Entwickelung aller Eigenschaften

der

Logarithmen und Kreisfunktionen aus dem bestimmten Integral $\int_1^x \frac{du}{u}$,

ausgeführt von A. Anderssen.

Einleitung.

§. 1. Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, ein Verfahren zu veranschaulichen, durch welches alle Eigenschaften einer unbekannten Funktion F(x), welche durch ein bestimmtes Integral $\int_a^x fu\,du$ dargestellt ist, aus dem Begriffe dieses Integrals geschöpft werden können. Da die Funktion F(x) als eine solche vorausgesetzt wird, welche sich durch die vorhandenen und bereits bekannten Functionen nicht ausdrücken lässt, so können wir von der indirekten Definition eines Integrals, welche auf eine gewisse unter den vorhandenen Funktionen zurückweist, als deren Ableitung die zu integrirende mittelbar oder unmittelbar zu erkennen sei, keinen Gebrauch machen, sondern müssen die direkte Definition des Integrals $\int_a^x fu\,du$, als einer Summe von unendlich vielen Gliedern, zum Ausgangspunkte wählen. Demnach verstehen wir unter dem Symbol $\int_a^x fu\,du$ jenen bestimmten endlichen Werth, welchen die Summe

$$\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) + \varepsilon_3 f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_n f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich ε dem Verschwinden nähert und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_n = x - a$ ist, unter Voraussetzung der Kontinuität der Funktion fu zwischen a und x, bekanntlich zur Grenze hat; oder wir definiren das Integral $\int_a^x fu\,du$ als eine unendliche Summe von Produkten der gegebenen Funktion fu, deren Variable zuerst den Werth a erhält und beständig um ein unendlich kleines Inkrement ε wächst, in sämmtliche Inkremente der Reihe nach, durch welche die Variable von a bis x aufsteigt.

§. 2. In dieser Definition sind zunächst die Grenzen a und x, wie die Inkremente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ reell gedacht. Hieran knüpft sich jedoch die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die durch das Symbol $\int_a^x$ fu du bezeichnete Summe auch dann noch gegen einen endlichen Werth konvergirt, wenn man die Grenzen a und x mit den allgemeinen Werthen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ vertauscht und die Variable vermöge eines beliebigen, unendlicher Abwechselung fähigen Verfahrens aus der Grenze $\alpha + \beta i$ in die Grenze $\gamma + \delta i$ übergehen lässt; mit andern Worten: ob und unter welchen Bedingungen bei Anwendung imaginärer Grenzen und imaginärer Inkremente irgend eine dem Integral $\int_a^x$ fu du analog gebildete Summe, zu deren Bezeichnung vorläufig das Symbol $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ fu du dienen mag, die Bedeutung des Symbols $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ fu du erreicht. Es lässt sich nun beweisen (S. Grunerts Archiv der Mathematik, Theil 23, Abhandlung XIV.), dass die Summe $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ im Allgemeinen durch die Reihe

$$\left(\sum_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\beta_1 i} + \sum_{\alpha+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_1 i}\right) + \left(\sum_{\alpha_1+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_2 i} + \sum_{\alpha_1+\beta_2 i}^{\alpha_2+\beta_2 i}\right) \ldots + \left(\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i} + \sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}\right) + \left(\sum_{\alpha_n+\beta_n i}^{\alpha_n+\delta i} + \sum_{\alpha_n+\delta i}^{\gamma+\delta i}\right)$$

ausgedrückt werden kann, und dass jede Summe $\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i}$, so wie jede Summe $\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}$, erstere, wenn $f(\alpha_{n-1} + vi)$ zwischen den reellen Grenzen β_{n-1} uud β_n, letztere, wenn $f\left(u + \beta_n i\right)$ zwischen den reellen Grenzen α_{n-1} und α_n kontinuirlich ist, gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergirt. Es steht also fest, dass die Summe $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ so gebildet werden kann, dass wir berechtigt sind, sie durch das Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ fu du zu bezeichnen.

§. 3. Ist die Funktion fu schlechthin kontinuirlich, d. h. giebt es absolut keinen (reellen oder imaginären) Werth, für welchen die Funktion fu diskontinuirlich wird, so führt die Betrachtung des Integrals $\int$ fu du zwischen imaginären Grenzen zu keinen neuen Ergebnissen. Denn es sind in diesem Falle, wie in der oben citirten Abhandlung gleichfalls bewiesen wird, die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ fu du denkbaren Summe ihrem Werthe nach nicht verschieden, oder sie sind sämmtlich gleich $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\,du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$, welche Summe gleichbedeutend ist mit der Summe $\int_{\alpha}^{\gamma} f(u+\delta i)du + i\int_{\beta}^{\delta} f(\alpha+vi)\,dv$ und daher, wenn $\beta=o$, $\delta=o$, $\alpha=a$, $\gamma=x$ gesetzt wird, übergeht in $\int_{a}^{x} fu\,du$, so dass man auf diesem Wege kein anderes Resultat erhält, als das, durch die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen reellen Grenzen bereits gewonnene.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn die Funktion fu zwar zwischen den Grenzen a und x kontinuirlich ist, aber für einen gewissen Werth von der Form $p+qi$ diskontinuirlich wird. Während nämlich in diesem Falle das Integral $\int_{a}^{x} fu\,du$ unendlich-vieldeutig ist, liefert die Betrachtung desselben zwischen den reellen Grenzen a und x, bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente, nur einen einzigen seiner Werthe, und alle Eigenschaften, welche aus der Definition desselben unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Inkremente geschöpft worden sind, gelten nur innerhalb der Grenzen a und x und nur für reelle Werthe der Veränderlichen. Jetzt also ist die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen imaginären Grenzen erst fruchtbar und zur Erschöpfung seines Wesens unerlässlich. Denn ist die Funktion fu nicht schlechthin kontinuirlich, so haben die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$ denkbaren Summen keineswegs gleichen Werth, sondern unterscheiden sich von einander, wie von der Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\,du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$ um Vielfache einer bestimmten Differenz Δ, so dass, wenn die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen den reellen Grenzen a und x einen gewissen Werth desselben $\Phi(x)$ ergeben hat, dessen allgemeiner Werth $\varphi(x)$, den wir aus der Betrachtung desselben Integrals zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ erhalten, wenn wir zuletzt $\beta=o$, $\delta=o$, $\alpha=a$ und $\gamma=x$ setzen, durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \Phi(x) + m\Delta,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl vorstellt, seinen erschöpfenden Ausdruck erhält.

§. 4. Dieses hiermit in seinen Hauptmomenten angedeutete Verfahren wollen wir nun durch die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ veranschaulichen. Die Funktion $\frac{1}{u}$ ist zwischen den Grenzen 1 und x, wenn x eine beliebige, aber positive Zahl bedentet, kontinuirlich; folglich wird die Summe

$$\varepsilon_1\frac{1}{1} + \varepsilon_2\frac{1}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon_3\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ldots\ldots\varepsilon_{n-1}\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2}} + \varepsilon_n\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}},$$

in welcher ε unendlich klein und $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\ldots+\varepsilon_n = x-1$ ist, gegen einen bestimmten endlichen Werth $\int_1^x \frac{du}{u}$ konvergiren, den wir durch das Symbol Log x bezeichnen. Diese Funktion

Log x wird als völlig unbekannt vorausgesetzt. Die elementare Betrachtung der Logarithmen und Kreisfunktionen, so wie deren Vervollständigung durch die Analysis, ist also für uns gar nicht vorhanden; wir abstrahiren überhaupt von der Kenntniss irgend welcher Transcendenten und setzen nur die algebraischen Funktionen und ihre Ableitungen als bekannt voraus.

§. 5. Aus der in §. 1 aufgestellten Definition eines Integrals $\int_a^b fu\,du$ als der bestimmten Grenze, gegen welche die Reihe
$\varepsilon_1 f(a)+\varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1)+\varepsilon_3 f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1} f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2})+\varepsilon_n f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1})$, in welcher sich ε dem Verschwinden nähert, und $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\varepsilon_n=b-a$ ist, konvergirt, ergeben sich sofort folgende, für unsere Entwickelung ganz besonders wichtige Sätze:

I. $\int_a^b fu\,du = -\int_b^a fu\,du$. Denn da

$$\begin{aligned}
a &= b-\varepsilon_1-\varepsilon_2\ldots-\varepsilon_n,\\
a+\varepsilon_1 &= b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n,\\
a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 &= b-\varepsilon_3-\varepsilon_4\ldots-\varepsilon_n,\\
&\vdots\\
a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1} &= b-\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

so lässt sich $\int_a^b fu\,du$ auch darstellen durch die Summe

$$\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_1-\varepsilon_2\ldots-\varepsilon_n)+\varepsilon_2 f(b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n)\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1} f(b-\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)+\varepsilon_n f(b-\varepsilon_n).$$

Schreiben wir diese Summe in umgekehrter Ordnung und setzen dabei zuerst für die Differenz $b-\varepsilon_n$, dann für $b-\varepsilon_{n-1}$, dann für $b-\varepsilon_{n-2}$, zuletzt für $b-\varepsilon_1$ jedesmal bloss b, so erhalten wir

$$\int_a^b fu\,du = \varepsilon_n f(b)+\varepsilon_{n-1} f(b-\varepsilon_n)+\varepsilon_{n-2} f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})\ldots\varepsilon_2 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3)$$
$$+\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3-\varepsilon_2).$$

Bezeichnen wir nun $-\varepsilon_n$ durch ε'_1, $-\varepsilon_{n-1}$ durch ε'_2, ... $-\varepsilon_2$ durch ε'_{n-1}, $-\varepsilon_1$ durch ε'_n, so finden wir

$$\int_a^b fu\,du = -\{\varepsilon'_1 f(b)+\varepsilon'_2 f(b+\varepsilon'_1)+\varepsilon_3 f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)\ldots\varepsilon'_{n-1} f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2\ldots+\varepsilon'_{n-2})$$
$$+\varepsilon'_n f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2\ldots+\varepsilon'_{n-1})\},$$

während $\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3\ldots+\varepsilon'_n=a-b$ ist. Folglich können wir die eingeklammerte Summe durch $\int_b^a fu\,du$ bezeichnen und erhalten $\int_a^b fu\,du = -\int_b^a fu\,du$.

II. $\int_a^b fu\,du = \int_a^c fu\,du + \int_c^b fu\,du$, wo $c > a < b$ ist, welche Gleichung sich sofort ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass $a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m = c$ und $c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = b$, und dass daher

$$\int_a^b fu\,du = \{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) \ldots \varepsilon_m f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{m-1})\} + \{\varepsilon_{m+1} f(c) + \varepsilon_{m+1} f(c + \varepsilon_{m+1}) \ldots +_n f(c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \ldots + \varepsilon_{n-1})\},$$

von welcher Summe der erste Theil offenbar durch $\int_a^c fu\,du$, der zweite durch $\int_c^b fu\,du$ zu bezeichnen ist. Aus der Gleichung II. folgt aber auch $\int_a^c fu\,du = \int_a^b fu\,du - \int_c^b fu\,du$. Man kann also bei Bestimmung eines Integrals zwischen den Grenzen a und c auch über die letztere hinausgehen und dann wieder zu ihr zurückkehren, wenn nur die Funktion fu zwischen den äussersten a und b kontinuirlich ist.

III. $\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,du = \int_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v)\,dv$, vorausgesetzt, dass nicht nur die Funktion fu zwischen den Grenzen $u = \varphi_\alpha$ und $u = \varphi_\beta$, sondern auch die Funktion φ_v zwischen den Grenzen $v = \alpha$ u. $v = \beta$ kontinuirlich ist. Denn

$$\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,du = \varepsilon'_1 f(\varphi_\alpha) + \varepsilon'_2 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1) + \varepsilon'_3 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) \ldots \varepsilon'_n f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1}),$$

während $\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n = \varphi_\beta$ ist, wobei die successiven Inkremente ε' der Funktion φ_v von φ_α bis φ_β den successiven Inkrementen ε der Veränderlichen v von α bis β entsprechen, also auch $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \beta$ ist. Vermöge der Kontinuität der Funktion φ_v zwischen den Grenzen α und β finden folgende Gleichungen statt:

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \varepsilon_1 \varphi'(\alpha) = \varepsilon'_1, \text{ daher auch } \varphi(\alpha + \varepsilon_1) = \varphi_\alpha + \varepsilon_1 \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1) = \varepsilon_2 \varphi'(\alpha + \varepsilon_1) = \varepsilon'_2,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_3 \varphi'(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon'_3,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}} = \varepsilon'_n, \text{ daher auch}$$

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}} + \varepsilon_n \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_1\ldots+\varepsilon_{n-1}} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n.$$

Demnach verwandelt sich die, das Integral $\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \mathrm{fu\,du}$ vorstellende Summe in folgende

$$\varepsilon_1 \varphi'_\alpha \mathrm{f}(\varphi_\alpha) + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1} \mathrm{f}(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1}) + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \mathrm{f}(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}) \\ \ldots\ldots \varepsilon_n \varphi'_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}} \mathrm{f}(\varphi_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}}),$$

welche sich als die Definition des Integrals $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \mathrm{f}(\varphi_v)\,dv$ zu erkennen giebt.

IV. $\mathrm{D_b} \int_a^b \mathrm{fu\,du} = \mathrm{f(b)}$. Denn die Ableitung $\mathrm{D_b} \int_a^b \mathrm{fu\,du}$ bedeutet das Verhältniss $\dfrac{\int_a^{b+\varepsilon_{n+1}} \mathrm{fu\,du} - \int_a^b \mathrm{fu\,du}}{\varepsilon_{n+1}}$, ist also gleich

$$\frac{\varepsilon_1 \mathrm{f(a)} + \varepsilon_2 \mathrm{f}(a+\varepsilon_1) \ldots + \varepsilon_n \mathrm{f}(b-\varepsilon_n) + \varepsilon_{n+1} \mathrm{f(b)} - \{\varepsilon_1 \mathrm{f(a)} + \varepsilon_1 \mathrm{f}(a+\varepsilon_1) \ldots\ldots + \varepsilon_n \mathrm{f}(b-\varepsilon_n)\}}{\varepsilon_{n+1}}$$

$$= \frac{\varepsilon_{n+1} \mathrm{f(b)}}{\varepsilon_{n+1}} = \mathrm{f(b)}.$$

§. 6. Wie bereits in §§. 2 und 3 im Allgemeinen angedeutet wurde, erfordert die erschöpfende Untersuchung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ Betrachtungen folgender Art:

A. die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen den reellen Grenzen 1 und x (zwischen welchen die Funktion $\frac{1}{u}$ kontinuirlich bleibt, wenn x eine **positive** Zahl bedeutet) unter Voraussetzung ausschliesslich **reeller** Inkremente;

B. die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $p + qi$ unter Vorausetzung theils reeller, theils **einfacher imaginärer** Inkremente von der Form δi, wobei die Veränderliche u

I. durch lauter reelle Inkremente von der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst bis $p + \beta i$, sodann durch lauter imaginäre Inkremente von $p + \beta i$ bis zur andern Grenze $p + qi$ fortschreitet, oder

II. zuerst durch lauter imaginäre Inkremente aus der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst in $\alpha + qi$, darauf durch lauter reelle Inkremente aus $\alpha + qi$ in die andere Grenze $p + qi$ übergeht, oder

III. zuerst durch reelle Inkremente von $\alpha + \beta i$ bis zu einem Zwischenwerth $\alpha_1 + \beta i$, sodann durch imaginäre Inkremente von $\alpha_1 + \beta i$, bis zu einem andern Zwischenwerth $\alpha_1 + \beta_1 i$

und sofort abwechselnd durch reelle und einfache imaginäre Inkremente bis $p+qi$ anwächst;

C. die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha+\beta i$ und $p+qi$ unter Voraussetzung komplexer Inkremente von der Form $\gamma+\delta i$.

A. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen reellen Grenzen unter Voraussetzung reeller Inkremente.

§. 7. Von den unendlich vielen Werthen, welche das Integral $\int_1^x \frac{du}{u}$ zufolge der beschränkten, nur zwischen der Einheit und einer positiven Grenze x stattfindenden Kontinuität der Funktion $\frac{1}{u}$ haben muss, finden wir bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente nur einen einzigen, welchen wir durch Log x bezeichnet haben. Es ist also

$$\text{Log}\, x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2} \ldots \varepsilon_n \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} (= x - \varepsilon_n)} = \int_1^x \frac{du}{u}.$$

Setzt man $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(1+\varepsilon)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon(1+\varepsilon)^2$, ... $\varepsilon_n = \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}$, so hat man

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_n = \varepsilon + \varepsilon(1+\varepsilon) + \varepsilon(1+\varepsilon)^2 \ldots + \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^n - \varepsilon}{(1+\varepsilon)-1} = (1+\varepsilon)^n - 1;$$

folglich $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n = (1+\varepsilon)^n$; also

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (1+\varepsilon)^2$$
$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1+\varepsilon)^3 \text{ u. s. w.}$$

Folglich findet man

$$\text{Log}\, x = \varepsilon \frac{1}{1} + \varepsilon(1+\varepsilon) \frac{1}{1+\varepsilon} + \varepsilon(1+\varepsilon)^2 \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \ldots \varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}},$$ also, wenn sich n der Grenze ∞ nähert, $\text{Log}\, x = \text{Lim}\,(n\varepsilon)$.

Da nun aus der Gleichung $x = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = (1+\varepsilon)^n$ für ε der Werth $x^{\frac{1}{n}} - 1$ gefunden wird, so folgt $\text{Log}\, x = \text{Lim}\{n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\}$, wenn sich n der Grenze ∞ nähert.

§. 8. Aus den Gleichungen I. und II. des §. 5 folgt

$$\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \int_x^1 \frac{du}{u} + \int_1^{xy} \frac{du}{u} = \int_1^{xy} \frac{du}{u} - \int_1^x \frac{du}{u} = \text{Log}\, xy - \text{Log}\, x.$$

Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{1}{u} du$ statt φ_v die Funktion xv, also $\varphi_\alpha = x\alpha$, $\varphi_\beta = x\beta$, $\varphi'_v = x$, so finden wir für $\alpha = 1$ und $\beta = y$

$$\int_1^y x \frac{1}{xv} dv, \text{ das ist } \int_1^y \frac{dv}{v} = \int_x^{xy} \frac{du}{u}, \text{ also } \int_x^{xy} \frac{du}{u} = \text{Log}\, y.$$

Aus der Vergleichung beider für $\int_x^{xy} \frac{du}{u}$ gefundenen Werthe ergiebt sich

$\operatorname{Log} xy = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$, welcher Satz auch die folgenden drei

$\operatorname{Log} \frac{x}{y} = \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y$, $\operatorname{Log} x^m = m \operatorname{Log} x$, $\operatorname{Log} \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m} \operatorname{Log} x$, wo m zunächst eine ganze Zahl bedeutet, selbstverständlich macht. Hieraus aber folgt sogleich, dass der Satz $\operatorname{Log} x^m = m \operatorname{Log} x$ für jeden beliebigen reellen Werth von m (und für jeden positiven Werth von x) Gültigkeit hat.

§. 9. Es sei $\operatorname{Log} x = z$. Verstehen wir unter e denjenigen Werth, welcher der Gleichung $\operatorname{Log} e = 1$ Genüge leistet, so ist $\operatorname{Log} e^z = z \operatorname{Log} e = z$; folglich $\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} e^z$, woraus sich die Gleichung $x = e^z$ ergiebt, in welcher die vorige $\operatorname{Log} x = z$ ihre Umkehrung hat. Nun ist nach §. 7 für $n = \infty$

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Lim} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = z; \text{ folglich auch}$$

$$\operatorname{Lim} n\left([e^z]^{\frac{1}{n}} - 1\right) = z;$$

folglich immer noch unter der Voraussetzung, dass sich n der Grenze ∞ nähert,

$$e^z = \operatorname{Lim} \left(\frac{z}{n} + 1\right)^n.$$

Setzen wir $n = \frac{1}{u}$, so ist unter der Voraussetzung, dass sich u der Grenze o nähert,

$$e^z = \operatorname{Lim} (1 + uz)^{\frac{1}{u}},$$

und man erhält nach dem binomischen Lehrsatz

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

welche Reihe, so lange $uz < 1$, also $z < \frac{1}{u}$ ist, mithin für jeden reellen Werth von z konvergent bleibt. Ist also $z = 1$, so finden wir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

B. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung einfacher imaginärer Inkremente.

§. 10. Um zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ für alle drei (nach §. 6) gegenwärtigen Falls möglichen Uebergangsarten der Veränderlichen das Integral $\int \frac{du}{u}$ auszuwerthen, behandeln wir zunächst die beiden einfacheren Fälle, in welchen sich jene Grenzen entweder nur in dem reellen oder nur in dem imaginären Theile unterscheiden.

Betrachten wir zuerst das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$, das ist die Summe

$$\varepsilon_1 i \frac{1}{\alpha+\beta i} + \varepsilon_2 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1)i} + \varepsilon_3 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2)i} \ldots\ldots \varepsilon_n i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1})i},$$

wo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n = \delta - \beta$ ist.

Aus dieser Definition folgt $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = i \int_{\beta}^{\delta} \frac{dv}{\alpha+vi} = i \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha - vi}{\alpha^2+v^2} dv$, also

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \int_{\beta}^{\delta} \frac{v dv}{\alpha^2+v^2} + i \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha dv}{\alpha^2+v^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_{\beta}^{\delta} \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_\beta}^{\varphi_\delta} \frac{du}{u}$ statt φ_v die Funktion $\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}$, also $\varphi_\beta = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$, $\varphi_\delta = \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}$, $\varphi'_v = \frac{2v}{\alpha^2}$, so erhalten wir

$$\int_{\beta}^{\delta} \frac{2v}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}} dv, \text{ das ist } 2\int_{\beta}^{\delta} \frac{v\,dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}} \frac{du}{u} = \mathrm{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

weil $\int_{x}^{xy} \frac{du}{u} = \mathrm{Log}\, y$ ist (S. §. 8). Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5 $\int_{\beta}^{\delta} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v{}^2} dv = \int_{\varphi\beta}^{\varphi_\delta} \frac{1}{1+u^2} du$ statt φ_v die Funktion $\frac{v}{\alpha}$, also $\varphi_\beta = \frac{\beta}{\alpha}$, $\varphi_\delta = \frac{\delta}{\alpha}$, $\varphi'_v = \frac{1}{\alpha}$, so finden wir

$$\int_{\beta}^{\delta} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \text{ oder } \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2} du; \text{ folglich}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2} \mathrm{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2}.$$

Gehen wir nun zum zweiten Fall über und betrachten das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}$, das ist die Summe

$$\varepsilon_1\frac{1}{\alpha+\beta i}+\varepsilon_2\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\beta i}+\varepsilon_3\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\beta i}\dots+\varepsilon_n\frac{1}{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\dots+\varepsilon_{n-1}}_{=\gamma-\varepsilon_n}+\beta i},$$

woraus folgt $$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\int_\alpha^\gamma\frac{dv}{v+\beta i}=\int_\alpha^\gamma\frac{v\,dv}{v^2+\beta^2}-i\int_\alpha^\gamma\frac{\beta\,dv}{v^2+\beta^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\gamma \varphi'_v\frac{1}{\varphi_v}dv=\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma}\frac{du}{u}$ statt φ_v die Funktion $\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}$, also $\varphi_\alpha=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$, $\varphi_\gamma=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}$, $\varphi'_v=\frac{2v}{\beta^2}$, so folgt

$$\int_\alpha^\gamma\frac{2v}{\beta^2}\cdot\frac{1}{\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}}dv \text{ oder } 2\int_\alpha^\gamma\frac{v\,dv}{\beta^2+v^2}=\int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}}\frac{du}{u}=\int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}}\frac{du}{u}=\mathrm{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Setzen wir ferner in die Gleichung III. $\int_\alpha^\gamma\varphi'_v\frac{1}{1+\varphi^2_v}dv=\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma}\frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{v}{\beta}$, also $\varphi_\alpha=\frac{\alpha}{\beta}$, $\varphi_\gamma=\frac{\gamma}{\beta}$, $\varphi'_v=\frac{1}{\beta}$, so folgt

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{v^2}{\beta^2}}dv \text{ oder } \int_\alpha^\gamma\frac{\beta\,dv}{\beta^2+v^2}=\int_{\frac{\gamma}{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{du}{1+u^2}; \text{ also}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}-i\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}}\frac{du}{1+u^2}.$$

§ 11. Die Untersuchung der Integrale $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}$ und $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i}\frac{du}{u}$ hat uns somit zu dem Integral $\int\frac{du}{1+u^2}$ geführt. Da die Kontinuität der Funktion $\frac{1}{1+u^2}$ keine unbedingte ist, obschon sie zwischen o und jeder beliebigen reellen Grenze x stattfindet, so ist im Allgemeinen das Integral $\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$ unendlich-vieldeutig; aber unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Inkremente hat das Integral $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ nur einen einzigen Werth, den wir durch das Symbol Arc tg x bezeichnen. Es ist also

$$\mathrm{Arc\,tg}\,x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1{}^2} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} + \ldots\ldots \varepsilon_n \frac{1}{1+(\underbrace{\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1}}_{=x-\varepsilon_n})^2} \quad \ldots\ldots (a)$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$

1. statt φ_v die Funktion $-v$, also $\varphi_\alpha = -\alpha$, $\varphi_\beta = -\beta$, $\varphi'_v = -1$,
2. statt φ_v die Funktion $\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{1}{\beta}$, $\varphi'_v = -\frac{1}{v^2}$,

so erhalten wir für $\alpha = o$ und $\beta = x$ (vergl. die Anmerkung)

1. $\int_0^x -1 \frac{1}{1+v^2} dv$ oder $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{-x} \frac{du}{1+u^2}$, folglich $\mathrm{Arc\,tg}(-x) = -\mathrm{Arc\,tg}\,x$;

2. $\int_0^x -\frac{1}{v^2} \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} dv$ oder $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_{\frac{1}{0}}^x \frac{du}{1+u^2}$; folglich

$$\mathrm{Arc\,tg}\,x = -\left\{\int_\infty^0 \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}\right\}, \text{ also } \mathrm{Arc\,tg}\,x = \mathrm{Arc\,tg}\,(\infty) - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{x}.$$

Demnach ist $\mathrm{Arc\,tg}\,x + \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{x}$ eine konstante Grösse $\mathrm{Arc\,tg}\,(\infty)$, die wir durch $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen wollen, so dass auch $\mathrm{Arc\,tg}\,(-x) + \mathrm{Arc\,tg}\,(-\frac{1}{x}) = -\{\mathrm{Arctg}x + \mathrm{Arctg}\frac{1}{x}\} = -\frac{\pi}{2}$ gefunden wird. Setzen wir $x = 1$, so ergiebt sich daher $2\,\mathrm{Arc\,tg}\,1 = \frac{\pi}{2}$, also $\mathrm{Arc\,tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$. Um diesen Werth annäherungsweise zu berechnen, setzen wir in die Gleichung (a) für x die Zahl 1, theilen die Einheit in n gleiche Theile, z. B. in zehn, und machen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n = \frac{1}{10}$; so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arc\,tg}\,1 = \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2}\right\}.$$

Anmerkung. Man könnte einwenden, dass, wenn man in die Gleichung III. $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ setzt, α nicht gleich o gemacht werden dürfe, weil für diesen Werth die Funktion $\frac{1}{v}$ aufhöre kontinuirlich zu sein, und daher die Gleichung III. nicht mehr stattfinde, und es liesse sich nach dem von uns angewendeten Verfahren auch das Absurdum $\mathrm{Arctg}(-x) + \mathrm{Arctg}\,(-\frac{1}{x}) = +\frac{\pi}{2}$ beweisen. Denn man setze für φ_v die Funktion $-\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{-\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{1}{-\beta}$, $\varphi'_v = \frac{1}{v^2}$, so würden wir für $\alpha = o$ und $\beta = x$ erhalten

$\int_0^x \frac{\frac{1}{v^2}}{1+\frac{1}{v^2}}\,dv$, das ist $\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_{\frac{1}{0}}^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}$, also

$\mathrm{Arctg}\,x = -\mathrm{Arctg}\,\infty + \mathrm{Arctg}(-\frac{1}{x})$, demnach $+\frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctg}(-x) + \mathrm{Arctg}(-\frac{1}{x})$.

Allein die Funktion $\frac{1}{v}$ ist zwischen den Grenzen $+\varepsilon$ und $+x$ und $-\varepsilon$ und $-x$, wobei ε unendlich klein ist, entschieden kontinuirlich; die Gleichung III. gilt also noch, wenn wir auch — dies ist der eigentliche Sinn der Umwandlung von $+\alpha$ in o — für α den Werth $+\varepsilon$ setzen, und das Fehlerhafte des voranstehenden Beweises liegt darin, dass die Umwandlung von $-\alpha$ in o als gleichbedeutend mit der in $+\varepsilon$ genommen wurde, während sie den Uebergang in $-\varepsilon$ vorstellt, also für $\frac{1}{-\alpha(=0)}$ nur $-\infty$, nicht $+\infty$ gesetzt werden konnte.

§. 12. Nehmen wir nun die in §. 10 für die Integrale $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$ und $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$ gefundenen Werthe, und berücksichtigen wir, dass nach §. 11

$$\int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\alpha} - \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \text{ und}$$

$$\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\beta} - \mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\beta} \text{ ist,}$$

so gelangen wir zu den Ausdrücken

$$\text{(b)} \ldots \int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i\,(\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\alpha} - \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}),$$

$$\text{(c)} \ldots \int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2} - i\,(\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\beta} - \mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}).$$

Lassen wir nun I. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter reelle Inkremente in $\gamma+\beta i$, darauf durch lauter imaginäre Inkremente aus $\gamma+\beta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$ durch die Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} + \int_{\gamma+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$, so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (b) α mit γ vertauschen und wir finden

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}-i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\beta^2+\gamma^2}+i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Lassen wir aber II. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in $\alpha+\delta i$, darauf durch lauter reelle Inkremente aus $\alpha+\delta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch die Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$, so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (c) β mit δ vertauschen und wir erhalten

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\delta^2}-i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}-\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}+\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}-\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Bezeichnen wir das auf die erste Art definirte Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch $f_1(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$, das auf die zweite Art definirte durch $f_2(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$, so ist

$$f_1-f_2=i\left\{\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}+\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}+\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\mathrm{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}-\mathrm{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}\right\},$$

welche Differenz, vermöge der Gleichung $\mathrm{Arctg}\,x+\mathrm{Arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, sich in $2\pi i$ umwandelt, wenn α und β positiv, γ und δ negativ (oder umgekehrt), und vermöge der Gleichung $\mathrm{Arctg}(-x)+\mathrm{Arctg}(-\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$, in $-2\pi i$, wenn α und δ positiv, β und γ negativ (oder umgekehrt), in allen übrigen Fällen aber $=0$ ist.

§. 13. Lassen wir nun III. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in den Zwischenwerth $\alpha+\beta_1 i$, von diesem durch lauter reelle Inkremente in einen andern Zwischenwerth $\alpha_1+\beta_1 i$ und so fort abwechselnd bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente bis zu einer Grenze $p+qi$ fortschreiten, so wird uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_2 erscheinen. Fassen wir zunächst zwei auf einander folgende dieser Integrale zusammen, so ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i)+f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2} i)=$$

$$\int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_r+\beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2} i}\frac{du}{u},$$

$$\text{also} = \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1} i} \frac{du}{u} + f_1(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i) + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u}.$$

Nun ist aber

I. wenn α_r und β_{r+1} positiv, α_{r+1} und β_{r+2} negativ (oder umgekehrt), $f_1 = f_2 + 2\pi i$,

II. wenn α_r und β_{r+2} positiv, β_{r+1} und α_{r+1} negativ (oder umgekehrt), $f_1 = f_2 - 2\pi i$,

in allen übrigen Fällen dagegen $f_1 = f_2$; folglich ist in allen diesen übrigen Fällen

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i) + f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i} \frac{du}{u} + f_2(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i) + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u}$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+1}i}^{\alpha_r+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u}$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i} \frac{du}{u} = f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i);$$

in den beiden Ausnahmefällen I. und II. dagegen ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i) + f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i) = f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i) \pm 2\pi i.$$

Wir hatten nun das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ definirt durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_1+\beta_1 i) + f_2(\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2+\beta_2 i)\} + \{f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_3+\beta_3 i) + f_2(\alpha_3+\beta_3 i,\ \alpha_4+\beta_4 i)\} +$$
$$\ldots + \{f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i) + f_2(\alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i)\} + f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i, p+qi).$$

Wählen wir nun in den eingeklammerten m Summen die Repräsentanten von α_r, β_{r+1}, α_{r+1}, β_{r+2} so, wie es in dem einen oder dem andern der beiden Ausnahmefälle I. und II. angegeben ist, so erhalten wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_2+\beta_2 i) + f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_4+\beta_4 i) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i) + f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i,\ p+qi) \pm 2m\pi i;$$

da aber jetzt die beiden Ausnahmefälle I. und II. nicht mehr stattfinden, so zieht sich diese ganze Summe zurück auf

$$f_2(\alpha+\beta i,\ p+qi) \pm 2m\pi i.$$

Stellen wir uns z. B. das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ vor durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i, -\alpha_1+\beta_1 i)+f_2(-\alpha_1+\beta_1 i, \alpha_2-\beta_2 i\}+\{f_2(\alpha_2-\beta_2 i, -\alpha_3+\beta_3 i)+f_2(-\alpha_3+\beta_3 i, \alpha_4-\beta_4 i)\}$$
$$+ f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi),$$

wo in den beiden eingeklammerten Summen

die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich 1) α und β_1, 2) α_2 und β_3 beide positiv, dagegen die Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich 1) $-\alpha$ und $-\beta_2$, 2) $-\alpha_3$ und $-\beta_4$ beide negativ, also dem Ausnahmefalle I. entsprechend gewählt sind, so finden wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+2\pi i+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)+2\pi i+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)$$
$$=\{f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)\}+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)+4\pi i.$$

Da nun aber jetzt in der eingeklammerten Summe die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich α und $-\beta_2$, so wie die Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich α_2 und $-\beta_4$, der eine positiv, der andere negativ sind, also weder dem Falle I., noch dem Falle II. entsprechen, so erhalten wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \underbrace{f_2(\alpha+\beta i, \alpha_4-\beta_4 i)+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)}_{f_2(\alpha+\beta i,\ p+qi)}+4\pi i$$
$$= f_2(\alpha+\beta i, p+qi) + 4\pi i.$$

Stellen wir uns also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ als eine auf unendlich mannigfaltige Art ausführbare Summe von Integralen vor, die sämmtlich dem Integral f_2 analog, d. h. sämmtlich von der Beschaffenheit sind, dass in ihnen die Variable von einem Zwischenwerth $\alpha_r+\beta_r i$ in einen andern Zwischenwerth $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i$ zuerst durch imaginäre, dann durch reelle Inkremente übergeht, so lassen sich die auf einander folgenden Zwischenwerthe $\alpha_r+\beta_r i$, $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i$, $\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i$ so wählen, dass jede von den unendlich vielen Summen, durch welche das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ definirt werden kann, sich von einander, wie von dem Integral $f_2(\alpha+\beta i, p+qi)$, um Vielfache der Differenz $2\pi i$ unterscheiden. Bezeichnen wir das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+pi} \frac{du}{u}$ unter der Voraussetzung, dass die Variable auf die angegebene Weise bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente von $\alpha+\beta i$ bis $p+qi$ fortschreitet, durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$, so haben wir die Gleichung

$$\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right) = f_2(\alpha+\beta i, p+qi) + 2m\pi i,$$

wo m jede positive und jede negative ganze Zahl bedeutet.

Anmerkung. Stellen wir uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_1 vor, so finden wir durch ein dem obigen ähnliches Verfahren denselben Werth, so dass jenes Integral auch bei dieser Auffassung durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ zu bezeichnen ist.

§. 14. Machen wir $\alpha = 1$, $\beta = 0$, und nennen wir das unendlich-vieldeutige Integral $\left(\int_{1}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ den allgemeinen Logarithmus von $p+qi$, den wir im Unterschiede von dem eindeutigen $\mathrm{Log}\,(p+qi) = f_2\,(1, p+qi)$ durch $\log\,(p+qi)$ bezeichnen, so gilt die Gleichung

$$\log\,(p+qi) = f_2(1, p+qi) + 2m\pi i.$$

Ist nun p eine positive Zahl, so erhalten wir

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(p^2+q^2) + i(\underbrace{\mathrm{Arctg}\tfrac{1}{q} + \mathrm{Arctg}\,q}_{=\frac{\pi}{2}} - \mathrm{Arctg}\tfrac{p}{q}) + 2m\pi i,$$

und da $-\mathrm{Arctg}\frac{p}{q} = -\mathrm{Arctg}\frac{p}{q} - \mathrm{Arctg}\frac{q}{p} + \mathrm{Arctg}\frac{q}{p} = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{Arctg}\frac{q}{p}$, ist, so folgt

$$\log\,(p+qi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,(p^2+q^2) + i\,(2m\pi + \mathrm{Arctg}\tfrac{q}{p}),$$

wo $\mathrm{Arctg}\frac{q}{p}$ eindeutig und derjenige Arcus ist, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, und zwar zwischen o und $+\frac{\pi}{2}$, wenn q positiv, zwischen o und $-\frac{\pi}{2}$, wenn q negativ ist.

Bedeutet aber p eine negative Zahl, ist also $p = -p'$, so findet man

$$\log\,(p+qi) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(p^2+q^2) + i\,(\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{Arctg}\tfrac{p'}{q}) + 2m\pi i,$$

und da $\mathrm{Arctg}\frac{p'}{q} = \mathrm{Arctg}\frac{p'}{q} + \mathrm{Arctg}\frac{q}{p'} - \mathrm{Arctg}\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arctg}\frac{q}{p}$ ist, so folgt für ein negatives p

$$\log\,(p \pm qi) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(p^2+q^2) + i\,([2m+1]\,\pi \pm \mathrm{Arctg}\tfrac{q}{p}).$$

Man findet daher auch $\log\,(+p) = \mathrm{Log}\,p + 2m\pi i$,

$$\log\,(-p) = \mathrm{Log}\,p + (2m+1)\pi i,$$

wo Log p den einzigen Werth vorstellt, den man für das, aus bloss reellen Inkrementen konstruirte Integral $\int_1^p \frac{du}{u}$ erhält.

C. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung komplexer Inkremente.

§. 15. Lassen wir nunmehr die Variable durch komplexe Inkremente von der Form $\varepsilon + \delta i$ aus der Grenze $\alpha + \beta i$ in die Grenze $p + qi$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\, du$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i) f\{\alpha + \beta i\} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1) i\} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2) i\}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} + i(\beta + \delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1})\},$$

in welcher ε und δ reell und unendlich klein und $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots\ldots + \varepsilon_n = p$,

$\beta + \delta_1 + \delta_2 \ldots\ldots + \delta_n = q$ ist,

so haben wir offenbar die allgemeinste Definition des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\, du$ vor uns, welche die, dem vorangehenden Abschnitt zu Grunde gelegte als ihre Unterart einschliesst. Man könnte daher glauben, dass die Konstruktion des Integrals $\left(\int_1^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ unter Zulassung bloss einfacher und zwar mit reellen abwechselnder imaginärer Inkremente (vergl. §. 13) dessen Benennung als des „allgemeinen Logarithmus" von $p + qi$ nicht rechtfertige. Allein wir werden uns alsbald überzeugen, dass der durch die jetzige Definition des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\, du$ bedingte Werth desselben mit dem Werthe des Integrals $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\, du\right)$ genau übereinstimmt.

§. 16. Nämlich zufolge der jetzt vorausgesetzten, im vorigen §. angegebenen Konstruktion des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\, du$ haben wir auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\, du = \varepsilon_1 f\{\alpha + \beta i\} + \delta_1 i f\{\alpha + \beta i\} + \varepsilon_2 f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1) i\} + \delta_2 i f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1) i\} + \text{etc.}$$

Da nun die Funktion fu zwischen den Grenzen $\alpha + \beta i$ und $p + qi$ als kontinuirlich, d. h. als eine solche vorausgesetzt wird, welche, während die Variable u aus der Grenze $\alpha + \beta i$ durch komplexe Inkremente in die Grenze $p + qi$ übergeht, nie die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so muss sie, so oft der Theil α_r irgend eines Werthes $\alpha_r + \beta_r i$ der Veränderlichen u um ein unendlich kleines Inkrement ε_r wächst, ebenfalls einen unendlich kleinen Zuwachs ϑ_r von der Form $\vartheta'_r + \vartheta''_r i$ erhalten. Es ist also

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\} &= \mathrm{f}\{\alpha+\beta i\}+\vartheta_1;\ \text{folglich}\\
\mathrm{f}\{\alpha+\beta i\} &= \mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\vartheta_1;\ \text{desgleichen ist}\\
\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\} &= \mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\vartheta_2;\ \text{folglich}\\
\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\} &= \mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\}-\vartheta_2;\ \text{ebenso}\\
\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\} &= \mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\}-\vartheta_3\ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Demnach lässt sich die jetzt vorausgesetzte Konstruktion des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\mathrm{fu}\,du$ auch in folgende umwandeln:

$$\varepsilon_1\mathrm{f}\{\alpha+\beta i\}+\delta_1 i\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\delta_1\vartheta_1 i+\varepsilon_2\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\delta_2 i\mathrm{f}\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\}$$
$$-\delta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

Also ist $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\mathrm{fu}\,du=$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\beta i}\mathrm{fu}\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}\mathrm{fu}\,du-\delta_1\vartheta_1 i}+\int_{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}\mathrm{fu}\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i}\mathrm{fu}\,du-\delta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

$$\Vert$$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}\mathrm{fu}\,du-\delta_1\vartheta_1 i + \int_{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}\mathrm{fu}\,du}$$

$$\Vert$$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}\mathrm{fu}\,du-\delta_1\vartheta_1 i + \int_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i}\mathrm{fu}\,du-\delta_2\vartheta_2 i}$$

$$\Vert$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i}\mathrm{fu}\,du-\vartheta_1\vartheta_1 i-\vartheta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

Verfahren wir auf diese Weise mit sämmtlichen Gliedern der obigen Summe, so erhalten wir schliesslich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n+(\beta+\delta_1+\delta_2\ldots\delta_n)i}\mathrm{fu}\,du-i(\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2\ldots\ldots+\delta_n\vartheta_n).$$

Achten wir aber auf das Bildungsgesetz dieses Integrals, auf welches sich die transformirte Summe reducirt hat, und bemerken wir, dass die Veränderliche a b w e c h s e l n d bald durch reelle, bald durch e i n f a c h e imaginäre Inkremente in den letzten Grenzwerth übergeht, so ist klar, dass diesem Integral kein anderer Werth, als der, am Ende des §. 13 durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\mathrm{fu}\,du\right)$ bezeichnete beizulegen ist.

Was aber die Reihe $\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2\ldots+\delta_n\vartheta_n$ betrifft, so zerfällt sie vermöge der komplexen Form von ϑ in die beiden Reihen $\delta_1\vartheta'_1+\delta_2\vartheta'_2\ldots+\delta_n\vartheta'_n+i(\delta_1\vartheta''_1+\delta_2\vartheta_2''\ldots+\delta_n\vartheta''_n)$.

Ist nun unter den unendlich kleinen Grössen $\vartheta'_1, \vartheta'_2 \ldots \vartheta'_n$ und $\vartheta''_1, \vartheta''_2 \ldots \vartheta''_n$, unter jenen ϑ'_r, unter diesen ϑ''_r die grösste, so ist die Summe

$$\delta_1 \vartheta_1 + \delta_2 \vartheta_2 \ldots + \delta_n \vartheta_n < \vartheta'_r(\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n) + i\,\vartheta''_r(\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n), \text{ also} < \vartheta_r(q-\beta),$$

sie ist demnach unendlich klein und folglich ohne Einfluss auf den Werth des zu untersuchenden Integrals. Wir erhalten daher

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\, du = \left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+pi} fu\, du\right),$$

d. h. der an das Bildungsgesetz C. (S. §. 6) sich knüpfende Werth des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\, du$ ist mit dem durch das Bildungsgesetz B, III. bedingten Werthe dieses Integrals identisch.

§. 17. Dem jetzt vorausgesetzten Bildungsgesetze gemäss verstehen wir unter dem Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{\alpha+\beta i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i)\frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i)\frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i)\frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\beta + \delta_1 + \delta_2 \ldots\ldots + \delta_{n-1})i},$$

in welcher $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n = p$ und $\beta + \delta_1 + \delta_2 \ldots\ldots + \delta_n = q$ ist.

Machen wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ldots\ldots = \varepsilon_n$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots\ldots = \delta_n$, so finden wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = (\varepsilon_1 + \delta_1 i)\left\{\frac{1}{\alpha+\beta i} + \frac{1}{\alpha+\beta i+\varepsilon_1+\delta_1 i} + \frac{1}{\alpha + \beta i + 2(\varepsilon_1 + \delta_1 i)}\right.$$
$$\left.\ldots\ldots + \frac{1}{\alpha+\beta i+(n-1)(\varepsilon_1+\delta_1 i)}\right\},$$

wo $\alpha + \beta i + n(\varepsilon_1 + \delta_1 i) = p + qi$ ist. Folglich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha+\beta i}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}} + \frac{1}{1+2\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(n-1)\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}}\right\},$$

wo $1 + n\frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i} = \frac{p + qi}{\alpha + \beta i}$ ist. Setzen wir endlich $\frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i} = \varepsilon + \delta i$, so ist

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = (\varepsilon + \delta i)\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\varepsilon+\delta i} + \frac{1}{1+2(\varepsilon+\delta i)} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(n-1)(\varepsilon+\delta i)}\right\},$$

wo $1 + n(\varepsilon + \delta i) = \frac{p + qi}{\alpha + \beta i}$ ist. Offenbar ist nun die rechtsstehende Summe die Definition des Integrals $\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u}$, unter Voraussetzung, dass die Inkremente komplex und sämmtlich gleich

$\varepsilon + \delta i$ sind. Folglich finden wir bei Berücksichtigung des §. 16, nach welchem dieses Integral

$$\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} = \left(\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right), \text{ mithin nach §. 13} = \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i} \text{ ist,}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}.$$

Nun ist aber auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} \right) = -\left(\int_1^{\alpha+\beta i} \frac{du}{u} \right) + \left(\int_1^{p+qi} \frac{du}{u} \right)$$
$$= \log (p+qi) - \log (\alpha+\beta i);$$

folglich ergiebt sich $\log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i} = \log (p+qi) - \log (\alpha+\beta i)$ oder auch, wenn $p+qi$ statt $\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$, mithin $(p+qi)(\alpha+\beta i)$ statt $p+qi$ gesetzt wird:

$$\log (p+qi)(\alpha+\beta i) = \log (p+qi) + \log (\alpha+\beta i),$$

woraus wir schliessen $\log (xy) = \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y + 2m\pi i$, und zwar für alle reellen und imaginären Werthe von x und y.

§. 18. Einen wesentlichen Bestandtheil des Integrals $\int_1^x \frac{du}{u}$ in dessen allgemeiner Bedeutung bildet ein Integral von der Form $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$, welches wir unter der Voraussetzung, dass die Veränderlichen nur durch reelle Inkremente von o bis x fortschreitet, durch Arc tg x bezeichnet haben. Wir wollen nun auch diesem Integral eine allgemeinere Bedeutung unterlegen und auch in ihm imaginäre Inkremente der Veränderlichen zulassen. Da nun unter dieser Voraussetzung zwei Hauptarten B. und C. (S. §. 6) des Wachsthums der Veränderlichen stattfinden, beide Arten indess nach §. 16 in Rücksicht auf den Werth des zu untersuchenden Integrals zu demselben Ergebnisse führen, so wird offenbar durch Anwendung komplexer Inkremente die ganze Bedeutung dieses Integrals umfasst und erschöpft. Wir definiren demnach jetzt das Integral $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{1} + (\varepsilon_2 + \delta_2)i \frac{1}{1+(\varepsilon_1+\delta_1 i)^2} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i)\frac{1}{1+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\delta_1+\delta_2)i\}^2}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i)\frac{1}{1+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1+\delta_2 \ldots + \delta_{n-1})i\}^2},$$

in welcher $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n)i = x$ ist, und bezeichnen diese Summe durch arc tg x. Demnach ist

$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{(u+i)(u-i)} = \frac{1}{2i}\left\{\int_0^x \frac{du}{u-i} - \int_0^x \frac{du}{u+i}\right\}$, in welchen beiden Integralen wiederum die Inkremente der Veränderlichen als komplex vorausgesetzt sind, so dass $\int_0 \frac{du}{u \mp i}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{\mp i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i)\frac{1}{\varepsilon_1 + \delta_1 i \mp i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i)\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\delta_1 + \delta_2)i \mp i}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i)\frac{1}{\underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1})i \mp i}_{= x - (\varepsilon_n + \delta_n i)}}$$

zu definiren ist. Setzen wir nun in diesen beiden Integralen u' für jedes $u \mp i$, nämlich
$(\mp i)$ für $(o) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \delta_1 i)$ für $(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2]i)$ für $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2]i) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + [\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1}]i)$ für $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1})i) \mp i$,
welche neue Variable u' für $u = o$ in $\mp i$ und für $u = x$ in $x \mp i$ übergeht, so folgt:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\int_{-i}^{x-i} \frac{du}{u} - \int_{i}^{x+i} \frac{du}{u}\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{-\int_1^{-i} \frac{du}{u} + \int_1^{x-i} \frac{du}{u} - \left(-\int_1^{i} \frac{du}{u} + \int_1^{x+i} \frac{du}{u}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{-\log(-i) + \log(x-i) + \log i - \log(x+i)\right\}$$

folglich nach §. 17 $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\log(1+xi) - \log(1-xi)\right\} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi}$,

Darum nun $\log\frac{1+xi}{1-xi}$ unendlich viele Werthe hat, welche sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden, so hat auch arc tg x unendlich viele Werthe, deren Unterschiede Vielfache von $\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i$, also von π sind. Ist also (arc tg x) einer dieser Werthe, so haben wir

$$\operatorname{arc\,tg} x = (\operatorname{arc\,tg} x) + m\pi.$$

§. 19. Um nun dem Ausdruck für arc tg x, wo $x = p + qi$ ist, ebenfalls die Form $p + qi$ zu geben, brauchen wir nur in die Gleichung $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1+xi}$ für x den Werth $p + qi$ einzutragen. Dann ist

$$\operatorname{arctg}(p+qi) = \frac{1}{2i}\log\frac{1-q+pi}{1+q-pi} = \frac{1}{2i}\log\frac{1-q^2-p^2+2pi}{(1+q)^2+p^2} = \frac{1}{2i}\log\left\{\frac{1-q^2-p^2}{(1+q)^2+p^2} + \frac{2p}{(1+q)^2+p^2} \times i\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\log(P+Qi).$$

Ist P positiv, also $1-q^2-p^2>0$, folglich $p^2+q^2<1$, so erhalten wir nach §. 14

$$\text{arc tg}\,(p+qi)=\frac{1}{2i}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,(P^2+Q^2)+i\,\text{Arctg}\,\frac{Q}{P}+2m\pi i\right\},$$

ist P negativ, also $1-q^2-p^2<0$, mithin $p^2+q^2>1$, so haben wir

$$\text{arc tg}\,(p+qi)=\frac{1}{2i}\left\{\tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,(P^2+Q^2)+i\,\text{Arctg}\,\frac{Q}{P}+(2m+1)\pi i\right\}.$$

Nun ist $P^2+Q^2=\dfrac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}$ und $\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2p}{1-q^2-p^2}$; folglich haben wir im ersten Falle

$$\text{arc tg}\,(p+qi)=\frac{1}{4i}\,\text{Log}\,\frac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}+\tfrac{1}{2}\,\text{Arctg}\,\frac{2p}{1-q^2-p^2}+m\pi,$$

im zweiten Falle

$$\text{arc tg}\,(p+qi)=\frac{1}{4i}\,\text{Log}\,\frac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}+\tfrac{1}{2}\,\text{Arc tg}\,\frac{2p}{1-q^2-p^2}+\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi.$$

§. 20. Aus der in §. 18 für arc tg x entwickelten Formel folgt ferner:

$$\text{I. arc tg}\,x+\text{arc tg}\,(-x)=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{1-xi}{1+xi}\right\}=\frac{1}{2i}\log 1=m\pi,$$

$$\text{II. arc tg}\,x+\text{arc tg}\,\frac{1}{x}=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{x+i}{x-i}\right\}=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{x-i}{-x-i}+\log\frac{x+i}{x-i}\right\}$$
$$=\frac{1}{2i}\log(-1)=\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi.$$

$$\text{III. arc tg}\,x+\text{arc tg}\,y=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{1+yi}{1-yi}\right\}=\frac{1}{2i}\log\frac{(1+xi)(1+yi)}{(1-xi)(1-yi)}$$
$$=\frac{1}{2i}\log\frac{1-xy+(x+y)i}{1-xy-(x+y)i}=\frac{1}{2i}\log\frac{1+\dfrac{x+y}{1-xy}i}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}i}=\text{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}.$$

Es sei arc tg $x=\alpha$, so ist auch x eine Funktion von α, die wir durch tgα bezeichnen; desgleichen haben wir, wenn arc tg $y=\beta$ ist, $y=\text{tg}\,\beta$. Da arc tg x unendlich-vieldeutig ist, oder α unendlich viele Werthe hat, die sich um Vielfache von π unterscheiden, so muss x, als Funktion von α betrachtet, immer zu demselben Werthe zurückkehren, so oft α um π gewachsen ist. Demnach ist die Funktion $x=\text{tg}\,\alpha$ periodisch, und der Index ihrer Periode ist π, also $\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,(\alpha+m\pi)$. Substituiren wir aber die Werthe von x und y in die Formel III., so erhalten wir $\alpha+\beta=\text{arc tg}\,\dfrac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\;\text{tg}\,\beta}$; folglich umgekehrt

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\;\text{tg}\,\beta}.$$

Anmerkung. So wie wir die Formeln I. und II., jedoch mit der Einschränkung, dass die Funktion arctg nur den eindeutigen Arctg vorstellt, der die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreiten darf, schon früher (S. §. 11) aus der Gleichung III. §. 5 abgeleitet haben, so liess sich auch die Formel III. unter der angegebenen Einschränkung aus der nämlichen Gleichung entwickeln. Setzen wir nämlich in die Gleichung III. des §. 5 $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{x+v}{1-xv}$, also $\varphi_\alpha = \frac{x+\alpha}{1-x\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{x+\beta}{1-x\beta}$, $\varphi'_v = \frac{1+x^2}{(1-xv)^2}$, so erhalten wir für $\alpha = 0$ und $\beta = z$

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+v}{1-xv}\right)^2} \times dv, \text{ das ist} \int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2+(x+v)^2} dv = \int_x^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{1+x^2v^2+x^2+v^2} dv \text{ oder} \int_0^z \frac{1+x^2}{(1+x^2)+v^2(1+x^2)} dv \text{ oder} \int_0^z \frac{dv}{1+v^2} =$$

$$-\int_0^x \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich $\operatorname{Arc tg} \frac{x+z}{1-xz} = \operatorname{Arc tg} x + \operatorname{Arc tg} z$. Diese Formel gilt aber, vorausgesetzt, dass x und z beiderseits positiv sind, nur so lange, als $z < \frac{1}{x}$ ist, da die Funktion $\varphi z = \frac{x+z}{1-xz}$ für den Werth $z = \frac{1}{x}$ diskontinuirlich wird. Es war daher der von uns eingeschlagene Weg nothwendig, um diese Formel allgemein zu beweisen.

§. 21. Wenden wir uns nun zu der umgekehrten Funktion des Logarithmus. Aus der Gleichung $\log x = \operatorname{Log} x + 2m\pi i$ folgt, dass x eine Funktion von $\operatorname{Log} x + 2m\pi i$ ist, welche keine andere sein kann, als $e^{\operatorname{Log} x + 2m\pi i}$, da sie nach §. 9 für $m = 0$ sich in $e^{\operatorname{Log} x}$ verwandeln muss. Aus der Gleichung $x = e^{(y = \operatorname{Log} x) + 2m\pi i}$ folgt aber, dass die Funktion e^y so oft zu demselben Werthe zurückkehrt, als der Exponent y um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt wird, dass also e^y eine periodische Funktion ist und zum Index der Periode $2\pi i$ hat. Obschon nun leicht zu sehen ist, dass die unter Voraussetzung reeller Exponenten gültigen Regeln der Potenzenrechnung auch auf Potenzen von der Form e^{p+qi} auszudehnen sind — denn jedes beliebige $p+qi$ ist $= \log(P+Qi)$, woraus, weil $\log(P+Qi)(P'+Q'i) = \log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)$, also auch $(P+Qi)(P'+Q'i) = e^{\log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)}$ ist, unmittelbar folgt $e^{p+qi} \times e^{p'+q'i} = e^{(p+p')+(q+q')i}$ — so ist doch die Potenz e^{p+qi} in diesem Augenblicke für uns eine leere Form, und es bleibt noch die Aufgabe übrig, die Bedeutung dieser imaginären Potenz festzustellen.

§. 22. Diese Aufgabe reducirt sich, da $e^{p+qi} = e^p e^{qi}$ ist, auf die, den Werth von e^{qi} zu ermitteln. Es sei $e^{qi} = f_1(q) + i f_2(q)$, also $qi = \log\{f_1(q) + i f_2(q)\}$.

Folglich nach §. 14

$qi = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(f_1{}^2 + f_2{}^2) + i \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi i$, wenn f_1 positiv ist,

$qi = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(f_1{}^2 + f_2{}^2) + i \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi i$, wenn f_1 negativ ist.

Beide Gleichungen sind nur dann möglich, wenn der reelle Theil $= 0$ ist; folglich $\operatorname{Log}(f_1{}^2 + f_2{}^2) = 0$, also $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$.

Daher

(a) $q = \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi$, wenn f_1 positiv,

(b) $q = \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi$, wenn f_1 negativ ist.

Um nun die übrigen Eigenschaften der Funktionen $f_1(q)$ und $f_2(q)$ zu finden, geben wir der Veränderlichen q der Reihe nach die Werthe $2m\pi$, $2m\pi + \gamma$ $(< \frac{\pi}{2})$, $2m\pi + \frac{\pi}{2}$, $(2m + \frac{1}{2})\pi + \gamma$, $(2m+1)\pi$, $(2m+1)\pi + \gamma$ und $(2m + \frac{3}{2})\pi$.

1) Es sei $q = 2m\pi$, so kann die Gleichung (b) nicht statt finden; denn sonst wäre

$2m\pi = \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi$; folglich

$= \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = -\pi$,

was unmöglich ist, da der absolute Werth von Arc tg die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigen kann. Folglich ist nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und $\operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = 0$, also auch $\frac{f_2}{f_1} = 0$, folglich $f_2 = 0$.

Nun ist $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$; folglich $f_1 = +1$.

Also $f_1(2m\pi) = +1$, $f_2(2m\pi) = 0$.

2) Ist $q = 2m\pi + \gamma$ und $\gamma < \frac{\pi}{2}$, so kann die Gleichung (b) wiederum nicht stattfinden; denn sonst wäre

$$2m\pi + \gamma = \operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = \gamma - \pi = -(\pi - \gamma);$$

da nun $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so wäre der absolute Werth von $\operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1}$ wiederum $> \frac{\pi}{2}$ was unmöglich ist. Es ist also nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und $\operatorname{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = \gamma$, also $\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg} \gamma$ und $f_2 = f_1 \operatorname{tg} \gamma$.

Folglich $f_1{}^2 + f_2{}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma = 1$, also $f_1 = + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}$.

Also $f_1(2m\pi + \gamma) = + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}$, $f_2(2m\pi + \gamma) = + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}$.

3) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$. Da $f_1(2m\pi + \gamma)$ bis zum Uebergange in $f_1(2m\pi + \frac{\pi}{2})$ beständ-

dig **positiv** bleibt, so ist nur die Gleichung (a) anwendbar, und man erhält $\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2}$; $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$, also $f_1 = 0$, während f_2 **positiv**, und da $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$, gleich $+1$ ist.

Also $f_1\,(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $f_2\,(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = +1$.

4) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma$, so ist die Gleichung (a) unzulässig, denn sonst wäre $2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi$, also

$$\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma, \text{ was unmöglich ist.}$$

Folglich erhalten wir aus der Gleichung (b)

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ also}$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \text{ mithin } \frac{f_2}{f_1} = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right);$$

denn da $\mathrm{Arc\,tg}\,(-x) = -\mathrm{Arc\,tg}\,x$ ist (S. §. 11), so folgt $-x = \mathrm{tg}\,(-\mathrm{Arc\,tg}\,x)$, mithin $-\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,(-\alpha)$, wenn $\mathrm{Arc\,tg}\,x = \alpha$ gesetzt wird.

Da nun wegen Gültigkeit der Gleichung (b) f_1 **negativ** sein muss, so ist f_2 **positiv** und $f_1{}^2 + f_2{}^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 1$, also $f_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}}$, $f_2 = -f_1\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \frac{+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}}$;

setzen wir $\frac{\pi}{2} + \gamma = \gamma'$, also $\gamma = \gamma' - \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \gamma = \pi - \gamma'$, so ist

$$f_1\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\pi-\gamma)}},\ f_2\,(2m\pi + \gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\ (\pi-\gamma)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\pi-\gamma)}}, \text{ wo } \gamma > \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

5) Ist $q = (2m+1)\pi$, so giebt die Gleichung (a)

$$2m\pi + \pi = \mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi, \text{ also } \mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \pi,$$

was unmöglich ist. Aus der Gleichung (b) erhält man aber $\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = 0$, folglich $f_2 = 0$; nun ist $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$, folglich wegen Gültigkeit der Gleichung (b) $f_1 = -1$.

Also $f_1\,(2m\pi + \pi) = -1$, $f_2\,(2m\pi + \pi) = 0$.

6) Ist $q = 2m\pi + \pi + \gamma$, so ist ebenfalls nur die Gleichung (b) anwendbar; man findet daher f_1 **negativ** und $\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \gamma$, also $f_2 = f_1\,\mathrm{t}\gamma$;

folglich $f_1\,(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$, $f_2\,(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$.

Setzen wir $\pi + \gamma = \gamma'$, so folgt

$$f_1\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\gamma-\pi)}},\ f_2\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}\,(\gamma-\pi)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\gamma-\pi)}}, \text{ wo } \gamma > \pi \text{ ist.}$$

7) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$, so folgt aus der jetzt allein anwendbaren Gleichung (b), dass f_1 negativ und $\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = +\frac{\pi}{2}$ ist; daher $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$, also $f_1 = -0$ und f_2 ebenfalls negativ und zwar $= -1$, vermöge der Gleichung $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$.

Also $f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = 0$, $f_2(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$.

8) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma$, so würde aus der Gleichung (b) folgen, dass der kleinste Werth von $\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma$ ist, was nicht der Fall sein kann. Daher ist nur die Gleichung (a) anwendbar und man erhält f_1 positiv und $2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma = \mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + 2\pi$, folglich

$$\mathrm{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = -(\tfrac{\pi}{2} - \gamma),\ f_2 = -f_1\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{\pi}{2} - \gamma);$$

vermöge der Gleichung $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$ finden wir also $f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}$,

$$f_2(2m\pi + \tfrac{3\pi}{2} + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}.$$

Setzen wir $\frac{3\pi}{2} + \gamma = \gamma'$, so ergiebt sich

$$f_1(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(2\pi - \gamma)}},\ f_2(2m\pi + \gamma) = -\frac{\mathrm{tg}\,(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(2\pi - \gamma)}},$$

wo $\gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist.

§. 23. Bezeichnen wir die Funktion $f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 q}}$ durch $\cos q$ und $f_2(q) = \frac{\mathrm{tg}\,q}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 q}}$ durch $\sin q$, so finden wir

$$e^{qi} = \cos q + i \sin q \text{ und}$$
$$e^{(q + 2m\pi)i} = \cos(q + 2m\pi) + i \sin(q + 2m\pi) = e^{qi} \text{ nach §. 21;}$$
folglich $\cos(q + 2m\pi) = \cos q$ und $\sin(q + 2m\pi) = \sin q$.

Beide Funktionen $\cos q$ und $\sin q$ sind also periodisch, und der Index ihrer Periode ist 2π. Ist daher $\left\{\begin{array}{c}\cos q \\ \text{oder } \sin q\end{array}\right\} = x$, so ist umgekehrt q, als eine Funktion von x betrachtet, die wir durch $\left\{\begin{array}{c}\mathrm{arc}\cos x \\ \text{oder } \mathrm{arc}\sin x\end{array}\right\}$ bezeichnen, unendlich vieldeutig, und verstehen wir unter $\mathrm{Arc}\cos x$ und $\mathrm{Arc}\sin x$ den kleinsten arcus, so ist $\mathrm{arc}\cos x = \mathrm{Arc}\cos x + 2m\pi$, $\mathrm{arc}\sin x = \mathrm{Arc}\sin x + 2m\pi$. Die Gesetze des Wachsens und Abnehmens der beiden Funktionen $\cos q$ und $\sin q$ ergeben sich nach §. 22 aus folgenden Gleichungen:

1) $\cos(2m\pi) = +1$, $\sin(2m\pi) = 0$.

2) $\cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\gamma}}$, $\sin(2m\pi + \gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\gamma}}$, wo $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist.

3) $\cos\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +1$.

4) Wenn $\pi > \gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi - \gamma)}} = -\cos(\pi - \gamma),\ \sin(2m\pi + \gamma) = +\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi - \gamma)}}$$
$$= +\sin(\pi - \gamma).$$

5) $\cos(2m\pi + \pi) = -1$, $\sin(2m\pi + \pi) = 0$.

6) Wenn $\frac{3\pi}{2} > \gamma > \pi$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \pi)}} = -\cos(\gamma - \pi),\ \sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma - \pi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \pi)}}$$
$$= -\sin(\gamma - \pi).$$

7) $\cos\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2m\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

8) Wenn $2\pi > \gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}} = \cos(2\pi - \gamma),\ \sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}}$$
$$= -\sin(2\pi - \gamma).$$

§. 24. Da $e^{(p \pm q)i} = e^{pi} . e^{\pm qi}$ ist, so folgt

$$\cos(p \pm q) + i \sin(p \pm q) = (\cos p + i \sin p)(\cos q \pm i \sin q)$$
$$= \cos p \cos q \mp \sin p \sin q + i(\sin p \cos q \pm \cos p \sin q).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q,$$
$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$

woraus sich die noch übrigen Eigenschaften der Funktionen sin q und cos q leicht entwickeln lassen.

§. 25. Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius 1, legen durch dessen Mittelpunkt O die Koordinatenaxen OX und OY und schneiden von dem Durchschnittspunkt A der Abscissenaxe aus einen Bogen AB $= q$ ab, so sind die auf den Endpunkt B des abgeschnittenen Bogens AB bezogenen Koordinaten Funktionen von q, und es sei die Ordinate BD oder $y = F_1(q)$, die Abscisse DO oder $x = F_2(q)$. Da unn $F_1(q=0) = 0$, $F_2(q=0) = 1$ ist; da ferner für jeden Werth von q die entsprechenden Werthe von $F_1(q)$ und $F_2(q)$ der Gleichung $F_1{}^2(q) + F_2{}^2(q) = 1$ Genüge leisten: so müssen diese beiden Funktionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ von den Werthen $F_1(0) = 0$ und $F_2(0) = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Bogens q genau um so viel wachsen und abnehmen, um wie viel die Funktionen sin q und cos q von den Werthen $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Inkrement der Veränderlichen q wachsen und abnehmen. Folglich müssen die Funktionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ für jeden Werth des Bogens q mit den Werthen von sin q und cos q genau übereinstimmen. Daher lassen sich die beiden letztern Fuuktionen sin q und cos q durch die, auf den Endpunkt B eines, von der Abscissenaxe aus immer nach derselben Richtung abgeschnittenen Bogens AB $= q$ bezogenen Koordinaten x und y geometrisch darstellen, und zwar ist die Abscisse $x = \cos q$, die Ordinate $y = \sin q$. Da nun für den Werth $q = \frac{\pi}{2}$ die Funktion cos q, mithin auch die Abscisse x verschwinden, hingegen die Funktion sin q, mithin auch die Ordinate y den Werth 1 annehmen muss; jenes Verschwinden der Abscisse x, so wie jener Uebergang der Ordinate y in den Werth 1 aber nicht eher statt finden kann, als bis der Bogen q gleich einem Quadranten geworden ist: so folgt, dass die Zahl $\frac{\pi}{2}$, die wir in §. 11 als den Werth der Funktion $\text{Arc tg}\,(x = \infty)$ definirt und berechnet haben, die Anzahl von Längeneinheiten angiebt, die der vierte Theil eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises beträgt, oder dass die Zahl π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1 vorstellt.