Beleuchtung

der

wesentlichsten Argumente des Abel'schen Beweises der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höhern Graden als dem vierten aufzulösen.

Von

[illegible]

Im Jahre 1826 machte der durch seine tiefsinnigen Schöpfungen unsterbliche Mathematiker Abel in der von Crelle edirten Zeitschrift einen Aufsatz bekannt, in welchem die Unmöglichkeit bewiesen wird, Gleichungen von höhern als dem vierten Grade allgemein aufzulösen. So einfach dieser Beweis ist, erstens weil ein einziger Gedanke durchgehends zum entscheidenden Kriterium dient, zweitens weil diejenigen Wahrheiten, kraft deren die Anwendung des Hauptgedankens möglich ist, nicht durch künstliche Rechnungen, sondern durch Urtheile und Schlüsse vermittelt werden; so erheischt er dennoch, ja eben deswegen das gesammeltste Nachdenken, um in seiner ganzen Klarheit begriffen zu werden. Es dürfte daher keine unnöthige Arbeit sein, die wichtigsten Argumente dieses eben so lehrreichen als schwierigen Beweises durch Beispiele und weitere Ausführung in ihrem wahren Sinne und in ihrer vollständigen Beweiskraft zur Anschauung zu bringen.

§ 1. Die Unmöglichkeit, Gleichungen von höhern als dem vierten Grade allgemein aufzulösen, folgt offenbar aus der Unauflösbarkeit der algebraischen Gleichung des fünften Grades. Denn angenommen, die algebraische Gleichung des sechsten Grades

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

sei auflösbar, d. h. es gebe eine algebraische Funktion der Koefficienten, welche, an die Stelle der Unbekannten gesetzt, der Gleichung genug thut, so würde, wenn sowohl in dieser Gleichung, als auch in ihrem allgemeinen Wurzelausdruck der Koefficient $f = 0$ gesetzt wird, sofort ein allgemeiner Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

gefunden sein. Man braucht also nur zu beweisen, daß es unmöglich ist, algebraische Gleichungen vom fünften Grade allgemein aufzulösen.

§ 2. Grundgedanke des Beweises. Man hat eine algebraische Funktion der ersten Ordnung, wenn eine rationale Funktion unter einem Wurzelzeichen steht, dessen Exponent eine Primzahl ist; man hat eine algebraische Funktion der zweiten Ordnung, wenn eine algebraische Funktion der ersten Ordnung unter einem Wurzelzeichen steht, dessen Exponent eine Primzahl ist; man hat ein algebraische Funktion der $m$ten Ordnung, wenn eine algebraische Funktion der

$m - 1$ten Ordnung unter einem Wurzelzeichen steht, dessen Exponent eine Primzahl ist. Demnach ist der Wurzelausdruck einer Gleichung aus algebraischen Funktionen einer gewissen Ordnung zusammengesetzt, welche ihrerseits algebraische Funktionen einer niedrigern Ordnung und zuletzt rationale Funktionen der Koefficienten enthalten. So ist der Wurzelausdruck der kubischen Gleichung

$$x^3 + ax + b = o$$

aus den algebraischen Funktionen der zweiten Ordnung

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \text{ und } \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

zusammengesetzt; aber diese enthalten die algebraische Funktion der ersten Ordnung $\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$, welche nur noch aus rationalen Funktionen besteht. Bekanntlich lassen sich nun alle rationalen Funktionen, welche der Wurzelausdruck enthält, als symmetrische Funktionen der Wurzeln der Gleichung darstellen. Was aber die, im Wurzelausdruck vorkommenden algebraischen Funktionen betrifft, so wird bewiesen werden, daß sich jede derselben als rationale Funktion der Wurzeln darstellen läßt. Sind z. B. x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln der kubischen Gleichung und bedeutet α die primitive 3te Wurzel der Einheit, so ist

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} = \tfrac{1}{3}\,(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3) \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = \frac{\alpha - \alpha^2}{18}\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_3).$$

Demnach können allen Funktionen, aus welchen der Wurzelausdruck einer Gleichung zusammengesetzt ist, einmal als algebraische Funktionen der Koefficienten der Gleichung, zum Andern aber als rationale Funktionen der Wurzeln dargestellt werden. Als algebraische Funktion betrachtet, hat jeder Theil des Wurzelausdrucks verschiedene Werthe in Folge der Wurzelzeichen. Als rationale Funktion betrachtet, erhält jeder Theil des Wurzelausdrucks verschiedene Werthe durch Vertauschung der Elemente. So hat der eine Theil des Wurzelausdrucks der kubischen Gleichung

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

als diese algebraische Funktion betrachtet, vermöge der Vieldeutigkeit der Wurzeln 6 verschiedene Werthe, und die algebraische Funktion $\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ hat als solche 2 verschiedene Werthe. Aber auch der rationale Ausdruck der erstern $x_1 + \alpha x^2 + \alpha^2 x_3$ erhält durch Vertauschung der Elemente 6 verschiedene Werthe, und der rationale Ausdruck der letztern $(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_3)$ erhält durch Vertauschung der Elemente nicht mehr als 2 verschiedene Werthe. Mag also ein beliebiger Theil des Wurzelausdrucks als algebraische Funktion der Koefficienten oder als rationale Funktion der Wurzeln dargestellt werden, so bleibt die Anzahl seiner verschiedenen Werthe dieselbe. Aber nicht so bei der Gleichung des fünften Grades, sondern

> **der in seinen möglichen Formen vorgestellte Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades ist aus algebraischen Funktionen zusammengesetzt, welche thatsächlich nicht so viel Werthe haben, als die ihnen entsprechenden rationalen Ausdrücke, und doch läßt sich von diesen rationalen Ausdrücken beweisen, daß sie durch Vertauschung der Elemente eben so viel Werthe erhalten sollten, als jene algebraischen Funktionen durch ihre Wurzelzeichen.**

Dieser Widerspruch macht es undenkbar, daß es eine algebraische Funktion der Koefficienten gebe, welche der Gleichung des fünften Grades genug thut.

§ 3. Hülfssatz I. **Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel jederzeit eine solche Form geben, daß sich alle algebraischen Funktionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Funktionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.**

Es sei die Gleichung

$$y^n + c_1 y^{n-1} + c_2 y^{n-2} \ldots\ldots + c_{n-1} y + c_n = 0$$

algebraisch auflösbar, so muß es eine rationale Funktion von algebraischen Funktionen der Koefficienten geben, welche dieser Gleichung genug thut. Diese rationale Funktion sei

$$f\,(r', r'' \ldots\ldots \sqrt[m]{p}),$$

wo r', r'', $\sqrt[m]{p}$ ꝛc. algebraische Funktionen der Koefficienten und zwar von der höchsten Ordnung sind. Aber diese Funktion muß sich auf die Form

$$q_0 + p^{\frac{1}{m}} + q_2\, p^{\frac{2}{m}} + q_3\, p^{\frac{3}{m}} \ldots\ldots + q_{m-1}\, p^{\frac{m-1}{m}}$$

bringen lassen, wo $q_0, q_2, q_3 \ldots q_{m-1}$ rationale Funktionen von p, r', r'' ꝛc. sind. Denn man kann, wie Abel ausführlich beweist, jede rationale Funktion von algebraischen Funktionen nach Potenzen einer herausgehobenen Wurzelgröße $p^{\frac{1}{m}}$ ordnen, dann die Koefficienten q_0, q_2 ꝛc., mögen sie immerhin noch andere algebraische Funktionen enthalten, in Bezug auf p rational machen und endlich den Koefficienten von $p^{\frac{1}{m}}$ gleich 1 machen. So läßt sich der Wurzelausdruck der kubischen Gleichung auf nachstehende Form bringen

$$q_0 + p^{\frac{1}{3}} + q_2\, p^{\frac{2}{3}},$$

wo $q_0 = 0$, $q_2 = -\dfrac{a}{3p}$ und $p = -\dfrac{b}{2} + \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^3}{27}}$ ist.

Setzt man den gefundenen Wurzelausdruck an die Stelle von y in die gegebene Gleichung, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$r_o + r_1 p^{\frac{1}{m}} + r_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots . + r_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}} = o,$$

wo die Koefficienten r_o, $r_1 \ldots r_{m-1}$ rationale Funktionen von p, q_o, q_2 ꝛc. sind. Wird z. B. der Wurzelausdruck $p^{\frac{1}{3}} + q p^{\frac{2}{3}}$ an die Stelle von x in die kubische Gleichung gesetzt; so entsteht die Gleichung

$$b + p + p^2 q^3 + (a + 3\,pq)\, p^{\frac{1}{3}} + (aq + 3\,pq^2)\, p^{\frac{2}{3}} = o.$$

Aber jeder Koefficient desjenigen Ausdrucks, in welchen eine gegebene Gleichung durch Substitution ihres Wurzelausdrucks an die Stelle der Unbekannten übergeht, muß gleich Null sein. Denn angenommen, die Koefficienten r_o, r_1 ꝛc. sind nicht gleich Null, so erhält man, wenn $p^{\frac{1}{m}} = z$ gesetzt wird, die beiden Gleichungen

$$z^m - p = o \quad \text{und} \quad r_o + r_1 z + r_2 z^2 \ldots\ldots + r_{m-1} z^{m-1} = o.$$

Es wäre demnach die Gleichung $z^m - p$ reduktibel, d. h. z ließe sich nicht bloß als Wurzel einer Gleichung des mten Grades, sondern auch als Wurzel einer niedrigern Gleichung darstellen, deren Koefficienten auch noch rationale Funktionen von p sind. Allein die Gleichung $z^m - p = o$ ist irreduktibel, d. h. es giebt zwischen z und rationalen Funktionen von p keine Gleichung eines niedrigern Grades als vom mten Grade. (So ist z. B. die Gleichung $z^2 - 2$ irreduktibel, weil z zwar auch als Wurzel einer Gleichung des ersten Grades $z - \sqrt{2} = o$, aber nur einer solchen, deren Koefficienten irrational sind, dargestellt werden kann.) Denn angenommen, eine irreduktible Gleichung zwischen z und rationalen Funktionen von p sei vom μten Grade, nämlich

$$t_o + t_1 z + t_2 z^2 \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = o,$$

und $\mu < m$, so muß μ mindestens gleich 2 sein, weil sonst z eine rationale Funktion von p, r_o, r_1 ꝛc. wäre, was nicht der Fall sein soll. Diese Gleichung hat nun ihre μ Wurzeln mit der Gleichung $z^m - p = o$ gemein; denn jede dieser Wurzeln stellt einen Werth von $p^{\frac{1}{m}}$ vor. Da aber jeder Werth von $p^{\frac{1}{m}}$ aus einem andern durch Multiplikation mit α entsteht, wo α die primitive mte Wurzel der Einheit ist, so erhält man mindestens zwei Gleichungen von der Form

$$t_o + t_1 z + t_2 z^2 \ldots\ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = o$$

$$t_o + \alpha t_1 z + \alpha^2 t_2 z^2 \ldots . \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^\mu z^\mu = o.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen z^μ, so folgt

$$t_o (1-\alpha^\mu) + t_1 (\alpha-\alpha^\mu) z \ldots\ldots + t^{\mu-1} (\alpha^{\mu-1}-\alpha^\mu) z^{\mu-1} = o.$$

Da aber die Gleichung

$$t_o + t_1 z \ldots\ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = o$$

irreduktibel ist, so müssen die Koefficienten der zuletzt entstandenen Gleichung einzeln gleich Null sein, woraus man erhält

$$\alpha^{\mu} - 1 = o,\ \alpha^{\mu-1} - 1 = o,\ \alpha^{\mu-2} - 1 = o,\ \ldots .\ \alpha - 1 = o,$$

was nicht möglich ist. Folglich ist die Gleichung $z^m - p$ irreduktibel. Folglich muß die Gleichung des m-1ten Grades zwischen z und rationalen Funktionen von p identisch gleich Null sein; folglich

$$r_o = o,\ r_1 = o,\ r_2 = o,\ \ldots .\ r_{m-1} = o.$$

Setzt man daher in dem Wurzelausdruck der gegebenen Gleichung statt $p^{\frac{1}{m}}$ nach und nach $\alpha p^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{m}} \ldots . \alpha^{m-1} p^{\frac{1}{m}}$, so müssen die daraus hervorgehenden Werthe ebenfalls der gegebenen Gleichung genug thun. Denn die Koefficienten r_o, r_1, r_2 ꝛc. sind alsdann dieselben Funktionen von $\alpha^m p$, q_o, ꝛc., $\alpha^{2m} p$, q_o ꝛc. .... $\alpha^{(m-1)m} p^m$, q_o ꝛc., wie vorher von p, q_o ꝛc. Da aber α^m, α^{2m} ꝛc. $= 1$ ist, so haben sich die Koefficienten r_o, r_1, r_2 ꝛc. durch die angegebenen Substitutionen gar nicht verändert und sind daher auch jetzt noch einzeln gleich Null. Folglich erfüllen außer dem ursprünglichen Wurzelausdruck auch noch die m-1 hinzugekommenen Werthe desselben die gegebene Gleichung.

Alle diese m Werthe des Wurzelausdrucks sind von einander verschieden. Denn wären z. B. zwei Werthe einander gleich, so wäre

$$q_o + \alpha^r p^{\frac{1}{m}} + q_2 \alpha^{2r} p^{\frac{2}{m}} \ldots . + q_{m-1} \alpha^{(m-1)r} p^{\frac{m-1}{m}} = q_o + \alpha^k p^{\frac{1}{m}} + q_2 \alpha^{2k} p^{\frac{2}{m}} \ldots . + q_{m-1} \alpha^{(m-1)k} p^{\frac{m-1}{m}},$$

folglich $$p^{\frac{1}{m}} (\alpha^r - \alpha^k) + q_2 p^{\frac{2}{m}} (\alpha^{2r} - \alpha^{2k}) \ldots . + q_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}} (\alpha^{(m-1)r} - \alpha^{(m-1)k}) = o.$$

Folglich würde man eine Gleichung erhalten von der Form

$$r_o + r_1 p^{\frac{1}{m}} + r_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots r_{m-1} p^{\frac{m-2}{m}} = r_o + r_1 z + r_2 z^2 \ldots r_{m-2} z^{m-2} = o,$$

wo die Koefficienten offenbar nicht gleich Null und rationale Funktionen von p, q_o ꝛc. wären, was nicht der Fall sein kann, da die Gleichung $z^m - p = o$ irreduktibel ist.

Diese m verschiedenen Werthe der Wurzel sind:

$$y_1 = q_o + p^{\frac{1}{m}} + q_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots . + q_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_2 = q_o + \alpha p^{\frac{1}{m}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots . + \alpha^{m-1} q_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_3 = q_o + \alpha^2 p^{\frac{1}{m}} + \alpha^4 q_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots . + \alpha^{m-2} q_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m = q_o + \alpha^{m-1} p^{\frac{1}{m}} + \alpha^{m-2} q_2 p^{\frac{2}{m}} \ldots + \alpha q_{m-1} p^{\frac{m-1}{m}}.$$

Addirt man diese m Gleichungen, so folgt

$$q_o = \tfrac{1}{m}\,(y_1 + y_2 + y_3 \,.\,.\,.\,.\,.\, + y^m),$$

da $1 + \alpha + \alpha^2 \ldots + \alpha^{m-1} = o,\ 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \ldots + \alpha^{m-2} = o,$

$\ldots .\ 1 + \alpha \ldots + \alpha^{m-2} + \alpha^{m-1} = o$ ist.

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit α^{m-1}, die dritte mit α^{m-2}, ... die mte mit α und addirt wiederum alle m Gleichungen, so folgt

$$p^{\frac{1}{m}} = \tfrac{1}{m}\,(y_1 + \alpha^{m-1}\,y_2 + \alpha^{m-2}\,y_3 \,.\,.\,.\,.\, + \alpha\,y_m).$$

Multiplicirt man hierauf die zweite von den obigen Gleichungen mit α^{m-2}, die dritte mit α^{m-4}, ... die mte mit α^2 und addirt alle m Gleichungen, so folgt

$$q_2\,p^{\frac{1}{m}} = \tfrac{1}{m}\,(y_1 + \alpha^{m-2}\,y_2 + \alpha^{m-4}\,y_3 \,.\,.\,.\,.\, + \alpha^2\,y_m),$$

und multiplicirt man zuletzt die zweite von den obigen Gleichungen mit α, die dritte mit α^2, ... die mte mit α^{m-1} und addirt, so folgt

$$q_{m-1}\,p^{\frac{m-1}{m}} = \tfrac{1}{m}\,(y_1 + \alpha\,y_2 + \alpha^2\,y_3 \,.\,.\,.\,.\,.\, + \alpha^{m-1}\,y_m),$$

und im Allgemeinen findet man

$$q_\mu\,p^{\frac{\mu}{m}} = \tfrac{1}{m}\,(y_1 + \alpha^{m-\mu}\,y_2 + \alpha^{m-2\mu}\,y_3 \ldots + \alpha^\mu\,y^m),$$

folglich auch

$$q_\mu = m^{\mu-1}\,\frac{y_1 + \alpha^{-\mu}\,y_2 + \alpha^{-2\mu}\,y_3 \ldots + \alpha^\mu\,y_m}{(y_1 + \alpha^{-1}\,y_2 + \alpha^{-2}\,y_3 \,.\,.\,.\,.\,.\, + \alpha\,y_m)^\mu}.$$

Folglich lassen sich die Größen q_o, $p^{\frac{1}{m}}$, $q_2 \ldots . q_{m-1}$ durch rationale Funktionen gewisser, unter den n Wurzeln der gegebenen Gleichung befindlichen m Wurzeln ausdrücken. Allein man kann überall die etwa fehlenden Wurzeln mit dem Koefficienten o hinzugefügt denken und so jene algebraischen Funktionen als rationale Funktionen aller n Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen: nur wird man in allen Fällen, wo ein Theil des Wurzelausdrucks als rationale Funktion aller n Wurzeln der Gleichung betrachtet wird, beweisen müssen, daß jedem, durch eine beliebige Vertauschung dieser n Elemente erzeugten Werthe der rationalen Funktion ein durch die Wurzeln bedingter Werth der algebraischen Funktion entspricht.

Aber auch diejenigen Funktionen, aus welchen die Größen q_o, p, q_2 rc. selbst wieder zusammengesetzt sind, können als rationale Funktionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung dargestellt werden. Denn vertauscht man die Elemente, aus welchen z. B. p besteht, auf alle mögliche Weise, so erhält man eine gewisse Zahl verschiedener Werthe, etwa die m Werthe p_1, $p_2 \ldots p_m$. Nun bilde man eine neue Gleichung, welche die genannten m Werthe zu Wurzeln hat. Die Koefficienten dieser Gleichung sind symmetrische Funktionen von p_1, $p_2 \ldots p_m$, daher auch symmetrische

Funktionen der n Wurzeln der gegebenen Gleichung $y_1, y_2 \cdots y_n$, weil durch alle möglichen Vertauschungen dieser n Elemente eben nur die m Werthe $p_1, p_2 \cdots p_m$ entstehen. Da nun symmetrische Funktionen der Wurzeln einer Gleichung durch rationale Funktionen der Koefficienten dieser Gleichung dargestellt werden können, so sind die Koefficienten der zuletzt gebildeten Gleichung rationale Funktionen der Koefficienten der gegebenen Gleichung. Folglich ist die Wurzel der zuletzt entstandenen Gleichung, nämlich

$$p = t_0 + u^{\frac{1}{v}} + t_2\, u^{\frac{2}{v}} \cdots\cdots + t_{v-1}\, u^{\frac{v-1}{v}},$$

dieselbe algebraische Funktion p, welche im Wurzelausdruck der gegebenen Gleichung vorkommt. Zugleich aber sieht man, daß alle Funktionen, aus welchen der Ausdruck p zusammengesetzt ist, durch rationale Funktionen der verschiedenen Wurzeln $p_1, p_2 \cdots p_m$ und daher auch durch rationale Funktionen die Wurzeln der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden können, weil die Größen $p_1, p_2 \cdots p_m$ rationale Funktionen von $y_1, y_2 \cdots y_n$ sind. Verfährt man auf gleiche Weise mit den Größen u, t_0, t_2 ꝛc., so wird der Hülfssatz I. in seinem ganzen Umfange einleuchten.

§ 4. Der Idee des Beweises gemäß kommt es jetzt darauf an, für den Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades die vorläufig denkbaren und in so weit bestimmten Formen zu ermitteln, daß man die, den Partialfunktionen des Wurzelausdrucks entsprechenden rationalen Ausdrücke bilden kann. Zu dem Ende muß man zunächst ergründen, was für Primzahlen die, in jenem Wurzelausdruck enthaltenen Funktionen der ersten Ordnung zu Wurzelexponenten haben könnten. Wie dies möglich sei, ist nicht schwer zu begreifen. Kann man nämlich beweisen:

1) daß der Wurzelexponent einer Partialfunktion der ersten Ordnung gleich ist der Anzahl der verschiedenen Werthe, welche der entsprechende rationale Ausdruck durch alle möglichen Vertauschungen seiner fünf Elemente erhält, wozu der Hülfssatz II. nöthig ist, der Beweis selbst aber erst in § 10 geführt werden wird,

2) daß die Anzahl der verschiedenen Werthe einer rationalen Funktion von m Größen ein Submultiplum des Produkts 1.2.3...m sein muß, s. Hülfssatz III.,

3) daß eine rationale Funktion von 5 Größen unmöglich 3 oder 4 verschiedene Werthe haben kann, s. Hülfssatz IV.,

so folgt, daß eine algebraische Funktion der ersten Ordnung, welche im Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades vorkäme, nur entweder 2 oder 5 zum Wurzelexponenten haben könnte. Denn er kann nicht gleich 3 sein, weil sonst der entsprechende rationale Ausdruck durch die fünf Wurzeln der Gleichung 3 verschiedene Werthe hätte; er kann nicht gleich 7 sein, weil 7 kein Submultiplum des Produkts 1.2.3.4.5 ist; er kann nicht gleich 6 sein, weil 6 keine Primzahl ist, und aus ähnlichen Gründen keine andere Zahl sein, als höchstens 2 oder 5.

§ 5. Hülfssatz II. Wenn eine rationale Funktion mehrerer Größen m verschiedene Werthe hat, so läßt sich jederzeit eine Gleichung vom Grade m finden, deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente sind, und welche jene m Werthe zu Wurzeln hat; aber es ist nicht möglich, eine Gleichung von niedrigerem Grade aufzustellen, welche einen oder mehrere jener Werthe zu Wurzeln hat, und deren Koefficienten auch noch symmetrische Funktionen der Elemente sind.

Hat man eine rationale Funktion v, welche durch Vertauschung ihrer Elemente die m verschiedenen Werthe $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$ erhält, so setze man das Produkt

$$(v-v_1)\ (v-v_2)\ (v-v_3)\ \ldots\ldots\ (v-v_m)$$

gleich Null, und man erhält eine Gleichung vom Grade m

$$q_o + q_1 v + q_2 v^2 \ldots\ldots + q_{m-1} v^{m-1} + v^m = o,$$

deren Koefficienten zunächst symmetrische Funktionen von $v_1, v_2 \ldots v_m$ und daher auch symmetrische Funktionen der Elemente sind. Aber die Funktion v läßt sich nicht als Wurzel einer Gleichung von niedrigerem Grade darstellen, deren Koefficienten auch noch symmetrische Funktionen der Elemente sind, oder die aufgestellte Gleichung vom Grade m ist irreduktibel. Denn es sei

$$t_o + t_1 v + t_1 v^2 \ldots + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + v^\mu = o$$

eine solche Gleichung, wo die Koefficienten $t_o, t_1 \ldots t_{\mu-1}$ symmetrische Funktionen der Elemente von v sind, und v_1 sei ein Werth von v, der der Gleichung genug thut, so ist die linke Seite der Gleichung durch $v-v_1$, theilbar, und man erhält

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} \ldots\ldots + t_o = (v-v_1)\ P,$$

wo P eine rationale Funtion des μ-1 ten Grades von v vorstellt. Nimmt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung dieselbe Versetzung der Elemente vor, so bleibt die rechte Seite stets nur eine andere Darstellungsform der linken Seite, weil die auf beiden Seiten stehenden Ausdrücke einander identisch gleich sind. Verwechselt man demnach die Elemente von v auf alle Arten, so findet man, da die linke Seite, wo die Koefficienten symmetrische Funktionen sind, ungeändert bleibt, folgende Reihe von Gleichungen

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} \ldots\ldots = (v-v_2)\ P_2,$$
$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} \ldots\ldots = (v-v_3)\ P_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} \ldots\ldots = (v-v_m)\ P_m,$$

wo auch P_2, P_3 2c. rationale Funktionen des μ-1 ten Grades von v vorstellen. Daraus aber folgt, daß $v-v_1$, $v-v_2$, $v-v_3$, ... $v-v_m$ sämmtlich Faktoren von $v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} +$ 2c. sind, und daß daher μ nothwendig gleich m sein muß. Demnach ist obige Gleichung vom Grade m irreduktibel.

Ist z. B. $v = x_1 - x_2$, so hat v zwei verschiedene Werthe, und die niedrigste Gleichung zwischen v und symmetrischen Funktionen der Elemente ist daher vom zweiten Grade, nämlich

$$v^2 - (x - x_2)^2 = o.$$

Die Gleichung des ersten Grades $v - (x_1 - x_2) = o$ hat zwar auch einen jener zwei Werthe zur Wurzel, aber ihr Koefficient ist keine symmetrische Funktion. Umgekehrt:

Ist eine rationale Funktion mehrerer Größen die Wurzel einer Gleichung des m ten Grades, deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente sind, und ist diese Gleichung vom Grade m irreduktibel, so erhält dieselbe Funktion durch alle möglichen Vertauschungen der Elemente nicht mehr und nicht weniger als m verschiedene Werthe.

Es sei eine rationale Funktion mehrerer Größen gegeben durch eine Gleichung des m ten Grades

$$q_o + q_1 v + q_2 v^2 \ldots\ldots + q_{\mu-1} v^{\mu-1} + v^m = o,$$

deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente sind, und diese Gleichung sei irreduktibel. Alsdann kann v nicht weniger als m verschiedene Werthe haben. Denn hätte v etwa nur $m-1$ verschiedene Werthe, so würde sich v durch eine Gleichung vom Grade $m-1$ geben lassen, deren Koefficienten auch noch symmetrische Funktionen der Elemente wären, was der Voraussetzung widerspricht. Ebenso wenig kann v mehr als m verschiedene Werthe haben. Denn hätte v etwa $m+1$ verschiedene Werthe, so würde es zwischen v und symmetrischen Funktionen der Elemente eine Gleichung vom Grade $m+1$ geben, welche bereits irreduktibel wäre, und dann könnte die vorausgesetzte Gleichung nicht existiren. Folglich hat v auch nicht mehr als m verschiedene Werthe.

Will man also beweisen, daß eine rationale Funktion durch Vertauschung ihrer Elemente m verschiedene Werthe erhält, so kommt es darauf an, diese Funktion durch eine Gleichung vom Grade m darzustellen, deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente sind, und zu zeigen, daß diese Gleichung irreduktibel ist.

§ 6. Hülfssatz III. Die Anzahl der verschiedenen Werthe einer rationalen Funktion von m Größen ist ein Submultiplum des Produkts $1 . 2 . 3 \ldots m$.

Es sei $1 . 2 . 3 \ldots m = \mu$, und eine rationale Funktion von m Größen erhalte durch alle möglichen Vertauschungen derselben weniger als μ verschiedene Werthe, so muß es Vertauschungen geben, welche keine Aenderung des Werthes erzeugen; so ist z. B. in der Funktion $x_1 x_2 + x_3$ die Umstellung der Faktoren eine solche Vertauschung. Die Anzahl dieser Vertauschungen sei gleich ϱ; im Beispiel ist $\varrho = 2$. Hat nun die gegebene Funktion n verschiedene Werthe, so erhält man statt jedes einzelnen dieser Werthe ϱ ihm gleiche Werthe. Folglich erhält die Funktion durch alle mögliche Vertauschungen der Elemente ϱ n Werthe.

$$\text{Folglich ist } \varrho n = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots m,$$

$$\text{also } \varrho = \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots m}{n}.$$

Da nun ϱ eine ganze Zahl ist, so muß n ein Theiler des Produktes sein.

§ 7. Hülfssatz IV. Hat eine rationale Funktion v von 5 Größen weniger als 5 verschiedene Werthe, wie z. B. die Funktion

$$(x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\alpha-x_\delta)(x_\alpha-x_\varepsilon)(x_\beta-x_\gamma)(x_\beta-x_\delta)(x_\beta-x_\varepsilon)(x_\gamma-x_\delta)(x_\gamma-x_\varepsilon)(x_\delta-x_\varepsilon)$$

so kann sie zwei Werthe oder einen, aber nie drei oder vier verschiedene Werthe haben.

Diese Wahrheit folgt aus nachstehendem, weiter unten bewiesenen Lehrsatze.

Nennt man eine Verwandlung von der Form $\binom{\alpha\,\beta}{\beta\,\alpha}$, wo α und β zwei beliebige Zeiger der Elemente sind, eine Versetzung, so wird ein beliebiger Werth von v durch zwei aufeinanderfolgende Versetzungen, folglich auch durch eine grade Zahl von Versetzungen nicht verändert. Folglich, da jede beliebige Vertauschung der Elemente durch eine grade oder eine ungrade Zahl von Versetzungen entsteht, alle Werthe aber, welche aus v durch eine grade Zahl von Versetzungen entstehen, eben diesem Werthe v gleich sind, alle Werthe dagegen, welche aus v durch eine ungrade Zahl von Versetzungen entstehen, unter sich gleich sind, weil sie aus einander durch eine grade Zahl von Versetzungen entstehen, so kann v durch alle möglichen Vertauschungen der Elemente höchstens zwei verschiedene Werthe erhalten, nämlich den Werth v selbst und einen beliebigen durch eine ungrade Zahl von Versetzungen entstandenen Werth.

Der angewendete Lehrsatz aber folgt wiederum daraus, daß eine Funktion v von fünf Größen, welche weniger als fünf verschiedene Werthe hat, durch eine solche Verwandlung, welche nach fünf Wiederholungen wiederkehrt, dem Werthe nach nicht verändert wird. Läßt man z. B. in der Funktion

$$v=(x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\alpha-x_\delta)(x_\alpha-x_\varepsilon)(x_\beta-x_\gamma)(x_\beta-x_\delta)(x_\beta-x_\varepsilon)(x_\gamma-x_\delta)(x_\gamma-x_\varepsilon)(x_\delta-x_\varepsilon)$$

die Elemente den Cyklus durchlaufen, wodurch v nach fünf Verwandlungen wiederkehrt, so erhält man lauter äquipollente Formen:

$$(x_\beta-x_\gamma)(x_\beta-x_\delta)(x_\beta-x_\varepsilon)[x_\beta-x_\alpha](x_\gamma-x_\delta)(x_\gamma-x_\varepsilon)[x_\gamma-x_\alpha](x_\delta-x_\varepsilon)[x_\delta-x_\alpha][x_\varepsilon-x_\alpha],$$
$$(x_\gamma-x_\delta)(x_\gamma-x_\varepsilon)[x_\gamma-x_\alpha][x_\gamma-x_\beta](x_\delta-x_\varepsilon)[x_\delta-x_\alpha][x_\delta-x_\beta][x_\varepsilon-x_\alpha][x_\varepsilon-x_\beta][x_\alpha-x_\beta],$$
$$(x_\delta-x_\varepsilon)[x_\delta-x_\alpha][x_\delta-x_\beta][x_\delta-x_\gamma][x_\varepsilon-x_\alpha][x_\varepsilon-x_\beta][x_\varepsilon-x_\gamma](x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\beta-x_\gamma),$$
$$[x_\varepsilon-x_\alpha][x_\varepsilon-x_\beta][x_\varepsilon-x_\gamma][x_\varepsilon-x_\delta](x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\alpha-x_\delta)(x_\beta-x_\gamma)(x_\beta-x_\delta)(x_\gamma-x_\delta),$$
$$(x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\alpha-x_\delta)(x_\alpha-x_\gamma)(x_\beta-x_\gamma)(x_\beta-x_\delta)(x_\beta-x_\varepsilon)(x_\gamma-x_\delta)(x_\gamma-x_\varepsilon)(x_\delta-x_\varepsilon).$$

Also wird v durch eine Verwandlung von der Form $\binom{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon}{\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha}$ dem Werthe nach nicht verändert. Aber auch die Verwandlung, daß man immer das zweite und fünfte Element vor die übrigen setzt, ist eine Verwandlung, welche nach fünf Wiederholungen wiederkehrt; denn ist die

anfängliche Stellung der Elemente diese $\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha,$
so wird daraus $\gamma\,\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon$
$\alpha\,\varepsilon\,\gamma\,\beta\,\delta$
$\varepsilon\,\delta\,\alpha\,\gamma\,\beta$
$\delta\,\beta\,\varepsilon\,\alpha\,\gamma$
und zuletzt $\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha.$

Folglich wird v auch durch eine Verwandlung von der Form $\binom{\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha}{\gamma\,\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon}$ dem Werthe nach nicht verändert. In der That, wenn man in der Funktion $(x_\alpha - x_\beta)\,(x_\alpha - x_\gamma)$ .... das 2te und 5te Element zum 1sten und 2ten, also das 1ste zum 3ten, das 3te zum 4ten, das 4te zum 5ten macht, so erhält man die äquipollente Form

$$[x_\gamma - x_\alpha]\,(x_\gamma - x_\delta)\,(x_\gamma - x_\varepsilon)\,[x_\gamma - x_\beta]\,(x_\alpha - x_\delta)\,(x_\alpha - x_\varepsilon)\,(x_\alpha - x_\beta)\,(x_\delta - x_\varepsilon)\,[x_\delta - x_\beta]\,[x_\varepsilon - x_\beta].$$

Der Werth von v wird daher auch durch die Verbindung der beiden Verwandlungen $\binom{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon}{\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha}$ und $\binom{\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha}{\gamma\,\alpha\,\beta\,\delta\,\varepsilon}$ nicht verändert. Diese beiden Verwandlungen sind aber offenbar gleichbedeutend mit der einen $\binom{\alpha\,\beta\,\gamma}{\gamma\,\alpha\,\beta} = \binom{\alpha\,\beta}{\beta\,\alpha}\binom{\beta\,\gamma}{\gamma\,\beta}$; nimmt man daher diese eine mit den beiden Formen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ und $\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha$ nach einander vor, so erhält man

$$v = v\binom{\alpha\,\beta}{\beta\,\alpha}\binom{\beta\,\gamma}{\gamma\,\beta} \quad \text{und} \quad v = v\binom{\beta\,\gamma}{\gamma\,\beta}\binom{\gamma\,\delta}{\delta\,\gamma},$$

und vollzieht man endlich die zweite dieser beiden Verwandlungen an der ersten, so erhält man, indem die Elemente mit den Zeigern β und γ wieder in ihre ursprüngliche Ordnung zurückkehren,

$$v = v\binom{\alpha\,\beta}{\beta\,\alpha}\binom{\gamma\,\delta}{\delta\,\gamma}.$$

Folglich wird der Werth von v durch zwei aufeinanderfolgende Versetzungen nicht verändert.

Diesen Beweis für den Hülfssatz IV. hat Abel aus einem Memoire von Cauchy geschöpft, welches sich in dem 17ten Hefte des **Journal de l'école polytechnique pag. 1 etc.** befindet.

§ 8. Unser Zweck ist, diejenigen Formen zu finden, unter welchen der Wurzelausdruck einer Gleichung des fünften Grades vorläufig gedacht werden könnte. Der erste Schritt ist gethan. Schon läßt sich begreifen, daß alle rationalen Ausdrücke, welche den Partialfunktionen der ersten Ordnung in jenem Wurzelausdruck entsprächen, durch Vertauschung ihrer 5 Elemente nur 2 oder 5 verschiedene Werthe erhalten könnten. Der nächste Schritt zum Ziele wird also der sein, diejenigen Formen zu ermitteln, auf welche sich eine Funktion von fünf Größen einmal, wenn sie 2 verschiedene Werthe hat, zum andern Mal, wenn sie 5 verschiedene Werthe hat, jederzeit bringen läßt.

Eine rationale Funktion von fünf Größen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, welche durch alle möglichen Vertauschungen derselben nur 2 verschiedene Werthe v_1 und v_2 erhält, kann jederzeit auf die Form

$$p + q\,s$$

gebracht werden, wo p und q symmetrische Funktionen aller 5 Elemente sind, und s die Funktion

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$$

vorstellt; dann ist, weil s nur die beiden Werthe + s und — s hat,

$$v_1 = p + q\,s$$
$$v_2 = p - q\,s.$$

Erhält aber eine rationale Funktion v von fünf Größen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 durch alle möglichen Vertauschungen derselben 5 verschiedene Werthe v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, so kann sie jederzeit auf die Form

$$a_0 + a_1\,x_1 + a_2\,x_1^{\,2} + a_3\,x_1^{\,3} + a_4\,x_1^{\,4} \quad (A)$$

gebracht werden, wo a_0, a_1, a_2 rc. symmetrische Funktionen sind und x_1 ein beliebiges von den 5 Elementen.

Diese beiden Lehrsätze sind in Abel's Abhandlung mit einer Klarheit bewiesen, welche durch Nichts erhöht werden kann. Zum Beweise des letztern Satzes wird zuerst gezeigt, daß eine rationale Funktion von fünf Größen, welche nach vieren derselben symmetrisch ist, sich jederzeit auf die Form (A) bringen läßt und daher auch immer 5 verschiedene Werthe hat; dann wird umgekehrt bewiesen, daß eine rationale Funktion von fünf Größen, welche durch Vertauschung derselben 5 verschiedene Werthe erhält, jederzeit nach 4 Elementen symmetrisch und daher auch von der Form (A) ist. Es wird nämlich dargethan, daß durch die Vertauschung von 4 Elementen entweder nur ein Werth entsteht oder vier Werthe — und dann giebt es gewisse 4 Elemente, durch deren Vertauschung auch nur ein Werth entsteht — daß aber durch die Vertauschung von 4 Elementen nie zwei oder drei oder fünf verschiedene Werthe entstehen können. Daß übrigens durch die Vertauschung von 4 Elementen nicht fünf verschiedene Werthe entstehen können, dazu hätte es nur der Erwähnung des Satzes bedurft, daß eine rationale Funktion von vier Größen durch Vertauschung derselben nicht fünf verschiedene Werthe erhalten kann, s. § 6.

§ 9. Ist v der rationale Ausdruck durch die fünf Wurzeln, der einer algebraischen Funktion der ersten Ordnung, welche im Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades vorkäme, entspricht, so haben wir entweder

$$v = p + q\,(x_1-x_2)(x_1-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_4-x_5)$$

oder

$$v = a_0 + a_1\,x_1 + a_2\,x_1^{\,2} + a_3\,x_1^{\,3} + a_4\,x_1^{\,4},$$

wenn x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die fünf Wurzeln der Gleichung vorstellen.

Der letzte Schritt zu unserm Ziele ist nun der, umgekehrt eine von den Wurzeln, z. B. x_1, durch v auszudrücken. Ist $v = p + q s$, so wird gehörigen Orts bewiesen werden, daß sich x_1 nicht als eine rationale Funktion von v darstellen läßt. Ist aber

$$v = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4,$$

wo a_0, a_1, a_2 2c. symmetrische Funktionen sind, so entwickele man die Werthe von v^2, v^3 und v^4. Man wird offenbar Aggregate von Potenzen der Größe x_1 erhalten, deren Koefficienten wiederum symmetrische Funktionen sind. Folglich werden die Funktionen v^2, v^3, v^4 durch Vertauschung der fünf Elemente wiederum fünf verschiedene Werthe erhalten und daher ebenfalls auf die Form (A) gebracht werden können. Man hat demnach vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
v &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 \\
v^2 &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3 + b_4 x_1^4 \\
v^3 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + c_4 x_1^4 \\
v^4 &= d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_1^3 + d_4 x_1^4
\end{aligned}$$

wo die Koefficienten sämmtlich symmetrische Funktionen sind. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die drei Größen x_1^2, x_1^3, x_1^4, so erhält man

$$x_1 = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4,$$

wo s_0, s_1, s_2 2c. ebenfalls symmetrische Funktionen der fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Wie aber die Form der Wurzel gefunden wird, wenn v die Form $p + q s$ hat, davon handelt an Ort und Stelle der nächste Paragraph.

§ 10. Beweis der Unmöglichkeit, Gleichungen vom fünften Grade allgemein aufzulösen. Da die Wurzel der Gleichung des fünften Grades im Allgemeinen keine rationale Funktion der Koefficienten sein kann, so muß in dem allgemeinen Ausdruck der Wurzel eine Funktion $R^{\frac{1}{m}}$ vorkommen, wo m eine Primzahl und R eine rationale Funktion der Koefficienten oder eine symmetrische Funktion der Wurzeln ist. Es ist also $R^{\frac{1}{m}}$ eine algebraische Funktion der ersten Ordnung, welche zwar selbst noch unter einem Wurzelzeichen stehen kann, aber unter deren Wurzelzeichen kein anderes steht. Nach Hülfssatz I. ist

$$R^{\frac{1}{m}} = v$$

und v stellt zunächst eine rationale Funktion gewisser unter den 5 Wurzeln der Gleichung befindlichen Wurzeln vor. Allein die $v^m = R$ und R eine symmetrische Funktion aller 5 Wurzeln ist, so sieht man gleich, daß v eine rationale Funktion derselben 5 Elemente sein muß. Da sich nun v durch eine Gleichung vom Grade m

$$v^m - R = 0$$

darstellen läßt, deren Koefficient eine symmetrische Funktion der Elemente ist, und da eine Gleichung von dieser Form jederzeit irreduktibel ist, wie im § 3 dargethan wird, so folgt nach Hülfssatz II. (Umkehrung), daß v durch alle möglichen Vertauschungen seiner 5 Elemente nicht mehr und nicht weniger als m verschiedene Werthe erhalten kann. Da nun m eine Primzahl ist, und da die Anzahl der verschiedenen Werthe einer rationalen Funktion von 5 Größen ein Submultiplum des Produkts 1.2.3.4.5 sein muß, und da endlich eine rationale Funktion von 5 Größen durch Vertauschung derselben nicht 3 verschiedene Werthe erhalten kann, so wird m entweder gleich 2 oder gleich 5 sein. Im letzteren Falle ist

$$R^{\frac{1}{5}} = v,$$

und da v in diesem Falle eine rationale Funktion von 5 Größen ist, welche durch Vertauschung derselben 5 verschiedene Werthe erhält, so ist v nach § 8 von der Form (A); folglich

$$R^{\frac{1}{5}} = r_o + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = v,$$

wo r_o, r_1, r_2 2c. symmetrische Funktionen der 5 Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; folglich nach § 9

$$x = s_o + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}},$$

wo s_o, s_1, s_2 2c. symmetrische Funktionen von den 5 Wurzeln der Gleichung, also rationale Funktionen der Koefficienten derselben sind. Es stellt demnach der Ausdruck für x den Wurzelausdruck durch die Koefficienten der Gleichung vor. Bildet man sich nun die 5 Wurzelwerthe der Gleichung

$$\begin{aligned}
x_1 &= s_o + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}} \\
x_2 &= s_o + \alpha s_1 R^{\frac{1}{5}} + \alpha^2 s_1 R^{\frac{2}{5}} + \alpha^3 s_3 R^{\frac{3}{5}} + \alpha^4 s_4 R^{\frac{4}{5}} \\
x_3 &= s_o + \alpha^2 s_1 R^{\frac{1}{5}} + \alpha^4 s_3 R^{\frac{2}{5}} + \alpha s_3 R^{\frac{3}{5}} + \alpha^3 s_4 R^{\frac{4}{5}} \\
x_4 &= s_o + \alpha^3 s_1 R^{\frac{1}{5}} + \alpha s_3 R^{\frac{2}{5}} + \alpha^4 s_3 R^{\frac{3}{5}} + \alpha^2 s_4 R^{\frac{4}{5}} \\
x_5 &= s_o + \alpha^4 s_1 R^{\frac{1}{5}} + \alpha^3 s_3 R^{\frac{2}{5}} + \alpha^2 s_3 R^{\frac{3}{5}} + \alpha s_4 R^{\frac{4}{5}},
\end{aligned}$$

wo α die primitive 5te Wurzel der Einheit bedeutet, und multiplicirt dann die zweite Gleichung mit α^4, die dritte mit α^3, die vierte mit α^2, die fünfte mit α und addirt zuletzt alle fünf Gleichungen, so folgt

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5 = z,$$

und z ist durch eine Gleichung des fünften Grades

$$z^5 - s_1{}^5 R = o$$

gegeben, deren Koefficient eine symmetrische Funktion der Elemente ist. Nun erhält aber z durch Vertauschung der Elemente offenbar 120 verschiedene Werthe und kann daher nach Hülfssatz II. nur als Wurzel einer Gleichung vom 120ten Grade oder wenigstens nicht als Wurzel einer Gleichung von niedrigerem Grade dargestellt werden, deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente sind. Da dies ein Widerspruch ist, so kann m nicht gleich 5 sein. Demnach muß m gleich 2 sein, d. h. jede im allgemeinen Ausdruck der Wurzel enthaltene algebraische Funktion der ersten Ordnung hat den Wurzelexponenten 2 und erhält, als rationale Funktion v der 5 Wurzeln dargestellt, durch Vertauschung derselben nur 2 verschiedene Werthe. Folglich hat v in diesem Falle nach § 8 die Form

$$p + q\,s,$$

wo p und q symmetrische Funktionen der 5 Wurzeln sind, und

$$s = (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \,\ldots\ldots\ldots\, (x_4 - x_5) \text{ ist.}$$

Da s durch Vertauschung der Elemente nur die beiden Werthe $+s$ und $-s$ erhält, so ist s^2 eine symmetrische Funktion und kann daher eben so wie p und q durch die Koefficienten der Gleichung rational dargestellt werden.

Folglich haben alle algebraischen Funktionen der ersten Ordnung, welche im Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades vorkommen könnten, die Form $\alpha + \beta\sqrt{s^2}$, wo α, β und s^2 rationale Funktionen der Koefficienten sind.

Wäre demnach jener Wurzelausdruck nur aus algebraischen Funktionen der ersten Ordnung

$$\alpha_1 + \beta_1\sqrt{s^2},\ \ \alpha_2 + \beta_2\sqrt{s^2},\ \ \alpha_3 + \beta_3\sqrt{s^2} \text{ etc.}$$

zusammengesetzt, so würde er sich offenbar selbst auf die Form $\alpha + \beta\sqrt{s^2}$ bringen lassen. Da aber der allgemeine Wurzelausdruck der Gleichung des fünften Grades unmöglich von dieser Form sein kann, weil er sonst, als algebraische Funktion der Koefficienten, nur 2 verschiedene Werthe hätte, so ist es unmöglich, daß er nur aus Funktionen der ersten Ordnung zusammengesetzt sei. Folglich muß derselbe auch algebraische Funktionen der zweiten Ordnung von der Form

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$$

enthalten, wo m eine Primzahl ist und α, β und s^2 sowohl als symmetrische Funktionen der Wurzeln, wie auch als rationale Funktionen der Koefficienten der Gleichung vorgestellt werden können. Nach Hülfssatz I. ist wiederum

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

und v ist auch diesmal eine rationale Funktion aller 5 Wurzeln der Gleichung, weil $v^m = \alpha + \beta s$ ist, und α, β, s Funktionen aller 5 Wurzeln sind. Es sei nun

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta s} = v_1 \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{\alpha - \beta s} = v_2,$$

dann ist $v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$, und $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln x_1, x_2 rc. oder gleich einer rationalen Funktion R der Koefficienten der Gleichung. Es könnte sich aber diese mte Wurzel aus R rational ausziehen lassen, wie dies in der That bei der kubischen Gleichung der Fall ist; denn multiplicirt man die beiden Werthe

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

der in ihrem Wurzelausdruck enthaltenen algebraischen Funktion der zweiten Ordnung mit einander, so erhält man $\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}} = -\frac{a}{3}$. Alsdann wäre $\sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ eine symmetrische Funktion der Wurzeln x_1, x_2 rc. Findet jedoch diese Voraussetzung nicht statt, so hätte man wiederum eine algebraische Funktion der ersten Ordnung $R^{\frac{1}{m}}$, welche sich durch eine rationale Funktion der fünf Wurzeln, nämlich durch $v_1 v_2$, ausdrücken ließe. Folglich müßte m gleich 2 sein, und man erhält die Gleichung $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{s^2}} = v$; folglich $(v^2 - \alpha)^2 = \beta^2 s^2$.

Da nun diese Gleichung vom vierten Grade offenbar irreduktibel ist, indem der Ausdruck $\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{s^2}}$ unmöglich einer Gleichung von niedrigerem Grade, deren Koefficienten in Bezug auf α, β und s^2 rational sind, genug thun kann, so müßte v nach Hülfssatz II. (Umkehrung) durch alle möglichen Vertauschungen seiner fünf Elemente 4 verschiedene Werthe erhalten, was nach Hülfssatz IV. unmöglich ist. Also bleibt nichts Anderes übrig, als anzunehmen, daß $\sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ eine symmetrische Funktion sei. Eine solche Funktion sei γ, so ist

$$v_1 v_2 = \gamma \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{\gamma}{v_1}.$$

Nun setze man den Ausdruck

$$v_1 + v_2, \text{ das ist } \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}} = p;$$

dann ist, wenn R die algebraische Funktion der ersten Ordnung $\alpha + \beta \sqrt{s^2}$ vorstellt,

$$p = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}},$$

und p kann sowohl als rationale Funktion der 5 Wurzeln x_1, x_2 ꝛc., wie auch als algebraische Funktion der Koefficienten vorgestellt werden. Als algebraische Funktion der Koefficienten betrachtet, erhält p offenbar m verschiedene Werthe, wenn man $R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{1}{m}}$ ..... $\alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ statt $R^{\frac{1}{m}}$ setzt, wo α die primitive mte Wurzel der Einheit bedeutet. Diese m verschiedenen Werthe bezeichne man durch p_1, p_2, p_3 ..... p_m und setze das Produkt

$$(p-p_1)\,(p-p_2)\,(p-p_3)\;.....\;(p-p_m) = o,$$

so erhält man eine Gleichung des mten Grades

$$p^m - A\,p^{m-1} + A_1\,p^{m-2}\;..... = o,$$

deren Wurzel $p = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}$ ist.

Die Koefficienten dieser Gleichung sind symmetrische Funktionen der Elemente x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Denn das Produkt $(p-p_1)\,(p-p_2)$ ..... $(p-p_m)$ ist eine symmetrische Funktion von den m Werthen p_1, p_2 ..... p_m, und da die Vertauschung derselben von der Vertauschung der Größen $R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha R^{\frac{1}{m}}$ ..... $\alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ abhängt, so ist jenes Produkt auch eine symmetrische Funktion von den m Werthen der mten Wurzel aus R, folglich auch von den m Wurzeln der Gleichung $z^m - R = o$, mithin eine rationale Funktion der Koefficienten dieser Gleichung, also eine rationale Funktion von R. Demnach kann in den Koefficienten A, A_1 ꝛc. keine mte Wurzel mehr vorkommen. Nun ändert sich aber kein Werth von p, wenn man $+\sqrt{s^2}$ und $-\sqrt{s^2}$ unter einander vertauscht; denn p ist ursprünglich $= \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} + \sqrt[m]{\alpha - \beta\sqrt{s^2}}$. Jeder Werth von p ist demnach in Ansehung der beiden Werthe von $\sqrt{s^2}$ symmetrisch, und daher ist es auch das Produkt $(p-p_1)\,(p-p_2)$ ..... $(p-p_m)$. Folglich sind auch die Koefficienten A_1 A_2 ꝛc. symmetrische Funktionen der beiden Werthe von $\sqrt{s^2}$. Es treten daher diese beiden Werthe in den Koefficienten entweder als Faktoren desselben Produktes auf, und dann zerstören sich die Wurzelzeichen, oder sie treten mit gleichen Koefficienten auf und müssen in diesem Falle, weil A, A_1 ꝛc. rationale Funktionen von R und daher auch rationale Funktionen von $\sqrt{s^2}$ sind, sich gegenseitig aufheben. Die Koefficienten A, A_1 ꝛc. enthalten demnach weder eine mte noch eine 2te Wurzel; folglich sind sie rationale Funktionen der Koefficienten der gegebenen Gleichung oder symmetrische Funktionen ihrer 5 Wurzeln.

Zweitens ist die Gleichung des m ten Grades

$$p^m - A\, p^{m-1} + A_1\, p^{m-2} \ldots\ldots = o$$

irreduktibel. Denn angenommen, es gebe irgend eine Gleichung

$$p^\mu - a\, p^{\mu-1} + a_1\, p^{\mu-2} \ldots\ldots = o,$$

deren allgemeine Wurzel ein Werth von p oder von $R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}$ ist, und deren Koefficienten symmetrische Funktionen der Elemente x_1, x_2 2c. sind, so setze man in diese Gleichung an die Stelle von p den Wurzelausdruck, und man wird eine Gleichung von der Form

$$q_o + q_1\, R^{\frac{1}{m}} + q_2\, R^{\frac{2}{m}} \ldots\ldots + q_{m-1}\, R^{\frac{m-1}{m}} = o$$

erhalten, deren Koefficienten rationale Funktionen von R sind. Nun sei die angenommene Gleichung vom Grade μ irreduktibel; dann müssen die Koefficienten der zuletzt entstandenen Gleichung einzeln gleich Null sein, s. § 3. Wenn man daher in den Wurzelausdruck der angenommenen Gleichung statt $R^{\frac{1}{m}}$ nach und nach $R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha\, R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2\, R^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots \alpha^{m-1}\, R^{\frac{1}{m}}$ setzt, so müssen die dadurch entstandenen m verschiedenen Werthe desselben sämmtlich der angenommenen Gleichung genug thun. Da nun die angenommene Gleichung nicht etwa vermöge vieldeutiger Koefficienten mehr Werthe zu Wurzeln hat, als sie dem Grade nach haben sollte, wie z. B. der Gleichung $x - \sqrt{2} = o$ die Werthe $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ genug thun, so kann μ nicht kleiner als m sein. Folglich ist die Gleichung $p^m - A\, p^{m-1} +$ 2c. $= o$ irreduktibel.

Läßt sich aber die Funktion p als Wurzel einer Gleichung vom Grade m darstellen, deren Koefficienten symmetrische Funktionen sind, und ist diese Gleichung irreduktibel, so hat p, als rationale Funktion der 5 Elemente betrachtet, nach Hülfssatz II. (Umkehrung) m verschiedene Werthe. Da nun m eine Primzahl ist, da ferner die Anzahl der verschiedenen Werthe einer rationalen Funktion von 5 Größen ein Submultiplum des Produkts 1.2.3.4.5 sein muß, da ferner eine rationale Funktion von 5 Größen nicht 3 verschiedene Werthe haben kann, und da wir endlich schon wissen, daß m nicht gleich 2 ist, so bleibt nur noch übrig anzunehmen, daß m gleich 5 sei. Erhält aber p durch alle möglichen Vertauschungen seiner 5 Elemente 5 verschiedene Werthe, so ist diese Funktion von der Form (A), also

$$R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{4}{5}} = r_o + r_1\, x + r_2\, x^2 + r_3\, x^3 + r_4\, x^4 = p;$$

folglich $x = s_o + s_1\, p + s_2\, p^2 + s_3\, p^3 + s_4\, p^4$, nach § 9, wo s_o, s_1, s_2 2c. symmetrische Funktionen der Elemente, also rationale Funktionen der Koeficienten der gegebenen Gleichung sind.

Setzt man für p die algebraische Funktion $R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{4}{5}}$, so erhält man

$$x = t_o + t_1\, R^{\frac{1}{5}} + t_2\, R^{\frac{2}{5}} + t_3\, R^{\frac{3}{5}} + t_4\, R^{\frac{4}{5}},$$

wo t_0, t_1, t_2 &c. rationale Funktionen von R und von den Koefficienten der gegebenen Gleichung sind. Verfährt man nun mit diesem Ausdruck der Wurzel durch die Koefficienten der Gleichung wie mit dem früher gefundenen, von welchem sich der gegenwärtige dadurch unterscheidet, daß die Funktion $R^{\frac{1}{5}}$ diesmal von der 2ten Ordnung ist, so folgt

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5 = v.$$

Folglich ist $v^5 = t_1{}^5 R$. Da nun $R = \alpha + \beta \sqrt{s^2}$ und $t_1{}^5 R$ eine rationale Funktion von R und von Koefficienten der gegebenen Gleichung ist, so muß sich auch $t_1{}^5 R$ auf die Form $u + u_1 \sqrt{s^2}$ bringen lassen, wo u und u_1 symmetrische Funktionen der Elemente sind. Folglich erhält man die Gleichung

$$(v^5 - u)^2 = u_1{}^2 s^2.$$

Die Funktion v ist also durch eine Gleichung des 10ten Grades mit symmetrischen Funktionen der Elemente verknüpft. Da aber v durch Vertauschung der Elemente 120 verschiedene Werthe erhält, so folgt daraus nach Hülfssatz II., daß diese Funktion nur durch eine Gleichung vom 120ten Grade oder wenigstens nicht durch eine Gleichung von niedrigerem Grade mit symmetrischen Funktionen der Elemente verknüpft sein kann. Da dies ein Widerspruch ist, so läßt sich auch nicht annehmen, daß m gleich 5 sei.

Es ist demnach unmöglich, Gleichungen vom fünften Grade **allgemein** aufzulösen.

Alle diese Schlüsse gelten auch in der That nur in Rücksicht auf die **allgemeine** Gleichung des fünften Grades, d. h. sie gelten nur dann, wenn die 5 Wurzeln der Gleichung **von einander völlig unabhängig sind.**