei Winkel XOY, den wir mit φ bezeichnen, $\angle D = \frac{\pi}{2} + \alpha$ und $\angle C = \frac{\pi}{2} + \beta$ zusammen 4 Rechte betragen, also wenn $\alpha + \beta + \varphi = \pi$ ist, 2. sich in einem Punkte E innerhalb des Winkels XOY schneiden, wenn $\alpha + \beta + \varphi < \pi$, 3. sich in einem Punkte E′ innerhalb des Winkels X′OY′ schneiden, wenn $\alpha + \beta + \varphi > \pi$.

Im ersten Falle ist eine Parallele durch O zu jenen parallelen Perpendikeln die gesuchte Ortslinie. Nehmen wir auf derselben einen beliebigen Punkt K, so ist $\angle KOX = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle KOY = \frac{\pi}{2} - \beta$. Folglich geht jeder (eigentliche) Kreis aus der gefundenen Ortslinie, der die gegebenen Graden unter den gegebenen Winkeln schneidet, durch den Scheitel O. Ferner ist aber auch jede, auf dieser Ortslinie senkrechte Grade als ein, aus dem unendlich fernen Punkte der Ortslinie beschriebener (uneigentlicher) Kreis von der verlangten Beschaffenheit zu betrachten.

Im zweiten Falle schneide man auf dem grösseren Schenkel ED des entstandenen Winkels CED ein Stück EF gleich dem kleineren Schenkel EC ab, ziehe die Grade CF, verlängere sie bis zu ihrem Schnittpunkt B mit dem Schenkel OX und ziehe durch B zu DE eine Parallele, welche die Verlängerung der CE im Punkte K schneidet, so ist eine, durch die Punkte O und K gelegte Grade die gesuchte Ortslinie. Denn da EF = EC, so ist auch KB = KC; ferner $\angle KBX = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle KCY = \frac{\pi}{2} - \beta$. Folglich geht ein um den Punkt K mit dem Radius KB beschriebener Kreis durch die Punkte B und C und schneidet die gegebenen Graden unter den gegebenen Winkeln. Wie von dem ursprünglichen Kreise K, so ist auch von allen übrigen Kreisen K (d. h. von allen Kreisen aus der Ortslinie L von dem verlangten Verhalten gegen die gegebenen Graden) der Scheitel O ausgeschlossen, da jeder andere Kreis K mit dem ursprünglichen den von letzterem ausgeschlossenen Punkt O zum äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt hat, jenachdem nämlich sein Mittelpunkt von dem ursprünglichen Punkte K durch O nicht getrennt oder getrennt ist. Daher haben auch im gegenwärtigen Falle sämmtliche Kreise K in zwei durch O gehenden Graden t und t′ ein gemeinschaftliches Tangentenpaar, dessen Winkel tt′ durch die Ortslinie L halbirt wird.

Im dritten Falle endlich schneide man, wie zuvor, auf dem grösseren Schenkel E′D des entstandenen Winkels CE′D ein Stück E′F′ = E′C ab, ziehe die Grade CF′, welche den Schenkel OX in B′ schneidet, und durch B′ eine Parallele zur Graden E′D, welche dem Schenkel E′C des Winkels CE′D in K begegnet, so ist wiederum die Verbindungslinie OK die gesuchte Ortslinie L. Denn KB′ = KC, ferner $\angle KB'O = \angle E'DO = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle KCO = \frac{\pi}{2} - \beta$; folglich schneidet ein Kreis um den Punkt K mit dem Radius KB′ die gegebenen Graden in den Punkten B′ und C unter den gegebenen Winkeln. Wie von dem ursprünglichen Kreise K, so ist auch von allen übrigen Kreisen K der Scheitel O eingeschlossen, da jeder andere Kreis K mit dem ursprünglichen in dem, von letzterem eingeschlossenen Punkte O seinen äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt hat.

Zieht man nun durch den Scheitel O eine Grade L′, welche von der gefundenen L durch die gegebenen Graden harmonisch getrennt ist, so hat man die gesuchte Ortslinie in dem Winkel X′OY ($= \varphi'$). Wird daher aus der Graden L′ ein Kreis konstruirt, der die eine Grade p unter dem Winkel α schneidet, (indem man an die letztere in einem beliebigen Punkte N einen Winkel gleich α anlegt, auf dem angelegten Schenkel in N ein Loth errichtet, welches der Graden L′ in einem Punkte K′ begegnet, und um K′ mit dem Radius K′N einen Kreis beschreibt) so schneidet derselbe auch die andere Grade q unter dem Winkel β. Jenachdem $\alpha + \beta + \varphi' <$ oder $> \pi$, ist der Scheitel O von den Kreisen K′ ausgeschlossen oder eingeschlossen. Im ersten Falle haben sämmtliche Kreise K′ in zwei, durch O gehenden Graden T und T′ ein gemeinschaftliches Tangenpaar, dessen Winkel TT′ durch die Ortslinie L′ halbirt wird.

Die Resultate, welche das Verhalten beider Kreisschaaren K und K′ gegen den Schnittpunkt O der gegebenen Graden betreffen, lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen. 1. Ist $\alpha + \beta < \varphi$, daher gleichzeitig $\alpha + \beta + \varphi' < \pi$ und $\alpha + \beta + \varphi < \pi$, so ist der Punkt O von sämmtlichen Kreisen beider Schaaren ausgeschlossen. 2) Ist $\alpha + \beta > \varphi'$, daher gleichzeitig $\alpha + \beta + \varphi' > \pi$ und $\alpha + \beta + \varphi > \pi$, so ist der Punkt O von sämmtlichen Kreisen beider Schaaren eingeschlossen. 3. Ist $\alpha + \beta > \varphi < \varphi'$, daher gleichzeitig $\alpha + \beta + \varphi' > \pi$ und $\alpha + \beta + \varphi < \pi$, so ist der Punkt O von sämmtlichen Kreisen K ausgeschlossen, dagegen von sämmtlichen Kreisen K′ eingeschlossen. 4. Ist $\alpha + \beta = \left\{\begin{matrix} \varphi' \\ \varphi \end{matrix}\right\}$, daher gleichzeitig $\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta + \varphi \\ \alpha + \beta + \varphi' \end{matrix}\right\} = \pi$ und $\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta + \varphi' > \pi \\ \alpha + \beta + \varphi < \pi \end{matrix}\right\}$, so gehen sämmtliche Kreise $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ durch den Punkt O, während die Kreise $\left\{\begin{matrix} K' \\ K \end{matrix}\right\}$ den Punkt O $\left\{\begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix}\right\}$ schliessen.

7. **Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Grade p und q bezüglich unter den Winkeln α und β schneidet und durch einen, ausserhalb der Graden gegebenen Punkt A geht.**

Fig. 3. Die Graden p und q mögen sich für's Erste in einem Punkte O (unter dem Winkel φ) schneiden. Man konstruire die beiden Ortslinien L und L′, auf welchen sich die Mittelpunkte aller Kreise von dem verlangten Verhalten gegen die Graden befinden, lege an die Grade p in einem beliebigen Punkte b den Winkel α an und errichte auf dem angelegten Schenkel im Punkte b ein Loth, so wird dasselbe im Allgemeinen beiden Ortslinien L und L′ in den Punkten k und k′ begegnen. Aus diesen Schnittpunkten beschreibe man Kreise mit den Radien kb und k′b, so werden beide Kreise die Grade p unter dem Winkel α, daher auch die Grade q unter dem Winkel β schneiden. Liegt der gegebene Punkt A nicht auf einer der beiden Ortslinien, und wird dessen Verbindungslinie mit dem Punkte O von dem Kreise $\left\{\begin{matrix} k \\ k' \end{matrix}\right\}$ in den Punkten $\left\{\begin{matrix} a \text{ und } \mathfrak{a} \\ a' \text{ und } \mathfrak{a}' \end{matrix}\right\}$ geschnitten, so ziehe man durch A zu den Radien $\left\{\begin{matrix} ak \text{ und } \mathfrak{a}k \\ a'k' \text{ und } \mathfrak{a}'k' \end{matrix}\right\}$ die Parallelen $\left\{\begin{matrix} AK \text{ und } A\mathfrak{K} \\ AK' \text{ und } A\mathfrak{K}' \end{matrix}\right\}$, welche der Ortslinie $\left\{\begin{matrix} L \\ L' \end{matrix}\right\}$ in den Punkten $\left\{\begin{matrix} K \text{ und } \mathfrak{K} \\ K' \text{ und } \mathfrak{K}' \end{matrix}\right\}$ begegnen, und beschreibe um diese Punkte mit den Radien $\left\{\begin{matrix} KA \text{ und } \mathfrak{K}A \\ K'A \text{ und } \mathfrak{K}'A \end{matrix}\right\}$ Kreise, so erfüllen dieselben die gestellten Bedingungen. Denn aus der

Konstruktion folgt zunächst, dass die Kreise $\left\{\begin{matrix}\text{k und K oder } \mathfrak{K} \\ \text{k}' \text{ und K}' \text{ oder } \mathfrak{K}'\end{matrix}\right\}$ die Verbindungslinie OA unter gleichen Winkeln schneiden. Folglich ist die letztere ein (äusserer oder innerer) Aehnlichkeitsstrahl jener Kreispaare, ein solcher daher auch jede der gegebenen Graden. Mithin werden dieselben von dem Kreise $\left\{\begin{matrix}\text{K oder } \mathfrak{K} \\ \text{K}' \text{ oder } \mathfrak{K}'\end{matrix}\right\}$ unter denselben Winkeln, wie von dem Hülfskreise $\left\{\begin{matrix}k \\ k'\end{matrix}\right\}$, geschnitten.

Ist $\alpha + \beta > \varphi'$, so werden beide Hülfskreise k und k' jederzeit von der Graden OA geschnitten (6), und die Aufgabe hat bei jeder Lage des gegebenen Punktes alle vier Lösungen. Ist $\alpha + \beta = \varphi'$, so hat die Aufgabe stets drei Lösungen. Man erhält nämlich beide Kreise K', aber nur einen Kreis K, letzteren dadurch, dass man auf der Ortslinie L einen Punkt K von der Beschaffenheit sucht, dass KA = KO wird.

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn $\alpha + \beta = \varphi$ ist, nur einen Kreis K', die Kreise K dagegen nur dann, wenn der Punkt A von dem Winkel tt' der, aus O an den Hülfskreis k gelegten Tangenten (6) eingeschlossen ist.

Ist $\alpha + \beta > \varphi < \varphi'$, so erhält man stets beide Kreise K', die Kreise K wiederum nur dann, wenn der Punkt A in dem Winkel tt' liegt. Ist endlich $\alpha + \beta < \varphi$, so erhält man die Kreise $\left\{\begin{matrix}K \\ K'\end{matrix}\right\}$, wenn Punkt A in dem Winkel $\left\{\begin{matrix}tt' \\ TT'\end{matrix}\right\}$ liegt, wobei T und T' die beiden, aus O an den Hülfskreis gelegten Tangenten vorstellen.

Die angebene Konstruktion hat keine Anwendung auf den Fall, wo der Punkt A auf einer der beiden Ortslinien, z. B. auf der Graden L, liegt. Man findet nunmehr beide Kreise K auf folgende Weise. Man halbire den Winkel Okb und seinen Nebenwinkel durch die Graden kd und k𝔡, ziehe durch A zu beiden Halbirungslinien die Parallelen AD und A𝔇 und durch deren Schnittpunkte D und 𝔇 mit der Graden p wiederum die Parallelen DK und 𝔇𝔎 zu dem Radius kb, welche der Ortslinie L in den Punkten K und 𝔎 begegnen. Dann ist ∠ dkO = ∠ DAK, ∠ dkb = ∠ ADK; folglich ∠ DAK = ∠ ADK, also KA = KD. Desgleichen ist ∠ 𝔎A𝔇 = ∠ Ak𝔡, ∠ 𝔎𝔇A = ∠ bk𝔡; folglich ∠ 𝔎A𝔇 = ∠ 𝔎𝔇A, also 𝔎A = 𝔎𝔇. Daher sind die beiden, um die Punkte K und 𝔎 mit den Radien KD und 𝔎𝔇 beschriebenen Kreise die gesuchten Kreise K. Fig. 4.

Sind die Graden p und q parallel, so erleidet die Konstruktion keine Aenderung. Die beiden Ortslinien L und L' bilden diesmal mit den gegebenen Graden einen harmonischen Parallelstrahlbüschel, an die Stelle der Verbindungslinie OA tritt eine Parallele zu den gegebenen Graden durch den Punkt A, und die Winkel tt' und TT' verwandeln sich in zwei Parallelstreifen, von denen der letztere den ersteren einschliesst, da der Hülfskreis k' den Hülfskreis k im Punkte b einschliessend berührt. Daher lässt die Aufgabe im gegenwärtigen Falle $\left\{\begin{matrix}\text{jede} \\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ der oben dargelegten vier Lösungen zu, wenn der Punkt A $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb} \\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ des Parallelstreifens $\left\{\begin{matrix}tt' \\ TT'\end{matrix}\right\}$ liegt. Ist $\angle\, \alpha = \beta$, so geht die eine Ortslinie L in die Mittellinie des Parallelstreifens pq, die andere, L', in die unendlich ferne Grade über, und die gesuchten Kreise K' verwandeln sich in zwei Grade durch den Punkt A, welche die gegebenen Graden unter dem Winkel α schneiden.

8. **Einen Kreis zu konstruiren, der drei gegebene Grade a, b, c, die aber nicht durch denselben Punkt gehen, bezüglich unter den Winkeln α, β, γ schneidet.**

Die gegebenen Graden, welche sich in den drei Punkten ab oder C, ac oder B, bc oder A schneiden, theilen die Ebene in die vier Dreiecke ABC, AB·C, AC·B und BC·A, wobei jedes der drei letzteren, z. B. das Dreieck BC·A, von einer endlichen Strecke (BC) und von zwei, durch das Unendliche gehenden Strecken (B·A und C·A) begrenzt ist. Verstehen wir unter dem Zeichen L (α, β) den Ort des Mittelpunktes aller Kreise, von welchen zwei gegebene Grade unter den Winkeln α und β geschnitten werden, so giebt es durch den Schnittpunkt $\left\{\begin{matrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{A} \end{matrix}\right\}$ die beiden Ortslinien $\left\{\begin{matrix} \mathrm{L}\,(\alpha,\beta) \text{ und } \mathrm{L}'\,(\alpha,\beta) \\ \mathrm{L}\,(\alpha,\gamma) \text{ und } \mathrm{L}'\,(\alpha,\gamma) \\ \mathrm{L}\,(\beta,\gamma) \text{ und } \mathrm{L}'\,(\beta,\gamma) \end{matrix}\right\}$, unter welchen die erstere von dem Dreiecke ABC und von dem Dreieck $\left\{\begin{matrix} \mathrm{AB{\cdot}C} \\ \mathrm{AC{\cdot}B} \\ \mathrm{BC{\cdot}A} \end{matrix}\right\}$ eingeschlossen, die letztere von beiden Dreiecken ausgeschlossen ist. Jeder Punkt, in welchem sich irgend zwei dieser Ortslinien, die nicht durch dieselbe Winkelspitze des Dreiecks ABC gehen, begegnen, ist der Mittelpunkt eines Kreises von der verlangten Beschaffenheit. Denn beschreibt man z. B. um den Punkt K_1, in welchem sich die Graden L (α,β) und L (α,γ) begegnen, einen Kreis, der die Grade a unter dem Winkel α schneidet, so wird derselbe, als ein Kreis aus der Ortslinie L (α,β), auch die Grade b unter dem Winkel β, und als ein Kreis aus der Ortslinie L (α,γ), auch die Grade c unter dem Winkel γ schneiden. Zugleich ergiebt sich hieraus, dass auch die Ortslinie L (β,γ) den beiden vorigen im Punkte K_1, und daher auch den Ortslinien L′(α,β) und L(α,γ) in demselben Punkte K_2 begegnet, da der Schnittpunkt der ersteren mit einer jeden von diesen vom Punkte K_1 durch a und A harmonisch getrennt ist. Der Punkt K_1 ist vom Dreieck ABC, der Punkt K_2 ist, wie die Grade L (β,γ), vom Dreieck BC·A eingeschlossen. Aehnliches gilt daher auch von den Ortslinien L (α,β) und L (α,γ); nämlich die Graden $\left\{\begin{matrix} \mathrm{L}\,(\alpha,\beta) \\ \mathrm{L}\,(\alpha,\gamma) \end{matrix}\right\}$ begegnet den Graden $\left\{\begin{matrix} \mathrm{L}\,(\alpha,\gamma) \text{ und } \mathrm{L}\,(\beta,\gamma) \\ \mathrm{L}\,(\alpha,\beta) \text{ und } \mathrm{L}\,(\beta,\gamma) \end{matrix}\right\}$ in dem Punkte K_1, dagegen den Graden $\left\{\begin{matrix} \mathrm{L}'\,(\alpha,\gamma) \text{ und } \mathrm{L}'\,(\beta,\gamma) \\ \mathrm{L}'\,(\alpha,\beta) \text{ und } \mathrm{L}'\,(\beta,\gamma) \end{matrix}\right\}$ in einem, vom Dreieck $\left\{\begin{matrix} \mathrm{AB{\cdot}C} \\ \mathrm{AC{\cdot}B} \end{matrix}\right\}$ eingeschlossenen Punkte $\left\{\begin{matrix} \mathrm{K}_4 \\ \mathrm{K}_3 \end{matrix}\right\}$. Es giebt demnach vier Kreise, welche der Aufgabe Genüge leisten. Jedes der vier Dreiecke, in welche die Ebene durch die drei gegebenen Graden getheilt wird, enthält den Mittelpunkt eines derselben. Die vier Mittelpunkte bilden ein vollständiges Viereck, dessen sechs Seiten die drei Paare L und L′ sind. Befinden sich unter den gegebenen Graden a, b, c zwei parallele Grade, so sind auch zwei Seiten jenes Vierecks den letzteren parallel.

9. **Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Grade p und q unter den Winkeln α und β schneidet und einen gegebenen Kreis M berührt.**

Diese Aufgabe lässt sich in ähnlicher Weise, wie das entsprechende Berührungsproblem
Fig. 5. behandeln und auf die im § 7 gelöste Aufgabe zurückführen. Ist nämlich R der Radius des Kreises M, so zieht man zunächst ausserhalb des Winkels, in welchem der Mittelpunkt M liegt, zur Graden p eine Parallele p′, welche von p um das Stück $R\cos\alpha$ entfernt ist, also dergestalt,

dass eine, zwischen beiden Parallelen liegende und mit beiden das Komplement des Winkels α bildende Strecke die Länge R hat, desgleichen eine Parallele q' zur Graden q, welche von der letztern um das Stück $R\cos\beta$ entfernt ist, und man hat nunmehr einen Kreis zu konstruiren, der die Graden p' und q' unter den Winkeln α und β schneidet und durch den Punkt M geht. Es giebt (7) im Allgemeinen vier derartige Kreise. Der Kreis K sei einer derselben und schneide die Grade $\left\{\begin{matrix} p' \\ q' \end{matrix}\right\}$ in den Punkten $\left\{\begin{matrix} b \text{ und } \mathfrak{b} \\ c \text{ und } \mathfrak{c} \end{matrix}\right\}$. Zieht man den Radius $\left\{\begin{matrix} Kb \\ Kc \end{matrix}\right\}$, so schneidet derselbe die Parallelen $\left\{\begin{matrix} p \text{ und } p' \\ q \text{ und } q' \end{matrix}\right\}$ in den Punkten $\left\{\begin{matrix} B \text{ und } b \\ C \text{ und } c \end{matrix}\right\}$ unter dem Komplement des Winkels $\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\}$; daher ist die Strecke $\left\{\begin{matrix} Bb \\ Cc \end{matrix}\right\}$ gleich R, folglich $KB = KC$ und $KM = KB + R$. Beschreibt man daher um den Punkt K mit dem Radius KB einen Kreis, so wird dieser die Graden p und q in den Punkten B und C unter den Winkeln α und β schneiden und den Kreis M ausschliessend berühren. Jedem der vier Kreise K entspricht demnach ein, den Kreis M von aussen berührender Kreis.

Zieht man aber zweitens innerhalb des Winkels, in welchem der Mittelpunkt M liegt zu den Graden p und q, unter denselben Bedingungen, wie zuvor, die Parallelen p'' und q'', so hat man jetzt einen Kreis zu beschreiben, der die Graden p'' und q'' unter den Winkeln α und β schneidet und durch den Punkt M geht. Es giebt im Allgemeinen abermals vier derartige Kreise. Der Kreis K' sei einer derselben und schneide die Grade $\left\{\begin{matrix} p'' \\ q'' \end{matrix}\right\}$ in den Punkten $\left\{\begin{matrix} b' \text{ und } \mathfrak{b}' \\ c' \text{ und } \mathfrak{c}' \end{matrix}\right\}$. Zieht man den Radius $\left\{\begin{matrix} K'b' \\ K'c' \end{matrix}\right\}$ und verlängert ihn, bis er der Graden $\left\{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\}$ im Punkte $\left\{\begin{matrix} B' \\ C' \end{matrix}\right\}$ begegnet, so schneidet derselbe die Parallelen $\left\{\begin{matrix} p \text{ und } p'' \\ q \text{ und } q'' \end{matrix}\right\}$ unter dem Komplement des Winkels $\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\}$; daher ist die Strecke $\left\{\begin{matrix} b'B' \\ c'C' \end{matrix}\right\}$ gleich R, folglich $K'B' = K'C'$, $K'M = K'B' - R$. Beschreibt man daher um den Punkt K' mit dem Radius $K'B'$ einen Kreis, so schneidet derselbe die Graden p und q in den Punkten B' und C' unter den Winkeln α und β und berührt den Kreis M einschliessend. Jedem der vier Kreise K' entspricht demnach ein, den Kreis M von innen berührender Kreis, und die Aufgabe hat folglich im Allgemeinen acht Lösungen.

III. Vom schiefen Schnitt eines Kreises durch einen Kreis.

10. Hülfsaufgabe. Aus einer gegebenen Graden L einen Kreis zu konstruiren, der von zwei gegebenen Kreisen M und m den einen (M) orthogonal schneidet und den andern (m) berührt.

Ist die Grade L von dem Kreise M ausgeschlossen, so gehen bekanntlich sämmtliche Orthogonalkreise des Kreises M, deren Mittelpunkte auf der Graden L liegen, durch zwei konstante Punkte des, aus dem Centrum M auf die Grade L gefällten Perpendikels MO, nämlich durch diejenigen beiden Punkte P und Q, in welchen derselbe und seine Verlängerung über O von einem, aus O beschriebenen Orthogonalkreise des Kreises M geschnitten wird. Denn jeder Kreis aus einem beliebigen Punkte O′ der Graden L mit dem Radius $O'P = O'Q$ hat jenen Perpendikel zur Chordale mit dem Kreise O und wird daher, so wie der letztere, vom Kreise M orthogonal geschnitten. Die vorliegende Aufgabe reducirt sich daher im gegenwärtigen Falle auf die, durch zwei Punkte P und Q einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 6. Schneidet die Grade L den Kreis M in den Punkten B und B′, so sei K der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Da der Punkt K auf der Graden L liegt, und Kreis K den Kreis M orthogonal schneidet, so verhält sich ersterer ebenso gegen jeden andern Kreis, der durch die Schnittpunkte B und B′ der Graden L geht, diese Grade also mit dem Kreise M zur Chordale hat. Daher ist auch umgekehrt jeder Kreis durch die Punkte B und B′ ein Orthogonalkreis des gesuchten Kreises K. Geht demnach ein solcher zugleich durch den Punkt b, in welchem Kreis K den Kreis m berührt, und der in Folge dessen auf der Centrale Km liegt, so hat jener Orthogonalkreis im Punkte b die Grade Kbm zur Tangente und schneidet daher in diesem Punkte auch den Kreis m orthogonal, wodurch sowohl er selbst, als auch die Punkte b und K bestimmt sind.

Konstruktion. Man lege durch die Schnittpunkte B und B′ der Graden L mit dem Kreise M einen Kreis, der den Kreis m orthogonal schneidet, der also den Chordalpunkt O für den Kreis m und die Punkte B und B′ zu seinem Mittelpunkt und die Verbindungslinie OB zu seinem Radius hat. Sind b und b′ die Schnittpunkte des Hülfskreises O mit dem Kreise m, so ziehe man die Radien mb und mb′ und verlängere dieselben, bis sie die Grade L in den Punkten K und K′ schneiden. Beschreibt man nun einen Kreis um den Punkt K mit dem Radius Kb, einen zweiten um den Punkt K′ mit dem Radius K′b′, so erfüllen beide Kreise die gestellten Bedingungen. Denn erstens berühren beide den Kreis m. Da ferner die Graden Kbm und K′mb′ in den Punkten b und b′ Tangenten an den Kreis O sind, der den Kreis m in eben diesen Punkten orthogonal schneidet, so begegnet derselbe im Punkte $\left\{ \begin{matrix} b \\ b' \end{matrix} \right\}$ auch dem Kreise $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$ unter einem rechten Winkel, so dass zweitens die Kreise K und K′, deren Mittelpunkte auf der Chordale der Kreise O und M liegen, wie zu dem ersteren (O), so auch zu dem letzteren (M) Orthogonalkreise sind.

11. Einen Kreis zu konstruiren, der durch zwei gegebene Punkte N und N′ geht und einen gegebenen Kreis M unter einem gegebenen Winkel α schneidet.

Fig. 7. K sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, B der eine Schnittpunkt desselben mit dem gegebenen Kreise M. Zieht man den Radius KB, der entweder unmittelbar oder bei gehöriger Verlängerung den Kreis M in einem zweiten Punkte b schneidet, so ist Bb die Bestimmungssehne $2S_\alpha$ (3), daher (ihrer Länge nach) bekannt, desgleichen auch der, mit dem gegebenen Kreise concentrische Bestimmungskreis (α). Dieser berührt die Sehne Bb in einem Punkte E. Beschreibt man daher um den Punkt K mit dem Halbmesser KE einen Kreis, so schneidet derselbe den Bestimmungskreis M orthogonal und lässt zugleich auf dem Radius KN des gesuchten Kreises, welchem Radius er im Punkte F begegnet, ein Stück FN übrig, welches der halben Bestimmungssehne BE oder S_α gleich ist, da $KN - KF = KB - KE$. Ein um den Punkt N mit dem Radius NF beschriebener Kreis, der den Orthogonalkreis K in F berührt, ist daher bekannt. Da nun der Punkt K auf einer Graden L liegt, durch welche die Verbindungslinie NN′ der gegebenen Punkte senkrecht halbirt wird, und zugleich der Mittelpunkt eines Kreises ist, der den Bestimmungs-

kreis orthogonal schneidet und den Kreis N berührt, so ist die gegenwärtige Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Konstruktion. Man errichte im Mittelpunkte H der Graden NN′ auf derselben ein Loth L, beschreibe um den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises den Bestimmungskreis (α) und um den Punkt N einen Kreis mit der halben Bestimmungssehne S_α. Hierauf konstruire man aus der Graden L einen Kreis, der den Bestimmungskreis orthogonal schneidet und den Hülfskreis N berührt. Es giebt zwei derartige Kreise mit den Mittelpunkten K und K′; Kreis $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ berühre den Kreis N im Punkte $\left\{\begin{matrix} F \\ F' \end{matrix}\right\}$, und der eine von seinen Schnittpunkten mit dem Bestimmungskreise sei $\left\{\begin{matrix} E \\ E' \end{matrix}\right\}$. Nun beschreibe man um die Punkte K und K′ Kreise mit den Radien KN und K′N, so genügen beide Kreise den gestellten Anforderungen. Denn zieht man aus dem Punkte $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ die Tangente $\left\{\begin{matrix} KE \\ K'E' \end{matrix}\right\}$ an den Bestimmungskreis und verlängert dieselbe, so dass sie den gegebenen Kreis in den Punkten $\left\{\begin{matrix} B \text{ und } b \\ B' \text{ und } b' \end{matrix}\right\}$ schneidet, so ist das Stück $\left\{\begin{matrix} BE \\ B'E' \end{matrix}\right\}$ die halbe Bestimmungssehne S_α. Folglich ist

$$BE = NF,\ KF \pm NF = KE \pm BE,\ KN = KB,$$
$$B'E' = NF',\ K'F' \pm NF' = K'E' \pm B'E',\ K'N = K'B',$$

wobei das Zeichen $\{\pm\}$ gilt, wenn der Berührungskreis K oder K′ den Hülfskreis N $\left\{\begin{matrix} \text{von aussen} \\ \text{von innen} \end{matrix}\right\}$ berührt. Daher geht der, um den Punkt $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ mit dem Radius $\left\{\begin{matrix} KN \\ K'N \end{matrix}\right\}$ beschriebene Kreis durch die Punkte $\left\{\begin{matrix} B, N, N' \\ B', N, N' \end{matrix}\right\}$ und schneidet den gegebenen Kreis unter dem gegebenen Winkel, da die Bestimmungssehne $\left\{\begin{matrix} Bb \\ B'b' \end{matrix}\right\}$ dem Schnittwinkel α entspricht.

Anmerkung. Wir verstehen unter den Punkten k, k′ und C die Mittelpunkte dreier, durch die Punkte N und N′ gehenden Kreise, von denen die beiden ersten den gegebenen Kreis berühren, der dritte denselben in T orthogonal schneidet. Dasjenige Stück der Ortslinie L, welches die Mittelpunkte aller Kreise enthält, die durch die Punkte N und N′ gehen und den gegebenen Kreis unter irgend einem Winkel zwischen den Grenzen o und π schneiden, nennen wir die fruchtbare Strecke. Je nach der Lage der Punkte N und N′ stellen sich nun folgende Eigenthümlichkeiten heraus:

I. Die Punkte N und N′ liegen auf einer von dem gegebenen Kreise ausgeschlossenen Graden.

Von den beiden Berührungskreisen k und k′ berührt der eine (k) den Kreis M einschliessend, der andere (k′) ausschliessend. Die endliche Strecke kk′ stellt die fruchtbare Strecke dar. Während $\angle\,\alpha$ von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, also $\angle\,\alpha'$ von π bis $\frac{\pi}{2}$ abnimmt, rücken die Mittelpunkte K und K′ der beiden, unter dem Winkel α schneidenden Kreise aus den Grenzpunkten k und k′ einander entgegen, bis sie in C zusammentreffen, wobei auch die Schnittpunkte $\left\{\begin{matrix} B \text{ und } b \\ B' \text{ und } b' \end{matrix}\right\}$ in T zusammenfallen, während also bis dahin der zweite Schnittpunkt $\left\{\begin{matrix} b \\ b' \end{matrix}\right\}$ des Radius $\left\{\begin{matrix} KB \\ K'B' \end{matrix}\right\}$ sich stets $\left\{\begin{matrix} \text{innerhalb} \\ \text{ausserhalb} \end{matrix}\right\}$ der Strecke $\left\{\begin{matrix} KB \\ K'B' \end{matrix}\right\}$ befand. Hieraus folgt, dass von je zwei konjugirten Kreisen K und K′ der erstere unter dem spitzen Winkel α, der letztere unter dem stumpfen Winkel α' (also antidrom unter dem Winkel α) schneidet, ferner dass, weil der Radius $\begin{Bmatrix}KR\\K'B'\end{Bmatrix}$ stets $\begin{Bmatrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{Bmatrix}$ ist als $\begin{Bmatrix}KE\\K'E'\end{Bmatrix}$, der Berührungskreis $\begin{Bmatrix}K\\K'\end{Bmatrix}$ den Hülfskreis N $\begin{Bmatrix}\text{ausschliessend}\\\text{einschliessend}\end{Bmatrix}$ berührt.

II. Die Punkte N und N' liegen auf einer Graden, welche den gegebenen Kreis in den Punkten n und n' unter dem Winkel x schneidet; jedoch so, dass von den beiden Strecken NN' und nn' entweder die eine von der andern ganz eingeschlossen oder beide von einander ausgeschlossen sind. Beide Kreise k und k' berühren den Kreis M im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Falle $\begin{Bmatrix}\text{ein}\\\text{aus}\end{Bmatrix}$schliessend. Die durch das Unendliche gehende Strecke k.k' stellt die fruchtbare Strecke dar. Während im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Falle $\begin{Bmatrix}\angle\,\alpha\\\angle\,\alpha'\end{Bmatrix}$ zunächst von $\begin{Bmatrix}o \text{ in } x\\\pi \text{ in } x'\end{Bmatrix}$ übergeht, rücken die Mittelpunkte K und K' der konjugirten Kreise von einander hinweg, und zwar K' nach dem Punkte C hin. Wird $\begin{Bmatrix}\alpha = x\\\alpha' = x'\end{Bmatrix}$, so geht der Kreis K in die Grade NN' über und sein Mittelpunkt in den unendlich fernen Punkt der Ortslinie L, während K' einen Punkt X zwischen k' und C erreicht. Bis dahin schneiden beide Kreise K und K' stets unter einem $\begin{Bmatrix}\text{spitzen}\\\text{stumpfen}\end{Bmatrix}$ Winkel, an der Grenze selbst beide unter dem Winkel $\begin{Bmatrix}x\\x'\end{Bmatrix}$. Beide Berührungskreise K und K' berühren daher bis jetzt den Hülfskreis N $\begin{Bmatrix}\text{aus}\\\text{ein}\end{Bmatrix}$schliessend. Geht aber $\begin{Bmatrix}\angle\,\alpha\\\angle\,\alpha'\end{Bmatrix}$ von $\begin{Bmatrix}x\\x'\end{Bmatrix}$ in $\frac{\pi}{2}$ über, so kehrt Punkt K auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurück und trifft schliesslich in C mit dem Punkte K' zusammen, der gleichzeitig die Strecke XC durchlaufen hat. Im Anfange dieser Bewegung schneidet Kreis K unter dem $\begin{Bmatrix}\text{stumpfen Winkel } x'\\\text{spitzen Winkel } x\end{Bmatrix}$ und fährt bis zur Grenze fort, unter einem $\begin{Bmatrix}\text{stumpfen}\\\text{spitzen}\end{Bmatrix}$ Winkel zu schneiden, während der Schnittwinkel des Kreises K' stets das $\begin{Bmatrix}\text{spitz}\\\text{stumpf}\end{Bmatrix}$winklige Supplement zu jenem bildet. Daher berührt, während dieser Bewegung der Punkte K und K', der Berührungskreis K den Hülfskreis N $\begin{Bmatrix}\text{ein}\\\text{aus}\end{Bmatrix}$schliessend, der Berührungskreis K' $\begin{Bmatrix}\text{aus}\\\text{ein}\end{Bmatrix}$ schliessend und der $\begin{Bmatrix}\text{stumpfe}\\\text{spitze}\end{Bmatrix}$ Schnittwinkel $\begin{Bmatrix}x'\\x\end{Bmatrix}$ der Graden NN' ist das $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{Bmatrix}$ des Winkels α.

III. Von den Punkten N und N' liegt der erstere ausserhalb, der letztere innerhalb des gegebenen Kreises, wobei die Grade NN' den Kreis unter dem Winkel x schneidet. An die Stelle der beiden Berührungskreise k und k' tritt ein Kreis k, der den gegebenen unter dem kleinstmöglichsten Winkel μ schneidet. Jeder Punkt der Ortslinie L ist jetzt ein Punkt K oder K'. Wächst $\angle$ a von μ bis x, so bewegen sich die Mittelpunkte K und K' zweier konjugirten Kreise aus k nach entgegengesetzten Richtungen, an der Grenze selbst geht der Kreis K in die Grade NN', der Punkt K in den unendlich fernen Punkt der Ortslinie L über, während K' einen Punkt X zwischen k und C erreicht. Bis dahin schneiden beide Kreise, K und K', stets unter einem spitzen Winkel, und die Berührungskreise K und K' berühren beide den Hülfskreis N ausschliessend. Während $\angle\,\alpha$ von x bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, kehrt der Punkt K auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurück und trifft schliesslich in C mit dem Punkte K' zusammen, der gleichzeitig die Strecke XC durchlaufen hat. Auch während dieser Bewegung fährt Kreis K' fort, unter einem spitzen Winkel zu schneiden, indess der Schnittwinkel des Kreises K stets das Supplement zu jenem bildet. Daher berührt auch von den beiden Berührungskreisen K und K' der erstere den Hülfskreis N einschliessend, der letztere ausschliessend. Aus dem gegenwärtigen Falle erwächst uns die Aufgabe, den Grenzkreis k zu konstruiren, zu deren Lösung wir nun sogleich übergehen.

12. Um den Punkt M ist ein Kreis mit dem Radius R beschrieben; ferner sind zwei Punkte N und N′ gegeben, von denen der erstere ausserhalb, der letztere innerhalb des Kreises liegt. Es soll ein Kreis konstruirt werden, der durch die Punkte N und N′ geht und den gegebenen Kreis unter dem kleinstmöglichsten Winkel schneidet.

Der gesuchte Kreis K hat zum Kennzeichen, dass sich in ihm zwei konjugirte Kreise K u. K′, Fig. 8. also auch zwei Berührungskreise K und K′ des Hülfskreises N vereinigen. Hieraus ersieht man, dass nicht etwa die Grade NN′ den Kreis repräsentirt, der unter dem kleinstmöglichsten Winkel schneidet; denn es giebt ausser derselben stets noch einen zweiten (eigentlichen) Kreis, der durch die Punkte N und N′ geht und den Kreis M unter demselben Winkel schneidet. Wenn nun für's Erste die Ortslinie L des gesuchten Punktes K, welche senkrecht durch den Mittelpunkt H der Verbindungslinie NN′ geht, dem gegebenen Kreise in den Punkten T und T′ begegnet, so kann dieselbe doch nicht auch den Bestimmungskreis, der dem kleinsten Schnittwinkel μ entspricht, schneiden, weil sonst die beiden Berührungskreise K und K′, welche zugleich den Bestimmungskreis (μ) orthogonal schneiden, stets durch das Loth MD aus dem Mittelpunkte M auf die Grade L getrennt sein würden oder höchstens in diesem Loth sich vereinigen könnten, wobei der Punkt K in's Unendliche fiele, was, wie wir gesehen haben, nicht der Fall sein kann. Daher gehen die konjugirten Berührungskreise K u. K′ des, um den Punkt N mit der halben Bestimmungssehne S_μ beschriebenen Hülfskreises durch zwei Punkte F u. F′ jenes beliebig zu verlängernden Lothes MD, und sie fallen nur dann in einen Kreis K zusammen, wenn der eine jener beiden Punkte, nämlich F, in der Peripherie des Kreises N liegt. Ziehen wir durch diesen Punkt F eine Parallele zur Graden L, welche der Verbindungslinie NN′ im Punkte G und dann einem, um diese Grade NN′ als Durchmesser beschriebenen Kreise in X begegnet, so ist $NX^2 = NG.NN' = 2NG.NH$. Da der Radius des Bestimmungskreises den Werth $\sqrt{R^2 - S^2}$ hat, da ferner das Stück $GH = FD$ der Tangente aus dem Punkte D an den Bestimmungskreis gleich ist, so findet man $GH^2 = MD^2 - R^2 + S^2 = MD^2 - R^2 + FN^2 = MD^2 - R^2 + GN^2 + DH^2$; zugleich ist $GH^2 = (NH - NG)^2$. Folglich erhalten wir die Gleichung $NH^2 - 2NG.NH = MD^2 - R^2 + DH^2$,

$$\text{also } NH^2 + (R^2 - MD^2) - DH^2 = 2NG.NH,$$
$$NH^2 + DT^2 - DH^2 = NX^2. \text{ (A).}$$

Beschreiben wir um die Sehne TT′ als Durchmesser einen Kreis, der die Grade NH in einem Punkte t schneidet, so ist $DT^2 - DH^2 = Dt^2 - DH^2 = tH^2$. Folglich erhalten wir $NX^2 = NH^2 + tH^2$. Daher ist der Punkt X bekannt, folglich auch die Punkte F und K.

Konstruction. Man fälle aus dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises auf die Ortslinie L ein Loth MD, beschreibe um den Mittelpunkt D des innerhalb des Kreises M liegenden Stückes T′T′ der Ortslinie mit dem Radius DT einen Kreis, welcher der Verbindungslinie NN′ der gegebenen Punkte in t begegnet, und schneide von dem Fusspunkt H der Ortslinie aus auf derselben ein Stück $HX' = Ht$ ab, so dass die Verbindungslinie $NX' = \sqrt{NH^2 + Ht^2}$ wird. Hierauf beschreibe man um den Punkt H einen Kreis mit dem Radius HN und um den Punkt N einen Kreis mit dem Radius NX′, welcher dem ersteren in einem Punkte X begegnet, ziehe durch denselben eine Parallele zur Ortslinie L, welche die Grade NN′ in G und das Loth MD oder dessen Verlängerung in F schneidet, und verbinde N mit F, so ist der Punkt K, in welchem die Grade NF der Ortslinie L begegnet, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Denn betrachtet man die Grade NF als die halbe Bestimmungssehne für einen Schnittwinkel μ, konstruirt um den Mittelpunkt M den Bestimmungskreis (μ) mit dem Radius $\sqrt{R^2 - NF^2}$, beschreibt ferner um N einen Kreis mit dem Radius NF, desgleichen um K mit dem Radius KF, welcher den Kreis N in F berühren und das Loth MD in einem zweiten Punkte F′ schneiden wird, so muss der letztere Kr. K, was sich durch die umgekehrten Schlüsse, wie in der Analysis, beweisen lässt, auch den Bestimmungskreis M orthogonal schneiden. Stellt man sich nun die Aufgabe, einen Kreis zu konstruiren, der durch die Punkte N und N′ geht und den gegebenen Kreis M unter dem Winkel μ schneidet, so würden (11) die, zur Konstruktion erforderlichen beiden Berührungskreise K und K′ in den vorgenannten Berührungskreis K zusammenfallen, wodurch sich der Schnittwinkel μ als den kleinstmöglichsten kennzeichnet.

Schneidet aber die Ortslinie L den gegebenen Kreis nicht, so gelten die Schlüsse der Analysis nur bis zur Gleichung (A). Verstehen wir in derselben unter der Graden DT die Tangente aus dem Punkte D an den gegebenen Kreis, welche gleich $\sqrt{MD^2 - R^2}$ ist, so geht die Gleichung (A) nunmehr in folgende über: $NH^2 - (DT^2 + DH^2) = NX^2$.

Beschreibt man um D einen Kreis mit dem Radius DT, der diesmal die Grade MD in einem Punkte t schneidet, so ist die Verbindungslinie $tH = \sqrt{DT^2 + DH^2}$, und man erhält $NH^2 - tH^2 = NX^2$, wonach die Grade NX gefunden wird, wenn man um den Punkt H mit dem Radius Ht einen Kreis beschreibt und aus dem Punkte N an denselben eine Tangente NX′ anlegt. Ist aber der Radius Ht grösser als NH, so dass der, mit demselben um H beschriebene Kreis den Punkt N umfasst, so tritt an die Stelle der Tangente NX′ die halbe kleinste Sehne NX′ durch den Punkt N. Dann aber ist $NX^2 = -NX'^2$, also auch $2NG \cdot NH = -NX'^2$. Beschreibt man daher um den Punkt N mit dem Radius NX′ einen Kreis und fällt aus dem Schnittpunkt desselben mit dem, um die Grade NN′ beschriebenen Kreise ein Loth auf die Grade NN′, welche von demselben in G′ getroffen wird, so findet man den Punkt G, wenn man ein Stück $NG = NG'$, aber von entgegengesetzter Richtung auf der Graden NN′ abschneidet. Denn $NX'^2 = 2NG' . NH = -2NG . NH$, also $NX^2 = + 2NG . NH$.

Zieht man durch G eine Parallele zur Ortslinie L, so findet man den Punkt F u. s. w. Geht die Grade NN′ durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises, so erhält man als Kreis des schiefsten Schnittes den, um diese Grade als Durchmesser beschriebenen.

IV. Der imaginäre Orthogonalkreis.

13. Um einen Punkt M ist mit dem Radius R ein Kreis beschrieben; K sei ein beliebiger Punkt in der Ebene. Gleichviel, ob dieser Punkt K ausserhalb oder innerhalb des Kreises M liegt: immer stellt der Ausdruck $\sqrt{KM^2 - R^2}$ die Tangente aus dem Punkte K an den Kreis M vor. Diese ist, wenn K innerhalb des Kreises liegt, imaginär und gleich $i\sqrt{R^2 - KM^2} = Si$, wobei der Modulus S die halbe kleinste Sehne durch den Punkt K

vorstellt. Da nun ein Kreis, der um einen ausgeschlossenen Punkt K mit der Tangente aus diesem Punkte beschrieben wird, ein Orthogonalkreis des gegebenen ist, so nennen wir im andern Falle, wenn der Punkt K innerhalb des gegebenen Kreises liegt, den, auf diesen Punkt K bezogenen (nicht darstellbaren) Kreis mit dem Radius Si einen imaginären Orthogonalkreis, dagegen den, um denselben Mittelpunkt mit der halben kleinsten Sehne S beschriebenen Kreis den Modularkreis des ersteren. Demgemäss wird die Peripherie des Modularkreises, da er die kleinste Sehne durch den Punkt K innerhalb des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat, durch den gegebenen Kreis halbirt. Die in Rede stehenden Beziehungen lassen sich daher in folgende Sätze fassen:

Ein imaginärer Kreis K schneidet einen reellen Kreis M orthogonal, das heisst: die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit dem einen oder dem andern Schnittpunkt seines Modularkreises ist in dem reellen Kreise die halbe kleinste Sehne durch den Punkt K.

Ein imaginärer Kreis K wird von einem reellen Kreise M orthogonal geschnitten, das heisst: die Peripherie seines Modularkreises wird durch den reellen Kreis halbirt.

Soll daher um einen gegebenen Punkt M einen Kreis beschrieben werden, der einen, auf den Punkt K bezogenen imaginären Kreis, dessen Radius $=$ Si ist, orthogonal schneidet, so beschreibe man um den Punkt K einen Kreis mit dem Radius S, verbinde K mit M, errichte auf KM in K den Durchmesser BB′ senkrecht und schlage aus dem Punkte M mit dem Halbmesser KB oder KB′ einen Kreis, so ist derselbe der verlangte.

14. Antichordale und Subchordale. Um die Punkte K und K′ sind mit den Radien r und r′ Kreise beschrieben. Ferner ist M der Mittelpunkt eines, mit dem Radius R beschriebenen Kreises, der die Peripherien der Kreise K und K′ halbirt, so dass er mit dem ersten dessen Durchmesser Bb, mit dem zweiten dessen Durchmesser B′b′ zur gemeinschaftlichen Sehne hat. Ziehen wir die Centrallinie KK′ und fällen auf dieselbe aus dem Punkte M ein Loth MD, so ist $MD^2 = MK^2 - KD^2 = MK'^2 - K'D^2$. Wir erhalten daher die Gleichung $R^2 - r^2 - KD^2 = R^2 - r'^2 - K'D^2$, mithin $K'D^2 - KD^2 = r^2 - r'^2$. Daher ist der Punkt D für alle Punkte M von der angegebenen Eigenschaft konstant, und wir gelangen zu dem Satze: die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Peripherien zweier gegebenen Kreise halbiren, liegen in einer Graden, welche auf der Centrale der gegebenen Kreise senkrecht steht und dieselbe so theilt, dass die entstandenen Abschnitte in umgekehrter Ordnung mit den, durch die Chordale beider Kreise erzeugten übereinstimmen. Wir nennen daher diese Ortslinie die Antichordale der gegebenen Kreise.

Beziehen wir aber auf die Mittelpunkte K und K′ zwei imaginäre Kreise, welche die bereits gegebenen Kreise zu ihren Modularkreisen, also die imaginären Strecken $\varrho = ri$, $\varrho' = r'i$ zu ihren Radien haben; bezeichnen wir ferner die beiden Abschnitte, in welche die Chordale dieser imaginären Kreise, deren Centrale theilt, durch p und q: so ist $p^2 - q^2 = \varrho^2 - \varrho'^2 = r'^2 - r^2$. Somit gelangen wir dadurch, dass wir die beiden imaginären Kreise gleichsam als reelle, nämlich mit Radien ϱ und ϱ' beschriebene behandeln, gleichfalls zu dem vorigen Satze, dem wir nun folgende Fassung geben können: die Chordale zweier imaginären Kreise ist die Antichordale ihrer Modularkreise.

Es sei nun um einen andern Punkt M ein Kreis beschrieben, der sich gegen die gegebenen Kreise K und K′ so verhält, dass er den ersten orthogonal schneidet und die Peripherie des zweiten halbirt; MD sei wiederum das Loth auf die Centrale KK′. Dann ist $MD^2 = R^2 + r^2 - KD^2 = R^2 - r'^2 - K'D^2$; folglich $KD^2 - K'D^2 = r^2 + r'^2$. Dieses Resultat enthält den Satz: hat man zwei Kreise K und K′ und beschreibt zu dem ersten einen koncentrischen Kreis mit einem Radius, dessen Quadrat gleich ist der Quadratsumme der gegebenen Radien, so ist die Chordale zu jenem koncentrischen Kreise und dem Mittelpunkte des zweiten zugleich der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche den ersten der gegebenen Kreise orthogonal schneiden und die Peripherie des zweiten halbiren. Wir nennen diese Ortslinie die Subchordale des ersten Kreises in Bezug auf den zweiten. Beziehen wir aber auf den Mittelpunkt K′ des letzteren einen imaginären Kreis, dem wir den Radius $\varrho' = r'i$ beilegen, so ist die Chordale des reellen Kreises K und des imaginären K′ bestimmt durch die Gleichung: $p^2 - q^2 = r^2 - \varrho'^2 = r^2 + r'^2$, welches Resultat seinem Sinne nach mit dem vorangehenden übereinstimmt und folgende Fassung erhalten kann: die Chordale eines reellen und eines imaginären Kreises ist die Subchordale des reellen in Bezug auf den Modularkreis des imaginären.

Man sieht hieraus, dass es für die Bestimmung der Chordale oder des Chordalpunktes mehrerer Kreise gleichgültig ist, ob diese Kreise sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär oder zum Theil reell, zum Theil imaginär sind, sobald man nur jeden imaginären Kreis als einen, gleichsam mit dem Radius ϱ, von der Form ri, beschriebenen behandelt.

15. Werden zwei Kreise von einem imaginären Kreise orthogonal geschnitten, so liegt der Mittelpunkt des letzteren in beiden reellen Kreisen zugleich, und die, aus seinem Centrum nach den Schnittpunkten seines Modularkreises mit dem einen oder dem andern der reellen Kreise gezogenen Radien sind halbe kleinste Sehnen in dem einen, wie in dem andern. Folglich schneiden sich zwei reelle Kreise, so oft die diesmalige Voraussetzung eintritt, und der Mittelpunkt des imaginären Kreises liegt auf ihrer gemeinschaftlichen Sehne. Hieraus folgt: wird eine Schaar von Kreisen durch zwei imaginäre Kreise K und K′ oder durch einen reellen Kreis K und einen imaginären Kreis K′ orthogonal geschnitten, so bildet diese Schaar einen Kreisbüschel, das heisst sämmtliche Kreise haben zwei Punkte mit einander gemein. Denn irgend einer von diesen Kreisen schneidet auf derjenigen Graden, welche die Mittelpunkte K und K′ verbindet, ein Stück ab, welches er mit jedem der übrigen Kreise zur gemeinschaftlichen Sehne haben muss.

V. Vom gleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

16. Werden zwei Kreise M und m, von denen der eine, M, den andern, m, $\left\{\begin{matrix}\text{ganz oder zum Theil ausschliesst}\\ \text{ganz einschliesst}\end{matrix}\right\}$, von einem Kreise K unter dem Winkel α gleichartig geschnitten, so sind zwei $\left\{\begin{matrix}\text{nicht getrennte}\\ \text{getrennte}\end{matrix}\right\}$ Schnittpunkte desselben, z. B. B und b, von denen der eine dem Kreise M, der andere dem Kreise m angehört, potenzhaltende Punkte eines äussern Aehnlichkeitsstrahles.

Zum Beweise ziehe man durch den Punkt B einen äussern Aehnlichkeitsstrahl, welcher den Kreis m in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ schneidet; $\mathfrak{b}'$ sei der zugeordnete, $\mathfrak{b}$ der potenzhaltende Punkt in Bezug auf den Punkt B. Zieht man die Radien MB und m$\mathfrak{b}$, so ist daher $\angle$ MB$\mathfrak{b}$ = $\angle$ m$\mathfrak{b}$B. Ist k ein beliebiger Punkt auf der, die Strecke B$\mathfrak{b}$ senkrecht halbirenden Graden L, so ist $\angle$ kB$\mathfrak{b}$ = $\angle$ k$\mathfrak{b}$B, folglich auch $\angle$ MBk = $\angle$ m$\mathfrak{b}$k. Demnach schneidet jeder Kreis, der um einen beliebigen Punkt k der Graden L mit dem Radius kB beschrieben wird, die gegebenen Kreise M und m in den Punkten B und $\mathfrak{b}$ unter gleichen Winkeln gleichartig. Nun schneidet der gegebene Kreis K die Kreise M und m in den Punkten B und b unter dem Winkel α gleichartig. Läge sein Mittelpunkt K nicht auf der Ortslinie L, so ziehe man den Radius KB, welcher der Graden L in einem Punkte k begegnen wird, und verbinde k mit dem potenzhaltenden Punkte $\mathfrak{b}$; dann ist $\angle$ MBk = $\angle$ m$\mathfrak{b}$k = α. Schneidet man nun auf dem Schenkel $\mathfrak{b}$k gleichfalls ein Stück $\mathfrak{b}\mathfrak{K}$ = BK ab und beschreibt um die Punkte M und m Kreise mit den Radien MK und m$\mathfrak{K}$, so stellt der koncentrische Kreis $\left\{\begin{matrix}M\\m\end{matrix}\right\}$ den Ort des Mittelpunktes aller Kreise mit dem Radius KB vor, welche den gegebenen Kreis $\left\{\begin{matrix}M\\m\end{matrix}\right\}$ unter dem Winkel α schneiden. Folglich müsste der Mittelpunkt eines Kreises, der beide gegebene Kreise M und m unter dem Winkel α gleichartig schneidet und den Radius KB hat, in einem Schnittpunkt jener Ortskreise liegen. Der Punkt K ist aber der Mittelpunkt eines solchen Kreises. Mithin müsste der Ortskreis m dem Ortskreise M im Punkte K begegnen; also wäre m$\mathfrak{K}$ = mK, was nur dann möglich ist, wenn die Punkte $\mathfrak{K}$ und K im Punkte k zusammenfallen. Folglich schneidet der gegebene Kreis K die Kreise M und m in den Punkten B und $\mathfrak{b}$. Da nun auch diese Punkte, wie die Punkte B und b, bei der vorausgesetzten Lage der Kreise M und m, sowohl auf dem Aehnlichkeitsstrahl B$\mathfrak{b}$, als auch auf dem schneidenden Kreise K $\left\{\begin{matrix}\text{nicht getrennt}\\\text{getrennt}\end{matrix}\right\}$ sind, so muss Punkt b mit $\mathfrak{b}$ zusammenfallen.

17. Werden zwei Kreise M und m, von denen der eine, M, den andern, m, $\left\{\begin{matrix}\text{ganz ausschliesst}\\\text{ganz oder zum Theil einschliesst}\end{matrix}\right\}$, von einem Kreise K unter dem Winkel α ungleichartig geschnitten, so sind zwei $\left\{\begin{matrix}\text{getrennte}\\\text{nicht getrennte}\end{matrix}\right\}$ Schnittpunkte desselben, z. B. B und b, von denen der eine dem Kreise M, der andere dem Kreise m angehört, potenzhaltende Punkte eines innern Aehnlichkeitsstrahles.

Zum Beweise ziehe man durch den Punkt B einen innern Aehnlichkeitsstrahl, der den Kreis m in den Punkten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ schneidet; $\mathfrak{b}'$ sei der zugeordnete, $\mathfrak{b}$ der potenzhaltende Punkt in Bezug auf den Punkt B. Zieht man die Radien MB und m$\mathfrak{b}$, so ist daher $\angle$ MB$\mathfrak{b}$ = $\angle$ m$\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$. Ist k ein beliebiger Punkt auf der, die Strecke B$\mathfrak{b}$ senkrecht halbirenden Graden L, so ist $\angle$ kB$\mathfrak{b}$ = $\angle$ k$\mathfrak{b}$B = π — k$\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$; daher kB$\mathfrak{b}$ — MB$\mathfrak{b}$ = π — k$\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ — m$\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$; dies giebt $\angle$ MBk = π — m$\mathfrak{b}$k. Demnach schneidet jeder Kreis, der um einen beliebigen Punkt k der Graden L mit dem Radius kB beschrieben wird, die Kreise M und m in den Punkten B und $\mathfrak{b}$ unter gleichen Winkeln ungleichartig. Nun schneidet der gegebene Kreis K dieselben Kreise in den Punkten B und b unter dem Winkel α ungleichartig. Läge sein Mittelpunkt K nicht auf der Ortslinie L, so ziehe man den Radius KB, welcher der Graden L in einem Punkte k begegnen wird, und verbinde k mit dem potenzhaltenden Punkte $\mathfrak{b}$; dann ist $\angle$ MBk $= \alpha$ u. $\pi -$ m$\mathfrak{b}$k $= \alpha$, also m$\mathfrak{b}$k $= \alpha'$. Schneidet man nun auf dem Schenkel $\mathfrak{b}$k gleichfalls ein Stück $\mathfrak{b}\mathfrak{K} =$ BK ab und beschreibt um die Punkte M und m Kreise mit den Radien MK und m$\mathfrak{K}$, so stellt der koncentrische Kreis $\begin{Bmatrix} \text{M} \\ \text{m} \end{Bmatrix}$ den Ort des Mittelpunktes aller Kreise mit dem Radius KB vor, welche den gegebenen Kreis $\begin{Bmatrix} \text{M} \\ \text{m} \end{Bmatrix}$ unter dem Winkel $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{Bmatrix}$ schneiden. Folglich müsste der Mittelpunkt eines Kreises, der beide gegebene Kreise M und m unter dem Winkel α ungleichartig schneidet und den Radius KB hat, in einem Schnittpunkt jener Ortskreise liegen. Der Punkt K ist aber der Mittelpunkt eines solchen Kreises. Mithin müsste der Ortskreis m dem Ortskreise M im Punkte K begegnen, was wiederum nur dann möglich ist, wenn die Punkte $\mathfrak{K}$ und K im Punkte k zusammenfallen. Folglich schneidet der gegebene Kreis K die Kreise M und m in den Punkten B und $\mathfrak{b}$. Da nun auch diese Punkte, wie die Punkte B und b, bei der vorausgesetzten Lage der Kreise M und m, sowohl auf dem Aehnlichkeitsstrahl B$\mathfrak{b}$, als auch auf dem schneidenden Kreise K $\begin{Bmatrix} \text{getrennt} \\ \text{nicht getrennt} \end{Bmatrix}$ sind, so muss Punkt b mit $\mathfrak{b}$ zusammenfallen.

18. Werden zwei Kreise M und m von zwei andern Kreisen K und K′ $\begin{Bmatrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{Bmatrix}$ geschnitten, nämlich vom Kreise K unter einem Winkel α, vom Kreise K′ unter einem Winkel β, so geht die Chordale der beiden thätigen Kreise durch den $\begin{Bmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitspunkt der leidenden Kreise.

Dem vorangehenden Satze gemäss schneidet Kreis K in zwei solchen Punkten B und b, desgleichen Kreis K′ in zwei solchen Punkten C und c, deren Verbindungslinie Bb, Cc durch den $\begin{Bmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und m geht. Daher entsteht die Gleichung $\begin{Bmatrix} \text{AB.Ab} = \text{AC.Ac} \\ \text{IB.Ib} = \text{IC.Ic} \end{Bmatrix}$, da die Punkte B und b, C und c potenzhaltende Punkte des, durch sie bestimmten $\begin{Bmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitsstrahles sind. Ziehen wir aber aus dem Punkte $\begin{Bmatrix} \text{A} \\ \text{I} \end{Bmatrix}$ an den Kreis K die Tangente $\begin{Bmatrix} \text{AT} \\ \text{IT} \end{Bmatrix}$, desgleichen an den Kreis K′ die Tangente $\begin{Bmatrix} \text{AT}' \\ \text{IT}' \end{Bmatrix}$, deren Rolle, falls die eine oder die andere derselben imaginär wird, ihr Modulus (die halbe kleinste Sehne) übernimmt, so erhalten wir die Gleichungen $\begin{Bmatrix} \text{AT}^2 = \text{AB.Ab} \\ \text{IT}^2 = \text{IB.Ib} \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \text{AT}'^2 = \text{AC.Ac} \\ \text{IT}'^2 = \text{IC.Ic} \end{Bmatrix}$ daher ist $\begin{Bmatrix} \text{AT} = \text{AT}' \\ \text{IT} = \text{IT}' \end{Bmatrix}$. Folglich ist der Punkt $\begin{Bmatrix} \text{A} \\ \text{I} \end{Bmatrix}$, aus welchem die Tangenten, oder aber halbe kleinste Sehnen zu beiden thätigen Kreisen gleich sind, ein Punkt auf der Chordale der letzteren.

Anmerkung. So oft die Punkte B und b, also auch C und c durch den Punkt $\begin{Bmatrix} \text{A} \\ \text{I} \end{Bmatrix}$ getrennt sind, liegt der letztere in beiden thätigen Kreisen zugleich. Daher die Folgerung:

Werden zwei Kreise, von denen der eine den andern ganz $\left\{\begin{matrix}\text{ein}\\ \text{aus}\end{matrix}\right\}$ schliesst, von einem Kreise K unter dem Winkel α, von einem Kreise K_1 unter dem Winkel β $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten, so schneiden sich die beiden thätigen Kreise, und ihre gemeinschaftliche Sehne geht durch den $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt der leidenden Kreise.

19. Um die Punkte M und m sind mit den Radien R und r Kreise beschrieben. Bestimmt man ihre beiden Aehnlichkeitspunkte A und I und beschreibt um deren Abstand AI als Durchmesser einen Kreis, so hat derselbe mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale.

Denn schneiden sich die Kreise M und m, so projicire man aus ihrem einen Schnittpunkt S das Gebilde M, m, A, I. Dann ist jedes der beiden Verhältnisse Am:Am und IN:Im = R:r = SM:Sm. Folglich halbiren die beiden Strahlen SI und SA den Winkel und Nebenwinkel der beiden andern, SM und Sm, bilden daher mit einander selbst einen rechten Winkel ISA, und der Kreis um den Durchmesser AI geht durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise.

Schneiden sich aber die gegebenen Kreise nicht, so beschreibe man um den Fusspunkt O ihrer Chordale ihren gemeinschaftlichen „kleinsten Orthogonalkreis," der ihre Centrale in den Punkten P und Q schneidet. Dann sind diese Punkte P und Q durch beide Kreise M und m harmonisch getrennt, folglich für beide Kreise konjugirt. Ein Perpendikel, in dem einen dieser Punkte, z. B. in P, auf der Centrale errichtet, ist daher für jeden der beiden Kreise M und m die Polare des andern Punktes Q. Liegen nun die Kreise M und m ausser einander, wobei Kreis M den einen der Punkte P und Q, nämlich P, Kreis m den andern, Q, einschliesst, so ziehe man aus dem Punkte A an beide Kreise eine gemeinschaftliche (äussere) Tangente, welche der, für beide Kreise gemeinschaftlichen Polare des Punktes Q in S begegnet. Legt man darauf aus diesem Punkte S sowohl an den Kreis M, als auch an den Kreis m eine zweite Tangente an, so ist die gemeinschaftliche Tangente von der zweiten Tangente an den einen, wie von der an den andern Kreis durch die doppelt konjugirten Graden SP und SQ harmonisch getrennt. Folglich fällt die zweite Tangente aus dem Punkte S an den Kreis M mit der zweiten Tangente an den Kreis m in eine gemeinschaftliche innere Tangente zusammen, welche durch den Punkt I geht. Die Punkte A und I sind daher gleichfalls durch die Graden SP und SQ harmonisch getrennt, und der Kreis um den Durchmesser AI wird durch den Orthogonalkreis O gleichfalls rechtwinklig geschnitten. Fig. 9.

Umschliesst aber Kreis M den Kreis m, wobei der eine von den Punkten P und Q, nämlich P, von beiden Kreisen eingeschlossen, der andere, Q, von beiden Kreisen ausgeschlossen ist, so lege man durch den Punkt A eine (der Lage nach) gemeinschaftliche kleinste Sehne, welche dem Kreise m in einem Punkte b, dem Kreise M in einem Punkte B begegnet, und ziehe aus dem Punkte Q durch den Kreis $\left\{\begin{matrix}M\\ m\end{matrix}\right\}$ die Sekante $\left\{\begin{matrix}QBB'\\ Qbb'\end{matrix}\right\}$, welche die, für beide Kreise gemeinschaftliche Polare des Punktes Q in $\left\{\begin{matrix}S\\ s\end{matrix}\right\}$ schneidet. Dann sind die Punkte $\left\{\begin{matrix}B, B'\\ b, b'\end{matrix}\right\}$ durch den Punkt $\left\{\begin{matrix}S\\ s\end{matrix}\right\}$ vom Punkte Q harmonisch getrennt. Da nun die harmonischen Gebilde QBSB' und QbSb' den Punkt Q entsprechend gemein haben, so steht auch der dritte Projectionsstrahl $B'b'$, wie die beiden andern, BbA und SsP, auf der Centrale in einem Punkte x senkrecht, und es verhält sich $B'x:b'x = BA:bA = R:r$. Daher ist der Punkt x kein anderer, als der innere Aehnlichkeitspunkt, und das Gebilde QAPI ist, als Projection des Gebildes $QBSB'$, gleichfalls harmonisch. Folglich schneidet auch diesmal der Kreis um den Durchmesser AI den Kreis O rechtwinklig, hat daher in allen Fällen mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale.

20. Der äussere und innere Potenzkreis. Beschreibt man um den $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt zweier gegebenen Kreise M und m einen Kreis, welcher mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale hat (also ihren gemeinschaftlichen kleinsten Orthogonalkreis O rechtwinklig schneidet), so heisst derselbe der $\left\{\begin{matrix}\text{äussere}\\\text{innere}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreis. Schneiden sich die gegebenen Kreise, so sind beide Potenzkreise reell und gehen beide durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise. Wenn aber Kreis M den Kreis m ganz $\left\{\begin{matrix}\text{aus}\\\text{ein}\end{matrix}\right\}$ schliesst, so ist der äussere Aehnlichkeitspunkt vom Kreise O $\left\{\begin{matrix}\text{aus}\\\text{ein}\end{matrix}\right\}$ geschlossen, der innere Aehnlichkeitspunkt $\left\{\begin{matrix}\text{ein}\\\text{aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossen (19), daher der äussere Potenzkreis $\left\{\begin{matrix}\text{reell}\\\text{imaginär}\end{matrix}\right\}$, der innere Potenzkreis $\left\{\begin{matrix}\text{imaginär}\\\text{reell}\end{matrix}\right\}$.

a) Beide Potenzkreise, der äussere und der innere, schneiden sich orthogonal. Denn schneiden sich die gegebenen Kreise, so stehen (19) die, nach ihrem einen Schnittpunkt S gezogenen Radien IS und AS der beiden Potenzkreise auf einander senkrecht. Schneiden sich aber die gegebenen Kreise nicht, so ist die gemeinschaftliche Sehne FG des reellen Potenzkreises $\left\{\begin{matrix}A\\I\end{matrix}\right\}$ und des Orthogonalkreises O die Polare des Punktes $\left\{\begin{matrix}A\\I\end{matrix}\right\}$ in Bezug auf den Kreis O, diese geht daher durch den Punkt $\left\{\begin{matrix}I\\A\end{matrix}\right\}$, da beide Aehnlichkeitspunkte auch für den Kreis O konjugirt sind. Folglich hat der Modularkreis des imaginären Potenzkreises die Sehne FG des reellen zum Durchmesser, letzterer halbirt daher die Peripherie jenes Modularkreises.

b) Jeder Kreis $\left\{\begin{matrix}K\\K_1\end{matrix}\right\}$, welcher die Kreise M und m unter gleichen Winkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet, wird von dem $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreise orthogonal geschnitten.

Denn schneiden sich die gegebenen Kreise nicht, so sind beide Potenzkreise Orthogonalkreise des Kreises O. Schneiden sich aber die gegebenen Kreise, so kann man ihren einen Schnittpunkt als einen unendlich kleinen Kreis O betrachten, der von beiden Potenzkreisen orthogonal geschnitten wird, und der auch seinerseits (wie der eigentliche Kreis O) die gegebenen Kreise orthogonal schneidet. Da nun ein Orthogonalkreis zweier Kreise diese ebensowohl gleichartig, wie ungleichartig schneidet, so werden die gegebenen Kreise von jedem der beiden Kreise $\left\{\begin{matrix}\text{O und K}\\\text{O und } K_1\end{matrix}\right\}$ unter gleichen Winkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten. Daher geht die Chordale der Kreise $\begin{Bmatrix}\text{O und K}\\ \text{O und K}_1\end{Bmatrix}$ durch den $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise. Folglich muss der $\begin{Bmatrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{Bmatrix}$ Potenzkreis, als ein Kreis aus der Chordale der Kreise $\begin{Bmatrix}\text{O und K}\\ \text{O und K}_1\end{Bmatrix}$, der den einen derselben, nämlich den Kreis O orthogonal schneidet, auch den andern, nämlich den Kreis $\begin{Bmatrix}K\\ K_1\end{Bmatrix}$ orthogonal schneiden.

c) Schneidet ein Kreis K den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den Kreis M, unter dem Winkel α und den $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Potenzkreis derselben orthogonal, so schneidet er auch den andern, nämlich den Kreis m, unter dem Winkel $\begin{Bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{Bmatrix}$.

Es sei B der eine Schnittpunkt des Kreises K mit dem Kreise M. Ziehen wir den $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitsstrahl $\begin{Bmatrix}AB\\ IB\end{Bmatrix}$, so wird derselbe den Kreis m in zwei Punkten schneiden, von welchen der eine, b, in Bezug auf den Punkt B potenzhaltend ist. Da nun ein Kreis durch die potenzhaltenden Punkte B und b eines $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitsstrahles $\begin{Bmatrix}AB\\ IB\end{Bmatrix}$ die Kreise M und m unter gleichen Winkeln $\begin{Bmatrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{Bmatrix}$artig schneidet, daher vom $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Potenzkreise orthogonal geschnitten wird, so erhalten wir, wenn ϱ den Halbmesser des Potenzkreises oder, falls letzterer imaginär ist, den Modulus seines Halbmessers vorstellt, die Gleichung $\varrho^2 = \begin{Bmatrix}AB.Ab\\ IB.Ib\end{Bmatrix}$. Nun schneidet aber der Aehnlichkeitsstrahl $\begin{Bmatrix}AB\\ IB\end{Bmatrix}$ auch den thätigen Kreis K, der als ein Orthogonalkreis des $\begin{Bmatrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Potenzkreises vorausgesetzt wurde, ausser dem Schnittpunkte B noch in einem Punkte x; folglich erhalten wir auch die Gleichung $\varrho^2 = \begin{Bmatrix}AB.Ax\\ IB.Ix\end{Bmatrix}$. Aus der Verbindung beider Gleichungen ergiebt sich, dass die Punkte x und b zusammenfallen, also Kreis K durch die potenzhaltenden Punkte B und b geht, woraus das zu Erweisende folgt.

21. Die äussere u. innere Chordalpunktslinie. Um die drei Punkte M_1, M_2 u. M_3, welche nicht auf einer Graden liegen, sind mit den Radien r_1, r_2 und r_3 Kreise beschrieben. Wir bestimmen ihren Chordalpunkt C, desgleichen den äussern Aehnlichkeitspunkt $\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{Bmatrix}$, sowie den innern Aehnlichkeitspunkt $\begin{Bmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{Bmatrix}$ der Kreise $\begin{Bmatrix}M_1 \text{ und } M_2\\ M_1 \text{ und } M_3\\ M_2 \text{ und } M_3\end{Bmatrix}$. Auf das Kreispaar $\begin{Bmatrix}M_1,\ M_2\\ M_1,\ M_3\\ M_2,\ M_3\end{Bmatrix}$ bezieht sich der äussere Potenzkreis $\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{Bmatrix}$, der innere $\begin{Bmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{Bmatrix}$. Es sei nun Kreis K irgend ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise unter einem beliebigen Winkel α gleichartig schneidet. Dann wird derselbe von jedem der drei äussern Potenzkreise orthogonal geschnitten. Folglich liegt jeder

Punkt K, d. h. der Mittelpunkt jedes Kreises K, auf der Chordale je zweier von diesen drei Potenzkreisen. Folglich haben die letzteren, alle drei, eine gemeinschaftliche Chordale, auf der sämmtliche Punkte K liegen. Zu diesen gehört aber auch der Punkt C, als Mittelpunkt eines Kreises, der die drei gegebenen Kreise unter dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gleichartig schneidet. Berücksichtigt man noch, dass die gemeinschaftliche Chordale der drei äussern Potenzkreise auf der, ihre Mittelpunkte verbindenden äussern Symmetrale senkrecht steht, so gelangt man zu dem Satze:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise ein Loth auf ihre äussere Symmetrale, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gleichartig schneiden. Diese Ortslinie heisse die äussere Chordalpunktslinie.

Es sei ferner Kreis $\left\{\begin{matrix}K_1\\K_2\\K_3\end{matrix}\right\}$ irgend ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise unter einem beliebigen Winkel α ungleichartig, d. h. den Kreis $\left\{\begin{matrix}M_1\\M_2\\M_3\end{matrix}\right\}$ unter dem Winkel α (oder α'), die Kreise $\left\{\begin{matrix}M_2 \text{ und } M_3\\M_1 \text{ und } M_3\\M_1 \text{ und } M_2\end{matrix}\right\}$ unter dem Winkel α' (oder α) schneidet. Demnach schneidet jeder Kreis $\left\{\begin{matrix}K_1\\K_2\\K_3\end{matrix}\right\}$ die Kreispaare $\left\{\begin{matrix}M_1\,M_2 \text{ und } M_1\,M_3\\M_2\,M_1 \text{ und } M_2\,M_3\\M_3\,M_1 \text{ und } M_3\,M_2\end{matrix}\right\}$ unter dem Winkel α ungleichartig, dagegen das Kreispaar $\left\{\begin{matrix}M_2\,M_3\\M_1\,M_3\\M_1\,M_2\end{matrix}\right\}$ gleichartig, wird daher von den Potenzkreisen $\left\{\begin{matrix}I_1\;I_2\;A_3\\I_1\;I_3\;A_2\\I_2\;I_3\;A_1\end{matrix}\right\}$ orthogonal geschnitten, so dass sein Mittelpunkt auf der Chordale je zweier von diesen drei Potenzkreisen liegt. Folglich haben die drei Potenzkreise $\left\{\begin{matrix}I_1\;I_2\;A_3\\I_1\;I_3\;A_2\\I_2\;I_3\;A_1\end{matrix}\right\}$ eine gemeinschaftliche Chordale, auf der sämmtliche Punkte $\left\{\begin{matrix}K_1\\K_2\\K_3\end{matrix}\right\}$ liegen. Zu diesen gehört aber auch der Chordalpunkt C, als Mittelpunkt eines Kreises, der die drei gegebenen Kreise unter dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ungleichartig schneidet. Berücksichtigt man noch, dass die gemeinschaftliche Chordale der zusammengehörigen drei Potenzkreise auf der, ihre Mittelpunkte verbindenden innern Symmetrale senkrecht steht, so gelangt man zu dem Satze:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise ein Loth auf irgend eine ihrer drei innern Symmetralen, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig, und zwar dasjenige Kreispaar gleichartig schneiden, auf welches sich der mitwirkende äussere Aehnlichkeitspunkt bezieht. Diese drei Ortslinien mögen die drei innern Chordalpunktslinien heissen.

Gleichwie die $\left\{\begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Chordalpunktslinie, auf der sämmtliche Punkte $\left\{\begin{matrix}K\\ K_1 \text{ od. } K_2 \text{ od. } K_3\end{matrix}\right\}$ liegen, zugleich die gemeinschaftliche Chordale der drei Potenzkreise $\left\{\begin{matrix}A_1, A_2, A_3\\ I_1, I_2, A_3 \text{ od. etc.}\end{matrix}\right\}$ vorstellt, so ist umgekehrt die $\left\{\begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Symmetrale $\left\{\begin{matrix}A_1\ A_2\ A_3\\ I_1\ I_2\ A_3 \text{ od. etc.}\end{matrix}\right\}$ zugleich die gemeinschaftliche Chordale sämmtlicher Kreise $\left\{\begin{matrix}K\\ K_1 \text{ od. etc.}\end{matrix}\right\}$. Denn je zwei Kreise $\left\{\begin{matrix}K\\ K_1 \text{ od. etc.}\end{matrix}\right\}$ werden von den Potenzkreisen $\left\{\begin{matrix}A_1 \text{ und } A_2\\ I_1 \text{ und } I_2 \text{ od. etc.}\end{matrix}\right\}$ orthogonal geschnitten.

22. Die involutorische Kreisschaar und der Kreisbüschel. Um das gegenseitige Verhalten aller gleichartig, wie ungleichartig schneidenden Kreise zu bestimmen, bezeichnen wir diejenige der vier Symmetralen, welche die Aehnlichkeitspunkte $\left\{\begin{matrix}A_1\ A_2\ A_3\\ I_1\ I_2\ A_3\\ I_1\ I_3\ A_2\\ I_2\ I_3\ A_1\end{matrix}\right\}$ verbindet, durch $\left\{\begin{matrix}a\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{matrix}\right\}$, die auf derselben senkrechte Chordalpunktslinie durch $\left\{\begin{matrix}c\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{matrix}\right\}$; die $\left\{\begin{matrix}\text{erstere}\\ \text{letztere}\end{matrix}\right\}$ ist die gemeinschaftliche $\left\{\begin{matrix}\text{Centrale}\\ \text{Chordale}\end{matrix}\right\}$ der „Potenzschaar" (a oder etc.), welche aus den drei Potenzkreisen (A_1, A_2, A_3 oder etc.) besteht, dagegen die gemeinschaftliche $\left\{\begin{matrix}\text{Chordale}\\ \text{Centrale}\end{matrix}\right\}$ der „Isogonalschaar" (K oder etc.). Die Symmetrale (a oder etc.), die Chordalpunktslinie (c oder etc.), die Potenzschaar (a oder etc.) und die Isogonalschaar (K oder etc.) sind einander „zugeordnet."

So oft einer von den Kreisen einer Potenzschaar imaginär wird, ist die zugeordnete Isogonalschaar ein Kreisbüschel (15), dessen Axe dasjenige Stück der zugeordneten Symmetrale ist, welches der gemeinschaftliche Orthogonalkreis C der gegebenen Kreise auf derselben abschneidet. Jeder Kreis um die Axe des Büschels, der einen der gegebenen Kreise unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ o\\ \pi\end{matrix}\right\}$ schneidet, ist ein Glied der zugeordneten Schaar und schneidet daher alle drei Kreise M_1, M_2, M_3 unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ o\\ \pi\end{matrix}\right\}$. Sind aber alle Kreise einer Potenzschaar reell, so kommt es darauf an, ob die zugeordnete Symmetrale vom Kreise C, der zugleich jede Potenzschaar orthogonal schneidet, ein- oder ausgeschlossen ist. Im ersten Falle ist die zugeordnete Isogonalschaar wiederum ein Kreisbüschel. Im zweiten Falle bildet die Potenzschaar einen Kreisbüschel (10), dessen Axe ein Stück der zugeordneten Chordalpunktslinie ist und, wie vom Kreise C, so auch von sämmtlichen Kreisen der zugeordneten Isogonalschaar harmonisch getheilt wird. Folglich schneidet alsdann diese Schaar die zugeordnete Chordalpunktslinie in einer hyperbolischen Involution, so dass vom ersten bis zum letzten ihrer Kreise jeder den folgenden umschliesst oder von ihm umschlossen wird. Wir nennen sie daher eine involutorische Kreisschaar und die zugeordnete Symmetrale die Axe derselben. Giebt es in irgend einer Isogonalschaar, z. B. in der Schaar K_1, ausser einem Kreise $K_1\ (\alpha\, \alpha'\, \alpha')$, d. h. einem solchen, der den Kreis M_1 unter dem Winkel α, die Kreise M_2 u. M_3 unter dem Winkel α' schneidet, einen zweiten Kreis $\left\{\begin{matrix} K_1\ (\alpha\, \alpha'\, \alpha') \\ K_1\ (\alpha'\, \alpha\, \alpha) \end{matrix}\right\}$, so bildet dieser zu jenem das $\left\{\begin{matrix}\text{symmetrische} \\ \text{konjugirte}\end{matrix}\right\}$ Glied der Schaar. Die Grenzkreise einer jeden Schaar sind zwei symmetrische oder konjugirte Berührungskreise. Ist die Schaar involutorisch, so sind ihre Grenzkreise entweder durch die Axe getrennt, oder die Schaar ist ringförmig. Tritt der erstere Fall ein, so ist die Axe ein Glied der Schaar, d. h. ein Isogonalkreis, muss also die gegebenen Kreise schneiden. Da nun aber, wenn eine $\left\{\begin{matrix}\text{äussere} \\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Symmetrale die gegebenen Kreise $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet} \\ \text{nicht schneidet}\end{matrix}\right\}$, mindestens ein Glied der zugeordneten Potenzschaar imaginär wird, folglich die zugeordnete Isogonalschaar ein Kreisbüschel sein muss, so folgt:

Bilden die $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidenden Kreise $\left\{\begin{matrix} K \\ K_1 \text{ od. } K_2 \text{ od. } K_3 \end{matrix}\right\}$ eine involutorische Schaar, so ist sie jederzeit $\left\{\begin{matrix}\text{ringförmig} \\ \text{durch die Axe getheilt}\end{matrix}\right\}$.

Schneiden sich je zwei der gegebenen Kreise, und sind die Schnittpunkte jedes Paares durch den dritten Kreis getrennt, so ist jede von den vier Isogonalschaaren K, K_1, K_2, K_3 involutorisch. Denn der Chordalpunkt C ist von den drei gegebenen Kreisen zugleich eingeschlossen; daher ist ihr gemeinschaftlicher Orthogonalkreis C imaginär, folglich jede Potenzschaar ein Kreisbüschel (15). Von jenen vier Isogonalschaaren ist die erste, K, in den Berührungsring eingeschlossen, der von den gleichartig berührenden Kreisen k und k′ gebildet wird. Da zwischen jedem derselben und den drei gegebenen Kreisen eine einschliessende Berührung stattfindet, beiden daher, als Isogonalkreisen, der Schnittwinkel $\alpha = 0$ zukommt; da ferner ein rechtwinklig schneidender Kreis nicht vorhanden ist, so giebt es zwischen beiden Grenzkreisen einen Kreis $K(\mu)$, der die gegebenen Kreise unter dem grösstmöglichsten Winkel $\mu < \frac{\pi}{2}$ gleichartig schneidet, und dieser theilt die Schaar in zwei gegenseitig symmetrische Schaaren. Auf der Chordalpunktslinie c bestimmt das endliche Stück kk′ die fruchtbare Strecke derselben. Jede der übrigen Isogonalschaaren wird durch die Axe in zwei konjugirte Schaaren getrennt. Denn ist z. B. die Schaar K_1 von den Berührungskreisen k_1 und k'_1 begrenzt, so liegt Kreis $\left\{\begin{matrix}k_1 \\ k'_1\end{matrix}\right\}$ in demjenigen Bogendreieck, welches vom Kreise M_1 $\left\{\begin{matrix}\text{ein} \\ \text{aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossen, von dem Kreise M_2 und M_3 $\left\{\begin{matrix}\text{aus} \\ \text{ein}\end{matrix}\right\}$ geschlossen ist, schneidet also den Kreis M_1 unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}0 \\ \pi\end{matrix}\right\}$, so dass, beim Uebergange von dem Grenzkreise $\left\{\begin{matrix}k_1 \\ k'_1\end{matrix}\right\}$ zur Axe, welche unter dem grössten spitzen Winkel x und unter dem kleinsten stumpfen Winkel x' schneidet, der Schnittwinkel α von $\left\{\begin{matrix}o \text{ bis } x \text{ wächst} \\ \pi \text{ bis } x' \text{ abnimmt}\end{matrix}\right\}$. Die durch das Unendliche gehende Strecke $k_1 \cdot k'_1$ ist die fruchtbare Strecke der Chordalpunktslinie c_1.

Ist der Kreis M_3 vom Kreise M_2 eingeschlossen, dieser vom Kreise M_1 $\left\{\begin{matrix}\text{ein} \\ \text{aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossen, so ist jede der vier Isogonalschaaren ein Kreisbüschel. Denn jede Potenzschaar enthält mindestens ein imaginäres Glied, da die drei Potenzkreise $\left\{\begin{matrix}A_1, A_2, A_3 \\ I_1, I_2, A_3\end{matrix}\right\}$ imaginär sind. Jeder von diesen vier Kreisbüscheln ist unbegrenzt, desgleichen die fruchtbare Strecke der zugeordneten Chordalpunktslinie, da es keine Berührungskreise an die drei gegebenen giebt. Aus demselben Grunde ist aber um die Axe eines solchen Büschels an keinen der gegebenen Kreise ein Berührungskreis möglich; sie muss daher ihren einen Endpunkt innerhalb des Kreises M_3, den andern $\left\{\begin{matrix}\text{ausserhalb} \\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises M_1 haben. Daher giebt es (12) vier Kreise $K(\mu)$, $K_1(\mu_1)$, $K_2(\mu_2)$, $K_3(\mu_3)$, von denen jeder die drei gegebenen Kreise unter dem kleinstmöglichsten Winkel schneidet, der erste gleichartig, die drei übrigen ungleichartig. Der Kreisbüschel K (wie jeder der übrigen) enthält einen Kreis $K(x)$, welcher die gegebenen Kreise unter demselben Winkel schneidet, als die Axe des Büschels. Dieser Kreis theilt den Büschel in zwei Hälften, von denen wiederum die eine durch den Kreis des schiefsten Schnittes in zwei symmetrische Theile, die andre durch den Orthogonalkreis C in zwei konjugirte Theile getrennt wird (11, III). In der ersten Hälfte des Büschels ist dessen Axe das symmetrische, in der zweiten Hälfte das konjugirte Glied zu dem Kreise $K(x)$; in letzterer Beziehung stellt sie den Kreis des stumpfsten Schnittes vor.

Lassen wir den Kreis M_3 in einen, den Kreis M_2 zunächst inwendig berührenden, sodann ihn schneidenden übergehen, wobei wir uns auf den Fall beschränken können, in welchem beide von dem Kreise M_1 umschlossen werden, so findet zunächst nur die Aenderung statt, dass sich der Kreis $\left\{\begin{matrix}K(\mu) \\ K_1(\mu_1)\end{matrix}\right\}$ in einen Kreis $\left\{\begin{matrix}K(o) \text{ oder } k \\ K_1(o) \text{ oder } k_1\end{matrix}\right\}$ verwandelt, den der Kreis M_1 einschliessend berührt, während er seinerseits die Kreise M_2 und M_3 in deren eigenem Berührungspunkte $\left\{\begin{matrix}\text{ein} \\ \text{aus}\end{matrix}\right\}$ schliessend tangirt, wobei die Axe des Büschels $\left\{\begin{matrix}K \\ K_1\end{matrix}\right\}$ zwischen beiden Berührungspunkten liegt. Sodann aber treten aus dem Berührungskreise $\left\{\begin{matrix}k \\ k_1\end{matrix}\right\}$ deren zwei $\left\{\begin{matrix}k \text{ und } k' \\ k_1 \text{ und } k'_1\end{matrix}\right\}$ hervor, und zwischen den Mittelpunkten der letzteren entsteht auf der zugeordneten Chordalpunktslinie $\left\{\begin{matrix}c \\ c_1\end{matrix}\right\}$ eine unfruchtbare Strecke $\left\{\begin{matrix}kk' \\ k_1k_1'\end{matrix}\right\}$. Der Kreisbüschel K bleibt ein solcher, da zwei von den äusseren Potenzkreisen imaginär bleiben; aber beide Endpunkte seiner Axe liegen jetzt innerhalb des Kreises M_1 und ausserhalb der Kreise M_2 und M_3. Jeder Kreis, der seinen Mittelpunkt in der Strecke kk' hat und durch die Endpunkte der Axe geht, umschliesst die Kreise M_2 und M_3 und wird vom Kreise M_1 umschlossen. Der Kreisbüschel K_1 dagegen kann jetzt in eine involutorische Schaar übergehen, da die zugeordneten Potenzkreise I_1, I_2, A_3 jetzt sämmtlich reell sind.

23. Isogonalpunkte. Es sind vier Kreise M_1, M_2, M_3, M_4 gegeben, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Graden haben. Da je zwei derselben einen äussern Potenzkreis, je drei eine äussere Potenzschaar bestimmen, so erhalten wir 6 äussere Potenzkreise und 4 äussere Potenzschaaren, von denen jede eine zugeordnete Chordalpunktslinie (c) zur gemeinschaftlichen Chordale hat. Begegnen sich daher irgend zwei von diesen 4 äussern Chordalpunktslinien in einem Punkte K, so giebt es um denselben einen Kreis K, der die zugeordneten beiden Potenzschaaren zugleich orthogonal schneidet. Folglich ist dieser Kreis K ein gemeinschaftlicher Orthogonalkreis von 5 verschiedenen Potenzkreisen, da jede äussere Potenzschaar mit jeder andern einen Potenzkreis gemein hat, also zwei Potenzschaaren 5 verschiedene Potenzkreise enthalten. Da aber demzufolge nur noch ein Potenzkreis übrig ist, der mit zwei Paaren aus der Zahl derjenigen, die bereits vom Kreise K orthogonal geschnitten wurden, die beiden noch übrigen Potenzschaaren bilden muss, so werden auch diese beiden Schaaren, mithin alle 6 Potenzkreise vom Kreise K orthogonal geschnitten. Daher begegnen sich alle vier Chordalpunktslinien (c) im Punkte K. Sind es die unfruchtbaren Strecken derselben, die in diesem Punkte zusammentreffen, so hat der Punkt keine Bedeutung. Steht es aber von irgend einer jener 4 Chordalpunktslinien fest, dass der Punkt K auf ihrer fruchtbaren Strecke liegt, so ist der Orthogonalkreis K zu den 4 äusseren Potenzschaaren ein gemeinschaftliches Glied der ihnen zugeordneten 4 Isogonalschaaren, ist also ein Kreis, der die vier gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gleichartig schneidet. Wir nennen alsdann den Punkt K den äussern Isogonalpunkt.

In Uebereinstimmung mit der Definition einer innern Chordalpunktslinie $\left\{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\right\}$ rücksichtlich dreier Kreise, verstehen wir jetzt, wo vier Kreise gegeben sind, unter den innern Chordalpunktslinien $\left\{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix}\right\}$ alle diejenigen, die solchen innern Symmetralen zugeordnet sind, deren innere Aehnlichkeitspunkte durch den Kreis $\left\{\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix}\right\}$ in Verbindung mit je zweien der übrigen bestimmt werden. Es giebt also drei innere Chordalpunktslinien von der Klasse (c_1), 3 von der Klasse (c_2), desgleichen von der Klasse (c_3) und (c_4), die der Reihe nach folgenden Gruppen von Symmetralen zugeordnet sind:

$$\left\{\begin{matrix} I_{1,2} & I_{1,3} & A_{2,3} \\ I_{1,2} & I_{1,4} & A_{2,4} \\ I_{1,3} & I_{1,4} & A_{3,4} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} I_{2,1} & I_{2,3} & A_{1,3} \\ I_{2,1} & I_{2,4} & A_{1,4} \\ I_{2,3} & I_{2,4} & A_{3,4} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} I_{3,1} & I_{3,2} & A_{1,2} \\ I_{3,1} & I_{3,4} & A_{1,4} \\ I_{3,2} & I_{3,4} & A_{2,4} \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} I_{4,1} & I_{4,2} & A_{1,2} \\ I_{4,1} & I_{4,3} & A_{1,3} \\ I_{4,2} & I_{4,3} & A_{2,3} \end{matrix}\right\},$$

wobei die Indices stets die beiden Kreise bezeichnen, von welchen der Aehnlichkeitspunkt abhängt. Aus dieser Definition ergiebt sich durch Wiederholung der obigen Schlüsse: je drei innere Chordalpunktslinien derselben Klasse begegnen sich in einem Punkte derjenigen äussern Chordalpunktslinie, welche den mitwirkenden äussern Aehnlichkeitspunkten zugeordnet ist. Die aufgestellten Klassen liefern daher die vier Schnittpunkte K_1 K_2 K_3 K_4. Liegt ein solcher, z. B. K_1, auf der fruchtbaren Strecke irgend einer der in ihm sich schneidenden Chordalpunktslinien, so ist der Orthogonalkreis K_1 zu irgend einem der mitwirkenden Potenzkreise ein gemeinschaftliches Glied der zugeordneten Isogonalschaaren, von denen die drei innern denselben gegebenen Kreis (im angenommenen Falle den Kreis M_1) durch ihren Schnittwinkel auszeichnen, so dass der Kreis K_1 die 4 gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig, und zwar diejenigen drei gleichartig schneidet, auf welche sich die mitwirkende äussere Chordalpunktslinie bezieht. Wir nennen alsdann jeden der vier Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 (insofern er nämlich Mittelpunkt eines solchen Isogonalkreises ist) einen innern Isogonalpunkt erster Art.

Heben wir aus den vier gegebenen zwei beliebige Kreise heraus, z. B. die Kreise M_1 und M_2, und verbinden jeden derselben mit beiden übrig gelassenen (M_3 und M_4), darauf jeden der letzteren mit beiden herausgehobenen, so erhalten wir die vier Ternen: $M_1\ M_3\ M_4$, $M_2\ M_3\ M_4$, $M_3\ M_1\ M_2$, $M_4\ M_1\ M_2$. Jede derselben liefert (ausser zwei andern) eine solche innere Symmetrale, deren äusserer Aehnlichkeitspunkt entweder durch die herausgehobenen oder durch die übrig gelassenen Kreise bestimmt wird. Diese vier innern Symmetralen sind:

$$(I_{1,3}\ I_{1,4}\ A_{3,4}),\ (I_{2,3}\ I_{2,4}\ A_{3,4}),\ (I_{3,1}\ I_{3,2}\ A_{1,2}),\ (I_{4,1}\ I_{4,2}\ A_{1,2}).$$

Eben diesen sind nun wiederum 4 Chordalpunktslinien zugeordnet, auf welche dieselben Schlüsse, wie auf die 4 äussern Chordalpunktslinien, Bezug haben, die sich also gleichfalls in einem Punkte K' begegnen. Liegt dieser ihr Schnittpunkt auf der fruchtbaren Strecke irgend einer von ihnen, so ist der Orthogonalkreis K' zu irgend einem der mitwirkenden Potenzkreise wiederum ein solcher, der die vier gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig schneidet, und zwar sowohl das herausgehobene, als auch das übrig gelassene Paar gleichartig, aber das eine unter einem spitzen Winkel α, das andere unter dem stumpfen Winkel α'. Offenbar kann es nicht mehr als drei derartige Punkte (K', K'', K''') geben; wir nennen sie innere Isogonalpunkte zweiter Art.

Wenn also vier Kreise gegeben sind, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Graden haben, so sind im Ganzen 8 Isogonalpunkte und 8 verschiedene Isogonalkreise möglich. Sie sind insgesammt nothwendig, sobald an d r e i unter den gegebenen vier Kreisen, z. B. an die Kreise M_1, M_2 und M_3, keine Berührungskreise möglich sind. Denn in diesem Falle enthält jeder der 8 Büschel von Chordalpunktslinien (K; K_1, K_2, K_3, K_4; $K'\ K''\ K'''$) wenigstens e i n e solche, deren fruchtbare Strecke unbegrenzt ist. Giebt es aber Berührungskreise an die drei erstgenannten unter den vier gegebenen Kreisen, und stellen z. B. die Kreise k und k′ die beiden gleichartig berührenden vor, so ist die Existenz des Isogonalkreises K entweder von dem Radius des Kreises M_4 (wenn sein Mittelpunkt gegeben ist) oder von der Lage seines Mittelpunktes (wenn sein Radius gegeben ist) abhängig. Nun ist zuvörderst klar, dass irgend ein Kreis X, der von jedem der Kreise k und k′ dieselbe Berührung erfährt, wie die Kreise M_1, M_2, M_3, den Kreis $\begin{Bmatrix} k \\ k' \end{Bmatrix}$ unter dem Winkel $\begin{Bmatrix} o \\ \pi \end{Bmatrix}$ schneidet, auch von jedem Kreise, der die vorgenannten drei unter dem Winkel α schneidet, gleichfalls unter dem Winkel α geschnitten wird; denn die vier äussern Chordalpunktslinien zu den Kreisen M_1, M_2, M_3 und X haben die Punkte k und k′ mit einander gemein, fallen daher in eine zusammen. Ist demnach ein gegebener vierter Kreis M_4 so beschaffen, dass man einen Kreis X, wie den zuvor bestimmten, konstruiren kann, der zugleich jenen in einem Punkte x berührt, und zwar so, dass die zwischen beiden stattfindende Berührung eine **einschliessende** ist, so wird ein Kreis K, der die Kreise M_1, M_2, M_3 unter einem Winkel α gleichartig schneidet und durch den Punkt α geht, wie den Kreis X, so auch den Kreis M_4 unter demselben Winkel α schneiden. Aus diesem Kriterium lassen sich in Rücksicht auf jede der drei Lagen, welche die Berührungskreise k und k′ gegen einander haben können, die näheren Bedingungen ableiten, unter welchen die Aufgabe, durch alle 4 Kreise M_1, M_2, M_3, M_4 einen Isogonalkreis zu legen, lösbar ist. Bilden z. B. die Kreise k und k′ einen Ring, so ergiebt sich, dass jene Aufgabe nur dann keine Lösung zulässt, wenn der vierte Kreis M_4 entweder vom äussern Grenzkreise k eingeschlossen ist, ohne seinerseits den innern Grenzkreis k′ auszuschliessen, oder den innern Grenzkreis ausschliesst, ohne vom äussern Grenzkreise eingeschlossen zu werden.

V. Vom ungleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

24. **Der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt** (λ). Um die Punkte M und m sind mit den Radien R und r Kreise beschrieben. Wir wollen durch beide Kreise eine Sekante legen, welche dieselben unter zwei gegebenen Winkeln, nämlich Kreis M unter dem Winkel α, Kreis m unter dem Winkel β, gleichartig schneidet. Begegnet diese Sekante dem Kreise M in den Punkten B und B′, dem Kreise m in den Punkten b und b′, und fällen wir auf die Sehnen BB′ und bb′ aus den Mittelpunkten M und m die Perpendikel MD und md, so stellt (3) der Winkel $\left\{\begin{matrix}BMD\\ bmd\end{matrix}\right\}$, den der Radius $\left\{\begin{matrix}BM\\ bm\end{matrix}\right\}$ mit dem Perpendikel $\left\{\begin{matrix}MD\\ md\end{matrix}\right\}$ bildet, den Schnittwinkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$ vor, und wir finden $MD = R\cos\alpha$, $md = r\cos\beta$. Also ist der Perpendikel $\left\{\begin{matrix}MD\\ md\end{matrix}\right\}$ in Rücksicht auf den Kreis $\left\{\begin{matrix}M\\ m\end{matrix}\right\}$ die halbe Bestimmungssehne $\left\{\begin{matrix}S\alpha\\ S\beta\end{matrix}\right\}$ für den Schnittwinkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$. Wenn wir daher um den Punkt $\left\{\begin{matrix}M\\ m\end{matrix}\right\}$ mit dem Radius $\left\{\begin{matrix}S\alpha\\ S\beta\end{matrix}\right\}$ den „Komplementärkreis" für den Schnittwinkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$ beschreiben und an beide Kreise die gemeinschaftlichen äussern Tangenten anlegen, welche sich im äussern Aehnlichkeitspunkt A eben dieser Kreise begegnen, so erhalten wir zwei Grade, von welchen jede die gegebenen Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln α und β gleichartig schneidet. Zugleich verhält sich $AM:Am = S\alpha:S\beta = R\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}:r$. Setzen wir das Verhältniss der Kosinusse der gegebenen Winkel, nämlich $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, gleich λ, so verhält sich $AM : Am = \lambda R : r$. Sind daher x und y irgend zwei Winkel, welche der Gleichung $\frac{\cos x}{\cos y} = \lambda$ Genüge leisten, und konstruiren wir eine Grade, welche die gegebenen Kreise unter diesen Winkeln x und y gleichartig schneidet, so geht dieselbe ebenfalls durch den Punkt A. Folglich ist der äussere Aehnlichkeits-

punkt A der beiden Komplementärkreise für die respektiven Schnittwinkel α und β zugleich der Schnittpunkt aller Graden, welche die gegebenen Kreise unter solchen Winkeln gleichartig schneiden, deren Kosinusse ein konstantes Verhältniss $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ haben. Wir nennen diesen Punkt den äussern Aehnlichkeitspunkt (λ) der gegebenen Kreise und bezeichnen ihn durch $A\lambda$; für $\lambda = 1$, geht er in den gewöhnlichen äussern Aehnlichkeitspunkt über. Bezeichnen wir die Länge der Centrale Mm durch c, so ist der Abstand des Punktes $A\lambda$ vom Mittelpunkte m des kleinern gegebenen Kreises $= \frac{cr}{R\lambda - r}$. Da dieser Ausdruck, wenn λ der Reihe nach $= \infty$ (also $\angle \beta = \frac{\pi}{2}$), $= \frac{r}{R}$, $= o$ (also $\alpha = \frac{\pi}{2}$) gesetzt wird, die Werthe o, ∞, $-$ c annimmt, so bewegt sich der Punkt $A\lambda$, während λ von ∞ bis o abnimmt, vom Punkte m aus bis zum unendlich fernen Punkte der Graden Mm und kehrt dann auf der entgegengesetzten Seite zurück bis zum Punkte M; er hat also die, durch das Unendliche gehende Strecke M·m zu seinem Spielraum.

Legen wir aber an die, um die Punkte M und m beschriebenen Komplementärkreise die gemeinschaftlichen innern Tangenten an, die sich im innern Aehnlichkeitspunkte I eben dieser Kreise begegnen, so erhalten wir zwei Grade, von welchen jede die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β ungleichartig schneidet. Offenbar ist jener Punkt I zugleich der Schnittpunkt aller Graden, welche die gegebenen Kreise unter solchen Winkeln ungleichartig schneiden, deren Kosinusse das konstante Verhältniss $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ haben. Wir nennen ihn den innern Aehnlichkeitspunkt (λ) der gegebenen Kreise und bezeichnen ihn durch $I\lambda$. Der Abstand desselben vom Mittelpunkte m ist $= \frac{cr}{R\lambda + r}$. Da diese Funktion, zwischen den Grenzen $\lambda = \infty$ und $\lambda = o$, von o bis c kontinuirlich wächst, so ist die endliche Strecke Mm der Spielraum des innern λ - Punktes.

Gilt die Voraussetzung, dass die gegebenen Kreise M und m ausser einander liegen, so liegen auch jene Komplementärkreise stets ausser einander, und es giebt stets eine Grade, welche die Kreise M und m unter beliebig gegebenen Winkeln α und β gleichartig oder ungleichartig schneidet. Gilt aber jene Voraussetzung nicht, so kann der eine Komplementärkreis den andern ganz oder zum Theil einschliessen. Im ersteren Falle würde es weder eine gleichartig, noch eine ungleichartig schneidende Grade mit den Schnittwinkeln α und β geben. Nichtsdestoweniger haben die beiden Aehnlichkeitspunkte der Komplementärkreise auch jetzt die Bedeutung der Punkte $A\lambda$ und $I\lambda$; aber die gemeinschaftliche kleinste Sehne dieser Kreise durch den Punkt $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda \\ I_\lambda \end{matrix} \right\}$ stellt diejenige Grade vor, welche die gegebenen Kreise unter den kleinstmöglichsten Winkeln, deren Kosinusse sich wie λ:1 verhalten, $\left\{ \begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix} \right\}$ schneidet.

25. Es ist ein Kreis m und eine Grade L gegeben. Wir betrachten die letztere als einen Kreis mit unendlich grossem Radius, dessen unendlich ferner Mittelpunkt vom Punkte m durch die Grade getrennt ist. Es soll nun zu dem Kreise m und der Graden L der äussere und

innere Aehnlichkeitspunkt (λ) konstruirt werden, wobei $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ist, und die Winkel α und β zu Schnittwinkeln der Graden L und des Kreises m bestimmt sind. Fällen wir aus dem Punkte m auf die Grade L ein Loth mn, welches wir sowohl über m bis zu einem beliebigen Punkte x, als auch über n bis zu einem beliebigen Punkte y verlängern, so stellt dasselbe die Centrale des Kreises m und des uneigentlichen Kreises L vor, und es handelt sich nunmehr um die Punkte, in welchen dasselbe von zwei Graden geschnitten wird, die beiderseits der gegebenen Graden und dem gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β begegnen, aber die eine gleichartig, die andere ungleichartig. Behufs ihrer Konstruction beschreiben wir um den Punkt m den Komplementärkreis für den Schnittwinkel β, legen alsdann durch einen beliebigen Punkt B der Graden L zwei Grade, Bb und Bb′, welche der ersteren beiderseits unter dem Winkel α begegnen, und fällen aus m auf diese Graden die Perpendikel mT und mT′, von denen der erstere den Komplementärkreis in t, der letztere in t′ schneidet. Legt man nun an eben diesen Kreis in t und t′ Tangenten an, und begegnet die erstere der Strecke mx im Punkte A, die letztere der Strecke my im Punkte I, so ist A der äussere, I der innere Aehnlichkeitspunkt (λ), da beide Tangenten die Grade L und den Kreis m unter den Winkeln α und β schneiden, und zwar die erstere gleichartig, die letztere ungleichartig.

26. Werden zwei gegebene Kreise M und m von irgend zwei Kreisen K_1 und K_2 bezüglich unter den Winkeln α und β (nämlich Kreis M unter dem Winkel α, Kreis m unter dem Winkel β) relativ $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten, so schneiden die Kreise K_1 und K_2 die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, oder sie schneiden dieselbe unter gleichen Winkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$.

Betrachten wir die Kreise M und m als die thätigen, so werden der Voraussetzung zufolge die Kreise K_1 und K_2 vom Kreise M unter dem Winkel α, vom Kreise m unter dem Winkel β $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten. Folglich ist (18) die Chordale der Kreise M und m ein $\left\{\begin{matrix}\text{äusserer}\\ \text{innerer}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl der Kreise K_1 und K_2, schneidet daher entweder keinen der letzteren oder beide, und zwar unter gleichen Winkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$.

27. Wenn umgekehrt zwei Kreise K_1 und K_2 die Chordale zweier gegebenen Kreise M und m unter gleichen Winkeln

gleichartig schneiden, wenn ferner der eine, nämlich K_1, die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β gleichartig oder ungleichartig, der andere aber den Kreis M unter eben demselben Winkel schneidet, wie der Kreis K_1, so wird er auch den Kreis m unter eben demselben Winkel, wie der Kreis K_1, schneiden.

ungleichartig schneiden, wenn ferner der eine, nämlich K_1, die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β gleichartig oder ungleichartig, der andere aber den Kreis M unter dem Supplement zu dem bezüglichen Schnittwinkel des Kreises K_1 schneidet, so wird er auch den Kreis m unter dem Supplement zu dem bezüglichen Schnittwinkel des Kreises K_1 schneiden.

Da im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle der Kreis M die Kreise K_1 u. K_2 unter dem Winkel α $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet, so wird er von dem $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreise derselben orthogonal geschnitten. Nun ist aber die Chordale der gegebenen Kreise im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle ein $\left\{\begin{matrix}\text{äusserer}\\ \text{innerer}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl der Kreise K_1 und K_2, hat also den Mittelpunkt des $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreises der letzteren in sich. Folglich schneidet derselbe, wie den einen der gegebenen Kreise, so auch den andern, nämlich den Kreis m, orthogonal. Folglich wird der Kreis m, da er den einen der Kreise K_1 und K_2 unter dem Winkel β schneidet, nothwendig beide Kreise unter dem Winkel β $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneiden (20, c).

28. Hat man einen reellen Kreis M und einen imaginären Kreis m, deren Chordale von zwei Kreisen K_1 und K_2 unter gleichen Winkeln $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ geschnitten wird, schneidet ferner der eine von den thätigen Kreisen, nämlich K_1, den reellen Kreis M unter einem Winkel α, den imaginären Kreis m orthogonal, hinwiederum der andere, nämlich Kreis K_2, den reellen Kreis M unter $\left\{\begin{matrix}\text{demselben Winkel } \alpha\\ \text{dem Supplement des Winkels } \alpha\end{matrix}\right\}$, so wird der letztere auch den imaginären Kreis orthogonal schneiden.

Da im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle der reelle Kreis M die Kreise K_1 und K_2 unter dem Winkel α $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet, so wird er von dem $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreise derselben orthogonal geschnitten. Zugleich ist die Chordale des reellen Kreises M und des imaginären m im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle ein $\left\{\begin{matrix}\text{äusserer}\\ \text{innerer}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl der thätigen Kreise K_1 und K_2, hat also den Mittelpunkt ihres $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreises in sich. Folglich schneidet derselbe, wie den reellen Kreis M, so auch den imaginären Kreis m orthogonal und ist unbedingt reell (14). Da nun dieser Potenzkreis in Gemeinschaft mit dem Kreise K_1 von dem imaginären Kreise m orthogonal geschnitten wird, so haben beide mit einander, und mit beiden darum auch der Kreis K_2, eine gemeinschaftliche Sehne, welcher der Mittelpunkt m des imaginären Kreises angehört. Folglich schneidet der letztere auch den Kreis K_2 orthogonal.

29. D i e ä u s s e r e u n d i n n e r e B e s t i m m u n g s s e k a n t e. Wenn ein Kreis $\left\{\begin{matrix}K_1\\ K_2\end{matrix}\right\}$, der zwei gegebene Kreise M und m unter dem Winkel α und β $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet, der Chordale beider Kreise begegnet, so giebt es stets eine Grade, welche die gegebenen Kreise unter denselben Winkeln α und β $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet. Wir nennen eine solche Grade im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Falle die $\left\{\begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Bestimmungssekante für die Schnittwinkel α und β und bezeichnen dieselbe, da

sie im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Falle eine gemeinschaftliche $\begin{Bmatrix}\text{äussere}\\\text{innere}\end{Bmatrix}$ Tangente an die, um M und m beschriebenen Komplementärkreise für die Schnittwinkel α und β vorstellt, durch $\begin{Bmatrix}T\ (\alpha,\beta)\\t\ (\alpha,\beta)\end{Bmatrix}$.

Der Kreis K_1 schneide die gegebenen Kreise unter den spitzen Winkeln α und β und ihre Chordale OX unter dem Winkel φ_1. Beschreiben wir um den Mittelpunkt M des grösseren Kreises M den Komplementärkreis für den bezüglichen Schnittwinkel α, so enthält der, dem letzteren Kreise sich anschmiegende Strahlbüschel auf jeder Seite der Centrale Mm zwei Strahlen, welche der Chordale OX unter dem Winkel φ_1 begegnen. Aus diesen vier Strahlen heben wir diejenigen beiden heraus, welche mit dem Mittelpunkte K_1 des thätigen Kreises auf derselben Seite der Centrale liegen und bezeichnen sie durch T und T'. Betrachten wir nun eine jede der Graden T und T' als einen uneigentlichen Kreis, der den Kreis M unter dem spitzen Winkel α schneidet, der also seinen unendlich fernen Mittelpunkt in einem Perpendikel aus M auf die betreffende Grade, und zwar in dessen Verlängerung über M hat, so haben beide Kreise T und T', ihre Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Chordale OX, folglich hat der eine von beiden z. B. T, nothwendig seinen Mittelpunkt auf derselben Seite der Chordale OX, wie der Kreis K_1. Da mithin diese beiden Kreise der Chordale der gegebenen Kreise unter dem Winkel φ_1 gleichartig begegnen, da ferner Kreis K_1 die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β, der uneigentliche Kreis T aber den Kreis M unter dem Winkel α schneidet, so muss derselbe, d. i. die Grade T, auch den Kreis m unter dem Winkel β schneiden (27). Daher ist die Grade T die äussere Bestimmungssekante T (α,β), begegnet also der Centrale im äussern Aehnlichkeitspunkte $A\lambda$. Setzt man für den Kreis K_1 den Kreis K_2, der den Kreis M unter dem spitzen Winkel α, den Kreis m unter dem stumpfen Winkel β' und die Chordale OX unter einem Winkel φ_2 schneidet, so lässt sich auf analoge Art beweisen, dass es auch eine innere Bestimmungssekante t (α,β) giebt, die mithin der Centrale im innern Aehnlichkeitspunkte $I\lambda$ begegnet.

30. So lange der Punkt $A\lambda$ vom Mittelpunkte M des grössern Kreises durch m getrennt ist, welche Lage des Punktes $A\lambda$ wir als seine positive bestimmen, hat die Grade T (mag sie nun auf der einen oder auf der andern Seite der Centrale liegen) sobald sie als ein Kreis, der die gegebenen Kreise unter spitzen Winkeln schneidet, aufgefasst wird, ihren unendlich fernen Mittelpunkt auf derjenigen Seite der Chordale OX, auf welcher sich der Mittelpunkt M des grösseren Kreises befindet, und die wir als die positive Seite der Chordale bestimmen. Gleiches gilt daher von allen Kreisen K_1, welche beide gegebenen Kreise unter spitzen Winkeln schneiden, während alle Kreise K_1, welche beiden gegebenen unter stumpfen Winkeln begegnen, ihre Mittelpunkte auf der negativen Seite der Chordale haben.

Da der innere Aehnlichkeitspunkt $I\lambda$ stets zwischen den Punkten M und m liegt, so hat die innere Bestimmungssekante, sobald sie als ein Kreis aufgefasst wird, der den grösseren Kreis M unter dem spitzen Winkel α schneidet, ihren unendlich fernen Mittelpunkt stets auf der positiven Seite der Chordale. Gleiches gilt daher von allen Kreisen K_2, welche den Kreis M unter dem spitzen Winkel α, den Kreis m unter dem stumpfen Winkel β' schneiden, während alle Kreise K_2, welche dem Kreis M unter dem stumpfen Winkel α', dem Kreis m unter dem spitzen Winkel β begegnen, ihre Mittelpunkte auf der negativen Seite der Chordale haben. Beachten wir noch, dass die $\left\{\begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Bestimmungssekante der Chordale OX unter dem Winkel $\left\{\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\}$ begegnet, so wird sich ihre Benennung durch nachstehende Sätze rechtfertigen:

a) Bezeichnen wir durch $\left\{\begin{matrix}K_1 \text{ und } K'_1\\ K_2 \text{ und } K'_2\end{matrix}\right\}$ zwei Kreise, von denen jeder zwei gegebene Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln α und β

gleichartig schneidet, der erste aber unter den spitzen, der zweite unter den stumpfen Winkeln, so schneiden dieselben die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, oder unter demselben Winkel φ_1, unter welchem sie von der äussern Bestimmungssekante geschnitten wird; ihre Mittelpunkte jedoch liegen auf verschiedenen Seiten jener Chordale, und zwar hat der Kreis $\left\{\begin{matrix}K_1\\ K'_1\end{matrix}\right\}$, bei positiver Lage des äussern λ-Punktes, seinen Mittelpunkt auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite derselben.

ungleichartig schneidet, der erste aber den Kreis M unter dem spitzen, der zweite unter dem stumpfen Winkel, so schneiden dieselben die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, od. unter demselben Winkel φ_2, unter welchem sie von der innern Bestimmungssekante geschnitten wird; ihre Mittelpunkte jedoch liegen auf verschiedenen Seiten jener Chordale, und zwar hat der Kreis $\left\{\begin{matrix}K_2\\ K'_2\end{matrix}\right\}$ seinen Mittelpunkt jederzeit auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite derselben.

b) Wenn umgekehrt (27)

ein Kreis $\left\{\begin{matrix}K_1\\ K'_1\end{matrix}\right\}$ den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den grösseren M, unter dem $\left\{\begin{matrix}\text{spitzen}\\ \text{stumpfen}\end{matrix}\right\}$ Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\}$, ihre Chordale aber unter demselben Winkel φ_1 schneidet, unter welchem sie von der äussern Bestimmungssekante T (α,β) geschnitten wird; wenn endlich auch sein Mittelpunkt, bei positiver Lage des äussern λ-Punktes, auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite jener Chordale liegt, so schneidet er den Kreis m unter dem $\left\{\begin{matrix}\text{spitzen}\\ \text{stumpfen}\end{matrix}\right\}$ Winkel $\left\{\begin{matrix}\beta\\ \beta'\end{matrix}\right\}$.

ein Kreis $\left\{\begin{matrix}K_2\\ K'_2\end{matrix}\right\}$ den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den grösseren M, unter dem $\left\{\begin{matrix}\text{spitzen}\\ \text{stumpfen}\end{matrix}\right\}$ Winkel $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\}$, ihre Chordale aber unter demselben Winkel φ_2 schneidet, unter welchem sie von der innern Bestimmungssekante t (α,β) geschnitten wird; wenn endlich auch sein Mittelpunkt auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite jener Chordale liegt, so schneidet er den Kreis m unter dem $\left\{\begin{matrix}\text{stumpfen}\\ \text{spitzen}\end{matrix}\right\}$ Winkel $\left\{\begin{matrix}\beta'\\ \beta\end{matrix}\right\}$.

31. Hat man einen reellen Kreis M und einen reellen oder imaginären Kreis m, beschreibt um den Mittelpunkt M des Kreises M, dessen Komplementärkreis für den Schnittwinkel α und legt an den letztern Kreis eine Tangente an, die, was als möglich vorausgesetzt wird, durch den Mittelpunkt m des Kreises m geht, so dass dieselbe, wenn der Kreis M imaginär ist, die Peripherie seines Modularkreises halbirt, so stellt diese Tangente, da sie den Kreis M unter dem Winkel α, den Kreis m, mag er nun reell oder imaginär sein, orthogonal schneidet, die äussere

oder auch die innere Bestimmungssekante $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$ in Bezug auf die gegebenen Kreise M und m vor. Der Satz (28) begreift daher auch folgenden in sich:

Hat man einen reellen Kreis M und einen imaginären Kreis m; schneidet ferner ein Kreis $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ 1. den Kreis M unter dem $\left\{\begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix}\right\}$ Winkel $\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix}\right\}$, 2. die Chordale der gegebenen Kreise unter demselben Winkel, unter welchem sie von der Bestimmungssekante $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$ beider Kreise geschnitten wird, liegt 3. sein Mittelpunkt in Hinsicht auf den Punkt M auf $\left\{\begin{matrix} \text{derselben} \\ \text{der entgegengesetzten} \end{matrix}\right\}$ Seite jener Chordale, so schneidet derselbe Kreis $\left\{\begin{matrix} K \\ K' \end{matrix}\right\}$ den imaginären Kreis m orthogonal.

32. Potenzkreise (λ). Um die Punkte M und m sind mit den Radien R und r Kreise beschrieben. Ferner sind zwei Winkel α und β gegeben, unter welchen die gegebenen Kreise von andern Kreisen geschnitten werden sollen.

Wir konstruiren die äussere und die innere Bestimmungssekante, $T(\alpha, \beta)$ und $t(\alpha, \beta)$; jene schneidet die Centrale der gegebenen Kreise in ihrem äussern, diese in ihrem innern Aehnlichkeitspunkte (λ). Ein Kreis, der den $\left\{\begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt (λ) zu seinem Centrum, und der mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale OX hat (welche die Centrale im Punkte O schneidet), soll der $\left\{\begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix}\right\}$ Potenzkreis (λ) heissen. Schneiden sich die gegebenen Kreise, so sind beide Potenzkreise (λ) reell. Liegen die Kreise M und m ausser einander, so ist der Spielraum des Punktes $A\lambda$, nämlich die unendliche Strecke M.m, vom kleinsten gemeinschaftlichen Orthogonalkreise O der gegebenen Kreise ausgeschlossen (20), daher jedenfalls der äussere Potenzkreis (λ) reell. Umschliesst der grössere Kreis M den Kreis m, so ist der Spielraum des innern λ-Punktes, nämlich die endliche Strecke Mm, vom Orthogonalkreise O ausgeschlossen, daher jedenfalls der innere Potenzkreis (λ) reell. Ist in diesem Falle der äussere Potenzkreis (λ) imaginär, so hat sein Centrum, also der äussere λ-Punkt, die positive Lage (30).

Jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln α und β gleichartig schneidet und ihrer Chordale begegnet, wird vom äussern Potenzkreise (λ) orthogonal geschnitten.

Da der thätige Kreis der Chordale OX der gegebenen Kreise begegnet, so giebt es für dieselben (29) eine äussere Bestimmungssekante $T(\alpha, \beta)$, welche jene Chordale unter einem Winkel φ_1 schneiden wird. Da aber diese Grade $T(\alpha, \beta)$ durch das Centrum des Potenzkreises $A\lambda$ geht, denselben also, mag er nun reell oder imaginär sein, orthogonal schneidet, so ist sie in Rücksicht auf die Kreise M und $A\lambda$ eine Bestimmungssekante $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$. Zugleich ist der Winkel φ_1, unter welchem diese Grade der Chordale OX begegnet, der nämliche, unter welchem die letztere vom thätigen Kreise geschnitten wird (30, a). Daher erfüllt jeder Kreis $\left\{\begin{matrix} K_1 \\ K'_1 \end{matrix}\right\}$, der die gegebenen Kreise unter den $\left\{\begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix}\right\}$ Winkeln $\left\{\begin{matrix} \alpha \text{ und } \beta \\ \alpha' \text{ und } \beta' \end{matrix}\right\}$ schneidet, folgende Bedingungen:

1. er schneidet die Chordale der Kreise M und $A\lambda$ unter demselben Winkel, unter welchem sie von der Bestimmungssekante $T\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ dieser Kreise geschnitten wird;

2. er schneidet den Kreis M unter dem Winkel $\begin{Bmatrix}\alpha \\ \alpha'\end{Bmatrix}$;

3. er hat, bei positiver Lage des äussern λ-Punktes (der einzig möglichen, falls der Kreis $A\lambda$ imaginär ist) seinen Mittelpunkt auf der $\begin{Bmatrix}\text{positiven} \\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ Seite jener Chordale (30, a); folglich muss derselbe in Folge der Sätze (30, b und 31) den Kreis $A\lambda$ orthogonal schneiden.

Jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln α und β ungleichartig schneidet und ihrer Chordale begegnet, wird vom innern Potenzkreise (λ) orthogonal geschnitten.

Es lässt sich auf ganz analoge Weise, wie zuvor, darthun, dass jeder Kreis $\begin{Bmatrix}K_2 \\ K'_2\end{Bmatrix}$, der den Kreis M unter dem $\begin{Bmatrix}\text{spitzen} \\ \text{stumpfen}\end{Bmatrix}$ Winkel $\begin{Bmatrix}\alpha \\ \alpha'\end{Bmatrix}$, den Kreis m unter dem $\begin{Bmatrix}\text{stumpfen} \\ \text{spitzen}\end{Bmatrix}$ Winkel $\begin{Bmatrix}\beta' \\ \beta\end{Bmatrix}$ schneidet, in Rücksicht auf die Kreise M und $I\lambda$ genau dieselben Bedingungen erfüllt, wie der Kreis $\begin{Bmatrix}K_1 \\ K'_1\end{Bmatrix}$ in Rücksicht auf die Kreise M und $A\lambda$.

Sind überhaupt x und y zwei Winkel, deren Kosinusse sich wie die der gegebenen Winkel, also wie $\lambda : 1$ verhalten, und welche, falls der $\begin{Bmatrix}\text{äussere} \\ \text{innere}\end{Bmatrix}$ Aehnlichkeitspunkt (λ) von beiden gegebenen Kreisen zugleich eingeschlossen ist, nicht kleiner sind, als bezüglich diejenigen Winkel, unter welchen die gegebenen Kreise von der gemeinschaftlichen kleinsten Sehne durch den Punkt $\begin{Bmatrix}A\lambda \\ I\lambda\end{Bmatrix}$ geschnitten werden, so dass eine Bestimmungssekante $\begin{Bmatrix}T\,(x, y) \\ t\,(x, y)\end{Bmatrix}$ vorhanden ist: so wird jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln x und y $\begin{Bmatrix}\text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig}\end{Bmatrix}$ schneidet, ein Orthogonalkreis des $\begin{Bmatrix}\text{äussern} \\ \text{innern}\end{Bmatrix}$ Potenzkreises (λ) sein.

33. Die äussere und innere λ-Symmetrale. Um die Punkte M_1, M_2 und M_3, welche nicht auf einer Graden liegen, sind mit den Radien R_1, R_2 und R_3 Kreise beschrieben. Zugleich sind drei Winkel α, β, γ gegeben, unter welchen die gegebenen Kreise von andern Kreisen geschnitten werden sollen. Wir bestimmen für die Kreise $\begin{Bmatrix}M_1 \text{ und } M_2 \\ M_1 \text{ und } M_3 \\ M_2 \text{ und } M_3\end{Bmatrix}$ die Punkte $\begin{Bmatrix}A_{\lambda_1} \text{ und } I_{\lambda_1} \\ A_{\lambda_2} \text{ und } I_{\lambda_2} \\ A_{\lambda_3} \text{ und } I_{\lambda_3}\end{Bmatrix}$, wobei $\lambda_1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

$$\lambda_2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

$$\lambda_3 = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Da die drei Punkte $A\lambda_1$, $A\lambda_2$, $A\lambda_3$ die äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei Paare von Komplementärkreisen sind, welche behufs der Bestimmung jener Punkte um die Mittelpunkte der gegebenen Kreise beschrieben werden mussten, so liegen dieselben auf einer Graden, die wir die äussere λ-Symmetrale nennen. Da ebenso die Punkte $I\lambda_1$, $I\lambda_2$, $I\lambda_3$ die innern Aehnlichkeitspunkte jener drei Paare von Komplementärkreisen sind, so liegen je zwei von diesen Punkten, welche sich auf zwei bestimmte Paare der Komplementärkreise beziehen, mit dem äussern Aehnlichkeitspunkt des dritten Paares auf einer Graden, und wir erhalten daher drei „innere λ-Symmetralen" $I\lambda_1\, I\lambda_2\, A\lambda_3$, $I\lambda_1\, I\lambda_3\, A\lambda_2$, $I\lambda_2\, I\lambda_3\, A\lambda_1$. Endlich ist noch jeder der drei äussern Aehnlichkeitspunkte (λ) das Centrum eines äussern, jeder der drei innern λ-Punkte das Centrum eines innern Potenzkreises (λ). Setzen wir nun voraus, dass die drei gegebenen Winkel α, β, γ und überhaupt drei Winkel x, y, z, welche den Gleichungen $\frac{\cos x}{\cos y} = \lambda_1$, $\frac{\cos x}{\cos z} = \lambda_2$ Genüge leisten, von der Beschaffenheit sind, dass sie, falls die drei gegebenen Kreise **nicht** ausser einander liegen, die Grenzwerthe nicht überschreiten, bei welchen die Möglichkeit einer $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\ \text{innern}\end{matrix}\right\}$ Bestimmungssekante $\left\{\begin{matrix}T_1\,(x,y)\\ t_1\,(x,y)\end{matrix}\right\}$ für das Kreispaar M_1, M_2, oder $\left\{\begin{matrix}T_2\,(x,z)\\ t_2\,(x,z)\end{matrix}\right\}$ für das Kreispaar M_1, M_3, oder $\left\{\begin{matrix}T_3\,(y,z)\\ t_3\,(y,z)\end{matrix}\right\}$ für das Kreispaar M_2, M_3 aufhört, so ergiebt sich:

1. Alle Kreise K_1, welche den drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3 bezüglich unter irgend drei Winkeln x, y, z, wie die vorausgesetzten, gleichartig begegnen, schneiden die drei äusseren Potenzkreise (λ) orthogonal (32). Folglich haben die letzteren eine gemeinschaftliche Chordale, welche auf der äussern λ-Symmetrale senkrecht steht und die Mittelpunkte aller Kreise K_1 enthält. Zu den Kreisen K_1 gehört aber auch der gemeinschaftliche Orthogonalkreis aller drei gegebenen Kreise, da dessen Schnittwinkel mit den letzteren, von denen jeder $= \frac{\pi}{2}$ ist, den, für die Winkel x, y, z gestellten Bedingungen Genüge leisten. Mithin liegt der Chordalpunkt C der gegebenen Kreise ebenfalls auf der gemeinschaftlichen Chordale der drei äussern Potenzkreise (λ). Hierauf gründet sich der Satz:

F ä l l t m a n a u s d e m C h o r d a l p u n k t d r e i e r g e g e b e n e n K r e i s e M_1, M_2, M_3 e i n L o t h a u f e i n e ä u s s e r e λ-S y m m e t r a l e, w e l c h e s i c h a u f d r e i g e g e b e n e S c h n i t t w i n k e l α, β, γ d e r K r e i s e M_1, M_2, M_3 b e z i e h t, s o i s t d a s s e l b e d e r O r t d e s M i t t e l p u n k t e s a l l e r K r e i s e, w e l c h e d i e g e g e b e n e n u n t e r i r g e n d d r e i W i n k e l n g l e i c h a r t i g s c h n e i d e n, d e r e n K o s i n u s s e s i c h w i e d i e d e r g e g e b e n e n W i n k e l v e r h a l t e n, i n s b e s o n d e r e a u c h d e r O r t d e s M i t t e l p u n k t e s d e r j e n i g e n b e i d e n K r e i s e, w e l c h e d i e g e g e b e n e n u n t e r d e n W i n k e l n α, β, γ g l e i c h a r t i g s c h n e i d e n.

2. Alle Kreise K_2, welche den drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3 bezüglich unter irgend drei Winkeln x, y, z, wie die vorausgesetzten, ungleichartig begegnen (d. h. bezüglich unter den Winkeln x, y', z' oder x', y, z u. s. w.), schneiden zwei innere Potenzkreise ($I\lambda_1$, $I\lambda_2$ oder etc.), die sich auf die beiden ungleichartig geschnittenen Kreispaare beziehen, und den zugeordneten äussern Potenzkreis ($A\lambda_3$ oder etc.), der sich auf das gleichartig geschnittene Kreispaar bezieht, orthogonal (32). Folglich haben die drei zusammengehörigen Potenzkreise ($I\lambda_1$, $I\lambda_2$,

$A\lambda_3$ oder etc.) eine gemeinschaftliche Chordale, welche auf der zugeordneten innern λ-Symmetrale senkrecht steht und die Mittelpunkte aller Kreise K_2 von bestimmter Klasse enthält. Ein solcher Kreis K_2 ist aber auch stets der gemeinschaftliche Orthogonalkreis der gegebenen Kreise, da er die letzteren unter solchen Winkeln (ungleichartig) schneidet, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten; folglich liegt sein Centrum C mit den Mittelpunkten aller Kreise K_2 irgend einer Klasse auf der gemeinschaftlichen Chordale der zugeordneten drei Potenzkreise (λ). Hieraus gründet sich der Satz:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 ein Loth auf eine der drei innern λ-Symmetralen, welche sich auf drei gegebene Schnittwinkel α, β, γ der Kreise M_1, M_2, M_3 beziehen, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die gegebenen unter den Winkeln α, β, γ und überhaupt unter irgend drei Winkeln x, y, z, deren Kosinusse sich wie die der gegebenen Winkel verhalten, ungleichartig schneiden, und zwar diejenigen Kreise gleichartig, auf welche sich der mitwirkende äussere λ-Punkt bezieht.

34. Die äussere λ-Symmetrale ist die gemeinschaftliche Chordale aller Kreise K_1. Jede innere λ-Symmetrale ist die gemeinschaftliche Chordale aller zugeordneten Kreise K_2, welche nämlich dasjenige Paar der gegebenen Kreise gleichartig schneiden, auf welches sich der, jener Symmetrale angehörige äussere λ-Punkt bezieht. Daher bildet sowohl die Kreisschaar K_1, als auch jede der drei Kreisschaaren K_2, jenachdem die zugeordnete λ-Symmetrale vom gemeinschaftlichen Orthogonalkreise C der gegebenen Kreise geschnitten wird oder nicht, entweder einen Kreisbüschel oder eine involutorische Kreisschaar (22). In beiden Fällen ist eine jede von allen vier Kreisschaaren, wenn die drei gegebenen Kreise ausser einander liegen, durch zwei Kreise begrenzt, welche beiderseits einen gewissen von den gegebenen Kreisen berühren, aber der eine einschliessend, der andere ausschliessend. Ist z. B. $\alpha < \beta < \gamma$, so sind die Verhältnissexponenten λ_1, λ_2, $\lambda_3 > 1$, und es giebt drei Winkel $\operatorname{arc.cos} \pm 1$, $\operatorname{arc.cos} \pm \frac{1}{\lambda_1}$, $\operatorname{arc.cos} \pm \frac{1}{\lambda_2}$, deren Kosinusse sich wie $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ verhalten. Alsdann wird die Kreisschaar K_1 begrenzt von zwei Kreisen, deren einer den Kreis M_1 einschliessend berührt und die Kreise M_2 und M_3 unter den Winkeln $\operatorname{arc.cos}\frac{1}{\lambda_1}$, $\operatorname{arc.cos}\frac{1}{\lambda_2}$ schneidet, während der andere den Kreis M_1 ausschliessend berührt und die Kreise M_2 und M_3 unter den Winkeln $\operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_1}$, $\operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_2}$ schneidet. Aehnliches gilt von den drei Schaaren K_2. Die beiden Grenzkreise der $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Schaar K_2 schneiden die gegebenen M_1, M_2, M_3 der Reihe nach unter den Winkeln

$$\left\{\begin{matrix} o, \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_2} \text{ und } \pi, \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_2} \\ \pi, \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_2} \text{ und } o, \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_2} \\ \pi, \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_2} \text{ und } o, \operatorname{arc.cos} \frac{1}{\lambda_1}, \ \operatorname{arc.cos} -\frac{1}{\lambda_2} \end{matrix}\right\}$$

Der berührte Kreis ist stets derjenige, auf welchen sich der kleinste unter den drei gegebenen Winkeln α, β, γ bezieht.

VII. Aufgaben über den gleichwinkligen und ungleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

35. Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Kreise M und m unter dem gegebenen Winkel $\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{1. gleichartig} \\ \text{2. ungleichartig} \end{array} \right\}$ schneidet, und zwar den einen, z. B. M, in einem gegebenen Punkte B.

Fig. 10. 1. Man konstruire zu jedem der gegebenen Kreise den Bestimmungskreis für den Schnittwinkel α, lege durch den gegebenen Peripheriepunkt B des Kreises M einen äussern Aehnlichkeitstrahl Abb′BB′ und aus den potenzhaltenden Punkten B und b′ desselben an die bezüglichen Bestimmungskreise M und m die Tangentenpaare BT und BT′, b′t und b′t′. Darauf verlängere man die gleichliegenden Tangenten $\left\{ \begin{array}{l} \text{BT und b}'\text{t} \\ \text{BT}' \text{ und b}'\text{t}' \end{array} \right\}$, welche nämlich von dem Winkel, den die Radien MB und mb′ bei gehöriger Verlängerung bilden, beiderseits $\left\{ \begin{array}{l} \text{aus} \\ \text{ein} \end{array} \right\}$ geschlossen sind, bis sie sich in dem Punkte $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$ begegnen, so ist KB = Kb′ (wie auch K′B = K′b′); denn $\angle$ MBK — MBB′ = $\angle$ mb′K — mb′b oder $\angle$ KBB′ = Kb′b. Beschreibt man daher um die Punkte K und K′ Kreise mit den Radien KB und K′B, so genügen beide den gestellten Forderungen. Durch die Schnittpunkte B und b′ dieser Kreise mit den gegebenen giebt es einen Berührungskreis und einen Orthogonalkreis. Der Mittelpunkt $\left\{ \begin{array}{l} k \\ k' \end{array} \right\}$ des $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersteren} \\ \text{letzteren} \end{array} \right\}$ ist derjenige Punkt der Graden KK′, in welchem sich die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Radien MB und mb}' \\ \text{Tangenten in B und b}' \end{array} \right\}$ bei gehöriger Verlängerung begegnen. Daher sind die Mittelpunkte K und K′ der beiden gleichartig schneidenden Kreise durch die Mittelpunkte k und k′ des Berührungs- und Orthogonalkreises harmonisch getrennt. Betrachtet man den konstruirten Aehnlichkeitsstrahl als einen Kreis K, so liegt das Centrum des konjugirten Kreises K′ in dem Mittelpunkte O der Strecke kk′. Der aus diesem Punkte mit dem Radius OB beschriebene Kreis schneidet daher die gegebenen Kreise unter demselben Winkel, wie jener Aehnlichkeitsstrahl.

2. Die Konstruktion des ungleichartig schneidenden Kreises weicht nur darin von der vorigen ab, dass statt eines äussern ein innerer Aehnlichkeitsstrahl durch den gegebenen Punkt B gelegt werden muss. Verlängert man diesmal die ungleichliegenden Tangenten $\left\{ \begin{array}{l} \text{BT und b}'\text{t}' \\ \text{BT}' \text{ und b}'\text{t} \end{array} \right\}$ aus den potenzhaltenden Punkten B und b′ an die bezüglichen Bestimmungskreise, bis sie sich in dem Punkte $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$ begegnen, so ist wiederum KB = Kb′ (wie auch K′B = K′b′); denn $\angle$ MBT + MBB′ = $\angle$ mb′t′ + mb′b oder KBb′ = Kb′B. Daher erfüllen die, um die Punkte K und K′

mit den Radien KB und K′B beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Auch diese Punkte K und K′ sind durch die Mittelpunkte des in B und b′ ungleichartig berührenden und orthogonal schneidenden Kreises harmonisch getrennt.

36. Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Kreise M und m unter den gegebenen Winkeln α und β $\left\{\begin{matrix}\text{1. gleichartig}\\ \text{2. ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ schneidet, und zwar den einen, z. B. M, in einem gegebenen Punkte B.

Man konstruire um die Centrale Mm zwei (kongruente) Kreise, welche auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Sehne einen Peripheriewinkel gleich der Differenz $\alpha - \beta$ einschliessen. Darauf ziehe man den Radius MB und verlängere ihn nach beiden Seiten, bis er das, durch den eingeschlossenen Peripheriewinkel $\alpha - \beta$ bestimmte Segment $\left\{\begin{matrix}\text{jenseits}\\ \text{disseits}\end{matrix}\right\}$ der Centrale Mm im Punkte $\left\{\begin{matrix}S_1\\ S_2\end{matrix}\right\}$ verlässt, und lege aus diesen Punkten S_1 und S_2 durch den Mittelpunkt des Kreises m die Sekanten $S_1c_1mb_1$ und $S_2b_2mc_2$, welche den Kreis m in den Punkten c_1 und b_1, b_2 und c_2 schneiden. Zieht man nun 1. die Graden Bb_1 und Bb_2, welche dem Kreise m in einem zweiten Punkte b'_1 und b'_2 begegnen, so vertreten diese beiden Graden zusammen einen äussern Aehnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn $\alpha = \beta$ wird; die Punkte b_1 und b_2 vertreten einen zugeordneten, die Punkte b_1' und b'_2 einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte B. Daher muss, nachdem man um die Mittelpunkte M und m die Bestimmungskreise für die Schnittwinkel α und β beschrieben hat, von den beiden Tangenten BT und BT′ aus dem Punkte B an den Bestimmungskreis M die eine auf die gleichliegende Tangente aus dem Punkte b'_1 an den Bestimmungskreis m, die andere auf die gleichliegende Tangente aus dem Punkte b'_2 bezogen werden. Nämlich bei Anwendung des Punktes $\left\{\begin{matrix}S_1\\ S_2\end{matrix}\right\}$ hat man die, von dem Winkel $\left\{\begin{matrix}MB,\ mb'_1\\ MB,\ mb'_2\end{matrix}\right\}$ beiderseits $\left\{\begin{matrix}\text{aus}\\ \text{ein}\end{matrix}\right\}$ geschlossenen Tangenten $\left\{\begin{matrix}BT \text{ und } b'_1t_1\\ BT' \text{ und } b'_2t_2\end{matrix}\right\}$ bis zu ihren Schnittpunkten K_1 und K_2 zu verlängern; dann ist $K_1B = K_1b'_1$, $K_2B = K_2b'_2$.

Denn $\angle\, MBK_1 - mb'_1K_1 = (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta)$;

$\angle\, MBb'_1 - mb'_1B = S_1Bb_1 - (\pi - S_1b_1B) = \pi - S_1 - \pi = -(\alpha - \beta)$.

Durch Subtraktion erhält man $\underbrace{MBK_1 - MBb'_1}_{K_1Bb'_1} = \underbrace{mb'_1K_1 - mb'_1B}_{K_1b'_1B.}$

Ferner $\angle\, MBK_2 - mb'_2K_2 = \alpha - \beta$;

$\angle\, MBb'_2 - mb'_2B = MBb_2 - S_2b_2B = S_2 = \alpha - \beta$.

Durch Subtraktion erhält man $\underbrace{MBb'_2 - MBK_2}_{K_2Bb'_2} = \underbrace{mb'_2B - mb'_2K_2}_{K_2b'_2B.}$

Beschreibt man daher um die Pnnkte K_1 und K_2 Kreise mit den Radien K_1B und K_2B, so schneiden dieselben die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β gleichartig.

Zieht man nun 2. die Graden Bc_1 nnd Bc_2, welche den Kreis m in einem zweiten Punkte c'_1 und c'_2 schneiden, so vertreten diese beiden Graden zusammen einen innern Aehnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn $\alpha = \beta$ wird; die Punkte c_1 und c_2 vertreten einen zugeordneten, die Punkte c'_1 und c'_2 einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte B. Daher muss von den beiden Tangenten BT und BT′ die $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{andere}\end{matrix}\right\}$ auf die ungleich liegende Tangente aus dem Punkte $\left\{\begin{matrix}c'_1\\ c'_2\end{matrix}\right\}$ an den Bestimmungskreis m bezogen werden. Nämlich bei Anwendung des Punktes $\left\{\begin{matrix}S_1\\ S_2\end{matrix}\right\}$ hat man die, von dem Winkel $\left\{\begin{matrix}MB,\ mc'_1\\ MB,\ mc'_2\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\text{aus- und ein}\\ \text{ein- und aus}\end{matrix}\right\}$ geschlossenen Tangente $\left\{\begin{matrix}BT \text{ und } c'_1 t_2\\ BT' \text{ und } c'_2 t_4\end{matrix}\right\}$ bis zu ihren Schnittpunkten K_3 u. K_4 zu verlängern; dann ist $K_3B = K_3c'_1$, $K_4B = K_4c'_2$.

$$\text{Denn } \angle MBK_3 + mc'_1K_3 = (\pi - \alpha) + \beta = \pi - (\alpha - \beta);$$
$$\angle MBc'_1 + mc'_1B = S_1Bc_1 + S_1c_1B = \pi - (\alpha - \beta).$$

$$\text{Durch Subtraction erhält man } \underbrace{MBK_3 - MBc'_1}_{K_3Bc'_1} = \underbrace{mc'_1B - mc'_1K_3}_{K_3c'_1B}.$$

$$\text{Ferner } \angle MBK_4 + mc'_2K_4 = \alpha + (\pi - \beta) = \pi + \alpha - \beta;$$
$$\angle MBc'_2 + mc'_2B = mBc_2 + \pi - mc_2B = \pi + \alpha - \beta.$$

$$\text{Durch Subtraction erhält man } \underbrace{MBc'_2 - mBK_4}_{K_4Bc'_2} = \underbrace{mc'_2K_4 - mc'_2B}_{K_4c'_2B}.$$

Beschreibt man daher um die Punkte K_3 und K_4 Kreise mit den Radien K_3B und K_4B, so schneiden dieselben die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β ungleichartig.

Anmerkung. Lässt man den Winkel mMB, durch welchen der Punkt B bestimmt ist, abnehmen, so gelangt man bald zu solchen Punkten B, dass von den beiden, um die Centrale Mm konstruirten Segmenten, welche beiderseits den Peripheriewinkel $\alpha - \beta$ einschliessen, nur noch das disseitige, aber nicht mehr das jenseitige durch den verlängerten Radius MB geschnitten wird. Alsdann geht jedoch die Verlängerung des Radius MB durch das andere Segment desselben Kreises, welches den Peripheriewinkel $\pi - (\alpha - \beta)$ einschliesst, und verlässt es in einem Punkte S_1, welcher dieselben Dienste leistet, wie zuvor der jenseits der Centrale gelegene. Zieht man nämlich die Sekante $S_1c_1mb_1$, darauf die Graden Bb_1 und Bc_1, welche den Kreis m nochmals in den Punkten b'_1 und c'_1 schneiden, und legt aus den Punkten $\left\{\begin{matrix}B \text{ und } b'_1\\ B \text{ und } c'_1\end{matrix}\right\}$ an die Bestimmungskreise M u. m die $\left\{\begin{matrix}\text{gleich}\\ \text{ungleich}\end{matrix}\right\}$ liegenden Tangenten $\left\{\begin{matrix}BT \text{ und } b'_1t_1\\ BT \text{ und } c'_1t_3\end{matrix}\right\}$, welche sich bei gehöriger Verlängerung in dem Punkte $\left\{\begin{matrix}K_1\\ K_3\end{matrix}\right\}$ begegnen, so ist wiederum $K_1B = K_1b'_1$, $K_3B = K_3c'_1$;

$$\text{Denn } \angle MBK_1 - mb'_1K_1 = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta;$$
$$\angle MBb'_1 - mb'_1B = \pi - S_1Bb_1 - (\pi + S_1b_1B) = -(\pi - S_1) = -(\alpha - \beta).$$

$$\text{Folglich durch Subtraktion } \underbrace{MBb'_1 - MBK_1}_{K_1Bb'_1} = \underbrace{mb_1B - mb'_1K_1}_{K_1b'_1B}.$$

$$\text{Ferner } \angle MBK_3 + mc'_1K_3 = \pi - \alpha + \beta = \pi - (\alpha - \beta);$$
$$\angle MBc'_1 - mc'_1B = \pi - S_1Bc_1 - S_1c_1B = \pi - (\pi - S_1) = \pi - (\alpha - \beta).$$

$$\text{Folglich durch Subtraktion } \underbrace{MBc'_1 - MBK_3}_{K_3Bc'_1} = \underbrace{mc'_1B + mc'_1K_3}_{K_3c'_1B}.$$

Daher schneidet der um den Punkt $\left\{\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix}\right\}$ mit dem Radius $\left\{\begin{matrix} K_1B \\ K_2B \end{matrix}\right\}$ beschriebene Kreis die gegebenen Kreise unter den Winkeln α und β $\left\{\begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix}\right\}$ artig.

37. Einen Kreis zu konstruiren, der einen gegebenen Kreis m und eine gegebene Grade L

1. unter einem gegebenen Winkel α 2. bezüglich unter den Winkeln α und β

$\left\{\begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix}\right\}$ artig schneidet, und zwar den Kreis m (oder auch die Grade L) in einem gegebenen Punkte b.

Die Lösung der ersten Aufgabe ist derjenigen analog, die in § 35 gezeigt wurde. Zur Lösung der zweiten Aufgabe ziehe man einen Durchmesser dd_1, des Kreises m senkrecht gegen die Grade L und lege an denselben zwei andere Durchmesser b_1c_1 und b_2c_2 unter dem Winkel $\alpha - \beta$ an. Zieht man alsdann die Graden $\left\{\begin{matrix} bb_1 \text{ und } bb_2 \\ bc_1 \text{ und } bc_2 \end{matrix}\right\}$, welche der Graden L in den Punkten $\left\{\begin{matrix} B_1 \text{ und } B_2 \\ B_3 \text{ und } B_4 \end{matrix}\right\}$ und dem Durchmesser dd_1, in den Punkten $\left\{\begin{matrix} e_1 \text{ und } e_2 \\ e_3 \text{ und } e_4 \end{matrix}\right\}$ begegnen, so vertreten beide Grade zusammen einen $\left\{\begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn $\alpha = \beta$ wird. Fig. 12.

Die Punkte $\left\{\begin{matrix} B_1 \text{ und } B_2 \\ B_3 \text{ und } B_4 \end{matrix}\right\}$ vertreten einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte b. Beschreibt man daher einerseits um den Punkt m den Bestimmungskreis für den Schnittwinkel α und legt an denselben aus b die Tangenten bt und bt′ an; errichtet andrerseits auf der Graden L in den Punkten B_1, B_2 etc. die Perpendikel B_1M_1, B_2M_2 etc. und legt an jeden derselben auf beiden Seiten in seinem Fusspunkte den Winkel β an: so werden die Tangenten bt und bt′ bei gehöriger Verlängerung mit den $\left\{\begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix}\right\}$ liegenden Schenkeln $\left\{\begin{matrix} B_1T_1 \text{ und } B_2T_2 \\ B_3T_3 \text{ und } B_4T_4 \end{matrix}\right\}$ der in $\left\{\begin{matrix} B_1 \text{ u. } B_2 \\ B_3 \text{ u. } B_4 \end{matrix}\right\}$ angelegten Winkel β in den Punkten $\left\{\begin{matrix} K_1 \text{ und } K_2 \\ K_3 \text{ und } K_4 \end{matrix}\right\}$ zusammentreffen, und zwar so, dass $K_1b = K_1B_1$, $K_2b = K_2B_2$, $K_3b = K_3B_3$, $K_4b = K_4B_4$ wird.

Denn $mbK_1 - M_1B_1K_1 = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta)$;

$$mbB_1 - M_1B_1b = \pi - mb_1b - (\pi - mc_1b) = -mb_1b + mb_1b - (\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta).$$

Durch Subtraktion erhält man $\underbrace{mbB_1 - mbK_1}_{K_1bB_1} = \underbrace{M_1B_1b - M_1B_1K_1.}_{K_1B_1b.}$

Ferner $mbK_3 + M_3B_3K_3 = \pi - \alpha + \beta = \pi - (\alpha - \beta)$;

$$mbB_3 + M_3B_3b = mc_1b + \pi - me_3b = mc_1b + \pi - (mc_1b + \alpha - \beta) = \pi - (\alpha - \beta).$$

Durch Subtraktion erhält man $\underbrace{mbK_3 - mbB_3}_{K_3bB_3} = \underbrace{M_3B_3b - M_3B_3K_3,}_{K_3B_3b.}$

u. s. w. Daher schneiden die, um die Punkte $\left\{\begin{matrix} K_1 \text{ und } K_2 \\ K_3 \text{ und } K_4 \end{matrix}\right\}$ mit den Radien $\left\{\begin{matrix} K_1b \text{ und } K_2b \\ K_3b \text{ und } K_4b \end{matrix}\right\}$ beschriebenen Kreise den Kreis m und die Grade L unter den Winkeln α und β $\left\{\begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix}\right\}$ artig.

38. Aus den, im Abschnitt V. entwickelten Sätzen ergeben sich die Lösungen und Determinationen folgender, den gleichwinkligen Schnitt betreffender Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruiren, der

I. a) einen gegebenen Kreis und eine gegebene Grade L | b) zwei gegebene Kreise M und m

entweder unter einem gegebenen Winkel α $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$ artig schneidet und durch einen gegebenen Punkt N geht,

oder unter gleichen Winkeln $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$ artig schneidet und

durch zwei gegebene Punkte N und R geht; | in einem gegebenen Punkte K sein Centrum hat;

II. drei gegebene Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Graden liegen,

unter gleichen Winkeln $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$ artig schneidet und durch einen gegebenen Punkt N geht; | unter einem gegebenen Winkel α $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$ artig schneidet;

III. drei gegebene Kreise,

unter welchen der erste den zweiten, der zweite den dritten umfasst, oder der erste den zweiten ein-, den dritten ausschliesst, unter dem kleinstmöglichsten Winkel schneidet; | die sich so schneiden, dass sie sämmtlich ein Bogendreieck mit einander gemein haben, unter dem grösstmöglichsten Winkel schneidet;

IV. vier gegebene Kreise, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Graden haben, unter gleichen Winkeln $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$ artig schneidet.

Bei einigen von diesen Aufgaben finden Fälle statt, in welchen sie auf nachstehende Hülfsaufgabe zurückweisen:

Aus einer gegebenen Graden L einen Kreis zu konstruiren, der von zwei gegebenen Kreisen M_1 und M_2 den ersten orthogonal, den zweiten unter einem beliebig gegebenen Winkel α schneidet.

Fig. 13. Ist die Grade L vom Kreise M_1 ausgeschlossen, so gehen alle Orthogonalkreise des letzteren, die ihre Mittelpunkte auf der Graden L haben, durch zwei konstante Punkte des aus dem Centrum M_1 auf die Grade gefällten Lothes (10). Schneidet aber die Grade L den Kreis M_1 in den Punkten F und G, so lege man (11) durch dieselben einen Kreis O, der den Kreis M_2 unter dem Komplement des gegebenen Winkels schneidet, lege darauf in seinen Schnittpunkten B und C an diesen Hülfskreis Tangenten an, welche der Graden L in den Punkten K u. K′ begegnen, so erfüllen die, um beide Punkte mit den Radien KB und K′C beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Denn beide schneiden den Hülfskreis O orthogonal, woraus wir schliessen, 1. dass sie auch den Kreis M_1 orthogonal schneiden, weil ihre Mittelpunkte K und K′ der Chordale L der Kreise O und M_1 angehören, 2. dass sie (3) den Kreis M_2 unter dem Winkel α schneiden, weil der von ihnen orthogonal geschnittene Kreis O den Kreis M_2 unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ schneidet.

Anmerkung. Der Kreis $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$ schneidet den Kreis M_2 zum zweiten Mal in dem Punkte $\left\{ \begin{matrix} B' \\ C' \end{matrix} \right\}$. Legen wir durch die Punkte $\left\{ \begin{matrix} F, G, B' \\ F, G, C' \end{matrix} \right\}$ einen Kreis, so wird derselbe, gleichwie der Kreis FGB, vom

Kreise $\left\{\begin{matrix}K\\K'\end{matrix}\right\}$ orthogonal geschnitten. Folglich schneidet sowohl der Kreis FGB' als auch der Kreis FGC' den Kreis M_2 unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$; beide Kreise fallen daher in einen zusammen, welcher kein anderer ist, als der zweite, durch die Punkte F und G mögliche Hülfskreis O'. Man erhält demnach bei Anwendung dieses zweiten Hülfskreises O' dieselben Kreise K und K', wie zuvor.

Ist von den Punkten F und G der eine vom Kreise M_2 eingeschlossen, der andere ausgeschlossen, so darf der Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ einen kleinsten Werth $\frac{\pi}{2} - \mu$, mithin der Winkel α einen grössten Werth μ nicht überschreiten (12).

39. Aus den im Abschnitt VI entwickelten Sätzen ergeben sich die Lösungen und Determinationen folgender Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruiren, der

I. durch einen gegebenen Punkt N geht und

a) eine gegebene Grade L und einen gegebenen Kreis m   b) zwei gegebene Kreise M und m

bezüglich unter den gegebenen Winkeln α und β $\left\{\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}\right\}$ artig schneidet;

II. drei gegebene Kreise M_1, M_2, M_3, deren Mittelpunkte nicht auf einer Graden liegen, bezüglich unter den Winkeln α, β, γ $\left\{\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}\right\}$ artig schneidet.

Was z. B. die Aufgabe I, a) betrifft, so muss zunächst der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt (λ) bestimmt werden; zu welchem Zwecke man um den Mittelpunkt m den Komplementärkreis für den Schnittwinkel β beschreibt und an denselben zwei parallele Tangenten anlegt, welche die Grade L unter dem Winkel α schneiden. Von den beiden Punkten, in welchen diese Tangenten dem, aus m auf die Grade L gefällten Perpendikel mO begegnen, ist der, von ihr durch m $\left\{\begin{matrix}\text{getrennte}\\\text{nicht getrennte}\end{matrix}\right\}$ der Aehnlichkeitspunkt $\left\{\begin{matrix}A_\lambda\\I_\lambda\end{matrix}\right\}$. Konstruirt man alsdann den $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreis $\left\{\begin{matrix}A_\lambda\\I_\lambda\end{matrix}\right\}$, dessen Radius, mag er nun reell oder imaginär sein, durch $\left\{\begin{matrix}\varrho\\\varrho'\end{matrix}\right\}$ bezeichnet werde, und zieht den $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl $\left\{\begin{matrix}A_\lambda N\\I_\lambda N\end{matrix}\right\}$, welcher dem $\left\{\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}\right\}$ artig schneidenden Kreise $\left\{\begin{matrix}K\\K'\end{matrix}\right\}$ in einem zweiten Punkte $\left\{\begin{matrix}N_1\\N'\end{matrix}\right\}$ begegnet, so ist $\varrho^2 = A_\lambda N . A_\lambda N_1$, $\varrho'^2 = I_\lambda N . I_\lambda N'$, da der Kreis $\left\{\begin{matrix}K\\K'\end{matrix}\right\}$ von dem $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Potenzkreise (λ) orthogonal geschnitten wird. Nun schneiden aber beide Potenzkreise auch den Orthogonalkreis O rechtwinklig. Folglich ist auch $\varrho^2 = A_\lambda P . A_\lambda Q$, $\varrho'^2 = I_\lambda P . I_\lambda Q$; mithin $A_\lambda N . A_\lambda N_1 = A_\lambda P . A_\lambda Q$ und $I_\lambda N . I_\lambda N' = I_\lambda P . I_\lambda Q$. Daher ist der Punkt $\left\{\begin{matrix}N_1\\N'\end{matrix}\right\}$ bekannt, als der Schnittpunkt des Kreises (P, Q, N) mit dem $\left\{\begin{matrix}\text{äussern}\\\text{innern}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitsstrahl $\left\{\begin{matrix}A_\lambda N\\I_\lambda N\end{matrix}\right\}$. Die beiden, durch das Punktenpaar $\left\{\begin{matrix}N, N_1\\N, N'\end{matrix}\right\}$ möglichen Kreise, welche der Graden L unter dem Winkel α begegnen, sind die $\left\{\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}\right\}$ artig schneidenden Kreise $\left\{\begin{matrix}K \text{ und } K_1\\K' \text{ und } K'_1\end{matrix}\right\}$, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten. Fig. 14.

In der Figur sind die beiden gleichartig schneidenden Kreise dargestellt, welche den Kreis m in den Punkten C und c, C_1 und C_1 schneiden. Daher bilden die, nach den Schnittpunkten $\left\{\begin{matrix} \text{C und c} \\ \text{C}_1 \text{ und c}_1 \end{matrix}\right\}$ gezogenen Radien des Kreises $\left\{\begin{matrix} \text{K} \\ \text{K}_1 \end{matrix}\right\}$ Tangenten an den, um den Mittelpunkt m beschriebenen Bestimmungskreis (β).

Ist 1. Winkel $\alpha > \beta$, mithin $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ oder $\lambda < 1$, so muss ein Kreis, der durch die Punkte N und N_1 geht und den Kreis m $\left\{\begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix}\right\}$ schliessend berührt, die Grade L unter einem Winkel $\alpha = \text{arc.cos} \left\{\begin{matrix} \lambda \\ -\lambda \end{matrix}\right\}$ schneiden; wird dagegen durch die Punkte N und N_1 ein Kreis gelegt, der die Grade L berührt, so ist ein Zusammentreffen desselben mit dem Kreise m unmöglich.

Ist 2. Winkel $\alpha < \beta$, mithin $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ oder $\lambda > 1$, so muss ein Kreis, der durch die Punkte N und N_1 geht und die Grade L berührt, den Kreis m unter dem Winkel $\beta = \text{arc.cos}\ (\frac{1}{\lambda}$ oder $-\frac{1}{\lambda})$ schneiden; wird dagegen durch die Punkte N und N_1 ein Kreis gelegt, der den Kreis m berührt, so ist ein Zusammentreffen desselben mit der Graden L unmöglich.

Hieraus folgt, dass, wenn die Grade L den Kreis m nicht schneidet, und wenn im $\left\{\begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{matrix}\right\}$ Falle der Punkt N $\left\{\begin{matrix} \text{innerhalb des Kreises m} \\ \text{auf der von m abgewendeten Seite der Graden L} \end{matrix}\right\}$ gegeben ist, der Punkt N_1 $\left\{\begin{matrix} \text{auf der von m abgewendeten Seite der Graden L} \\ \text{innerhalb des Kreises m} \end{matrix}\right\}$ liegen muss. Alsdann giebt es durch die Punkte N und N_1 einen Kreis des schiefsten Schnittes (12). Schneidet dieser die Grade L unter dem Winkel α_1 und den Kreis m unter dem Winkel β_1, so sind diese Winkel die kleinsten, für welche die Aufgabe, so lange der Exponent λ unverändert bleibt, eine Lösung zulässt.

40. Wir behandeln zum Schluss noch folgende Aufgabe, zu deren Lösung eine gewisse Eigenschaft des Kreises die Hand bietet.

Aus einer gegebenen Graden L einen Kreis zu konstruiren, der einen gegebenen Kreis M und eine zweite Grade L′ bezüglich unter den Winkeln α und β schneidet.

Fig. 15. Es sei Punkt S der Schnittpunkt der gegebenen Graden, K der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher dem Kreise M in einem Punkte B, der Graden L′ in einem Punkte C begegne. Durch diesen Punkt C giebt es einen Kreis O, der mit dem Kreise M die Grade L zur Chordale hat. Zieht man daher die Radien KB und KC und verlängert sie bis zu ihrem nochmaligen Schnittpunkte B′ und C′ mit den Kreisen M und O, so ist die Sehne $BB' = CC'$, weil die Tangenten aus K an beide Kreise gleich sind. Folglich ist die Grade CC′ ihrer Länge nach bekannt, da sie gleich ist der Bestimmungssehne des Kreises M für den Schnittwinkel α. Da ferner der Winkel, den die Grade KCC′ mit der Graden L′ bildet, das Komplement des Schnittwinkels β vorstellt, so ist die Projektion SS′ der Strecke CC′ auf die Grade L, mittelst einer Parallelen zur Graden L′ durch den Punkt C′, vollständig bekannt, also auch ein Kreis M′ um die Strecke SS′ als Durchmesser. Wir bezeichnen die Tangenten aus dem Punkte K an die Kreise M u. M′ durch T u. T′. Nun verhält sich

$$KC : KC' = KS : KS', \text{ folglich}$$
$$KC^2 : KC.KC' = KS^2 : KS.KS', \text{ folglich}$$
$$KC : KS = T : T'.$$

Mithin kommt es darauf an, in der Graden L einen Punkt K zu finden, aus welchem die Tangenten an zwei gegebene Kreise M und M' ein gegebenes Verhältniss (KC : KS) haben. Die Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich aus nachstehendem Lehrsatz:

Haben drei Kreise eine gemeinschaftliche Chordale, und legt man aus einem Peripheriepunkte irgend eines derselben an die beiden andern Tangenten (13) an, so verhalten sich deren Quadrate bezüglich wie die Centrallinien zwischen dem herausgehobenen und den beiden übrigen Kreisen.

Die Kreise M_1, M_2, M_3 mit den Radien R_1, R_2, R_3 haben die gemeinschaftliche Chordale OX. Aus einem Punkte T_3 in der Peripherie des Kreises M_3 sind an die Kreise M_1 und M_2 Tangenten angelegt, welche in den Punkten T_1 und T_2 berühren: Dann verhält sich $T_3T_1{}^2 : T_3T_2{}^2 = M_3M_1 : M_3M_2$. Fig. 16.

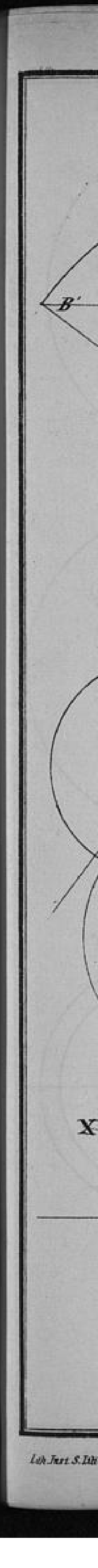
Wir verbinden den Punkt T_3 mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise und fällen aus ihm auf die gemeinschaftliche Centrale der letzteren ein Loth T_3t_3. Dann ist in dem Dreieck $M_1M_3T_3$

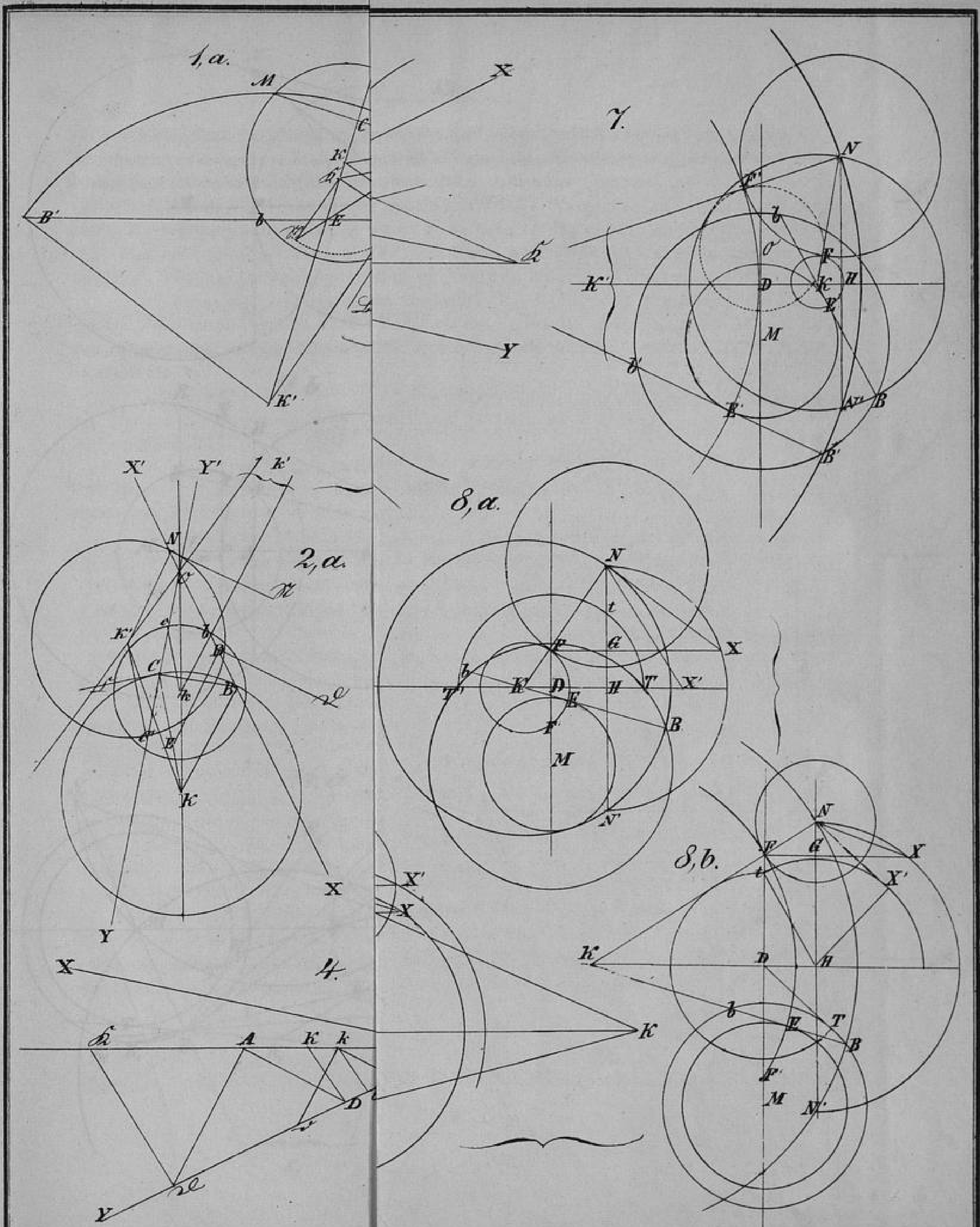
$$T_3M_1{}^2 = R_3{}^2 + M_1M_3{}^2 - 2M_1M_3 . t_3M_3.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten $R_1{}^2$ und beachtet, dass $R_3{}^2 - R_1{}^2 = OM_3{}^2 - OM_1{}^2 = M_1M_3\,(OM_3 - OM_1)$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} T_3T_1{}^2 &= M_1M_3\,(OM_3 - OM_1) + M_1M_3{}^2 - 2M_1M_3 . t_3M_3 \\ &= 2M_1M_3 . OM_3 - 2M_1M_3 . t_3M_3 \\ &= 2M_1M_3 . t_3O; \text{ desgleichen} \\ T_3T_2{}^2 &= 2M_2M_3 . t_3O, \text{ woraus der Satz folgt.} \end{aligned}$$

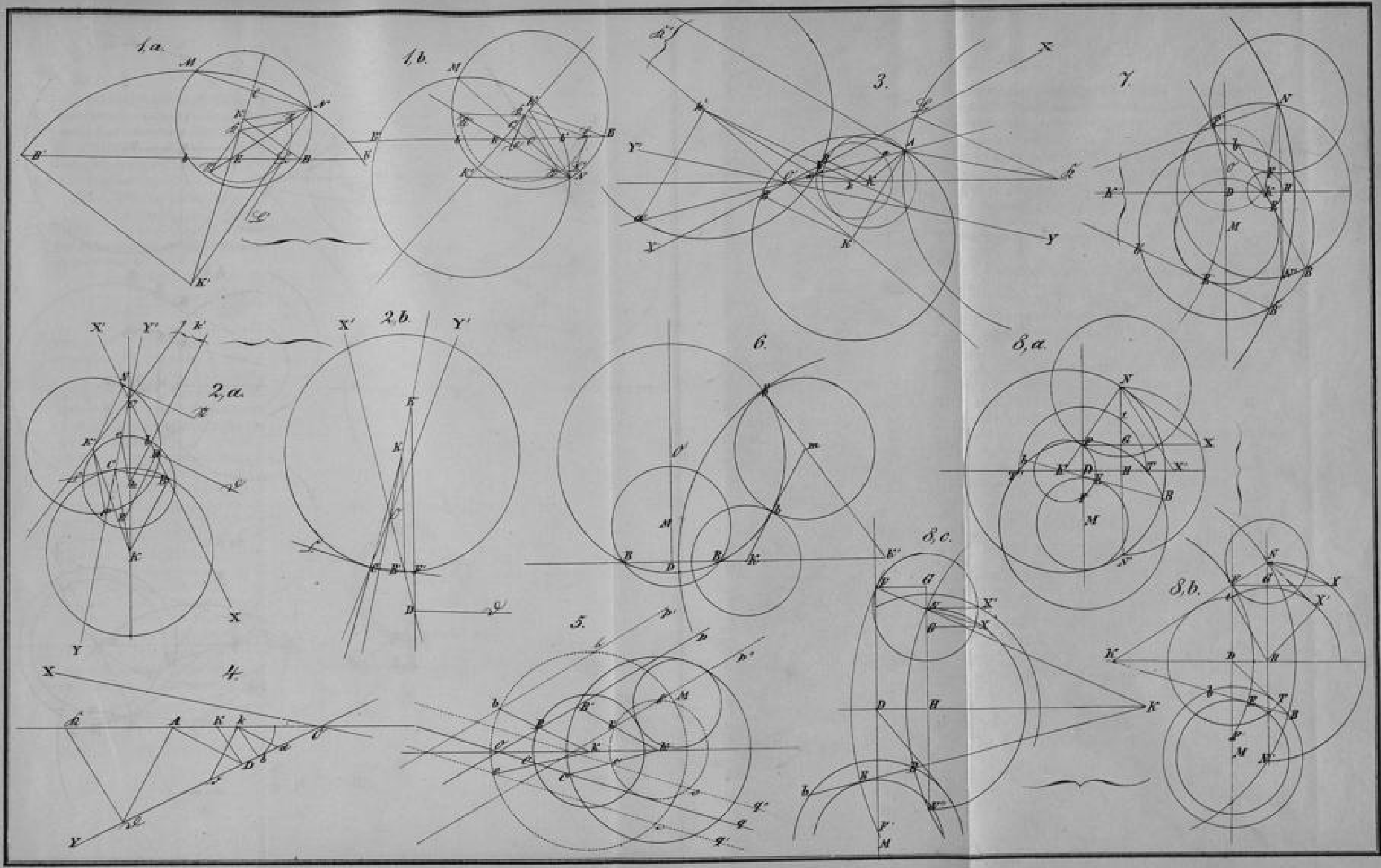
Folgerung. Der Ort aller Punkte, aus welchen die an zwei gegebene Kreise angelegten Tangenten das gegebene Verhältniss $t_1 : t_2$ haben, ist ein Kreis, der mit den gegebenen eine gemeinschaftliche Chordale und sein Centrum in der Mitte zwischen denjenigen beiden Aehnlichkeitspunkten hat, welche sich auf die, um die gegebenen Mittelpunkte mit den Radien t_1 und t_2 beschriebenen Kreise beziehen.

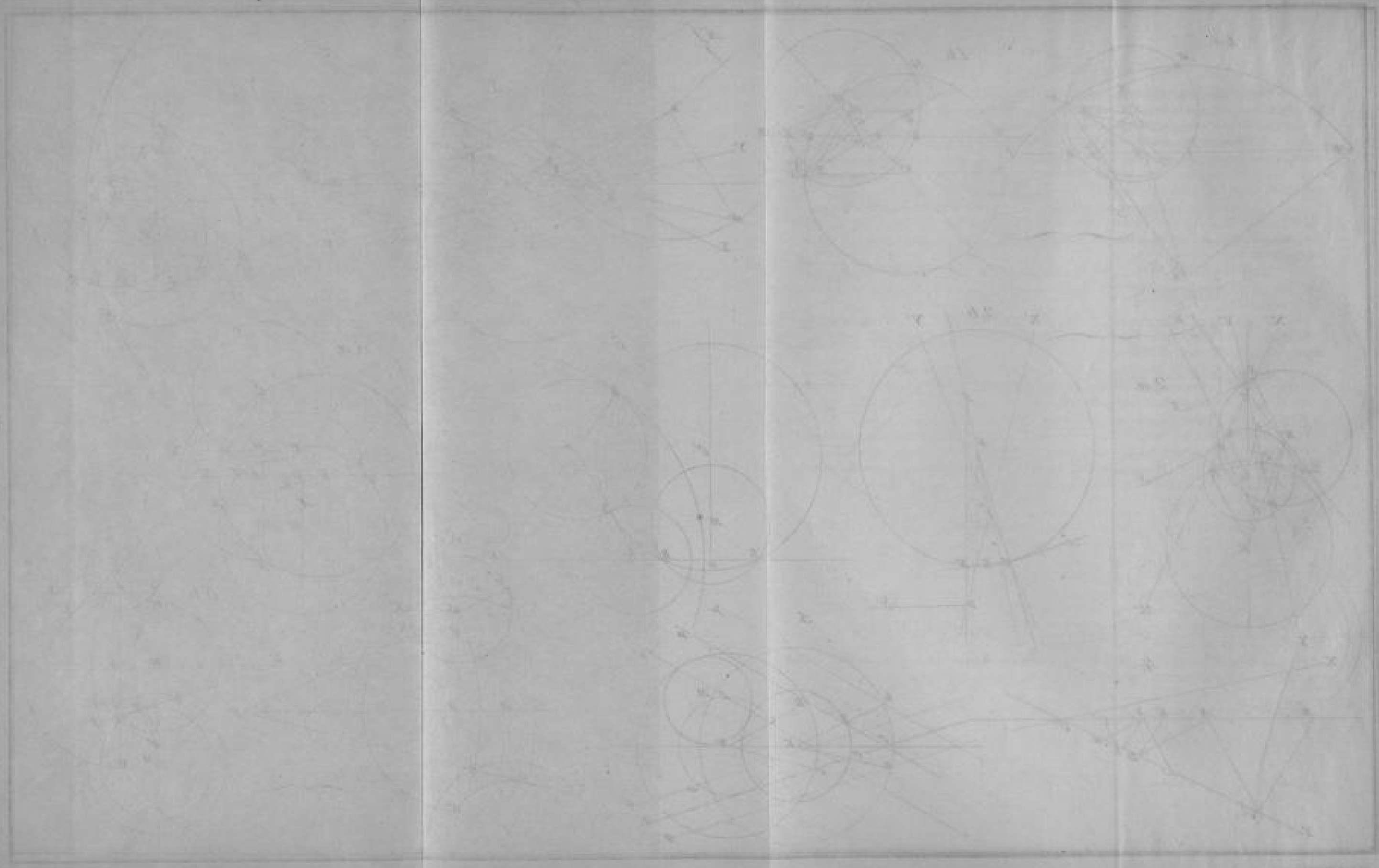


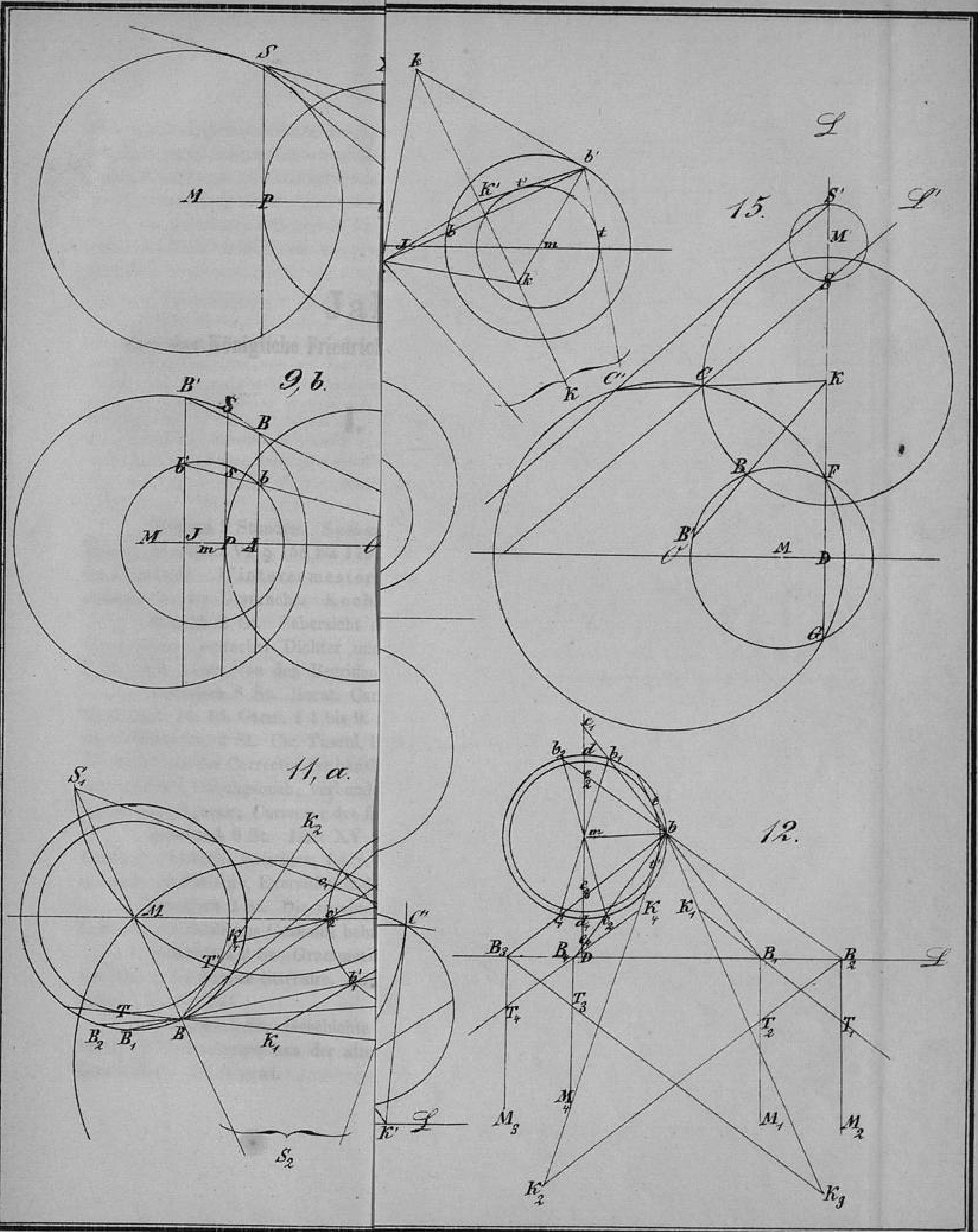


Lith. Inst. S. Lilienfeld, Breslau.

Taf. I.







Lith. Inst. S. Lilienfeld, Breslau.

Taf. II.