Algebraische Bestimmung

der Tangente, der Wendepunkte und des Krümmungskreises der algebraischen ebenen Curven.

Die Bestimmung der Tangente, der Wendepunkte, des Krümmungskreises und anderer Stücke der Curven geschieht gewöhnlich mit Hülfe der Differential-Rechnung, in manchen Fällen ist die Anwendung derselben sogar nothwendig. In Betreff der algebraischen ebenen Curven ist jedoch die Anwendung der Differential-Rechnung nicht erforderlich, und kann man auf rein algebraischem Wege dahin gelangen. Im Folgenden sollen die Tangente, die Wendepunkte und der Krümmungskreis der algebraischen ebenen Curven auf diesem Wege bestimmt werden.

I. Bestimmung der Tangente.

Tangente an eine Curve heisst diejenige Gerade, die mit der Curve einen Punkt gemein hat, und der die Curve in der unmittelbaren Nähe jenes Punktes (des Berührungspunktes) nur ihre convexe Seite zukehrt. Jede andere Gerade, die mit der Curve einen Punkt gemein hat, der aber die Curve in der unmittelbaren Nähe dieses Punktes sowohl die convexe, als die concave Seite zukehrt, ist eine Secante, d. h. eine Gerade, die mit der Curve im Allgemeinen noch einen Punkt gemein hat oder sie schneidet.

Denkt man sich eine Secante um den einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve gedreht, so bewegt sich der zweite Durchschnittspunkt und kommt, wenn die Drehung fortdauert, jenem als fest gedachten Punkte immer näher, bis er endlich mit ihm zusammenfällt. Der concave Curvenbogen, der anfangs zwischen den beiden Durchschnittspunkten lag, liegt in diesem Falle auf der entgegengesetzten Seite der Geraden, oder die Curve kehrt der Geraden bei dieser Lage ihre convexe Seite zu, d. h. die Gerade ist in dieser Lage eine Tangente an die Curve. — Auf dieser Vorstellung beruht die Bestimmung der Tangente.

Jede algebraische ebene Curve hat die Eigenschaft, dass die Anzahl ihrer Durchschnittspunkte mit einer Geraden im Allgemeinen gleich ist der Zahl, welche die Ordnung der Curve, d. h. den Grad ihrer Gleichung angiebt. Man findet die Coordinaten dieser

Durchschnittspunkte, also diese Punkte selbst, indem man die Gleichung der Curve mit der Gleichung der schneidenden Geraden verbindet. Im Allgemeinen erhält man also, wenn die Gleichung der Curve vom n^{ten} Grade ist, n Durchschnittspunkte (reelle und imaginäre). Ist nun die betreffende Gerade eine Tangente, so muss die Anzahl der Durchschnittspunkte $< n$ sein, da in diesem Falle wenigstens zwei derselben in einen zusammenfallen, d. h. gleiche Coordinaten haben müssen; und umgekehrt: wenn die Anzahl der Durchschnittspunkte $< n$ ist, oder wenn unter den n Durchschnittspunkten mindestens zwei gleiche Coordinaten haben, so ist die betreffende Gerade eine Tangente an die Curve, und zwar in dem Punkte, der durch diese Coordinaten bestimmt ist.

Demnach besteht die Bestimmung der Tangente an eine algebraische ebene Curve darin, die Beziehung aufzusuchen, welche zwischen der Curve und einer Geraden stattfinden muss, damit von den möglichen Durchschnittspunkten mindestens zwei reale zusammenfallen, d. h. die Anzahl der Durchschnittspunkte geringer als der Grad der Curve ist.

Sei $f(x, y) = o$ die Gleichung einer Curve n^{ten} Grades,
$y = mx + \mu$ die Gleichung der schneidenden Geraden,
so entsteht durch Verbindung dieser beiden Gleichungen folgende:

$$f(x, mx + \mu) = o$$

eine Gleichung n^{ten} Grades, welche nur die Unbekannte x enthält. Die n Wurzeln dieser Gleichung bestimmen die Abscissen der n Durchschnittspunkte der Curve mit der Geraden. Sind diese Abscissen:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_n$$

so sind die entsprechenden Ordinaten:

$$y_1 = mx_1 + \mu \quad y_2 = mx_2 + \mu \quad y_3 = mx_3 + \mu \ \ldots\ldots y_n = mx_n + \mu$$

Ist nun $x_h = x_k$
so ist auch $y_h = y_k$
d. h. die beiden Durchschnittspunkte, deren Coordinaten diese sind, fallen in **einen** zusammen.

Es ist jedoch die Auflösung der Gleichung $f(x, mx + \mu) = o$ nicht nöthig, da die bekannten Beziehungen zwischen den Constanten einer Gleichung unmittelbar aus der Gleichung die Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln aufstellen lassen. Diese Bedingungs-Gleichung enthält ausser den Constanten der Gleichung der Curve noch die Constanten der Geraden, m und μ, und kann demnach bezeichnet werden mit: $\varphi(m, \mu) = o$. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes, ξ und η, müssen, da derselbe der Curve und der Geraden gemein ist, den Gleichungen $f(\xi, \eta) = o$ und $\eta = m\xi + \mu$ genügen. Aus letzterer folgt: $\mu = \eta - m\xi$, so dass also zur Bestimmung von m die Gleichung

$$\varphi(m, \eta - m\xi) = o$$

dient.

Für den Punkt (ξ, η) lautet die Gleichung der **Secante**:

$$y - \eta = m\,(x - \xi)$$

und wird für m der aus der Gleichung $\varphi\,(m, \eta - m\xi) = o$ resultirende Werth gesetzt, so hat man die Gleichung der **Tangente** im Punkte (ξ, η).

Beispiel.

Die Gleichung der Parabel ist: $y^2 = 2ax$. Verbindet man damit die Gleichung: $y = mx + \mu$, so ist

$$m^2\,x^2 + 2\,(m\mu - a)\,x + \mu^2 = o$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Abscissen der Durchschnittspunkte sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind einander gleich, wenn

$$2m\mu = a, \text{ also } \mu = \frac{a}{2m}$$

ist. Da nun, wenn der Berührungspunkt der Tangente die Coordinaten ξ und η hat,

$$\eta^2 = 2a\xi \quad \text{und} \quad \eta = m\xi + \mu, \text{ also } \mu = \eta - m\xi$$

sein muss, so ergiebt sich zur Bestimmung des Werthes von m die Gleichung

$$\frac{a}{2m} = \eta - m\xi$$

woraus

$$m = \frac{\eta}{2\xi}$$

folgt. Mithin ist die Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = \frac{\eta}{2\xi}\,(x - \xi) = \frac{a}{\eta}\,(x - \xi)$$

oder:

$$2\xi y = \eta\,(x + \xi)$$

oder:

$$y\eta = a\,(x + \xi)$$

Die Auflösung der Gleichung $\varphi\,(m, \mu) = o$ ist jedoch schon für $n = 3$ und $n = 4$ bisweilen mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden, und die Aufstellung dieser Gleichung für $n > 4$ im Allgemeinen ganz unmöglich. Daher ist es nöthig, in diesen Fällen die Tangente auf andere Art zu bestimmen.

In der Gleichung der Geraden: $y = mx + \mu$ ist

$$m = tng.\,v$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Geraden und der Abscissen-Axe.

Geht die Gerade durch die beiden Punkte (ξ, η) und (ξ', η') einer Curve, deren Gleichung $f\,(x, y) = o$ ist, so sind folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$f\,(\xi, \eta) = o, \quad f\,(\xi', \eta') = o, \quad \eta = m\xi + \mu, \quad \eta' = m\xi' + \mu$$

Aus den beiden letzteren folgt

$$m \text{ oder tg. } v = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$$

Ist nun $\xi' = \xi + \alpha$, $\eta' = \eta + \beta$, so ist

$$m = \frac{\beta}{\alpha}$$

Nach der oben gegebenen genetischen Erklärung der Tangente nähert sich eine Gerade, welche durch den Punkt (ξ, η) der Curve geht und um diesen Punkt sich dreht, immer mehr der Lage der Tangente und fällt endlich mit ihr zusammen, sobald der zweite Durchschnittspunkt (ξ', η') mit dem ersten (ξ, η) zusammenfällt, also wenn α und β, die Differenzen der Coordinaten der beiden Punkte, gleichzeitig $= o$ werden. In diesem Falle hat m einen bestimmten Werth, nämlich den der trigonometrischen Tangente des Winkels zwischen der geometrischen Tangente an die Curve im Punkte (ξ, η) und der Abscissen-Axe (der erste Differential-Quotient der Curve).

Man hat demnach aus den 3 Gleichungen:

$$f(\xi, \eta) = o \quad (1) \qquad f(\xi + \alpha, \eta + \beta) = o \quad (2) \qquad \beta = \alpha m \ (3)$$

eine solche Gleichung zwischen α, β und m abzuleiten, dass der daraus resultirende Werth von m ein bestimmter bleibt, sobald α und β gleichzeitig $= o$ gesetzt werden. Dieser Werth von m ist der der Tangente im Punkte (ξ, η) entsprechende.

Subtrahirt man die Gleichung (1) von (2), so fallen alle Glieder weg, welche weder α noch β enthalten.

Ist nämlich

$$C. \overset{k}{\xi}. \overset{\lambda}{\eta}$$

das allgemeine Glied der Gleichung $f(\xi, \eta) = o$, so ist

$$C\, \overset{k}{(\xi + \alpha)}. \overset{\lambda}{(\eta + \beta)}$$

das allgemeine Glied der Gleichung $f(\xi + \alpha, \eta + \beta) = o$,
und das allgemeine Glied der Gleichung, die man durch die Subtraction der Gleichung (1) von (2) erhält, wenn der Kürze wegen

$$\overset{k}{(\xi + \alpha)} = \overset{k}{\xi} + \alpha X \qquad \overset{\lambda}{(\eta + \beta)} = \overset{\lambda}{\eta} + \beta Y$$

gesetzt wird, gleich

$$C\, (\alpha X \overset{\lambda}{\eta} + \beta Y \overset{k}{\xi} + \alpha\beta XY)$$

Es bleiben demnach nur die Glieder der Gleichung (2) übrig, welche α oder β zum Factor haben. Ordnet man dieselben nach Potenzen von α und β, so erhält man die Gleichung

$$p\alpha + q\beta + r\alpha^2 + s\alpha\beta + t\beta^2 + A\alpha^2 + B\beta^2 = o \qquad (4)$$

wo p, q, r, s und t weder α noch β enthalten, A und B aber Functionen von α und β sind, die für $\alpha = o$ und $\beta = o$ auch $= o$ werden.

Die Gleichung (4) kann auch geschrieben werden:

$$\alpha\,(p + r\alpha + \tfrac{1}{2}\,s\beta + A\alpha) + \beta\,(q + \tfrac{1}{2}\,s\alpha + t\beta + B\beta) = o \quad (5)$$

Setzt man nun $\beta = \alpha m$

so geht diese Gleichung über in eine durch α theilbare, so dass man diesen Factor entfernen kann und nun erhält:

$$p + r\alpha + \tfrac{1}{2}s\alpha m + A\alpha + m\,(q + \tfrac{1}{2}s\alpha + t\alpha m + B\alpha m) = o \quad (6)$$

In dieser Gleichung kann man nun $\alpha = o$ setzen und erhält dadurch

$$p + mq = o \qquad \text{oder:} \qquad m = -\frac{p}{q}$$

Dies ist ein bestimmter Werth, der weder α noch β, sondern nur ξ, η und die Constanten der Gleichung der Curve enthält.

Mithin ist die Gleichung der Tangente im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = -\frac{p}{q}\,(x - \xi) \qquad \text{oder:} \qquad p\,(x - \xi) + q\,(y - \eta) = o$$

Die Werthe von p und q erhält man nach dem Obigen, indem man in der Gleichung der Curve $\xi + \alpha$ für x, $\eta + \beta$ für y setzt: dann ist

p gleich der Summe aller Glieder mit dem Factor α,
q „ „ „ „ „ „ „ β,

d. h. p ist die erste abgeleitete Function von $f\,(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ
q „ „ „ „ „ „ „ „ „ η

Beispiel:

Setzt man in der Gleichung der Parabel: $y^2 - 2ax = o$ $\xi + \alpha$ für x und $\eta + \beta$ für y, so geht sie über in:

$$\eta^2 + 2\beta\eta + \beta^2 - 2a\xi - 2a\alpha = o$$

Hier ist $p = -2a \qquad q = 2\eta$

folglich die Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = \frac{a}{\eta}\,(x - \xi) \qquad \text{oder:} \qquad y\eta = a\,(x + \xi)$$

wie oben.

II. Bestimmung der Wendepunkte.

Wenn eine Curve in einem Punkte so beschaffen ist, dass sie unmittelbar vor demselben eine andere Lage gegen die Abscissen-Axe hat, als unmittelbar hinter demselben, also derselben vor diesem Punkte die convexe (concave), hinter ihm die concave (convexe) Seite zukehrt, so nennt man diesen Punkt der Curve **Wendepunkt**; denn die Curve macht in demselben in Bezug auf ihre Lage gegen jene Axe eine Wendung.

In Bezug auf die Tangente an die Curve in einem solchen Punkte findet der eigenthümliche Fall statt, dass die Curve, obschon sie ihr auch in der unmittelbaren Nähe des Wendepunktes, wie dies immer der Fall ist, stets ihre convexe Seite zukehrt, hinter diesem Punkte auf der entgegengesetzten Seite der Tangente fortgeht, während sie sonst auch hinter dem Berührungspunkte auf derselben Seite der Tangente fortläuft: kurz die Tangente im Wendepunkte einer Curve ist zugleich Secante, von deren Durchschnittspunkten der eine ebenfalls der Wendepunkt ist.

Wenn nun die Tangente im Allgemeinen betrachtet werden kann als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve zwei zusammenfallen: so kann man, dem Obigen gemäss, die Tangente im Wendepunkte betrachten als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten 3 in einen einzigen zusammenfallen, d. h. von deren Durchschnittspunkten 3 dieselben Coordinaten haben.

Man müsste demnach, wenn man eine Curve in Bezug auf Wendepunkte untersuchen will, die Bedingung aufstellen, unter welcher von den Wurzeln der Gleichung:

$$f(x, mx + \mu) = o$$

3 einander gleich sind. — Die Aufstellung dieser Bedingung ist aber mit noch grösseren Schwierigkeiten verknüpft, als die Bestimmung der Tangente nach dieser Methode. Aus diesem Grunde ist die Untersuchung einer Curve in Bezug auf Wendepunkte nach einer andern Methode anzustellen.

Betrachtet man die Tangente im Wendepunkte als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve 3 zusammenfallen, so heisst das ebensoviel, als: 3 unmittelbar nebeneinander liegende Punkte der Curve liegen auf einer Geraden. Wenn daher diese Bedingungen in Bezug auf einen Punkt einer Curve und die beiden unmittelbar neben ihm liegenden Punkte erfüllt ist, so ist dieser Punkt ein Wendepunkt der Curve.

Die Bedingung, dass 3 Punkte, deren Coordinaten ξ und η, ξ' und η', ξ'' und η'' sind, auf einer Geraden liegen, ist: diese Coordinaten müssen den 3 Gleichungen $\eta = m\xi + \mu$, $\eta' = m\xi' + \mu$, $\eta'' = m\xi'' + \mu$ genügen, d. h. der Gleichung:

$$\xi(\eta' - \eta'') + \xi'(\eta'' - \eta) + \xi''(\eta - \eta') = o \qquad (1)$$

Ausserdem müssen, da diese 3 Punkte auf der Curve $f(x, y) = o$ liegen, auch die Gleichungen:

$$f(\xi, \eta) = o \quad (2) \qquad f(\xi', \eta') = o \quad (3) \qquad f(\xi'', \eta'') = o \quad (4)$$

erfüllt werden.

Ist nun
$$\xi' = \xi + \alpha \qquad \eta' = \eta + \beta$$
$$\xi'' = \xi + 2\alpha \qquad \eta'' = \eta + \beta + \gamma$$

so folgt aus (1) als Bedingung, dass die 3 Punkte auf einer Geraden liegen, $\gamma = \beta$ und die 3 andern Gleichungen gehen dadurch über in:

$$f(\xi, \eta) = o \quad (5) \qquad f(\xi + \alpha, \eta + \beta) = o \quad (6) \qquad f(\xi + 2\alpha, \eta + 2\beta) = o \quad (7)$$

Verbindet man diese 3 Gleichungen mit einander und lässt dann α und β gleich o werden, so erhält man die Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) der Curve $f(x, y) = o$ ein Wendepunkt ist.

Von diesen 3 Gleichungen sind die beiden ersten diejenigen, die zur Bestimmung der Tangente im Punkte (ξ, η) dienten. (Dass diese beiden Gleichungen ebenfalls zur Bestimmung des Wendepunktes nothwendig sind, folgt aus dem Obigen.) Aus ihnen ergiebt sich der Gränzwerth $m = -\frac{p}{q}$, der für die Tangente gilt. Vermittelst der Gleichungen (5) und (6) kann man die Gleichung (7) so verändern, dass alle Glieder die α und β nicht enthalten, verschwinden, und die daraus hervorgehende Gleichung nur Glieder enthält, die α und β zu Factoren haben. Man gelangt zu dieser Gleichung dadurch, dass man (5) und (6) von (7) subtrahirt, wie dies bei der Bestimmung der Tangente geschah. Es giebt jedoch noch einen andern Weg, zu ihr zu gelangen, und dieser soll hier eingeschlagen werden, weil er kürzer und bequemer ist.

Da nämlich (7) ebenso aus (6) entstanden ist, wie (6) aus (5), nämlich dadurch, dass $\xi + \alpha$ statt ξ und $\eta + \beta$ statt β gesetzt wurde, so kann auch die reducirte Gleichung (7), welche nur die mit α und β multiplicirten Glieder enthalten soll, aus der oben angeführten reducirten Gleichung (6):

$$p\alpha + q\beta + r\alpha^2 + s\alpha\beta + t\beta^2 + A\alpha^2 + B\beta^2 = o$$

dadurch gebildet werden, dass man in dieser 2α statt α und 2β statt β setzt. Denn das allgemeine Glied der Gleichung (7) ist

$$\mathrm{C}\,(\xi + 2\alpha)^{k} \cdot (\eta + 2\beta)^{\lambda} = \mathrm{C}\left\{\xi^{k} + 2\alpha X'\right\}\left\{\eta^{\lambda} + 2\beta Y'\right\}$$

$$= \mathrm{C}\left\{\xi^{k}\,\eta^{\lambda} + 2\alpha\eta^{\lambda} X' + 2\beta\xi^{k} Y' + 4\alpha\beta X' Y'\right\}$$

Dies unterscheidet sich von dem allgemeinen Gliede der Gleichung (6), das bei der Bestimmung der Tangente angegeben ist, nur dadurch, dass überall 2α statt α und 2β statt β steht.

Demnach lautet die reducirte Gleichung (7)

$$2p\alpha + 2q\beta + 4r\alpha^2 + 4s\alpha\beta + 4t\beta^2 + 4A'\alpha^2 + 4B'\beta^2 = o$$

oder

$$2\alpha\,(p + 2r\alpha + s\beta + 2A'\alpha) + 2\beta\,(q + s\alpha + 2t\beta + 2B'\beta) = o$$

(wo A' und B' die Werthe bezeichnen, welche A und B annehmen, wenn 2α und 2β für α und β gesetzt werden).

Setzt man nun in dieser Gleichung $\beta = \alpha m$ und entfernt den gemeinschaftlichen Factor 2, so geht sie über in:

$$\alpha\,(p + 2r\alpha + s\alpha m + 2A'\alpha) + \alpha m\,(q + s\alpha + 2t\alpha m + 2B'\alpha m) = o$$

Nun ist α gemeinschaftlicher Factor, der zu entfernen ist; berücksichtigt man zugleich, dass $p + mq = o$ ist, so erhält man

$$2r\alpha + s\alpha m + 2A'\alpha + m\,(s\alpha + 2t\alpha m + 2B'\alpha m) = o$$

Hier kann noch einmal durch α dividirt werden:

$$2r + sm + 2A' + m\,(s + 2tm + 2B'm) = o$$

Setzt man nun $\alpha = o$, wodurch auch A' und $B' = o$ werden, so erhält man als Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt ist:

$$r + sm + tm^2 = o$$

oder, wenn für m sein Werth $-\frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$q^2r - pqs + p^2t = o$$

Kann diese Gleichung zugleich mit der Gleichung $f\,(\xi, \eta) = o$ erfüllt werden, so ist der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt; stehen dagegen diese beiden Gleichungen im Widerspruch mit einander, so hat die Curve keinen Wendepunkt.

Zu bemerken ist noch, dass die Werthe von r und t die zweiten abgeleiteten Functionen von $f\,(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ und η besonders (die Summen der mit α^2 und β^2 multiplicirten Glieder), s die zweite abgeleitete Function in Bezug auf ξ und η zugleich (die Summe der mit $\alpha\beta$ multiplicirten Glieder) ist.

Beispiel:

Es sei die Curve $y^2 = x^3 + a$ in Bezug auf Wendepunkte zu untersuchen. Setzt man $\xi + \alpha$ für x und $\eta + \beta$ für y, so erhält man:

$$\eta^2 + 2\beta\eta + \beta^2 = \xi^3 + 3\alpha\xi^2 + 3\alpha^2\xi + \alpha^3 + a$$

Mithin ist

$$p = 3\xi^2,\ q = -2\eta,\ r = 3\,\xi,\ s = o,\ t = -1$$

und die Bedingungsgleichung für den Wendepunkt:

$$4\eta^2\,\xi - 3\,\xi^4 = o$$

Diese Gleichung ist sowohl für $\xi = o$ erfüllt, als auch, wenn

$$4\eta^2 = 3\xi^3$$

Für $\xi = o$ ergiebt sich aus $\eta^2 = \xi^3 + a$:

$$\eta^2 = a \text{ oder } \eta = \pm\sqrt{a}$$

Ist demnach a positiv, so hat η zwei reale Werthe, und die Punkte

$$\xi = o\ \eta = \sqrt{a}\,,\ \xi = o\ \eta = -\sqrt{a}$$

sind Wendepunkte.

Für ein negatives a dagegen ist η imaginär, und der Abscisse $\xi = o$ entspricht gar kein realer Punkt.

Die andere Bedingung für den Wendepunkt: $4\eta^2 = 3\xi^3$ widerspricht der Gleichung $\eta^2 = \xi^3 + a$ nur, wenn a positiv ist. Denn aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\xi^3 = -4a \quad \eta^2 = -3a$$

Für negative Werthe des a giebt es demnach Wendepunkte.

Mithin hat die Curve, deren Gleichung: $y^2 = x^3 + a$, a positiv genommen, ist, zwei Wendepunkte, deren Coordinaten $\xi = o$ $\eta = \sqrt{a}$

und $\xi = o$ $\eta = -\sqrt{a}$

sind.

Die Curve: $y^2 = x^3 - a$ dagegen hat auch 2 Wendepunkte; deren Coordinaten sind aber:

$$\xi = \sqrt[3]{4a}\,,\ \eta = \sqrt{3a} \quad \text{und} \quad \xi = \sqrt[3]{4a} \quad \eta = -\sqrt{3a}$$

Die Gleichung der Tangente an die Curve $y^2 = x^3 + a$ ist, da $p = 3\xi^2$, $q = -2\eta$, also $m = \dfrac{3\xi^2}{2\eta}$ ist,

$$y - \eta = \frac{3\xi^2}{2\eta}(x - \xi)$$

also, wenn a positiv ist, für $\xi = o$ $\eta = \pm\sqrt{a}$, die Gleichung der Tangente im Wendepunkte:

$$y = \pm\sqrt{a}$$

d. h. die Tangente im Wendepunkte läuft parallel der Abscissen-Axe.

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der Curve, so erhält man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$x^3 = o$$

deren drei Wurzeln einander gleich sind, die oben aufgestellte Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes.

Für die Curve: $y^2 = x^3 - a$ ist die Gleichung für die Tangente im Wendepunkte $\left(\xi = \sqrt[3]{4a},\ \eta = \pm\sqrt{3a}\right)$:

$$\pm 2y\sqrt{3a} = 3x\sqrt[3]{16a^2} - 6a$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der Curve giebt:

$$x^3 - 3x^2\sqrt[3]{4a} + 3x\sqrt[3]{(4a)^2} - 4a = o$$

eine Gleichung mit 3 gleichen Wurzeln $x = \sqrt[3]{4a}$.

III. Bestimmung des Krümmungskreises.

Mit Ausnahme des Kreises haben alle Curven in ihrem gesammten Verlaufe nicht überall dieselbe Krümmung. Zur Bestimmung der Grösse der Krümmung in den verschiedenen Punkten dient, weil er eben die einzige Curve ist, die überall dieselbe Krümmung hat, der Kreis. Einen Kreis nun, der sich in einem bestimmten Punkte der Curve am genauesten anschliesst, nennt man Krümmungskreis der Curve für diesen Punkt, d. h. die Krümmung der Curve in diesem Punkte ist gleich der des Krümmungskreises. Der Halbmesser dieses Kreises heisst demnach der Krümmungshalbmesser der Curve für jenen Punkt. Da Kreise mit kleinem Halbmesser stärker gekrümmt sind, als Kreise mit grösserem Halbmesser, so leuchtet ein, dass die Krümmung einer Curve in irgend einem Punkte umgekehrt proportional ist dem Halbmesser des betreffenden Krümmungskreises.

Jeder Kreis ist seiner Grösse und Lage nach durch 3 Punkte bestimmt, die ihrer Lage nach gegeben sind: es giebt nur einen Kreis, der durch 3 ihrer Lage nach gegebene Punkte geht. Nimmt man daher auf einer Curve 3 beliebige Punkte an, so lässt sich durch diese 3 Punkte ein bestimmter Kreis legen: dieser Kreis wird sich desto genauer an die Curve anschliessen, d. h. deren Krümmung messen, je näher die 3 Punkte aneinander liegen; und wenn diese 3 Punkte so nahe an einander liegen, dass sie als in einen einzigen zusammenfallend betrachtet werden können, so misst der durch sie gehende Kreis die Krümmung der Curve in diesem Punkte aufs genaueste, ist mithin der Krümmungskreis der Curve für diesen Punkt. Die Bestimmung des Krümmungskreises geschieht demnach auf folgende Weise: man bestimmt einen Kreis, der durch 3 beliebige Punkte der Curve geht, und lässt dann diese 3 Punkte in einen einzigen zusammenfallen.

Seien ξ, ξ', ξ'' die Abscissen, η, η', η'' die zugehörigen Ordinaten dreier Punkte der Curve $f(x, y) = o$, die demnach den Gleichungen:

$$f(\xi, \eta) = o \quad f(\xi', \eta') = o \quad f(\xi'', \eta'') = o$$

genügen müssen; ferner

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = R^2$$

die Gleichung des Kreises, der durch diese 3 Punkte gelegt wird: so müssen die Coordinaten der 3 Punkte auch folgenden 3 Gleichungen genügen:

$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 = R^2, \quad (\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 = R^2, \quad (\xi'' - X)^2 + (\eta'' - Y)^2 = R^2$$

Hieraus ergeben sich für die Coordinaten X und Y des Mittelpunktes des Kreises folgende Werthe:

$$X = \frac{\xi^2(\eta' - \eta'') + \xi'^2(\eta'' - \eta) + \xi''^2(\eta - \eta') - (\eta - \eta')(\eta'' - \eta)(\eta' - \eta'')}{2\,\{\xi(\eta' - \eta'') + \xi'(\eta'' - \eta) + \xi''(\eta - \eta')\}}$$

$$Y = -\frac{\eta'^2(\xi' - \xi'') + \eta'^2(\xi'' - \xi) + \eta''^2(\xi - \xi') - (\xi - \xi')(\xi'' - \xi)(\xi' - \xi'')}{2\,\{\xi(\eta' - \eta'') + \xi'(\eta'' - \eta) + \xi''(\eta - \eta')\}}$$

Setzt man nun

$$\xi' = \xi + \alpha \quad \eta' = \eta + \beta$$
$$\xi'' = \xi + 2\alpha \quad \eta'' = \eta + \beta + \gamma$$

so gehen obige Werthe über in

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha^2\beta + \beta\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha(\beta-\gamma)} = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha^2 + \gamma(\beta+\gamma)}{2(\beta-\gamma)} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

$$Y = \eta + \frac{\beta}{2} - \frac{2\alpha^3 + \alpha\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha(\beta-\gamma)} = \eta + \frac{\beta}{2} - \frac{2\alpha^2 + \gamma(\beta+\gamma)}{2(\beta-\gamma)}.$$

Da nun $\qquad (\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 = R^2$

sein muss, so ergiebt sich durch Substitution der Werthe für X und Y:

$$R^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2(\beta-\gamma)^2}\left\{4\alpha^2 + (\beta+\gamma)^2\right\}$$

Sind v und v' die Winkel, welche die Geraden, die durch die Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ einerseits, und $(\xi + 2\alpha, \eta + \beta + \gamma)$ und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ andrerseits gehen, mit der Abscissen-Achse bilden, und setzt man

$$tg\, v = m, \quad tg\, v' = m'$$

so ist

$$\beta = \alpha m \quad \gamma = \alpha m'$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdrücken für X, Y und R^2, so erhält man:

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha m\{2 + m'(m+m')\}}{2(m-m')}$$

$$Y = \eta + \frac{\alpha m}{2} - \frac{\alpha\{2 + m'(m+m')\}}{2(m-m')}$$

$$R = \frac{\alpha^2(1+m^2)(1+m'^2)}{4(m-m')^2}\left\{4 + (m+m')^2\right\}$$

Um nun zum Krümmungskreise überzugehen, hat man zunächst die Werthe zu setzen, welche m und m' annehmen, sobald die 3 Punkte unmittelbar neben einander rücken, d. h. die Werthe, welche m und m' für die Tangenten in den Punkten $(\xi\ \eta)$ und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ haben; dann erst ist $\alpha = o$ zu setzen, wodurch das Zusammenfallen der Punkte in einen einzigen bewirkt wird. Bevor jedoch diese Operation vorgenommen wird, möge noch eine andere Methode, den Krümmungskreis zu bestimmen, angeführt werden, wodurch Gelegenheit geboten wird, die Richtigkeit des eben gefundenen Resultats nachzuweisen.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass der Krümmungskreis 2 Tangenten mit der Curve gemein hat, deren Berührungspunkte die Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ sind. Demnach schneiden sich die auf diesen beiden Tangenten in den Berührungspunkten errichteten Senkrechten, die unter dem Namen Normalen bekannt sind, in dem Mittelpunkte des Krümmungskreises. Man kann daher diesen auch definiren als denjenigen Kreis, der durch die beiden unmittelbar neben einander liegenden Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ geht und dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der Normalen dieser beiden Punkte, dessen Halbmesser also die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von einem der beiden Punkte der Curve ist.

Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ sind:

$$y - \eta = m\,(x - \xi)$$

und $$y - (\eta + \beta) = m' \,\{x - (\xi + \alpha)\}$$

mithin die Gleichungen der zu diesen Punkten gehörigen Normalen:

$$y - \eta = -\frac{1}{m}\,(x - \xi)$$

und $$y - (\eta + \beta) = -\frac{1}{m'}\left\{x - (\xi + \alpha)\right\}$$

also die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes:

$$X = \frac{\left(\eta + \frac{\xi}{m}\right) - \left(\eta + \beta + \frac{\xi + \alpha}{m'}\right)}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}} = \xi + \frac{m\,(\alpha + m'\beta)}{m - m'}$$

$$Y = -\frac{\frac{1}{m'}\left(\eta + \frac{\xi}{m}\right) - \frac{1}{m}\left(\eta + \beta + \frac{\xi + \alpha}{m'}\right)}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}} = \eta - \frac{\alpha + m'\beta}{m - m},$$

und da $R^2 = (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)\,(\alpha + m'\beta)^2}{(m - m')^2}$$

oder, wenn $\beta = \alpha m$ gesetzt wird:

$$X = \xi + \frac{\alpha m\,(1 + m m')}{m - m'} \qquad Y = \eta - \frac{\alpha\,(1 + m m')}{m - m'}$$

$$R^2 = \frac{\alpha^2\,(1 + m^2)\,(1 + m m')^2}{(m - m')^2}$$

Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den vorhergefundenen, für den besonderen Fall, dass die 3 resp. 2 angenommenen Punkte in einen zusammenfallen, zeigt sich, wenn man den Werth für m' substituirt. Dieser ist jedoch noch zu bestimmen.

Für $m = tg.\, v$, welcher Werth für die Tangente im Punkte (ξ, η) gilt, wurde der Werth $-\frac{p}{q}$ gefunden, wo p und q die ersten abgeleiteten Functionen von $f\,(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ und η sind. Es sind dies ebenfalls Functionen von ξ und η, enthalten jedoch die Grössen α und β nicht; bezeichnet man sie mit

$$p = \varphi\,(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad q = \psi\,(\xi, \eta)$$

so ist $$m = -\frac{\varphi\,(\xi, \eta)}{\psi\,(\xi, \eta)}.$$

$m' = tg\, v'$ nun ist diejenige Grösse für die Tangente im Punkte $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, welche m für die Tangente im Punkte (ξ, η) ist. Bezeichnet man daher ihren Werth analog mit $-\frac{p'}{q'}$, so sind p' und q' die Werthe, welche p und q annehmen, wenn in ihnen $\xi + \alpha$ und $\eta + \beta$ für ξ und η gesetzt werden. Demnach ist

$$p' = \varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta) \quad q' = \psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$$

und

$$m' = -\frac{\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)}{\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)}$$

Entwickelt man $\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ und $\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, indem man in $\varphi(\xi, \eta) = p$ und $\psi(\xi, \eta) = q$ $\xi + \alpha$ und $\eta + \beta$ für ξ und η setzt, so erhält man, wie dies schon bei der Bestimmung der Tangente für $f(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ gezeigt wurde, erstens solche Glieder, welche weder α noch β enthalten, deren Summe gleich den ursprünglichen Functionen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ sind, und zweitens solche Glieder, welche α, β, α^2, β^2, $\alpha\beta$, α^3, β^3, $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$ u. s. w. zu Factoren haben. Bezeichnet man die Summe der Glieder, welche den Factor α haben, resp. mit P und P' (es sind dies die ersten abgeleiteten Functionen von $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ), ferner die Summe der Glieder, welche den Factor β haben, resp. mit Q und Q' (die ersten abgeleiteten Functionen von $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ in Bezug auf η), endlich die Summe aller übrigen Glieder, die also mindestens den Factor α^2 oder β^2 oder $\alpha\beta$ haben, resp. mit S und S', wobei noch zu beachten ist, dass P, P', Q, Q' weder α noch β enthalten, also wenn α und $\beta = o$ gesezt werden, unverändert bleiben, während S und S' in diesem Falle $= o$ werden: so lauten $\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ und $\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, nach Potenzen von α und β geordnet, wie folgt:

$$\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta) = \varphi(\xi, \eta) + \alpha P + \beta Q + S = p + \alpha P + \beta Q + S \quad = p'$$
$$\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta) = \psi(\xi, \eta) + \alpha P' + \beta Q' + S' = q + \alpha P' + \beta Q' + S' \quad = q'.$$

Dann ist

$$m - m' = -\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p'q - pq'}{qq'}$$
$$= \frac{\alpha(Pq - Pp) + \beta(Qq - Q'p) + Sq - S'p}{q^2 + \alpha P'q + \beta Q'q + S'q}$$

oder, da $\beta = \alpha m = -\alpha\frac{p}{q}$

$$m - m' = \frac{\alpha q(Pq - P'p) - \alpha p(Qq - Q'p) + Sq^2 - S'pq}{q\{q^2 + \alpha P'q - \alpha Q'p + S'q\}}$$

Da S und S' den Factor α^2 enthalten, so kann man auf beiden Seiten durch α dividiren, und setzt man dann $\alpha = o$, so erhält man:

$$\frac{m - m'}{\alpha\,(= o)} = \frac{q(Pq - P'p) - p(Qq - Q'p)}{q^3}$$

Bezeichnet man den obigen Werth von $m - m'$, der den Factor α enthält, der Kürze wegen mit αN

(so dass also für $\alpha = o$, $\dfrac{m - m'}{\alpha} = N$ den zuletzt gefundenen Werth hat):

so ist $\qquad m' = m - \alpha N$

also $\qquad 1 + m'^2 = 1 + m^2 - 2\alpha m N + \alpha^2 N^2 \qquad$ und für $\alpha = o$ $1 + m'^2 = 1 + m^2$

$\qquad m + m' = 2m - \alpha N \qquad$ und für $\alpha = o$ $m + m' = 2m$

$\qquad 1 + mm' = 1 + m^2 - \alpha m N \qquad$ und für $\alpha = o$ $1 + mm' = 1 + m^2$

Substituirt man nun diesen Werth für m′ in die nach der ersten Methode gefundenen Werthe für X, Y und R^2, so erhält man:

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{m \{ 2 + (m - \alpha N)(2m - \alpha N) \}}{2N}$$

$$Y = \eta + \frac{\alpha m}{2} - \frac{\{ 2 + (m - \alpha N)(2m - \alpha N) \}}{2N}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2) \{ 1 + (m - \alpha N)^2 \} \{ 4 + (2m - \alpha N^2 \}}{4N^2}$$

mithin für $\alpha = o$

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2)}{N} = \xi + \frac{p(p^2 + q^2)}{p(Qp - Q'q) - q(Pq - P'p)}$$

$$Y = \eta - \frac{1 + m^2}{N} = \eta + \frac{q(p^2 + q^2)}{p(Qq - Q'p) - q(Pq - P'p)}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)^3}{N^2} = \frac{(p^2 + p^2)^3}{\{ p(Qq - Q'p) - q(Pq - P'p) \}^2}$$

Substituirt man ferner $m' = m - \alpha N$ in die nach der zweiten Methode gefundenen Werthe für X, Y und R^2, so erhält man

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2 - m\alpha N)}{N}, \quad Y = \eta - \frac{1 + m^2 - m\alpha N}{N}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)\ (1 + m^2 - m\alpha N)^2}{N^2}$$

also für $\alpha = o$

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2)}{N} \qquad Y = \eta - \frac{1 + m^2}{N} \qquad R^2 = \frac{(1 + m^2)^3}{N^2}$$

Nachdem so gezeigt worden, dass die Bestimmung des Krümmungskreises nach den beiden Methoden dasselbe Resultat ergiebt, bleibt noch übrig, die Werthe von P, Q, P' und Q' zu bestimmen.

Mit P, Q, P' und Q' sind die ersten abgeleiteten Functionen von resp. p und q in Bezug auf ξ und η, oder allgemein in Bezug auf x und y bezeichnet worden; p und q selbst sind aber die ersten abgeleiteten Functionen von $f(\xi, \eta)$ oder $f(x, y)$ in Bezug auf x und y. Es ist daher nöthig, p und q selbst zu bestimmen.

Man findet, wie schon früher bemerkt ist, die abgeleiteten Funktionen von $f(x, y)$, indem man darin $x + \alpha$ und $y + \beta$ für x und y setzt und nun die Function nach den Potenzen von α und β entwickelt: dann ist die Summe der Glieder, welche mit α multiplicirt sind, die erste abgeleitete Function von $f(x, y)$ in Bezug auf x, die im Obigen mit p bezeichnet ist; q, die erste abgeleit. Function in Bezug auf y, ist die Summe der mit β multiplicirten Glieder. Die Summen der Glieder, welche mit resp. α^2, β^2, $\alpha\beta$ multiplicirt sind, sind die zweiten abgeleiteten Functionen resp. in Bezug auf x oder y allein, oder in Bezug auf x und y zugleich; diese sind oben mit r, t und s bezeichnet. Bezeichnet, wie oben,

$$C x^k . y^\lambda$$

das allgemeine Glied der Function $f(x, y)$, wo C den constanten Coefficienten eines jeden Gliedes darstellt, und die Exponenten k und λ, wenn $f(x, y)$ eine Function n^{ten} Grades ist, alle ganzen Zahlen von o bis n bedeuten, so jedoch, dass $k + \lambda$ nie $> n$ sein kann: so kann $f(x, y)$ selbst bezeichnet werden durch

$$\Sigma C x^k . y^\lambda$$

mithin

$$f(x + \alpha, y + \beta) \text{ durch } \Sigma C (x + \alpha)^k (y + \beta)^\lambda$$

Entwickelt man nun $(x + \alpha)^k$ und $(y + \beta)^\lambda$, so ist

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \Sigma C \left\{ x^k + k . x^{k-1} . \alpha + k . \frac{k-1}{1 . 2} x^{k-2} . \alpha^2 + A \right\}$$

$$\times \left\{ y^\lambda + \lambda . y^{\lambda-1} . \beta + \frac{\lambda . \lambda_{-1}}{1 . 2} . y^{\lambda-2} . \beta^2 + B \right\}$$

wo A und B die Summe der ferneren Glieder der Binomialreihe bis resp. α^k und β^λ bezeichnen.

Die Ausführung der angezeigten Multiplication giebt:

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \Sigma C \left\{ x^k . y^\lambda + k . x^{k-1} . y^\lambda . \alpha + \frac{k . k-1}{1 . 2} x^{k-2} . y^\lambda \alpha^2 + A y^\lambda \right.$$

$$+ \lambda . x^k . y^{\lambda-1} . \beta + k . \lambda x^{k-1} . y^{\lambda-1} . \alpha\beta + \ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{\lambda . \lambda-1}{1 . 2} x^k . y^{\lambda-2} . \beta^2 + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \Sigma C x^k . y^\lambda + \Sigma C . k x^{k-1} . y^\lambda . \alpha + \Sigma . C \lambda . x^k . y^{\lambda-1} . \beta$$

$$+\Sigma C.\frac{k.k-1}{1.2}x^{k-2}.y^{\lambda}.\alpha^{2}+\Sigma C.k.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\alpha\beta+\Sigma C.\frac{\lambda.\lambda-1}{1.2}x^{k}.y^{\lambda-2}.\beta^{2}$$

$$+\Sigma CS$$

wo S die Summe aller übrigen Glieder bezeichnet.

Es ist daher, der obigen Erklärung gemäss,

$$p=\Sigma C.k.x^{k-1}.y^{\lambda}$$

$$q=\Sigma C.\lambda.x^{k}.y^{\lambda-1}$$

$$r=\Sigma C.\frac{k.k-1}{1.2}x^{k-2}.y^{\lambda}$$

$$s=\Sigma C.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}$$

$$t=\Sigma C.\frac{\lambda.\lambda-1}{1.2}x^{k}.y^{\lambda-2}$$

Um nun die ersten abgeleiteten Functionen von p und q zu finden, hat man in den dafür gefundenen Ausdrücken ebenfalls $x+\alpha$ und $y+\beta$ für x und y zu setzen. So erhält man:

$$\Sigma Ck(x+\alpha)^{k-1}.(y+\beta)^{\lambda}=\Sigma Ck\{x^{k-1}+(k-1)x^{k-2}.\alpha+A'\}\{y^{\lambda}+\lambda y^{\lambda-1}\beta+B')$$

$$=\Sigma Ck.x^{k-1}.y^{\lambda}+\Sigma Ck(k-1)x^{k-2}y^{\lambda}.\alpha$$

$$+\Sigma Ck.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\beta+\Sigma CkS'$$

also

P, die erste abg. F. von p in Bezug auf x, $=\Sigma Ck(k-1)x^{k-2}.y^{\lambda}$, d. h. $P=2r$

und Q, „ „ „ „ „ „ „ „ „ y, $=\Sigma Ck.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}$, d. h. $Q=s$

Ferner ist

$$\Sigma C.\lambda.(x+\alpha)^{k}(y+\beta)^{\lambda-1}=\Sigma C\lambda\{x^{k}+k.x^{k-1}.\alpha+A''\}\{y^{\lambda-1}+(\lambda-1)y^{\lambda-2}.\beta+B''\}$$

$$=\Sigma C\lambda x^{k}.y^{\lambda-1}+\Sigma Ck\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\alpha$$

$$+\Sigma C\lambda(\lambda-1)x^{k}y^{\lambda-2}.\beta+\Sigma C\lambda S''$$

also P', die erste abgeleitete Form von q in Bezug auf $x = \Sigma C k\lambda \,.\, x^{k-1} \,.\, y^{\lambda-1}$, d. h. $P' = s$

und Q', „ „ „ „ „ „ „ „ „ $y = \Sigma C\lambda(\lambda-1) x^{k} \,.\, y^{\lambda-2}$, d. h. $Q' = 2t$

Substituirt man nun diese Werthe für P, P', Q, Q' in die Ausdrücke für X, Y und R^2, so erhält man schliesslich:

$$X = \xi - \frac{p\,(p^2+q^2)}{2\,(p^2 t - pqs + q^2 r)}$$

$$Y = \eta - \frac{q\,(p^2+q^2)}{2\,(p^2 t - pqs + q^2 r)}$$

$$R^2 = \frac{(p^2+q^2)^3}{4\,(p^2 t - pqs + q^2 r)^2}$$

Hiermit ist der Krümmungskreis der Curve $f(x, y) = o$ für den Punkt (ξ, η) bestimmt.

Anmerkung: Der Krümmungshalbmesser ist $= \infty$, sobald

$$p^2 t - pqs + q^2 r = o$$

ist; dies ist die unter II gefundene Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt ist. Dadurch ist die Richtigkeit der unter II und III gefundenen Resultate bewiesen. Denn, wenn der Halbmesser des Krümmungskreises $= \infty$ ist, so müssen die 3 Punkte, durch welche er gelegt ist, auf einer Geraden liegen, wovon ja auch bei der Bestimmung des Wendepunktes ausgegangen wurde; und umgekehrt, wenn eine Curve einen Wendepunkt hat, also 3 unmittelbar neben einander liegende Punkte derselben einer Geraden angehören, so muss der durch dieselben Punkte gelegte Kreis, der Krümmungskreis für den Wendepunkt, einen unendlich grossen Halbmesser haben.

Beispiele:

Für die Parabel $(y^2 - 2ax = o)$ ist, wie bei der Bestimmung der Tangente gefunden wurde:

$$p = -2a,\ q = 2\eta,\ r = o,\ s = o,\ t = 1$$

mithin:

$$X = \xi + \frac{a^2+\eta^2}{a} = 3\xi + a$$

$$Y = -\frac{\eta^3}{a^2} = -\frac{2\xi\eta}{a}$$

$$R^2 = \frac{(a^2+\eta^2)^3}{a^4} = \frac{(a+2\xi)^3}{a}$$

Für den Scheitel der Parabel, dessen Coordinaten $\xi = o$ und $\eta = o$ sind, ist demnach

$$X = a,\ Y = o,\ R^2 = a^2$$

d. h. für den Scheitel der Parabel ist der Brennpunkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Für die Curve, deren Gleichung $y^2 = x^3 + a$ ist, wurde bei der Bestimmung des Wendepunktes gefunden:

$$p = 3\xi^2,\ q = -2\eta,\ r = 3\xi,\ s = o,\ t = -1$$

Mithin ist

$$X = \frac{\xi\,(9\xi^4 + 6\xi^3 - 4\eta^2)}{2\,(3\xi^3 - 4\eta^2)}$$

$$Y = -\frac{4\eta^3\,(3\xi + 1)}{3\xi\,(3\xi^3 - 4\eta^2)}$$

$$R^2 = \frac{(9\xi^4 + 4\eta^2)^3}{36\xi^2\,(3\xi^3 - 4\eta^2)^2}$$

Für den Scheitel dieser parabolischen Curve, also für $\eta = o,\ \xi = \sqrt[3]{-a}$ ist

$$X = \frac{\xi\,(3\xi + 2)}{2} \quad Y = o \quad R^2 = \frac{9\xi^4}{4},\ R = \frac{3\xi^2}{2.}$$

Es bleibt nun noch übrig, die hier gefundenen Resultate mit den vermittelst der Differential-Rechnung gefundenen Resultaten zu vergleichen.

Bei der Bestimmung des Krümmungskreises wurden die Werthe von $p,\ q,\ r,\ s,\ t$ folgendermassen festgestellt:

$$p = \Sigma C \,.\, k \,.\, x^{k-1} \,.\, y^{\lambda}$$

$$q = \Sigma C \,.\, \lambda \,.\, x^{k} \,.\, y^{\lambda-1}$$

$$r = \Sigma C \,.\, \frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}\, x^{k-2} \,.\, y^{\lambda}$$

$$s = \Sigma C \,.\, k \,.\, \lambda \,.\, x^{k-1} \,.\, y^{\lambda-1}$$

$$t = \Sigma C\, \frac{\lambda\,.\,\lambda-1}{1\,.\,2}\, x^{k} \cdot y^{\lambda-2}$$

indem mit $C \,.\, x^{k} \,.\, y^{\lambda}$

das allgemeine Glied der Gleichung $f(x, y)$ bezeichnet, also

$$f(x, y) = \Sigma\, C \,.\, x^{k} \,.\, y^{\lambda}$$

gesetzt worden war.

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \Sigma\, C \,.\, k \,.\, x^{k-1} \,.\, y^{\lambda}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \Sigma\, C\,.\,\lambda\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \Sigma\, C.\,k\,(k-1)\,x^{k-2}\,.\,y^{\lambda}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \Sigma\, C\,.\,k\,.\,\lambda\,.\,x^{k-1}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \Sigma\, C\,.\,\lambda\,(\lambda-1)\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda-2}$$

Mithin ist

$$p = \frac{\delta f}{\delta x}\,,\; q = \frac{\delta f}{\delta y}\,,\; 2r = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\,,\; s = \frac{\delta^2 f}{\delta x\,.\,\delta y}\,,\; 2t = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

Substituirt man diese Werthe für p, q, r, s, t, in den gefundenen Resultaten, so ergiebt sich:

1) der Coefficient von x in der Gleichung der Tangente:

$$m \text{ oder tg. } v = -\frac{p}{q} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

2) die Bedingung, unter welcher die Curve einen Wendepunkt hat, dass nämlich

$$q^2 r - pqs + p^2 t = o$$

sei, geht über in:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 - 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x\,.\,\delta y}\,.\,\frac{\delta f}{\delta x}\,.\,\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 = o$$

3) die Bestimmungsstücke des Krümmungskreises sind:

$$X = \xi - \frac{\frac{\delta f}{\delta x}\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}}{N}$$

$$Y = \eta - \frac{\frac{\delta f}{\delta y}\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}}{N}$$

$$R^2 = \frac{\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}^3}{N^2}$$

wo N die linke Seite obiger Gleichung bedeutet.

Die Resultate, welche man mit Hilfe der Differentialrechnung findet, sind:

1) m oder tg $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$, wie oben;

2) die Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = o$$

oder

$$-\frac{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\delta f}{\delta y}} = o \text{ oder, da } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 - 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x\,.\,\delta y}\cdot\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 = o, \text{ wie oben;}$$

3) die Bestimmungsstücke des Krümmungskreises:

$$X = \xi - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad Y = \eta + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$R^2 = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}^2}$$

Da nun aus Obigem sich ergiebt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{N}{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^3}$$

so unterliegt die Uebereinstimmung der auf algebraischem Wege gefundenen Resultate mit den auf analytischem Wege gewonnenen keinem Zweifel.