

## Entwicklung aller Eigenschaften

der

Logarithmen und Kreisfunktionen aus dem bestimmten Integral  $\int_1^x \frac{du}{u}$ ,

ausgeführt von A. Anderssen.

### Einleitung.

§. 1. Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, ein Verfahren zu veranschaulichen, durch welches alle Eigenschaften einer unbekannt Function  $F(x)$ , welche durch ein bestimmtes Integral  $\int_a^x f u du$  dargestellt ist, aus dem Begriffe dieses Integrals geschöpft werden können.

Da die Function  $F(x)$  als eine solche vorausgesetzt wird, welche sich durch die vorhandenen und bereits bekannten Functionen nicht ausdrücken lässt, so können wir von der indirekten Definition eines Integrals, welche auf eine gewisse unter den vorhandenen Functionen zurückweist, als deren Ableitung die zu integrende mittelbar oder unmittelbar zu erkennen sei, keinen Gebrauch machen, sondern müssen die direkte Definition des Integrals  $\int_a^x f u du$ , als einer Summe von unendlich vielen Gliedern, zum Ausgangspunkte wählen. Demnach verstehen wir unter dem

Symbol  $\int_a^x f u du$  jenen bestimmten endlichen Werth, welchen die Summe

$$\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a + \varepsilon_1) + \varepsilon_3 f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \dots + \varepsilon_{n-1} f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_n f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich  $\varepsilon$  dem Verschwinden nähert und  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots + \varepsilon_n = x - a$  ist, unter Voraussetzung der Continuität der Function  $f u$  zwischen  $a$  und  $x$ , bekanntlich zur Grenze hat; oder wir

definiren das Integral  $\int_a^x f u du$  als eine unendliche Summe von Produkten der gegebenen

Function  $f u$ , deren Variable zuerst den Werth  $a$  erhält und beständig um ein unendlich kleines Inkrement  $\varepsilon$  wächst, in sämtliche Inkremente der Reihe nach, durch welche die Variable von  $a$  bis  $x$  aufsteigt.

§. 2. In dieser Definition sind zunächst die Grenzen  $a$  und  $x$ , wie die Inkremente  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$  reell gedacht. Hieran knüpft sich jedoch die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die

durch das Symbol  $\int_a^x f u \, du$  bezeichnete Summe auch dann noch gegen einen endlichen Werth konvergiert, wenn man die Grenzen  $a$  und  $x$  mit den allgemeinen Werthen  $a + \beta i$  und  $\gamma + \delta i$  vertauscht und die Variable vermöge eines beliebigen, unendlicher Abwechslung fähigen Verfahrens aus der Grenze  $a + \beta i$  in die Grenze  $\gamma + \delta i$  übergehen lässt; mit andern Worten: ob und unter welchen Bedingungen bei Anwendung imaginärer Grenzen und imaginärer Inkremente irgend eine dem Integral  $\int_a^x f u \, du$  analog gebildete Summe, zu deren Bezeichnung vorläufig

das Symbol  $\sum_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  dienen mag, die Bedeutung des Symbols  $\int_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  erreicht. Es

lässt sich nun beweisen (S. Grunerts Archiv der Mathematik, Theil 23, Abhandlung XIV.), dass

die Summe  $\sum_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i}$  im Allgemeinen durch die Reihe

$$\left( \sum_{a+\beta i}^{\alpha+\beta_1 i} + \sum_{\alpha+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_1 i} \right) + \left( \sum_{\alpha_1+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_2 i} + \sum_{\alpha_1+\beta_2 i}^{\alpha_2+\beta_2 i} \right) \dots + \left( \sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i} + \sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i} \right) + \left( \sum_{\alpha_n+\beta_n i}^{\alpha_n+\delta i} + \sum_{\alpha_n+\delta i}^{\gamma+\delta i} \right)$$

ausgedrückt werden kann, und dass jede Summe  $\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i}$ , so wie jede Summe

$\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}$ , erstere, wenn  $f(\alpha_{n-1} + \nu i)$  zwischen den reellen Grenzen  $\beta_{n-1}$  und  $\beta_n$ , letztere,

wenn  $f(u + \beta_n i)$  zwischen den reellen Grenzen  $\alpha_{n-1}$  und  $\alpha_n$  kontinuierlich ist, gegen einen

bestimmten endlichen Werth konvergiert. Es steht also fest, dass die Summe  $\sum_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i}$  so gebildet

werden kann, dass wir berechtigt sind, sie durch das Symbol  $\int_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  zu bezeichnen.

§. 3. Ist die Funktion  $f u$  schlechthin kontinuierlich, d. h. giebt es absolut keinen (reellen oder imaginären) Werth, für welchen die Funktion  $f u$  diskontinuierlich wird, so führt die Betrachtung des Integrals  $\int f u \, du$  zwischen imaginären Grenzen zu keinen neuen Ergebnissen. Denn es sind in diesem Falle, wie in der oben citirten Abhandlung gleichfalls bewiesen wird, die unter

dem Symbol  $\int_{a+\beta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  denkbaren Summe ihrem Werthe nach nicht verschieden, oder sie

sind sämmtlich gleich  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} f u \, du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$ , welche Summe gleichbedeutend ist mit der Summe  $\int_{\alpha}^{\gamma} f(u+\delta i) \, du + i \int_{\beta}^{\delta} f(\alpha+vi) \, dv$  und daher, wenn  $\beta=0$ ,  $\delta=0$ ,  $\alpha=a$ ,  $\gamma=x$  gesetzt wird, übergeht in  $\int_a^x f u \, du$ , so dass man auf diesem Wege kein anderes Resultat erhält, als das, durch die Betrachtung des Integrals  $\int f u \, du$  zwischen reellen Grenzen bereits gewonnene.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn die Funktion  $f u$  zwar zwischen den Grenzen  $a$  und  $x$  kontinuierlich ist, aber für einen gewissen Werth von der Form  $p+qi$  diskontinuierlich wird. Während nämlich in diesem Falle das Integral  $\int_a^x f u \, du$  unendlich-vieldeutig ist, liefert die Betrachtung desselben zwischen den reellen Grenzen  $a$  und  $x$ , bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente, nur einen einzigen seiner Werthe, und alle Eigenschaften, welche aus der Definition desselben unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Inkremente geschöpft worden sind, gelten nur innerhalb der Grenzen  $a$  und  $x$  und nur für reelle Werthe der Veränderlichen. Jetzt also ist die Betrachtung des Integrals  $\int f u \, du$  zwischen imaginären Grenzen erst fruchtbar und zur Erschöpfung seines Wesens unerlässlich. Denn ist die Funktion  $f u$  nicht schlechthin kontinuierlich, so haben die unter dem Symbol  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  denkbaren Summen keineswegs gleichen Werth, sondern unterscheiden sich von einander, wie von der Summe  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} f u \, du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} f u \, du$  um Vielfache einer bestimmten Differenz  $\Delta$ , so dass, wenn die Betrachtung des Integrals  $\int f u \, du$  zwischen den reellen Grenzen  $a$  und  $x$  einen gewissen Werth desselben  $\Phi(x)$  ergeben hat, dessen allgemeiner Werth  $q(x)$ , den wir aus der Betrachtung desselben Integrals zwischen den Grenzen  $\alpha+\beta i$  und  $\gamma+\delta i$  erhalten, wenn wir zuletzt  $\beta=0$ ,  $\delta=0$ ,  $\alpha=a$  und  $\gamma=x$  setzen, durch die Gleichung

$$q(x) = \Phi(x) + m\Delta,$$

wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl vorstellt, seinen erschöpfenden Ausdruck erhält.

§. 4. Dieses hiermit in seinen Hauptmomenten angedeutete Verfahren wollen wir nun durch die Betrachtung des Integrals  $\int \frac{du}{u}$  veranschaulichen. Die Funktion  $\frac{1}{u}$  ist zwischen den Grenzen  $1$  und  $x$ , wenn  $x$  eine beliebige, aber positive Zahl bedeutet, kontinuierlich; folglich wird die Summe

$\varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \dots + \varepsilon_{n-1} \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-2}} + \varepsilon_n \frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}}$ ,  
in welcher  $\varepsilon$  unendlich klein und  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n = x - 1$  ist, gegen einen bestimmten endlichen Werth  $\int_1^x \frac{du}{u}$  konvergiren, den wir durch das Symbol  $\text{Log } x$  bezeichnen. Diese Funktion

Log  $x$  wird als völlig unbekannt vorausgesetzt. Die elementare Betrachtung der Logarithmen und Kreisfunktionen, so wie deren Vervollständigung durch die Analysis, ist also für uns gar nicht vorhanden; wir abstrahiren überhaupt von der Kenntniss irgend welcher Transcendenten und setzen nur die algebraischen Funktionen und ihre Ableitungen als bekannt voraus.

§. 5. Aus der in §. 1 aufgestellten Definition eines Integrals  $\int_a^b f u \, du$  als der bestimmten Grenze, gegen welche die Reihe

$\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a + \varepsilon_1) + \varepsilon_3 f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \dots + \varepsilon_{n-1} f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_n f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1})$ ,  
in welcher sich  $\varepsilon$  dem Verschwinden nähert, und  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = b - a$  ist, konvergiert, ergeben sich sofort folgende, für unsere Entwicklung ganz besonders wichtige Sätze:

$$\text{I. } \int_a^b f u \, du = - \int_b^a f u \, du. \quad \text{Denn da}$$

$$\begin{aligned} a &= b - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_n, \\ a + \varepsilon_1 &= b - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \dots - \varepsilon_n, \\ a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= b - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_n, \\ &\vdots \\ a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} &= b - \varepsilon_n, \end{aligned}$$

so lässt sich  $\int_a^b f u \, du$  auch darstellen durch die Summe

$$\varepsilon_1 f(b - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_n) + \varepsilon_2 f(b - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \dots - \varepsilon_n) + \dots + \varepsilon_{n-1} f(b - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + \varepsilon_n f(b - \varepsilon_n).$$

Schreiben wir diese Summe in umgekehrter Ordnung und setzen dabei zuerst für die Differenz  $b - \varepsilon_n$ , dann für  $b - \varepsilon_{n-1}$ , dann für  $b - \varepsilon_{n-2}$ , zuletzt für  $b - \varepsilon_1$  jedesmal bloss  $b$ , so erhalten wir

$$\int_a^b f u \, du = \varepsilon_n f(b) + \varepsilon_{n-1} f(b - \varepsilon_n) + \varepsilon_{n-2} f(b - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + \dots + \varepsilon_2 f(b - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_3) + \varepsilon_1 f(b - \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \dots - \varepsilon_3 - \varepsilon_2).$$

Bezeichnen wir nun  $-\varepsilon_n$  durch  $\varepsilon'_1$ ,  $-\varepsilon_{n-1}$  durch  $\varepsilon'_2$ , ...,  $-\varepsilon_2$  durch  $\varepsilon'_{n-1}$ ,  $-\varepsilon_1$  durch  $\varepsilon'_n$ , so finden wir

$$\int_a^b f u \, du = - \{ \varepsilon'_1 f(b) + \varepsilon'_2 f(b + \varepsilon'_1) + \varepsilon'_3 f(b + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + \dots + \varepsilon'_{n-1} f(b + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots + \varepsilon'_{n-2}) + \varepsilon'_n f(b + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots + \varepsilon'_{n-1}) \},$$

während  $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 + \dots + \varepsilon'_n = a - b$  ist. Folglich können wir die eingeklammerte Summe

$$\text{durch } \int_b^a f u \, du \text{ bezeichnen und erhalten } \int_a^b f u \, du = - \int_b^a f u \, du.$$

II.  $\int_a^b f u \, du = \int_a^c f u \, du + \int_c^b f u \, du$ , wo  $c > a < b$  ist, welche Gleichung sich sofort

ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass  $a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_m = c$  und  $c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \dots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = b$ , und dass daher

$$\int_a^b f(u) du = \{ \varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a + \varepsilon_1) \dots + \varepsilon_m f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{m-1}) \} + \{ \varepsilon_{m+1} f(c) + \varepsilon_{m+2} f(c + \varepsilon_{m+1}) \dots + \varepsilon_n f(c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \dots + \varepsilon_{n-1}) \},$$

von welcher Summe der erste Theil offenbar durch  $\int_a^c f(u) du$ , der zweite durch  $\int_c^b f(u) du$  zu

bezeichnen ist. Aus der Gleichung II. folgt aber auch  $\int_a^c f(u) du = \int_a^b f(u) du - \int_c^b f(u) du$ . Man

kann also bei Bestimmung eines Integrals zwischen den Grenzen  $a$  und  $c$  auch über die letztere hinausgehen und dann wieder zu ihr zurückkehren, wenn nur die Funktion  $f(u)$  zwischen den äussersten  $a$  und  $b$  kontinuierlich ist.

III. 
$$\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} f(u) du = \int_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v) dv,$$
 vorausgesetzt, dass nicht nur die Funktion  $f(u)$  zwischen

den Grenzen  $u = \varphi_\alpha$  und  $u = \varphi_\beta$ , sondern auch die Funktion  $\varphi_v$  zwischen den Grenzen  $v = \alpha$  u.  $v = \beta$  kontinuierlich ist. Denn

$$\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} f(u) du = \varepsilon'_1 f(\varphi_\alpha) + \varepsilon'_2 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1) + \varepsilon'_3 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) \dots + \varepsilon'_n f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \dots + \varepsilon'_{n-1}),$$

während  $\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \dots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n = \varphi_\beta$  ist, wobei die successiven Inkremente  $\varepsilon'$  der Funktion  $\varphi_v$  von  $\varphi_\alpha$  bis  $\varphi_\beta$  den successiven Inkrementen  $\varepsilon$  der Veränderlichen  $v$  von  $\alpha$  bis  $\beta$  entsprechen, also auch  $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \beta$  ist. Vermöge der Continuität der Funktion  $\varphi_v$  zwischen den Grenzen  $\alpha$  und  $\beta$  finden folgende Gleichungen statt:

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \varepsilon_1 \varphi'(\alpha) = \varepsilon'_1, \text{ daher auch } \varphi(\alpha + \varepsilon_1) = \varphi_\alpha + \varepsilon_1 \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1) = \varepsilon_2 \varphi'(\alpha + \varepsilon_1) = \varepsilon'_2,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varphi_{\alpha + \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha + \varepsilon_1} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_3 \varphi'(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon'_3,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varphi_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3;$$

$$\vdots$$

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n) - \varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n \varphi'_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}} = \varepsilon'_n, \text{ daher auch}$$

$$\varphi(\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n) = \varphi_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}} + \varepsilon_n \varphi'_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \dots + \varepsilon'_n.$$

Demnach verwandelt sich die, das Integral  $\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} f u \, du$  vorstellende Summe in folgende

$$\varepsilon_1 \varphi'_\alpha f(\varphi_\alpha) + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1} f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1}) + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}) \\ \dots \dots \varepsilon_n \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}} f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}}),$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\beta-\varepsilon_n} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\beta-\varepsilon_n}$

welche sich als die Definition des Integrals  $\int_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v) \, dv$  zu erkennen giebt.

IV.  $D_b \int_a^b f u \, du = f(b)$ . Denn die Ableitung  $D_b \int_a^b f u \, du$  bedeutet das Verhältniss

$$\frac{\int_a^{b+\varepsilon_{n+1}} f u \, du - \int_a^b f u \, du}{\varepsilon_{n+1}}, \text{ ist also gleich}$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1} f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) \dots + \varepsilon_n f(b-\varepsilon_n) + \varepsilon_{n+1} f(b) - \{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_1 f(a+\varepsilon_1) \dots + \varepsilon_n f(b-\varepsilon_n)\}}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{\varepsilon_{n+1} f(b)}{\varepsilon_{n+1}} = f(b).$$

§. 6. Wie bereits in §§. 2 und 3 im Allgemeinen angedeutet wurde, erfordert die erschöpfende Untersuchung des Integrals  $\int \frac{du}{u}$  Betrachtungen folgender Art:

A. die Betrachtung des Integrals  $\int \frac{du}{u}$  zwischen den reellen Grenzen 1 und  $x$  (zwischen welchen die Funktion  $\frac{1}{u}$  kontinuierlich bleibt, wenn  $x$  eine positive Zahl bedeutet) unter Voraussetzung ausschliesslich reeller Inkremente;

B. die Betrachtung des Integrals  $\int \frac{du}{u}$  zwischen den imaginären Grenzen  $\alpha + \beta i$  und  $p + qi$  unter Voraussetzung theils reeller, theils einfacher imaginärer Inkremente von der Form  $\delta i$ , wobei die Veränderliche  $u$

I. durch lauter reelle Inkremente von der einen Grenze  $\alpha + \beta i$  zunächst bis  $p + \beta i$ , sodann durch lauter imaginäre Inkremente von  $p + \beta i$  bis zur andern Grenze  $p + qi$  fortschreitet, oder

II. zuerst durch lauter imaginäre Inkremente aus der einen Grenze  $\alpha + \beta i$  zunächst in  $\alpha + qi$ , darauf durch lauter reelle Inkremente aus  $\alpha + qi$  in die andere Grenze  $p + qi$  übergeht, oder

III. zuerst durch reelle Inkremente von  $\alpha + \beta i$  bis zu einem Zwischenwerth  $\alpha_1 + \beta i$ , sodann durch imaginäre Inkremente von  $\alpha_1 + \beta i$ , bis zu einem andern Zwischenwerth  $\alpha_1 + \beta_1 i$

und sofort abwechselnd durch reelle und einfache imaginäre Inkremente bis  $p + qi$  anwächst;

C. die Betrachtung des Integrals  $\int \frac{du}{u}$  zwischen den imaginären Grenzen  $\alpha + \beta i$  und  $p + qi$  unter Voraussetzung komplexer Inkremente von der Form  $\gamma + \delta i$ .

### A. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen reellen Grenzen unter Voraussetzung reeller Inkremente.

§. 7. Von den unendlich vielen Werthen, welche das Integral  $\int_1^x \frac{du}{u}$  zufolge der beschränkten, nur zwischen der Einheit und einer positiven Grenze  $x$  stattfindenden Continuität der Funktion  $\frac{1}{u}$  haben muss, finden wir bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente nur einen einzigen, welchen wir durch  $\text{Log } x$  bezeichnet haben. Es ist also

$$\text{Log } x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1 + \varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{1}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \dots \varepsilon_n \frac{1}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1}} (= x - \varepsilon_n) = \int_1^x \frac{du}{u}$$

Setzt man  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon(1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon(1 + \varepsilon)^2$ ,  $\dots$ ,  $\varepsilon_n = \varepsilon(1 + \varepsilon)^{n-1}$ , so hat man  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots + \varepsilon_n = \varepsilon + \varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon(1 + \varepsilon)^2 \dots + \varepsilon(1 + \varepsilon)^{n-1} = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)^n - \varepsilon}{(1 + \varepsilon) - 1} = (1 + \varepsilon)^n - 1$ ;

folglich  $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n = (1 + \varepsilon)^n$ ; also

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (1 + \varepsilon)^2$$

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1 + \varepsilon)^3 \text{ u. s. w.}$$

Folglich findet man

$\text{Log } x = \varepsilon \frac{1}{1} + \varepsilon(1 + \varepsilon) \frac{1}{1 + \varepsilon} + \varepsilon(1 + \varepsilon)^2 \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \dots \varepsilon(1 + \varepsilon)^{n-1} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{n-1}}$ , also, wenn sich  $n$  der Grenze  $\infty$  nähert,  $\text{Log } x = \text{Lim } (n\varepsilon)$ .

Da nun aus der Gleichung  $x = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n = (1 + \varepsilon)^n$  für  $\varepsilon$  der Werth  $x^{\frac{1}{n}} - 1$  gefunden wird, so folgt  $\text{Log } x = \text{Lim } \{n(x^{\frac{1}{n}} - 1)\}$ , wenn sich  $n$  der Grenze  $\infty$  nähert.

§. 8. Aus den Gleichungen I. und II. des §. 5 folgt

$$\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \int_x^1 \frac{du}{u} + \int_1^{xy} \frac{du}{u} = \int_1^{xy} \frac{du}{u} - \int_1^x \frac{du}{u} = \text{Log } xy - \text{Log } x.$$

Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5  $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{1}{u} du$  statt  $\varphi_v$  die Funktion  $xv$ , also  $\varphi_\alpha = x\alpha$ ,  $\varphi_\beta = x\beta$ ,  $\varphi'_v = x$ , so finden wir für  $\alpha = 1$  und  $\beta = y$

$$\int_1^y x \frac{1}{xv} dv, \text{ das ist } \int_1^y \frac{dv}{v} = \int_x^{xy} \frac{du}{u}, \text{ also } \int_x^{xy} \frac{du}{u} = \text{Log } y.$$

Aus der Vergleichung beider für  $\int_x^{xy} \frac{du}{u}$  gefundenen Werthe ergibt sich

$\text{Log } xy = \text{Log } x + \text{Log } y$ , welcher Satz auch die folgenden drei

$\text{Log } \frac{x}{y} = \text{Log } x - \text{Log } y$ ,  $\text{Log } x^m = m \text{Log } x$ ,  $\text{Log } \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m} \text{Log } x$ , wo  $m$  zunächst eine ganze Zahl bedeutet, selbstverständlich macht. Hieraus aber folgt sogleich, dass der Satz  $\text{Log } x^m = m \text{Log } x$  für jeden beliebigen reellen Werth von  $m$  (und für jeden positiven Werth von  $x$ ) Gültigkeit hat.

§. 9. Es sei  $\text{Log } x = z$ . Verstehen wir unter  $e$  denjenigen Werth, welcher der Gleichung  $\text{Log } e = 1$  Genüge leistet, so ist  $\text{Log } e^z = z \text{Log } e = z$ ; folglich  $\text{Log } x = \text{Log } e^z$ , woraus sich die Gleichung  $x = e^z$  ergibt, in welcher die vorige  $\text{Log } x = z$  ihre Umkehrung hat. Nun ist nach §. 7 für  $n = \infty$

$$\text{Log } x = \text{Lim } n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = z; \text{ folglich auch}$$

$$\text{Lim } n \left( [e^z]^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = z;$$

folglich immer noch unter der Voraussetzung, dass sich  $n$  der Grenze  $\infty$  nähert,

$$e^z = \text{Lim } \left( \frac{z}{n} + 1 \right)^n.$$

Setzen wir  $n = \frac{1}{u}$ , so ist unter der Voraussetzung, dass sich  $u$  der Grenze  $0$  nähert,

$$e^z = \text{Lim } (1 + uz)^{\frac{1}{u}},$$

und man erhält nach dem binomischen Lehrsatz

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

welche Reihe, so lange  $uz < 1$ , also  $z < \frac{1}{u}$  ist, mithin für jeden reellen Werth von  $z$  konvergent bleibt. Ist also  $z = 1$ , so finden wir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

## B. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung einfacher imaginärer Inkremente.

§. 10. Um zwischen den imaginären Grenzen  $\alpha + \beta i$  und  $\gamma + \delta i$  für alle drei (nach §. 6) gegenwärtigen Falls möglichen Uebergangsarten der Veränderlichen das Integral  $\int \frac{du}{u}$  auszuwerthen, behandeln wir zunächst die beiden einfacheren Fälle, in welchen sich jene Grenzen entweder nur in dem reellen oder nur in dem imaginären Theile unterscheiden.



Betrachten wir zuerst das Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$ , das ist die Summe

$$\varepsilon_1 i \frac{1}{\alpha+\beta i} + \varepsilon_2 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1)i} + \varepsilon_3 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2)i} \dots \varepsilon_n i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1})i},$$

wo  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = \delta - \beta$  ist.

Aus dieser Definition folgt  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = i \int_{\beta}^{\delta} \frac{dv}{\alpha+vi} = i \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha-vi}{\alpha^2+v^2} dv$ , also

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \int_{\beta}^{\delta} \frac{v dv}{\alpha^2+v^2} + i \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha dv}{\alpha^2+v^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5  $\int_{\beta}^{\delta} \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_{\beta}}^{\varphi_{\delta}} \frac{du}{u}$  statt  $\varphi_v$  die Funktion

$$\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}, \text{ also } \varphi_{\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}, \varphi_{\delta} = \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}, \varphi'_v = \frac{2v}{\alpha^2}, \text{ so erhalten wir}$$

$$\int_{\beta}^{\delta} \frac{2v}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}} dv, \text{ das ist } 2 \int_{\beta}^{\delta} \frac{v dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}} \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} \frac{du}{u} = \text{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

weil  $\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \text{Log } y$  ist (S. §. 8). Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5

$$\int_{\beta}^{\delta} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v^2} dv = \int_{\varphi_{\beta}}^{\varphi_{\delta}} \frac{1}{1+u^2} du \text{ statt } \varphi_v \text{ die Funktion } \frac{v}{\alpha}, \text{ also } \varphi_{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}, \varphi_{\delta} = \frac{\delta}{\alpha}, \varphi'_v = \frac{1}{\alpha}, \text{ so}$$

finden wir

$$\int_{\beta}^{\delta} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \text{ oder } \int_{\beta}^{\delta} \frac{\alpha dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2} du; \text{ folglich}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2} du.$$

Gehen wir nun zum zweiten Fall über und betrachten das Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$ , das ist die

Summe

$$\frac{1}{\varepsilon_1 \alpha + \beta i} + \frac{1}{\varepsilon_2 \alpha + \varepsilon_1 + \beta i} + \frac{1}{\varepsilon_3 \alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \beta i} \cdots + \frac{1}{\varepsilon_n \alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdots + \varepsilon_{n-1} + \beta i},$$

$= \gamma - \varepsilon_n$

woraus folgt 
$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{dv}{v+\beta i} = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{v dv}{v^2+\beta^2} - i \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\beta dv}{v^2+\beta^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5  $\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\gamma}} \frac{du}{u}$  statt  $\varphi_v$  die Funktion  $\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}$ , also  $\varphi_{\alpha} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$ ,  $\varphi_{\gamma} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}$ ,  $\varphi'_v = \frac{2v}{\beta^2}$ , so folgt

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{2v}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}} dv \text{ oder } 2 \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{v dv}{\beta^2+v^2} = \int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}} \frac{du}{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2} u} = \int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}} \frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2} \frac{du}{u} = \text{Log} \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Setzen wir ferner in die Gleichung III.  $\int_{\alpha}^{\gamma} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v} dv = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\gamma}} \frac{du}{1+u^2}$  statt  $\varphi_v$  die Funktion

$\frac{v}{\beta}$ , also  $\varphi_{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\varphi_{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ ,  $\varphi'_v = \frac{1}{\beta}$ , so folgt

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{1}{\beta} \frac{1}{1+\frac{v^2}{\beta^2}} dv \text{ oder } \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\beta dv}{\beta^2+v^2} = \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2}; \text{ also}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2} - i \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2}.$$

§ 11. Die Untersuchung der Integrale  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\beta i+\delta i} \frac{du}{u}$  und  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$  hat uns somit zu dem Integral  $\int \frac{du}{1+u^2}$  geführt. Da die Continuität der Funktion  $\frac{1}{1+u^2}$  keine unbedingte ist, obschon sie zwischen 0 und jeder beliebigen reellen Grenze x stattfindet, so ist im Allgemeinen das Integral  $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$  unendlich-vieldeutig; aber unter Voraussetzung reeller Grenzen und

reeller Inkremente hat das Integral  $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$  nur einen einzigen Werth, den wir durch das Symbol  $\text{Arc tg } x$  bezeichnen. Es ist also

$$\text{Arctg } x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1^2} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} + \dots + \varepsilon_n \frac{1}{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1})^2} + \dots \quad (a)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=x-\varepsilon_n}$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5  $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2 v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$

1. statt  $\varphi_v$  die Funktion  $-v$ , also  $\varphi_\alpha = -\alpha$ ,  $\varphi_\beta = -\beta$ ,  $\varphi'_v = -1$ ,

2. statt  $\varphi_v$  die Funktion  $\frac{1}{v}$ , also  $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ ,  $\varphi_\beta = \frac{1}{\beta}$ ,  $\varphi'_v = -\frac{1}{v^2}$ ,

so erhalten wir für  $\alpha = 0$  und  $\beta = x$  (vergl. die Anmerkung)

1.  $\int_0^x -1 \frac{1}{1+v^2} dv$  oder  $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{-x} \frac{du}{1+u^2}$ , folglich  $\text{Arc tg}(-x) = -\text{Arc tg } x$ ;

2.  $\int_0^x -\frac{1}{v^2} \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} dv$  oder  $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}$ ; folglich

$$\text{Arc tg } x = - \left\{ \int_\infty^0 \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} \right\}, \text{ also } \text{Arc tg } x = \text{Arc tg}(\infty) - \text{Arc tg} \frac{1}{x}.$$

Demnach ist  $\text{Arc tg } x + \text{Arc tg} \frac{1}{x}$  eine konstante Grösse  $\text{Arc tg}(\infty)$ , die wir durch  $\frac{\pi}{2}$  bezeichnen

wollen, so dass auch  $\text{Arc tg}(-x) + \text{Arc tg}(-\frac{1}{x}) = - \{ \text{Arc tg } x + \text{Arc tg} \frac{1}{x} \} = -\frac{\pi}{2}$  gefunden

wird. Setzen wir  $x = 1$ , so ergibt sich daher  $2 \text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{2}$ , also  $\text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$ . Um diesen Werth annäherungsweise zu berechnen, setzen wir in die Gleichung (a) für  $x$  die Zahl 1, theilen die Einheit in  $n$  gleiche Theile, z. B. in zehn, und machen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \frac{1}{10}$ ; so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg } 1 = \frac{1}{10} \left\{ 1 + \frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2} \right\}.$$

Anmerkung. Man könnte einwenden, dass, wenn man in die Gleichung III.

$$\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2 v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$$

statt  $\varphi_v$  die Funktion  $\frac{1}{v}$ , also  $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$  setzt,  $\alpha$  nicht gleich 0

gemacht werden dürfe, weil für diesen Werth die Funktion  $\frac{1}{v}$  aufhöre kontinuierlich zu sein, und

daher die Gleichung III. nicht mehr stattfinde, und es liesse sich nach dem von uns angewendeten

Verfahren auch das Absurdum  $\text{Arctg}(-x) + \text{Arctg}(-\frac{1}{x}) = +\frac{\pi}{2}$  beweisen. Denn man

setze für  $\varphi_v$  die Funktion  $-\frac{1}{v}$ , also  $\varphi_\alpha = -\frac{1}{\alpha}$ ,  $\varphi_\beta = -\frac{1}{\beta}$ ,  $\varphi'_v = \frac{1}{v^2}$ , so würden wir für  $\alpha = 0$  und

$\beta = x$  erhalten

$$\int_0^x \frac{1}{v^2 + 1} dv, \text{ das ist } \int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = - \int_0^x \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}, \text{ also}$$

$$\text{Arctg } x = - \text{Arctg } \infty + \text{Arc tg} \left(-\frac{1}{x}\right), \text{ demnach } +\frac{\pi}{2} = \text{Arctg}(-x) + \text{Arctg}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Allein die Funktion  $\frac{1}{v}$  ist zwischen den Grenzen  $+\varepsilon$  und  $+x$  und  $-\varepsilon$  und  $-x$ , wobei  $\varepsilon$  unendlich klein ist, entschieden kontinuierlich; die Gleichung III. gilt also noch, wenn wir auch — dies ist der eigentliche Sinn der Umwandlung von  $+\alpha$  in  $0$  — für  $\alpha$  den Werth  $+\varepsilon$  setzen, und das Fehlerhafte des voranstehenden Beweises liegt darin, dass die Umwandlung von  $-\alpha$  in  $0$  als gleichbedeutend mit der in  $+\varepsilon$  genommen wurde, während sie den Uebergang in  $-\varepsilon$  vorstellt, also für  $\frac{1}{-\alpha(=0)}$  nur  $-\infty$ , nicht  $+\infty$  gesetzt werden konnte.

§. 12. Nehmen wir nun die in §. 10 für die Integrale  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$  und  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$  gefundenen Werthe, und berücksichtigen wir, dass nach §. 11

$$\int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = - \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg} \frac{\delta}{\alpha} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \text{ und}$$

$$\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = - \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg} \frac{\gamma}{\beta} - \text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta}, \text{ ist,}$$

so gelangen wir zu den Ausdrücken

$$(b) \dots \int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\alpha^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + i (\text{Arctg} \frac{\delta}{\alpha} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\alpha}),$$

$$(c) \dots \int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 + \alpha^2} - i (\text{Arctg} \frac{\gamma}{\beta} - \text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta}).$$

Lassen wir nun I. die Variable aus der Grenze  $\alpha+\beta i$  zuerst durch lauter reelle Inkremente in  $\gamma+\beta i$ , darauf durch lauter imaginäre Inkremente aus  $\gamma+\beta i$  in  $\gamma+\delta i$  übergehen, definiren wir also

das Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$  durch die Summe  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} + \int_{\gamma+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$ , so müssen wir bei

Anwendung der Gleichung (b)  $\alpha$  mit  $\gamma$  vertauschen und wir finden

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 + \alpha^2} - i(\text{Arctg} \frac{\gamma}{\beta} - \text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta}) + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\beta^2 + \gamma^2} + i(\text{Arctg} \frac{\delta}{\gamma} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\gamma})$$

$$= \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + i(\text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta} + \text{Arctg} \frac{\delta}{\gamma} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\gamma} - \text{Arctg} \frac{\gamma}{\beta}).$$

Lassen wir aber II. die Variable aus der Grenze  $\alpha + \beta i$  zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in  $\alpha + \delta i$ , darauf durch lauter reelle Inkremente aus  $\alpha + \delta i$  in  $\gamma + \delta i$  übergehen, definiren wir also das Integral

$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$  durch die Summe  $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$ , so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (c)  $\beta$  mit  $\delta$  vertauschen und wir erhalten

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\alpha^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + i(\text{Arctg} \frac{\delta}{\alpha} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\alpha}) + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \delta^2} - i(\text{Arctg} \frac{\gamma}{\delta} - \text{Arctg} \frac{\alpha}{\delta})$$

$$= \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + i(\text{Arctg} \frac{\alpha}{\delta} + \text{Arctg} \frac{\delta}{\alpha} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\alpha} - \text{Arctg} \frac{\gamma}{\delta}).$$

Bezeichnen wir das auf die erste Art definirte Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$  durch  $f_1(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$ , das auf die zweite Art definirte durch  $f_2(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$ , so ist

$$f_1 - f_2 = i \left\{ \text{Arctg} \frac{\alpha}{\beta} + \text{Arctg} \frac{\beta}{\alpha} + \text{Arctg} \frac{\gamma}{\delta} + \text{Arctg} \frac{\delta}{\gamma} - \text{Arctg} \frac{\beta}{\gamma} - \text{Arctg} \frac{\gamma}{\beta} - \text{Arctg} \frac{\alpha}{\delta} - \text{Arctg} \frac{\delta}{\alpha} \right\},$$

welche Differenz, vermöge der Gleichung  $\text{Arctg} x + \text{Arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ , sich in  $2\pi i$  umwandelt, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  positiv,  $\gamma$  und  $\delta$  negativ (oder umgekehrt), und vermöge der Gleichung  $\text{Arctg}(-x) + \text{Arctg}(-\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$ , in  $-2\pi i$ , wenn  $\alpha$  und  $\delta$  positiv,  $\beta$  und  $\gamma$  negativ (oder umgekehrt), in allen übrigen Fällen aber  $= 0$  ist.

§. 13. Lassen wir nun III. die Variable aus der Grenze  $\alpha + \beta i$  zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in den Zwischenwerth  $\alpha + \beta_1 i$ , von diesem durch lauter reelle Inkremente in einen andern Zwischenwerth  $\alpha_1 + \beta_1 i$  und so fort abwechselnd bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente bis zu einer Grenze  $p + qi$  fortschreiten, so wird uns das Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$

als eine Summe von Integralen von der Form  $f_2$  erscheinen. Fassen wir zunächst zwei auf einander folgende dieser Integrale zusammen, so ist

$$f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i) + f_2(\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i) =$$

$$\int_{\alpha_r + \beta_r i}^{\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u},$$

$$\text{also} = \int_{\alpha_r + \beta_r i}^{\alpha_r + \beta_{r+1} i} \frac{du}{u} + f_1(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i) + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u}$$

Nun ist aber

- I. wenn  $\alpha_r$  und  $\beta_{r+1}$  positiv,  $\alpha_{r+1}$  und  $\beta_{r+2}$  negativ (oder umgekehrt),  $f_1 = f_2 + 2\pi i$ ,
  - II. wenn  $\alpha_r$  und  $\beta_{r+2}$  positiv,  $\beta_{r+1}$  und  $-\alpha_{r+1}$  negativ (oder umgekehrt),  $f_1 = f_2 - 2\pi i$ ,
- in allen übrigen Fällen dagegen  $f_1 = f_2$ ; folglich ist in allen diesen übrigen Fällen

$$\begin{aligned} & f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i) + f_2(\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i) \\ &= \int_{\alpha_r + \beta_r i}^{\alpha_r + \beta_{r+1} i} \frac{du}{u} + f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i) + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} \\ &= \int_{\alpha_r + \beta_r i}^{\alpha_r + \beta_{r+1} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r + \beta_{r+1} i}^{\alpha_r + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1} + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} \\ &= \int_{\alpha_r + \beta_r i}^{\alpha_r + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} + \int_{\alpha_r + \beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i} \frac{du}{u} = f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i); \end{aligned}$$

in den beiden Ausnahmefällen I. und II. dagegen ist

$$f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i) + f_2(\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i) = f_2(\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i) \pm 2\pi i.$$

Wir hatten nun das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}$  definiert durch die Summe

$$\{f_2(\alpha + \beta i, \alpha_1 + \beta_1 i) + f_2(\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i)\} + \{f_2(\alpha_2 + \beta_2 i, \alpha_3 + \beta_3 i) + f_2(\alpha_3 + \beta_3 i, \alpha_4 + \beta_4 i)\} + \dots + \{f_2(\alpha_{2m-2} + \beta_{2m-2} i, \alpha_{2m-1} + \beta_{2m-1} i) + f_2(\alpha_{2m-1} + \beta_{2m-1} i, \alpha_{2m} + \beta_{2m} i)\} + f_2(\alpha_{2m} + \beta_{2m} i, p + qi).$$

Wählen wir nun in den eingeklammerten  $m$  Summen die Repräsentanten von  $\alpha_r, \beta_{r+1}, \alpha_{r+1}, \beta_{r+2}$  so, wie es in dem einen oder dem andern der beiden Ausnahmefälle I. und II. angegeben ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u} &= f_2(\alpha + \beta i, \alpha_2 + \beta_2 i) + f_2(\alpha_2 + \beta_2 i, \alpha_4 + \beta_4 i) \dots \dots \dots \\ &+ f_2(\alpha_{2m-2} + \beta_{2m-2} i, \alpha_{2m} + \beta_{2m} i) + f_2(\alpha_{2m} + \beta_{2m} i, p + qi) \pm 2m\pi i; \end{aligned}$$

da aber jetzt die beiden Ausnahmefälle I. und II. nicht mehr stattfinden, so zieht sich diese ganze Summe zurück auf

$$f_2(\alpha + \beta i, p + qi) \pm 2m\pi i.$$

Stellen wir uns z. B. das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}$  vor durch die Summe

$$\{f_2(\alpha + \beta i, -\alpha_1 + \beta_1 i) + f_2(-\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 - \beta_2 i)\} + \{f_2(\alpha_2 - \beta_2 i, -\alpha_3 + \beta_3 i) + f_2(-\alpha_3 + \beta_3 i, \alpha_4 - \beta_4 i)\} + f_2(\alpha_4 - \beta_4 i, p + qi),$$

wo in den beiden eingeklammerten Summen

die Repräsentanten von  $\alpha_r$  und  $\beta_{r+1}$ , nämlich 1)  $\alpha$  und  $\beta_1$ , 2)  $\alpha_2$  und  $\beta_3$ , beide positiv, dagegen die Repräsentanten von  $\alpha_{r+1}$  und  $\beta_{r+2}$ , nämlich 1)  $-\alpha$  und  $-\beta_2$ , 2)  $-\alpha_3$  und  $-\beta_4$  beide negativ, also dem Ausnahmefalle I. entsprechend gewählt sind, so finden wir

$$\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u} = f_2(\alpha + \beta i, \alpha_2 - \beta_2 i) + 2\pi i + f_2(\alpha_2 - \beta_2 i, \alpha_4 - \beta_4 i) + 2\pi i + f_2(\alpha_4 - \beta_4 i, p + qi) \\ = \{f_2(\alpha + \beta i, \alpha_2 - \beta_2 i) + f_2(\alpha_2 - \beta_2 i, \alpha_4 - \beta_4 i)\} + f_2(\alpha_4 - \beta_4 i, p + qi) + 4\pi i.$$

Da nun aber jetzt in der eingeklammerten Summe die Repräsentanten von  $\alpha_r$  und  $\beta_{r+1}$ , nämlich  $\alpha$  und  $-\beta_2$ , so wie die Repräsentanten von  $\alpha_{r+1}$  und  $\beta_{r+2}$ , nämlich  $\alpha_2$  und  $-\beta_4$ , der eine positiv, der andere negativ sind, also weder dem Falle I., noch dem Falle II. entsprechen, so erhalten wir

$$\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u} = \frac{f_2(\alpha + \beta i, \alpha_4 - \beta_4 i) + f_2(\alpha_4 - \beta_4 i, p + qi) + 4\pi i}{f_2(\alpha + \beta i, p + qi) + 4\pi i}.$$

Stellen wir uns also das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}$  als eine auf unendlich mannigfaltige Art ausführ-

bare Summe von Integralen vor, die sämtlich dem Integral  $f_2$  analog, d. h. sämtlich von der Beschaffenheit sind, dass in ihnen die Variable von einem Zwischenwerth  $\alpha_r + \beta_r i$  in einen andern Zwischenwerth  $\alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i$  zuerst durch imaginäre, dann durch reelle Inkremente übergeht, so lassen sich die auf einander folgenden Zwischenwerthe  $\alpha_r + \beta_r i, \alpha_{r+1} + \beta_{r+1} i, \alpha_{r+2} + \beta_{r+2} i$

so wählen, dass jede von den unendlich vielen Summen, durch welche das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}$  defnirt werden kann, sich von einander, wie von dem Integral  $f_2(\alpha + \beta i, p + qi)$ , um Vielfache

der Differenz  $2\pi i$  unterscheiden. Bezeichnen wir das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + pi} \frac{du}{u}$  unter der Voraus-

setzung, dass die Variable auf die angegebene Weise bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente von  $\alpha + \beta i$  bis  $p + qi$  fortschreitet, durch  $\left(\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}\right)$ , so haben wir die Gleichung

$$\left( \int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u} \right) = f_2(\alpha + \beta i, p + qi) + 2m\pi i,$$

wo  $m$  jede positive und jede negative ganze Zahl bedeutet.

Anmerkung. Stellen wir uns das Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u}$  als eine Summe von Integralen von der Form  $f_1$  vor, so finden wir durch ein dem obigen ähnliches Verfahren denselben Werth, so dass jenes Integral auch bei dieser Auffassung durch  $\left( \int_{\alpha + \beta i}^{p + qi} \frac{du}{u} \right)$  zu bezeichnen ist.

§. 14. Machen wir  $\alpha = 1, \beta = 0$ , und nennen wir das unendlich-vieldeutige Integral  $\left( \int_1^{p + qi} \frac{du}{u} \right)$  den allgemeinen Logarithmus\* von  $p + qi$ , den wir im Unterschiede von dem eindeutigen  $\text{Log}(p + qi) = f_2(1, p + qi)$  durch  $\log(p + qi)$  bezeichnen, so gilt die Gleichung

$$\log(p + qi) = f_2(1, p + qi) + 2m\pi i.$$

Ist nun  $p$  eine positive Zahl, so erhalten wir

$$\log(p + qi) = \frac{1}{2} \text{Log}(p^2 + q^2) + i \underbrace{\left( \text{Arctg} \frac{1}{q} + \text{Arctg} q - \text{Arctg} \frac{p}{q} \right)}_{= \frac{\pi}{2}} + 2m\pi i,$$

und da  $-\text{Arctg} \frac{p}{q} = -\text{Arctg} \frac{p}{q} - \text{Arctg} \frac{q}{p} + \text{Arctg} \frac{q}{p} = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctg} \frac{q}{p}$ , ist, so folgt

$$\log(p + qi) = \frac{1}{2} \text{Log}(p^2 + q^2) + i(2m\pi + \text{Arctg} \frac{q}{p}),$$

wo  $\text{Arctg} \frac{q}{p}$  eindeutig und derjenige Arcus ist, der zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  liegt, und zwar zwischen 0 und  $+\frac{\pi}{2}$ , wenn  $q$  positiv, zwischen 0 und  $-\frac{\pi}{2}$ , wenn  $q$  negativ ist.

Bedeutet aber  $p$  eine negative Zahl, ist also  $p = -p'$ , so findet man

$$\log(p + qi) = \frac{1}{2} \text{Log}(p^2 + q^2) + i \left( \frac{\pi}{2} + \text{Arctg} \frac{p'}{q} \right) + 2m\pi i,$$

und da  $\text{Arctg} \frac{p'}{q} = \text{Arctg} \frac{p'}{q} + \text{Arctg} \frac{q}{p'} - \text{Arctg} \frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} = \text{Arctg} \frac{q}{p}$  ist,

so folgt für ein negatives  $p$

$$\log(p \pm qi) = \frac{1}{2} \text{Log}(p^2 + q^2) + i([2m + 1]\pi \pm \text{Arctg} \frac{q}{p}).$$

Man findet daher auch  $\log(+p) = \text{Log} p + 2m\pi i$ ,

$$\log(-p) = \text{Log} p + (2m + 1)\pi i,$$

wo  $\text{Log} p$  den einzigen Werth vorstellt, den man für das, aus bloss reellen Inkrementen konstruirte Integral  $\int_1^p \frac{du}{u}$  erhält.



C. Betrachtung des Integrals  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$  zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung komplexer Inkremente.

§. 15. Lassen wir nunmehr die Variable durch komplexe Inkremente von der Form  $\varepsilon + \delta i$  aus der Grenze  $\alpha + \beta i$  in die Grenze  $p + qi$  übergehen, definiren wir also das Integral  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u) du$  durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i) f\{\alpha + \beta i\} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i\} + \dots + (\varepsilon_n + \delta_n i) f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} + i(\beta + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{n-1})\},$$

in welcher  $\varepsilon$  und  $\delta$  reell und unendlich klein und  $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = p$ ,  
 $\beta + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = q$  ist,

so haben wir offenbar die allgemeinste Definition des Integrals  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u) du$  vor uns, welche die dem vorangehenden Abschnitt zu Grunde gelegte als ihre Unterart einschliesst. Man könnte daher glauben, dass die Konstruktion des Integrals  $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$  unter Zulassung bloss ein-

facher und zwar mit reellen abwechselnder imaginärer Inkremente (vergl. §. 13) dessen Benennung als des „allgemeinen Logarithmus“ von  $p + qi$  nicht rechtfertige. Allein wir werden uns alsbald überzeugen, dass der durch die jetzige Definition des Integrals  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u) du$  bedingte

Werth desselben mit dem Werthe des Integrals  $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$  genau übereinstimmt.

§. 16. Nämlich zufolge der jetzt vorausgesetzten, im vorigen §. angegebenen Konstruktion des Integrals  $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u) du$  haben wir auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u) du = \varepsilon_1 f\{\alpha + \beta i\} + \delta_1 i f\{\alpha + \beta i\} + \varepsilon_2 f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} + \delta_2 i f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} + \text{etc.}$$

Da nun die Funktion  $f(u)$  zwischen den Grenzen  $\alpha + \beta i$  und  $p + qi$  als kontinuierlich, d. h. als eine solche vorausgesetzt wird, welche, während die Variable  $u$  aus der Grenze  $\alpha + \beta i$  durch komplexe Inkremente in die Grenze  $p + qi$  übergeht, nie die Form  $\frac{1}{0}$  annimmt, so muss sie, so oft der Theil  $\alpha_r$  irgend eines Werthes  $\alpha_r + \beta_r i$  der Veränderlichen  $u$  um ein unendlich kleines Inkrement  $\varepsilon_r$  wächst, ebenfalls einen unendlich kleinen Zuwachs  $\delta_r$  von der Form  $\delta'_r + \delta''_r i$  erhalten. Es ist also

$$\begin{aligned}
 f\{\alpha + \varepsilon_1 + \beta i\} &= f\{\alpha + \beta i\} + \vartheta_1; \text{ folglich} \\
 f\{\alpha + \beta i\} &= f\{\alpha + \varepsilon_1 + \beta i\} - \vartheta_1; \text{ desgleichen ist} \\
 f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i\} &= f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} + \vartheta_2; \text{ folglich} \\
 f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} &= f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i\} - \vartheta_2; \text{ ebenso} \\
 f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i\} &= f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i\} - \vartheta_3 \text{ u. s. w.}
 \end{aligned}$$

Demnach lässt sich die jetzt vorausgesetzte Konstruktion des Integrals  $\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + qi} f u \, du$  auch in fol-

gende umwandeln:

$$\varepsilon_1 f\{\alpha + \beta i\} + \delta_1 i f\{\alpha + \varepsilon_1 + \beta i\} - \delta_1 \vartheta_1 i + \varepsilon_2 f\{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i\} + \delta_2 i f\{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i\} - \delta_2 \vartheta_2 i + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also ist } \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + qi} f u \, du &= \\
 \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \beta i} f u \, du + \int_{\alpha + \varepsilon_1 + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i} f u \, du - \delta_1 \vartheta_1 i + \int_{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i} f u \, du + \int_{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i} f u \, du - \delta_2 \vartheta_2 i + \text{etc.} \\
 \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1)i} f u \, du - \delta_1 \vartheta_1 i \\
 \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1)i} f u \, du - \delta_1 \vartheta_1 i \\
 \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2)i} f u \, du - \delta_1 \vartheta_1 i - \delta_2 \vartheta_2 i + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Verfahren wir auf diese Weise mit sämtlichen Gliedern der obigen Summe, so erhalten wir schliesslich

$$\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + (\beta + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n)i} f u \, du - i(\delta_1 \vartheta_1 + \delta_2 \vartheta_2 + \dots + \delta_n \vartheta_n).$$

Achten wir aber auf das Bildungsgesetz dieses Integrals, auf welches sich die transformirte Summe reducirt hat, und bemerken wir, dass die Veränderliche abwechselnd bald durch reelle, bald durch einfache imaginäre Inkremente in den letzten Grenzwert übergeht, so ist klar, dass diesem Integral kein anderer Werth, als der, am Ende des §. 13 durch  $\left(\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + qi} f u \, du\right)$  bezeichnete beizulegen ist.

Was aber die Reihe  $\delta_1 \vartheta_1 + \delta_2 \vartheta_2 + \dots + \delta_n \vartheta_n$  betrifft, so zerfällt sie vermöge der komplexen Form von  $\vartheta$  in die beiden Reihen  $\delta_1 \vartheta'_1 + \delta_2 \vartheta'_2 + \dots + \delta_n \vartheta'_n + i(\delta_1 \vartheta''_1 + \delta_2 \vartheta''_2 + \dots + \delta_n \vartheta''_n)$ .

Ist nun unter den unendlich kleinen Grössen  $\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2 \dots \mathcal{P}'_n$  und  $\mathcal{P}''_1, \mathcal{P}''_2 \dots \mathcal{P}''_n$ , unter jenen  $\mathcal{P}'_r$ , unter diesen  $\mathcal{P}''_r$  die grösste, so ist die Summe

$\delta_1 \mathcal{P}'_1 + \delta_2 \mathcal{P}'_2 \dots + \delta_n \mathcal{P}'_n < \mathcal{P}'_r (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n) + i \mathcal{P}''_r (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n)$ , also  $< \mathcal{P}'_r (q - \beta)$ , sie ist demnach unendlich klein und folglich ohne Einfluss auf den Werth des zu untersuchenden Integrals. Wir erhalten daher

$$\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + q i} f u \, du = \left( \int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + q i} f u \, du \right),$$

d. h. der an das Bildungsgesetz C. (S. §. 6) sich knüpfende Werth des Integrals  $\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + q i} f u \, du$  ist mit dem durch das Bildungsgesetz B, III. bedingten Werthe dieses Integrals identisch.

§. 17. Dem jetzt vorausgesetzten Bildungsgesetze gemäss verstehen wir unter dem

Integral  $\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + q i} \frac{d u}{u}$  die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \frac{1}{\alpha + \beta i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i) \frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + (\beta + \delta_1) i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i) \frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\beta + \delta_1 + \delta_2) i} \\ \dots + (\varepsilon_n + \delta_n i) \frac{1}{\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + (\beta + \delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}) i},$$

in welcher  $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n = p$  und  $\beta + \delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n = q$  ist.

Machen wir  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \dots = \varepsilon_n$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \dots = \delta_n$ , so finden wir

$$\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + q i} \frac{d u}{u} = (\varepsilon_1 + \delta_1 i) \left\{ \frac{1}{\alpha + \beta i} + \frac{1}{\alpha + \beta i + \varepsilon_1 + \delta_1 i} + \frac{1}{\alpha + \beta i + 2(\varepsilon_1 + \delta_1 i)} \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\alpha + \beta i + (n-1)(\varepsilon_1 + \delta_1 i)} \right\},$$

wo  $\alpha + \beta i + n(\varepsilon_1 + \delta_1 i) = p + q i$  ist. Folglich

$$\int_{\alpha + \delta i}^{\alpha + \delta i + p + q i} \frac{d u}{u} = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i}} + \frac{1}{1 + 2 \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i}} \dots + \frac{1}{1 + (n-1) \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i}} \right\},$$

wo  $1 + n \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i} = \frac{p + q i}{\alpha + \beta i}$  ist. Setzen wir endlich  $\frac{\varepsilon_1 + \delta_1 i}{\alpha + \beta i} = \varepsilon + \delta i$ , so ist

$$\int_{\alpha + \beta i}^{\alpha + \beta i + p + q i} \frac{d u}{u} = (\varepsilon + \delta i) \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \varepsilon + \delta i} + \frac{1}{1 + 2(\varepsilon + \delta i)} \dots + \frac{1}{1 + (n-1)(\varepsilon + \delta i)} \right\},$$

wo  $1 + n(\varepsilon + \delta i) = \frac{p + q i}{\alpha + \beta i}$  ist. Offenbar ist nun die rechtsstehende Summe die Definition des

Integrals  $\int_1^{\frac{p + q i}{\alpha + \beta i}} \frac{d u}{u}$ , unter Voraussetzung, dass die Inkremente komplex und sämmtlich gleich

$\varepsilon + \delta i$  sind. Folglich finden wir bei Berücksichtigung des §. 16, nach welchem dieses Integral

$$\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} = \left( \int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right), \text{ mithin nach §. 13} = \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i} \text{ ist,}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} = \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}.$$

Nun ist aber auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} = \left( \int_{\alpha+\beta i}^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right) = - \left( \int_1^{\frac{\alpha+\beta i}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right) + \left( \int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right) \\ = \log(p+qi) - \log(\alpha+\beta i);$$

folglich ergibt sich  $\log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i} = \log(p+qi) - \log(\alpha+\beta i)$  oder auch, wenn  $p+qi$  statt  $\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$ , mithin  $(p+qi)(\alpha+\beta i)$  statt  $p+qi$  gesetzt wird:

$$\log(p+qi)(\alpha+\beta i) = \log(p+qi) + \log(\alpha+\beta i),$$

woraus wir schliessen  $\log(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y + 2m\pi i$ , und zwar für alle reellen und imaginären Werthe von  $x$  und  $y$ .

§. 18. Einen wesentlichen Bestandtheil des Integrals  $\int_1^x \frac{du}{u}$  in dessen allgemeiner

Bedeutung bildet ein Integral von der Form  $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ , welches wir unter der Voraussetzung,

dass die Veränderlichen nur durch reelle Inkremente von 0 bis  $x$  fortschreitet, durch  $\text{Arc } \text{tg } x$  bezeichnet haben. Wir wollen nun auch diesem Integral eine allgemeinere Bedeutung unterlegen und auch in ihm imaginäre Inkremente der Veränderlichen zulassen. Da nun unter dieser Voraussetzung zwei Hauptarten B. und C. (S. §. 6) des Wachsthum der Veränderlichen stattfinden, beide Arten indess nach §. 16 in Rücksicht auf den Werth des zu untersuchenden Integrals zu demselben Ergebnisse führen, so wird offenbar durch Anwendung komplexer Inkremente die ganze Bedeutung dieses Integrals umfasst und erschöpft. Wir definiren demnach

jetzt das Integral  $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$  durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \frac{1}{1 + (\varepsilon_1 + \delta_1 i)^2} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i) \frac{1}{1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\delta_1 + \delta_2) i)^2} \\ \dots + (\varepsilon_n + \delta_n i) \frac{1}{1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}) i)^2},$$

in welcher  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_n + (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n) i = x$  ist, und bezeichnen diese Summe durch  $\text{arc } \text{tg } x$ . Demnach ist

$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{(u+i)(u-i)} = \frac{1}{2i} \left\{ \int_0^x \frac{du}{u-i} - \int_0^x \frac{du}{u+i} \right\}$ , in welchen beiden Integralen wiederum die Inkremente der Veränderlichen als komplex vorausgesetzt sind, so dass

$\int_0^x \frac{du}{u \mp i}$  durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \frac{1}{\mp i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i) \frac{1}{\varepsilon_1 + \delta_1 i \mp i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i) \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\delta_1 + \delta_2) i \mp i}$$

$$\dots + (\varepsilon_n + \delta_n i) \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}) i \mp i}$$

$$= x - (\varepsilon_n + \delta_n i)$$

zu definiren ist. Setzen wir nun in diesen beiden Integralen  $u'$  für jedes  $u \mp i$ , nämlich  
 $(\mp i)$  für  $(0) \mp i$ ,  
 $(\mp i + \varepsilon_1 + \delta_1 i)$  für  $(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \mp i$ ,  
 $(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2] i)$  für  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2] i) \mp i$ ,  
 $(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + [\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}] i)$  für  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_{n-1}) i) \mp i$ ,  
 welche neue Variable  $u'$  für  $u=0$  in  $\mp i$  und für  $u=x$  in  $x \mp i$  übergeht, so folgt:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \left\{ \int_{-i}^{x-i} \frac{du}{u} - \int_i^{x+i} \frac{du}{u} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ - \int_1^{-i} \frac{du}{u} + \int_1^{x-i} \frac{du}{u} - \left( - \int_1^i \frac{du}{u} + \int_1^{x+i} \frac{du}{u} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ - \log(-i) + \log(x-i) + \log i - \log(x+i) \right\}$$

folglich nach §. 17  $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \left\{ \log(1+xi) - \log(1-xi) \right\} = \frac{1}{2i} \log \frac{1+xi}{1-xi}$ ,

Darum nun  $\log \frac{1+xi}{1-xi}$  unendlich viele Werthe hat, welche sich um Vielfache von  $2\pi i$  unterscheiden, so hat auch  $\operatorname{arctg} x$  unendlich viele Werthe, deren Unterschiede Vielfache von  $\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i$ , also von  $\pi$  sind. Ist also  $(\operatorname{arctg} x)$  einer dieser Werthe, so haben wir

$$\operatorname{arctg} x = (\operatorname{arctg} x) + m\pi.$$

§. 19. Um nun dem Ausdruck für  $\operatorname{arctg} x$ , wo  $x=p+qi$  ist, ebenfalls die Form  $p+qi$  zu geben, brauchen wir nur in die Gleichung  $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+xi}{1-xi}$  für  $x$  den Werth  $p+qi$  einzutragen. Dann ist

$$\operatorname{arctg}(p+qi) = \frac{1}{2i} \log \frac{1-q+pi}{1+q-pi} = \frac{1}{2i} \log \frac{1-q^2-p^2+2pi}{(1+q)^2+p^2} = \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{1-q^2-p^2}{(1+q)^2+p^2} + \frac{2p}{(1+q)^2+p^2} \times i \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \log (P+Qi).$$

Ist  $P$  positiv, also  $1 - q^2 - p^2 > 0$ , folglich  $p^2 + q^2 < 1$ , so erhalten wir nach §. 14

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (p + qi) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} (P^2 + Q^2) + i \operatorname{Arctg} \frac{Q}{P} + 2m\pi i \right\},$$

ist  $P$  negativ, also  $1 - q^2 - p^2 < 0$ , mithin  $p^2 + q^2 > 1$ , so haben wir

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (p + qi) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Log} (P^2 + Q^2) + i \operatorname{Arctg} \frac{Q}{P} + (2m + 1)\pi i \right\}.$$

Nun ist  $P^2 + Q^2 = \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{((1 + q)^2 + p^2)^2}$  und  $\frac{Q}{P} = \frac{2p}{1 - q^2 - p^2}$ ; folglich haben wir

im ersten Falle

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (p + qi) = \frac{1}{4i} \operatorname{Log} \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{((1 + q)^2 + p^2)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2p}{1 - q^2 - p^2} + m\pi,$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (p + qi) = \frac{1}{4i} \operatorname{Log} \frac{(1 - q^2 - p^2)^2 + 4p^2}{((1 + q)^2 + p^2)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2p}{1 - q^2 - p^2} + \left( \frac{2m + 1}{2} \right) \pi.$$

§. 20. Aus der in §. 18 für  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  entwickelten Formel folgt ferner:

$$\text{I. } \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-x) = \frac{1}{2i} \left\{ \log \frac{1 + xi}{1 - xi} + \log \frac{1 - xi}{1 + xi} \right\} = \frac{1}{2i} \log 1 = m\pi,$$

$$\text{II. } \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{2i} \left\{ \log \frac{1 + xi}{1 - xi} + \log \frac{x + i}{x - i} \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \log \frac{x - i}{-x - i} + \log \frac{x + i}{x - i} \right\}$$

$$= \frac{1}{2i} \log (-1) = \left( \frac{2m + 1}{2} \right) \pi.$$

$$\text{III. } \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \frac{1}{2i} \left\{ \log \frac{1 + xi}{1 - xi} + \log \frac{1 + yi}{1 - yi} \right\} = \frac{1}{2i} \log \frac{(1 + xi)(1 + yi)}{(1 - xi)(1 - yi)}$$

$$= \frac{1}{2i} \log \frac{1 - xy + (x + y)i}{1 - xy - (x + y)i} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \frac{x + y}{1 - xy} i}{1 - \frac{x + y}{1 - xy} i} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Es sei  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \alpha$ , so ist auch  $x$  eine Funktion von  $\alpha$ , die wir durch  $\operatorname{tg} \alpha$  bezeichnen; dergleichen haben wir, wenn  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \beta$  ist,  $y = \operatorname{tg} \beta$ . Da  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  unendlich-vieldeutig ist, oder  $\alpha$  unendlich viele Werthe hat, die sich um Vielfache von  $\pi$  unterscheiden, so muss  $x$ , als Funktion von  $\alpha$  betrachtet, immer zu demselben Werthe zurückkehren, so oft  $\alpha$  um  $\pi$  gewachsen ist. Demnach ist die Funktion  $x = \operatorname{tg} \alpha$  periodisch, und der Index ihrer Periode ist  $\pi$ , also  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + m\pi)$ . Substituiren wir aber die Werthe von  $x$  und  $y$  in die Formel III., so erhalten wir  $\alpha + \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ; folglich umgekehrt

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Anmerkung. So wie wir die Formeln I. und II., jedoch mit der Einschränkung, dass die Funktion  $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$  nur den eindeutigen  $\operatorname{Arctg}$  vorstellt, der die Grenze  $\frac{\pi}{2}$  nicht überschreiten darf, schon früher (S. §. 11) aus der Gleichung III. §. 5 abgeleitet haben, so liess sich auch die Formel III. unter der angegebenen Einschränkung aus der nämlichen Gleichung entwickeln. Setzen wir

nämlich in die Gleichung III. des §. 5  $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2 v} dv = \int_{\varphi_{\alpha}}^{\varphi_{\beta}} \frac{du}{1+u^2}$  statt  $\varphi_v$  die Funktion

$\frac{x+v}{1-xv}$ , also  $\varphi_{\alpha} = \frac{x+\alpha}{1-x\alpha}$ ,  $\varphi_{\beta} = \frac{x+\beta}{1-x\beta}$ ,  $\varphi'_v = \frac{1+x^2}{(1-xv)^2}$ , so erhalten wir für  $\alpha=0$  und  $\beta=z$

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+v}{1-xv}\right)^2} \times dv, \text{ das ist } \int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2 + (x+v)^2} dv = \int_x^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{1+x^2 v^2 + x^2 + v^2} dv \text{ oder } \int_0^z \frac{1+x^2}{(1+x^2) + v^2(1+x^2)} dv \text{ oder } \int_0^z \frac{dv}{1+v^2} = \text{Arctg } v \Big|_0^z = \text{Arctg } z - \text{Arctg } 0 = \text{Arctg } z;$$

folglich  $\text{Arctg } \frac{x+z}{1-xz} = \text{Arctg } x + \text{Arctg } z$ . Diese Formel gilt aber, vorausgesetzt, dass  $x$  und  $z$

beiderseits positiv sind, nur so lange, als  $z < \frac{1}{x}$  ist, da die Funktion  $\varphi z = \frac{x+z}{1-xz}$  für den Werth  $z = \frac{1}{x}$  diskontinuirlich wird. Es war daher der von uns eingeschlagene Weg nothwendig, um diese Formel allgemein zu beweisen.

§. 21. Wenden wir uns nun zu der umgekehrten Funktion des Logarithmus. Aus der Gleichung  $\log x = \text{Log } x + 2m\pi i$  folgt, dass  $x$  eine Funktion von  $\text{Log } x + 2m\pi i$  ist, welche keine andere sein kann, als  $e^{\text{Log } x + 2m\pi i}$ , da sie nach §. 9 für  $m=0$  sich in  $e^{\text{Log } x}$  verwandeln muss. Aus der Gleichung  $x = e^{(y = \text{Log } x) + 2m\pi i}$  folgt aber, dass die Funktion  $e^y$  so oft zu demselben Werthe zurückkehrt, als der Exponent  $y$  um ein Vielfaches von  $2\pi i$  vermehrt wird, dass also  $e^y$  eine periodische Funktion ist und zum Index der Periode  $2\pi i$  hat. Obschon nun leicht zu sehen ist, dass die unter Voraussetzung reeller Exponenten gültigen Regeln der Potenzenrechnung auch auf Potenzen von der Form  $e^{p+qi}$  auszudehnen sind — denn jedes beliebige  $p+qi$  ist  $= \log(P+Qi)$ , woraus, weil  $\log(P+Qi)(P'+Q'i) = \log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)$ , also auch  $(P+Qi)(P'+Q'i) = e^{\log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)}$  ist, unmittelbar folgt  $e^{p+qi} \times e^{p'+q'i} = e^{(p+p') + (q+q')i}$  — so ist doch die Potenz  $e^{p+qi}$  in diesem Augenblicke für uns eine leere Form, und es bleibt noch die Aufgabe übrig, die Bedeutung dieser imaginären Potenz festzustellen.

§. 22. Diese Aufgabe reducirt sich, da  $e^{p+qi} = e^p e^{qi}$  ist, auf die, den Werth von  $e^{qi}$  zu ermitteln. Es sei  $e^{qi} = f_1(q) + if_2(q)$ , also  $qi = \log \{f_1(q) + if_2(q)\}$ .

Folglich nach §. 14

$$qi = \frac{1}{2} \text{Log} (f_1^2 + f_2^2) + i \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi i, \text{ wenn } f_1 \text{ positiv ist,}$$

$$qi = \frac{1}{2} \text{Log} (f_1^2 + f_2^2) + i \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi i, \text{ wenn } f_1 \text{ negativ ist.}$$

Beide Gleichungen sind nur dann möglich, wenn der reelle Theil = 0 ist; folglich  $\text{Log} (f_1^2 + f_2^2) = 0$ , also  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ .

Daher

$$(a) \quad q = \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi, \text{ wenn } f_1 \text{ positiv,}$$

$$(b) \quad q = \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi, \text{ wenn } f_1 \text{ negativ ist.}$$

Um nun die übrigen Eigenschaften der Funktionen  $f_1(q)$  und  $f_2(q)$  zu finden, geben wir der Veränderlichen  $q$  der Reihe nach die Werthe  $2m\pi$ ,  $2m\pi + \gamma$  ( $< \frac{\pi}{2}$ ),  $2m\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $(2m+\frac{1}{2})\pi + \gamma$ ,  $(2m+1)\pi$ ,  $(2m+1)\pi + \gamma$  und  $(2m+\frac{3}{2})\pi$ .

1) Es sei  $q = 2m\pi$ , so kann die Gleichung (b) nicht statt finden; denn sonst wäre  $2m\pi = \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi$ ; folglich

$$= \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = -\pi, \text{ was unmöglich ist, da der absolute Werth von Arc tg die Grenze } \frac{\pi}{2} \text{ nicht übersteigen kann. Folglich ist nur die Gleichung (a) anwendbar; daher } f_1 \text{ positiv und } \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = 0, \text{ also auch } \frac{f_2}{f_1} = 0, \text{ folglich } f_2 = 0.$$

Nun ist  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ ; folglich  $f_1 = +1$ .

Also  $f_1(2m\pi) = +1$ ,  $f_2(2m\pi) = 0$ .

2) Ist  $q = 2m\pi + \gamma$  und  $\gamma < \frac{\pi}{2}$ , so kann die Gleichung (b) wiederum nicht stattfinden; denn sonst wäre

$$2m\pi + \gamma = \text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ folglich}$$

$$\text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = \gamma - \pi = -(\pi - \gamma);$$

da nun  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  ist, so wäre der absolute Werth von  $\text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1}$  wiederum  $> \frac{\pi}{2}$  was unmöglich ist.

Es ist also nur die Gleichung (a) anwendbar; daher  $f_1$  positiv und  $\text{Arc tg} \frac{f_2}{f_1} = \gamma$ , also  $\frac{f_2}{f_1} = \text{tg} \gamma$  und  $f_2 = f_1 \text{tg} \gamma$ .

Folglich  $f_1^2 + f_2^2 \text{tg}^2 \gamma = 1$ , also  $f_1 = + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}$ .

$$\text{Also } f_1(2m\pi + \gamma) = + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}, \quad f_2(2m\pi + \gamma) = + \frac{\text{tg} \gamma}{1 + \sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}.$$

3) Es sei  $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ . Da  $f_1(2m\pi + \gamma)$  bis zum Uebergange in  $f_1(2m\pi + \frac{\pi}{2})$  bestän-



dig positiv bleibt, so ist nur die Gleichung (a) anwendbar, und man erhält  $\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$ , also  $f_1 = 0$ , während  $f_2$  positiv, und da  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ , gleich  $+1$  ist.

Also  $f_1(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ ,  $f_2(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = +1$ .

4) Es sei  $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma$ , so ist die Gleichung (a) unzulässig, denn sonst wäre  $2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi$ , also

$$\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma, \text{ was unmöglich ist.}$$

Folglich erhalten wir aus der Gleichung (b)

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ also}$$

$$\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = -(\frac{\pi}{2} - \gamma), \text{ mithin } \frac{f_2}{f_1} = -\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma);$$

denn da  $\text{Arc tg}(-x) = -\text{Arc tg } x$  ist (S. §. 11), so folgt  $-x = \text{tg}(-\text{Arc tg } x)$ , mithin  $-\text{tg } \alpha = \text{tg}(-\alpha)$ , wenn  $\text{Arc tg } x = \alpha$  gesetzt wird.

Da nun wegen Gültigkeit der Gleichung (b)  $f_1$  negativ sein muss, so ist  $f_2$  positiv und  $f_1^2 + f_2^2 \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma) = 1$ , also  $f_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}$ ,  $f_2 = -f_1 \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}$ ;

setzen wir  $\frac{\pi}{2} + \gamma = \gamma'$ , also  $\gamma = \gamma' - \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} - \gamma = \pi - \gamma'$ , so ist

$$f_1(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi - \gamma')}} , f_2(2m\pi + \gamma) = \frac{\text{tg}(\pi - \gamma')}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi - \gamma')}} , \text{ wo } \gamma > \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

5) Ist  $q = (2m+1)\pi$ , so giebt die Gleichung (a)

$$2m\pi + \pi = \text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi, \text{ also } \text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = \pi,$$

was unmöglich ist. Aus der Gleichung (b) erhält man aber  $\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = 0$ , folglich  $f_2 = 0$ ; nun ist  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ , folglich wegen Gültigkeit der Gleichung (b)  $f_1 = -1$ .

Also  $f_1(2m\pi + \pi) = -1$ ,  $f_2(2m\pi + \pi) = 0$ .

6) Ist  $q = 2m\pi + \pi + \gamma$ , so ist ebenfalls nur die Gleichung (b) anwendbar; man findet daher  $f_1$  negativ und  $\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = \gamma$ , also  $f_2 = f_1 \text{tg } \gamma$ ;

$$\text{folglich } f_1(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}, f_2(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{\text{tg } \gamma}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}.$$

Setzen wir  $\pi + \gamma = \gamma'$ , so folgt

$$f_1(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\gamma' - \pi)}}, f_2(2m\pi + \gamma) = -\frac{\text{tg}(\gamma' - \pi)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\gamma' - \pi)}}, \text{ wo } \gamma > \pi \text{ ist.}$$

7) Ist  $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$ , so folgt aus der jetzt allein anwendbaren Gleichung (b), dass  $f_1$  negativ und  $\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = +\frac{\pi}{2}$  ist; daher  $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$ , also  $f_1 = -0$  und  $f_2$  ebenfalls negativ und zwar  $= -1$ , vermöge der Gleichung  $f_1^2 + f_2^2 = 1$ .

$$\text{Also } f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = 0, f_2(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1.$$

8) Ist  $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma$ , so würde aus der Gleichung (b) folgen, dass der kleinste Werth von  $\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma$  ist, was nicht der Fall sein kann. Daher ist nur die Gleichung (a)

anwendbar und man erhält  $f_1$  positiv und  $2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma = \text{Arctg } \frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + 2\pi$ , folglich

$$\text{Arc tg } \frac{f_2}{f_1} = -(\frac{\pi}{2} - \gamma), f_2 = -f_1 \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma);$$

vermöge der Gleichung  $f_1^2 + f_2^2 = 1$  finden wir also  $f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}$ ,

$$f_2(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma) = -\frac{\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}.$$

Setzen wir  $\frac{3\pi}{2} + \gamma = \gamma'$ , so ergibt sich

$$f_1(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(2\pi - \gamma)}}, f_2(2m\pi + \gamma) = -\frac{\text{tg}(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(2\pi - \gamma)}},$$

wo  $\gamma > \frac{3\pi}{2}$  ist.

§. 23. Bezeichnen wir die Funktion  $f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 q}}$  durch  $\cos q$  und  $f_2(q) = \frac{\text{tg } q}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 q}}$

durch  $\sin q$ , so finden wir

$$e^{qi} = \cos q + i \sin q \text{ und}$$

$$e^{(q + 2m\pi)i} = \cos(q + 2m\pi) + i \sin(q + 2m\pi) = e^{qi} \text{ nach §. 21;}$$

$$\text{folglich } \cos(q + 2m\pi) = \cos q \text{ und } \sin(q + 2m\pi) = \sin q.$$

Beide Funktionen  $\cos q$  und  $\sin q$  sind also periodisch, und der Index ihrer Periode ist  $2\pi$ .

Ist daher  $\begin{cases} \cos q \\ \text{oder } \sin q \end{cases} = x$ , so ist umgekehrt  $q$ , als eine Funktion von  $x$  betrachtet, die wir durch  $\begin{cases} \text{arc } \cos x \\ \text{oder } \text{arc } \sin x \end{cases}$  bezeichnen, unendlich vieldeutig, und verstehen wir unter  $\text{Arc } \cos x$  und  $\text{Arc } \sin x$  den kleinsten arcus, so ist  $\text{arc } \cos x = \text{Arc } \cos x + 2m\pi$ ,  $\text{arc } \sin x = \text{Arc } \sin x + 2m\pi$ . Die Gesetze des Wachsens und Abnehmens der beiden Funktionen  $\cos q$  und  $\sin q$  ergeben sich nach §. 22 aus folgenden Gleichungen:

$$1) \cos(2m\pi) = +1, \sin(2m\pi) = 0.$$

$$2) \cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}, \sin(2m\pi + \gamma) = +\frac{\text{tg } \gamma}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \gamma}}, \text{ wo } \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

$$3) \cos(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0, \sin(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = +1.$$

4) Wenn  $\pi > \gamma > \frac{\pi}{2}$  ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi - \gamma)}} = -\cos(\pi - \gamma), \sin(2m\pi + \gamma) = +\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi - \gamma)}} = +\sin(\pi - \gamma).$$

$$5) \cos(2m\pi + \pi) = -1, \sin(2m\pi + \pi) = 0.$$

6) Wenn  $\frac{3\pi}{2} > \gamma > \pi$  ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \pi)}} = -\cos(\gamma - \pi), \sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma - \pi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\gamma - \pi)}} = -\sin(\gamma - \pi).$$

$$7) \cos(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = 0, \sin(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1.$$

8) Wenn  $2\pi > \gamma > \frac{3\pi}{2}$  ist, so wird

$$\cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}} = \cos(2\pi - \gamma), \sin(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\pi - \gamma)}} = -\sin(2\pi - \gamma).$$

§. 24. Da  $e^{(p \pm q)i} = e^{pi} \cdot e^{\pm qi}$  ist, so folgt

$$\begin{aligned} \cos(p \pm q) + i \sin(p \pm q) &= (\cos p + i \sin p) (\cos q \pm i \sin q) \\ &= \cos p \cos q \mp \sin p \sin q + i (\sin p \cos q \pm \cos p \sin q). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cos(p \pm q) = \cos p \cos q \mp \sin p \sin q,$$

$$\sin(p \pm q) = \sin p \cos q \pm \cos p \sin q,$$

woraus sich die noch übrigen Eigenschaften der Funktionen  $\sin q$  und  $\cos q$  leicht entwickeln lassen.

§. 25. Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius 1, legen durch dessen Mittelpunkt O die Koordinatenaxen OX und OY und schneiden von dem Durchschnittspunkt A der Abscissenaxe aus einen Bogen AB = q ab, so sind die auf den Endpunkt B des abgeschnittenen Bogens AB bezogenen Koordinaten Funktionen von q, und es sei die Ordinate BD oder  $y = F_1(q)$ , die Abscisse DO oder  $x = F_2(q)$ . Da nun  $F_1(q=0) = 0$ ,  $F_2(q=0) = 1$  ist; da ferner für jeden Werth von q die entsprechenden Werthe von  $F_1(q)$  und  $F_2(q)$  der Gleichung  $F_1^2(q) + F_2^2(q) = 1$  Genüge leisten: so müssen diese beiden Funktionen  $F_1(q)$  und  $F_2(q)$  von den Werthen  $F_1(0) = 0$  und  $F_2(0) = 1$  ab bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Bogens q genau um so viel wachsen und abnehmen, um wie viel die Funktionen  $\sin q$  und  $\cos q$  von den Werthen  $\sin 0 = 0$  und  $\cos 0 = 1$  ab bei jedem unendlich kleinen Inkrement der Veränderlichen q wachsen und abnehmen. Folglich müssen die Funktionen  $F_1(q)$  und  $F_2(q)$  für jeden Werth des Bogens q mit den Werthen von  $\sin q$  und  $\cos q$  genau übereinstimmen. Daher lassen sich die beiden letztern Funktionen  $\sin q$  und  $\cos q$  durch die, auf den Endpunkt B eines, von der Abscissenaxe aus immer nach derselben Richtung abgeschnittenen Bogens AB = q bezogenen Koordinaten x und y geometrisch darstellen, und zwar ist die Abscisse  $x = \cos q$ , die Ordinate  $y = \sin q$ . Da nun

