Beiträge

zur

Vergleichung der Methode der Algebra im sechzehnten Jahrhunderte mit der in unseren Tagen,

oder:

die ersten vier Kapitel aus dem ersten Theile der Algebra des Doktors Pedro Nuñez,

aus

dem Spanischen übersetzt und, dem wesentlichen Inhalte nach, nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft dargestellt

von

Mr. J. K. Tobisch,

Professor am Königlichen Friedrichs-Gymnasium zu Breslau.

Mit einer Figurentafel.

Vorwort.

Das Werk, dessen erste vier Kapitel hier in einer deutschen Uebersetzung folgen, führt den Titel:

Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria,

Compuesto

por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal y Cathedratico Jubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Universidad de Coymbra,

und ist in Antwerpen im Jahre 1567 im Drucke erschienen.

In der Meinung, daß es nicht ohne Interesse sein dürfte, die damals übliche Darstellungsweise mit der in unserer Zeit gewöhnlichen zu vergleichen, habe ich der Uebersetzung der ersten vier Kapitel gedachten Werkes auch eine Darstellung des wesentlichen Inhaltes derselben nach der jetzt gewöhnlichen Methode beigefügt, damit es dem verehrten Leser leichter möglich werde, die beiden Darstellungsweisen zu vergleichen und demnach zu entscheiden, welcher, besonders in Hinsicht auf Kürze, der Vorzug gebühre.

Gerne hätte ich der Uebersetzung den ganzen spanischen Text beigefügt; da ich jedoch befürchten mußte, daß das Programm so einen zu großen Umfang erhalten dürfte, habe ich mich damit begnügt, zur Probe bloß den Beweis der dritten Regel der zusammengesetzten Verbindungen, ganz so wie er im Original steht, am Ende folgen zu lassen.

Tobisch I.

Erster Theil dieses Werkes.

Erstes Kapitel.

Ueber den Zweck der Algebra, ihre Verbindungen und Regeln.

Das Ziel, wornach man in dieser algebraischen Kunst strebt, ist, die unbekannte Größe bekannt zu machen. Das Mittel, dessen wir uns bedienen, um dieses Ziel zu erreichen, ist die Gleichheit (Gleichung). Die vorzüglichsten Größen, aus denen wir durch überzeugende Vernunftschlüsse diese Gleichung bilden, indem wir sie addiren oder hinwegnehmen, insoweit als es zuträglich ist, wie wenn Jemand Etwas in's Gleichgewicht bringt, sind drei an der Zahl, nämlich: Zahl, Cosa und Censo.

Zahl heißt in jener Kunst was immer für eine Größe, wenn wir sie als aus Einheiten zusammengesetzt auffassen, mag sie eine ganze oder gebrochene Zahl oder eine Wurzel, wenn auch eine irrationelle sein, wie wenn Jemand sagte: 8, 9, 10, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{3}$, $8\frac{1}{4}$, Wurzel aus 8, Wurzel aus 9, Wurzel aus 10, Wurzel aus $\frac{1}{2}$, Wurzel aus $\frac{1}{3}$, Wurzel aus $\frac{1}{4}$, Wurzel aus $8\frac{1}{2}$, Wurzel aus $8\frac{1}{3}$, Wurzel aus $8\frac{1}{4}$. Cosa heißt die Wurzel aus was immer für einem Quadrate, und Censo nennen wir das Quadrat, welches aus jener Wurzel hervorgeht.

Diese drei Größen können sich in der Gleichung verbinden, was die Kunst immer auf sechserlei Weise zu erreichen sucht; denn es giebt 3 einfache und 3 zusammengesetzte Verbindungen.

Einfache Verbindungen:
1. Censo's gleich Cosa's.
2. Censo's gleich einer Zahl.
3. Cosa's gleich einer Zahl.

Zusammengesetzte Verbindungen:
4. Censo's und Cosa's gleich einer Zahl.
5. Cosa's und eine Zahl gleich dem Censo.
6. Censo und eine Zahl gleich Cosa's.

Einer jeden dieser 6 Verbindungen entspricht ihre Regel, dergestalt, daß es 6 Regeln giebt, drei für die einfachen und drei für die zusammengesetzten Verbindungen.

Erste Regel: Wenn Censo's Cosa's gleich wären, so würden wir die Anzahl der Cosa's durch die Anzahl der Censo's theilen, und was bei der Theilung herauskäme, würde der Werth der Cosa sein.

Beispiel: Nehmen wir an, daß wir, wenn uns irgend eine Aufgabe zur Auflösung vorgelegt ist, und wir uns die passende Gleichung verschaffen, finden, daß 4 Censo's 20 Cosa's gleich sind. Wir werden also 20 durch 4 dividiren und 5 zum Werthe der Cosa bekommen. Und die Probe sagt es so. Da 20 multiplicirt durch 5, welches der Werth der Cosa ist, 100 machen, und da, wenn die Cosa 5, der Censo 25 ist, so werden demnach 100 die 4 Censo's gelten.

Zweite Regel: Sind Censo's einer Zahl gleich, so werden wir die Zahl durch die Censo's theilen, und die Wurzel von dem, was bei der Theilung herauskömmt, wird der Werth der Cosa sein.

Beispiel: Nehmen wir an, daß 7 Censo's der Zahl 63 gleich sind. Wir werden 63 durch 7 theilen und es wird 9 herauskommen; dessen Wurzel, die 3 ist, wird der Werth der Cosa sein. Und so ist es, weil, da der Werth der Cosa 3 ist, der Censo 9 sein wird, und 7 Censo's 63 gelten werden, da 7 mal 9 63 giebt.

Dritte Regel: Sind die Cosa's einer Zahl gleich, so werden wir die Zahl durch die Cosa's theilen, und was bei der Theilung herauskömmt, wird der Werth der Cosa sein.

Beispiel: Nehmen wir an, daß 10 Cosa's gleich 25 sind, so werden wir 25 durch 10 theilen, und das, was herauskömmt, und das $2\frac{1}{2}$ ist, wird der Werth der Cosa sein, weil 10 mal $2\frac{1}{2}$ eben diese 25 sind.

Vierte Regel, welche die erste der zusammengesetzten ist: Sind ein Censo und die Cosa's einer Zahl gleich, so werden wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's mit sich selbst multipliciren, indem wir ein Quadrat bilden; zu diesem Quadrate werden wir die gegebene Zahl hinzufügen und von der ganzen Summe werden wir die Wurzel nehmen. Von dieser Wurzel werden wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's hinwegnehmen, und so wird der Werth der Cosa bekannt werden.

Beispiel: Nehmen wir an, daß 1 Censo und 10 Cosa's der Zahl 56 gleich sind und wir den Werth der Cosa wissen wollen. Wir werden 5, welches die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, mit sich selbst multipliciren, und wir werden 25 erhalten, welche wir zu 56 hinzufügen, und wir werden 81 bekommen. Die Wurzel hiervon ist 9, und von dieser 9 werden wir 5 abziehen, was die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, und es wird 4 als Werth der Cosa herauskommen. Und so ist es; denn da 4 der Werth der Cosa ist, so wird der Censo 16 sein, und wenn wir dieses zu 40, welches der Werth von 10 Cosa's ist, hinzufügen, so werden wir 56 erhalten, das wir gleich einem Censo und 10 Cosa's angenommen haben.

Fünfte Regel, welche die zweite unter den zusammengesetzten ist: Wenn Cosa's und eine Zahl einem Censo gleich sind, so werden wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's mit sich selbst multipliciren, indem wir ein Quadrat bilden, und zu diesem Quadrate werden wir die Zahl fügen, wie wir es vorhin machten, und von dieser ganzen Summe werden wir die Wurzel nehmen, wozu wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's fügen werden, und es wird die Summe der Werth der Cosa sein.

Beispiel: Nehmen wir an, daß 6 Cosa's sammt der Zahl 40 einem Censo gleich seien. Wir werden 3, welches die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, mit sich selbst multipliciren und wir werden 9 erhalten. Diese 9 mit 40 machen 49, dessen Wurzel, die 7 ist, werden wir zu dieser 3 hinzufügen, und wir werden 10 erhalten, welches der Werth der Cosa sein wird. Und die Probe zeigt es so, weil 6 Cosa's 60 gelten, welche mit 40 100 machen, was der Censo von 10 ist.

Sechste Regel, welche die dritte der zusammengesetzten ist: Sind ein Censo und eine Zahl Cosa's gleich, so werden wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's mit sich multipliciren, indem wir ein Quadrat bilden; von diesem werden wir die gegebene Zahl hinwegnehmen und aus dem, was herauskommt, werden wir die Wurzel ziehen. Wenn wir diese zu der Hälfte der Anzahl der Cosa's addiren oder von ihr hinwegnehmen, wenn wir wollen, so wird sie uns den Werth der Cosa geben.

Beispiel: Nehmen wir an, daß ein Censo sammt der Zahl 24 10 Cosa's gleich sei; die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist 5, welches mit sich multiplicirt 25 macht; nimmt man davon 24 hinweg, so bleibt 1; dessen Wurzel, die 1 ist, werden wir zu 5 hinzufügen, und wir werden 6 erhalten, welches der Werth der Cosa sein wird.

Wir könnten ebensowohl, wenn es uns beliebte, 1 von 5 hinwegnehmen, und es würde 4 herauskommen, da der Werth der Cosa ein anderer sein kann, aber in Rücksicht auf einen andern Censo, und zu beiden Werthen der Cosa paßt das Beispiel.

Sollte es sich zufälliger Weise treffen, daß die gegebene Zahl dem Quadrate der Hälfte der Anzahl der Cosa's gleich wäre, so wird in diesem Falle jene Hälfte der Anzahl der Cosa's der Werth der Cosa sein.

Beispiel: Es sei 1 Censo sammt 9 gleich 6 Cosa's, so sage ich, daß der Werth der Cosa 3 gleich sein wird, weil das Quadrat der halben Anzahl der Cosa's 9 ist; nimmt man davon die Zahl hinweg, welche gleichfalls 9 war, so kommt Null heraus; mag man diese Null von 3 hinwegnehmen oder zu 3 addiren, so wird aus der 3 immer wieder 3.

Zweites Kapitel.

Uebung dieser Regeln.

Obschon die Uebung dieser Regeln eine Kenntniß des Algorithmus derjenigen Größen voraussetzt, von denen wir handeln, und welchen wir im zweiten Theile dieses Werkes vortragen, so scheint es uns doch, um denjenigen, welche durch dieses unser Buch jene Kunst der Algebra erfassen wollen, einigen Vorgeschmack zu geben, indem sie sogleich am Anfange einigen Nutzen finden, welcher der ist, durch diese Regeln das bekannt zu machen, was uns zuvor unbekannt war, und auf daß sie mit größerer Aufmerksamkeit dasjenige lesen, was folgt, als eine für das, was die Kunst erstrebt, nothwendige Belehrung, so schien es uns doch, sage ich, aus diesen

Ursachen eine sehr passende Sache zu sein, den Gebrauch der besagten Regeln in einigen Aufgaben zu zeigen, welche man durch dieselben auflösen kann, ohne daß man den Mangel der Belehrung des besagten zweiten Theiles empfindet.

In der ersten Aufgabe werden wir die erste Regel und in denen, die dann folgen, die andern anwenden.

Suchen wir zwei Zahlen, welche, unter einander was immer für ein uns vorgelegtes Verhältniß behaltend, eben so viel zu einander addirt, als mit einander multiplicirt ausmachen. Um diese Zahlen zu finden, werden wir annehmen, daß die kleinere von ihnen 1 Cosa gleich sei, und daß z. B. das Verhältniß, das sie zu einander haben, wie 3 zu 1 sei, d. h. das dreifache; es wird folglich die größere von ihnen 3 Cosa's, und beide zusammen in einer Summe werden 4 Cosa's sein. Wir werden die eine durch die andere multipliciren, nämlich 1 Cosa durch 3 Cosa's, und sie werden 3 Censo's machen, weil die Wurzel multiplicirt mit der Wurzel das Quadrat macht. Und da sie eben so viel ausmachen sollen, zu einander addirt, als mit einander multiplicirt, so werden 4 Cosa's 3 Censo's gleich sein, was die erste Verbindung ist, der die erste Regel entspricht, und wir werden, indem wir derselben gemäß verfahren, die Anzahl der Cosa's, welche 4 ist, durch die Anzahl der Censo's, d. h. 3, theilen, und es wird $1\frac{1}{3}$ als Werth der Cosa herauskommen, und dieß wird die kleinere Zahl sein. Und da $1\frac{1}{3}$ mit 3 multiplicirt 4 macht, so wird folglich die größere Zahl 4 sein. Es ist offenbar, daß sie eben so viel summirt als multiplicirt machen, da die Summe derselben $5\frac{1}{3}$ ist und sie mit einander multiplicirt eben auch $5\frac{1}{3}$ machen.

Uebung der zweiten Regel.

Suchen wir zwei Zahlen, welche, unter einander das angegebene Verhältniß beibehaltend, und durch einander multiplicirt, die Zahl geben, die wir wünschen mögen. Z. B. wenn es so hieße: Suchen wir zwei Zahlen im Verhältniß von 5 zu 4, die so beschaffen sein mögen, daß sie, mit einander multiplicirt, 80 geben. Nehmen wir an, die kleinere sei 1 Cosa, so wird folglich die größere $1\frac{1}{4}$ Cosa sein. Wir werden 1 Cosa mit $1\frac{1}{4}$ Cosa multipliciren, und sie werden $1\frac{1}{4}$ Censo, aus oben gesagtem Grunde, machen, daß nämlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt, das Quadrat giebt, und die Wurzel Cosa und das Quadrat Censo heißt. Und da man vorausgesetzt hat, daß die Zahlen mit einander multiplicirt 80 geben sollen, so werden diese 80 gleich sein $1\frac{1}{4}$ Censo, was die zweite Verbindung ist, der die zweite Regel entspricht. Wir werden die 80 durch $1\frac{1}{4}$ theilen und es wird der Quotient 64 sein, dessen Quadratwurzel, die 8 ist, der Werth der Cosa sein wird, und diese wird die kleinere Zahl sein; und weil die größere $1\frac{1}{4}$ Cosa war, so wird folglich 10 die größere sein.

Uebung der dritten Regel.

Suchen wir 2 Zahlen, deren Unterschied 4 sei, und die so beschaffen seien, daß, wenn die kleinere im Verhältnisse von 4 zu 3 und die größere im Verhältnisse von 3 zu 2 wächst, nach diesen Zunahmen die größere das Doppelte der kleineren werde. Diese Aufgabe wird zur Verfertigung musikalischer Instrumente dienen. — Nehmen wir an, die kleinere Zahl sei gleich 1 Cosa, so wird demzufolge die größere 1 Cosa und 4 sein. Wir wollen zur kleineren ihren Drittheil hinzufügen, und es wird $1\frac{1}{3}$ Cosa herauskommen; wir werden zur größeren ihre Hälfte hinzugeben, und es wird $1\frac{1}{2}$ Cosa mehr 6 hervorgehen; und weil nach diesen Zunahmen die größere das Doppelte der kleinern wird, so wird deswegen $1\frac{1}{2}$ Cosa mehr 6 das Doppelte von $1\frac{1}{3}$ Cosa sein. Verdoppelt man also $1\frac{1}{3}$ Cosa, indem man mit 2 multiplicirt, so werden wir $2\frac{2}{3}$ Cosa's haben, welche nothwendigerweise $1\frac{1}{2}$ Cosa mehr 6 gleich sein werden. Dieß beweist man durch jenen Grundsatz, daß, wenn zwei Größen das Doppelte einer dritten sind, diese zwei Größen unter sich gleich sein müssen. Wir haben noch einen andern gemeinen Grundsatz, welcher sagt, daß, wenn wir von einer von zwei gleichen Größen eben so viel als von der andern hinwegnehmen, die herauskommenden Größen unter einander gleich sein werden. Wenn wir also $1\frac{1}{2}$ Cosa von der Größe, die $1\frac{1}{2}$ Cosa mehr 6 war, hinwegnehmen, so wird bloß 6 herauskommen; und nehmen wir eben so viel von dem ihr Gleichen, was $2\frac{2}{3}$ Cosa's war, hinweg, so wird bloß $1\frac{1}{6}$ Cosa herauskommen, es wird folglich die Zahl 6 gleich sein $1\frac{1}{6}$ Cosa, welches die dritte Verbindung ist, der die dritte Regel entspricht.

Wir werden also 6 durch $1\frac{1}{6}$ theilen, und es werden $5\frac{1}{7}$ als Werth der Cosa herauskommen, von der wir angenommen haben, daß sie die kleinere Zahl sei. Und es wird die größere eben jene kleinere mehr 4 sein, was $9\frac{1}{7}$ ist. Die Probe zeigt es auch so; denn wenn $5\frac{1}{7}$ um seinen Drittheil wächst, so wird daraus $6\frac{6}{7}$, und wenn $9\frac{1}{7}$ um die Hälfte wächst, so wird $13\frac{5}{7}$ herauskommen, und es ist offenbar, daß $13\frac{5}{7}$ das Doppelte von $6\frac{6}{7}$ ist.

Uebung der vierten Regel.

Theilen wir 60 durch eine solche Zahl, daß das, was bei der Theilung herauskommt, den Theiler um 4 übertrifft. Nehmen wir an, der Theiler sei 1 Cosa, und es wird folglich 1 Cosa mehr 4 die Zahl sein, die bei der Theilung herauskommen soll. Multipliciren wir 1 Cosa mit 1 Cosa mehr 4, und wir werden 1 Censo mehr 4 Cosa's erhalten, welche der Zahl, die man theilt, gleich sein werden, weil der Quotient, multiplicirt mit dem Theiler, immer die Größe giebt, die man theilt. Es wird dieser Ursache wegen die Zahl 60 gleich sein 1 Censo mehr 4 Cosa's, was die vierte Verbindung ist, der die vierte Regel entspricht, deren Ausübung die ist: die Anzahl der Cosa's ist 4, deren Hälfte ist 2, das mit sich multiplicirt 4 macht. Diese 4 werden wir zu 60 addiren und 64 erhalten; von der Wurzel desselben, die 8 ist, werden wir 2 hinwegnehmen und so sechs als Werth der Cosa erhalten, welche der Theiler ist; und weil der Quotient den Theiler um 4 übertrifft, so werden wir 4 zu 6 addiren und 10 erhalten, dergestalt, daß 60 durch 6 getheilt 10 giebt, was den Theiler um 4 übertrifft, wie verlangt war.

Uebung der fünften Regel.

Suchen wir eine Zahl, welche, um 20 vermehrt, ihrem Quadrate gleich werde. Nehmen wir an, diese Zahl sei 1 Cosa, und geben wir 20 hinzu, so werden wir demnach 1 Cosa mehr

20 haben, was gleich sein wird einem Censo, welcher das Quadrat ist; und dieß ist die fünfte Verbindung, also die zweite der zusammengesetzten, deren Uebung die sein wird: Da 1 Cosa da ist, so werden wir $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{2}$ multipliciren und $\frac{1}{4}$ erhalten, und wenn wir dieß zu 20 addiren, so erhalten wir $20\frac{1}{4}$, dessen Wurzel, die $4\frac{1}{2}$ ist, werden wir zu $\frac{1}{2}$, das die Hälfte der Cosa's ist, addiren, und wir werden 5 erhalten, was der Werth der Cosa sein wird. Dieses wird die Zahl sein, die mit 20 eine Summe ausmacht, die ihrem Quadrate, 25, gleich ist.

Uebung der sechsten Regel.

Suchen wir eine Zahl, welche, mit 6 multiplicirt, eben so viel mache, als ihr Quadrat zu 8 summirt. Nehmen wir an, die Zahl sei 1 Cosa; multiplicirt mit 6 wird sie 6 Cosa's machen, und da die Zahl 1 Cosa ist, so wird ihr Quadrat ein Censo sein; diesen werden wir um 8 vergrößern, und wir werden 1 Censo mehr 8 erhalten, was 6 Cosa's gleich ist; und dieß ist die sechste Verbindung, der die sechste Regel entspricht, die die dritte der zusammengesetzten ist. Die Ausübung wird diese sein: Die Hälfte der Anzahl der Cosa's, welche 3 ist, mit sich multiplicirt, wird 9 machen; von diesem werden wir die Zahl, welche 8 ist, hinwegnehmen, und es wird 1 herauskommen, dessen Wurzel, die 1 ist, werden wir von 3, das die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, hinwegnehmen, und es wird 2 als Werth der Cosa herauskommen, und dieß wird die Zahl sein, die wir suchten. Wir können auch 1 zu 3 addiren, und wir werden 4 erhalten, welche andererseits der Werth der Cosa sein kann, dergestalt, daß jede von den zwei Zahlen 2 und 4 dem, was verlangt war, genügt. Denn nehmen wir 2, so ist klar, daß es, mit 6 multiplicirt, 12 macht, und sein Quadrat, welches 4 ist, addirt zu 8, wird ebenfalls 12 geben. Und wenn wir 4 nehmen und es mit 6 multipliciren, so werden wir 24 erhalten, und eben so viel wird 16, das Quadrat von 4, machen, wenn man es zu 8 addirt.

Drittes Kapitel.

Beweis der einfachen Regeln.

Zum Beweise dessen, was wir gesagt haben, und zu klarer Einsicht in den Gegenstand, den wir behandeln, müssen wir betrachten, daß, da durch die Theilung einer continuirlichen Größe die Zahl entsteht, wie Aristoteles sagt, und die Zahl eine Verbindung oder Sammlung von Einheiten ist, wir demnach diese Zahlen und Einheiten in den Linien, in den Flächen, in den Körpern durch ihre Trennung in Theile werden betrachten können. Und wiewohl, in welcher Art auch die continuirliche Größe getheilt wird, in gleiche oder in ungleiche Theile, eine Zahl hervorgehen würde, so denken sich doch die Mathematiker diese Trennungen in gleiche Theile, auf daß ein solches Verhältniß zwischen den Theilen und dem Ganzen hervorgehe, wie es durch die Zahlen selbst vorgestellt wird. Und sie pflegen die ebene Fläche in gleiche Theile, die die Form von Quadraten haben einzutheilen, wovon sie jede Einheit nennen, entsprechend der linearischen Einheit, die ihr als Seite dient. Und die körperliche Einheit ist ein vollkommen von Quadraten umschlossener Körper, welcher sich auf die Flächeneinheit gründet, dergestalt, daß, wenn man weiß, wie viel linearische Einheiten die zwei Linien enthalten, welche die ebene rectanguläre Figur in sich begreifen, welche also die Seiten sind, die den rechten Winkel machen, man demnach durch eine einzige Multiplication begreift, wie groß der Werth einer solchen Figur sei. Und kennt man die Höhe einer gleichfalls rectangulären körperlichen Figur, so versteht man durch eine andere Multiplication, außer der ersten, ihren Raumesinhalt. Deswegen hat jede Wurzel des Quadrates so viel Einheiten in Quadratform, als Wurzeln sind, die zusammen dem Quadrate gleich kommen; deswegen entsteht das Quadrat aus der Multiplication der Anzahl der Wurzeln, die es in ihm giebt, durch eben diese Anzahl und die Seite des Quadrates hat so viel linearische Einheiten, als die größere Seite der Wurzel.

Beispiel: Wenn 3 Wurzeln dem Quadrate a b c d (Fig. 1) gleich sind, so ist es nothwendig, daß jede der Wurzeln 3 gelte, weil 3 Wurzeln dreimal ihr Quadrat, welches 9 ist, machen; man muß wissen, daß 3 Einheiten in jeder Wurzel vorhanden sind, und daß man im Quadrate jede Wurzel in Form eines Rectangels voraussetzt. Diese ist so hoch wie die Seite des Quadrats und hat zur Basis die linearische Einheit, wie es in dieser Figur erscheint. In dieser ist das Quadrat abcd aus drei Wurzeln zusammengesetzt, welche sind die Rechtecke ae, fg, hc, und wenn man hierauf jedes Rechteck durch zu ab parallele Linien theilt, so wird das besagte Quadrat in 9 kleine Quadrate getheilt hervorgehen, welche Einheiten sind. Und dasselbe versteht sich von der Quadratzahl untheilbarer Einheiten. Sind 3 Wurzeln dem Quadrate gleich, so hat jede einzelne 3 Einheiten. Und was das anbelangt, was wir in der ersten Regel, die der ersten Verbindung entspricht, gesagt haben, daß, wenn die Cosa's Censo's gleich sind, wir die Zahl der Cosa's durch die Anzahl der Censo's theilen, und den Quotienten als den Werth der Cosa aussprechen, so hat es den Grund, den wir jetzt bezeichnet haben, daß nämlich das, was bei der Theilung herauskömmt, die Anzahl der Cosa's ist, welche 1 Censo gilt, und nicht gleich den Einheiten, welche eine Cosa enthält. Da jedoch jede einzelne Cosa so viele Einheiten hat, als der Censo Cosa's enthält, so werden wir gerade die Anzahl der Cosa's, die ein Censo gilt, für die Anzahl der Einheiten nehmen, die eine Cosa gilt. Die andern zwei Regeln einfacher Verbindungen sind so klar, daß sie eines neuen Beweises nicht bedürfen. Jordanus stellt unter den Grundsätzen der Arithmetik auf, daß, wenn eine Zahl durch eine andere getheilt ist, und wir den Quotienten durch den Theiler multipliciren, die erste Zahl, die getheilt worden ist, herauskommt, und das Umgekehrte dieses Satzes, woraus die zweite und dritte Regel ihre Evidenz erhalten. Und aus dem, was wir in diesem Kapitel gesagt haben, wird klar, daß die Wurzel des Quadrates eine Fläche ist, aber die Seite des Quadrates eine Linie, worin sich Einige irrten, indem sie dachten, daß Alles eins wäre, und sie nicht sahen, daß, wenn die Wurzel eine Linie wäre, es unmöglich sein würde, daß Cosa's Censo's gleich wären.

Viertes Kapitel.

Beweis der zusammengesetzten Regeln.

Die Regeln der zusammengesetzten Verbindungen bedürfen des Beweises mehr, und deswegen werden wir eine jede von ihnen für sich, und zuerst die erste auf diese Art beweisen:

Die Hälfte der Anzahl der Cosa's stellt man durch die ab dar (Fig. 2); diese werden wir fortführen, indem wir sie bis zum Punkte c verlängern, und es sei bc eine Seite des unbekannten Censo, welcher Censo, verbunden mit den Cosa's, welche uns in einer bekannten Anzahl gegeben sind, wiewohl jede einzelne unbekannt ist, gleich ist der Zahl, die wir als durch sich bekannt, für die dritte Größe der ersten Verbindung angenommen haben, und wir wollen durch die zugestandenen Sachen erkennen, welches der Werth der Cosa sei, die die Wurzel des Quadrates ist, das auf der Linie bc ruht. Wir werden deswegen auf der ganzen Linie ac das Quadrat acde und über der Linie bc das Quadrat bcgf machen, welches der in Rede stehende Censo ist. Wir werden die zwei Linien bf, fg bis zu den Punkten y und h in den Seiten ed und ae verlängern, und die Figur eyfh wird als ein Quadrat erscheinen, und die beiden Rechtecke abfh und fgdy werden gleich sein, wegen der Gleichheit der gegenüberstehenden parallelen Linien, und der zwei Seiten des Quadrates bcgf. Und da ab die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, die gegeben waren, und die Linie bf die Seite des unbekannten Censo, so wird deswegen das Rechteck abfh die Hälfte des Werthes der besagten Cosa's, übereinstimmend mit der Lehre des vorigen Kapitels, und eben so viel wird das Rechteck fgdy gelten, und die beiden Rectangel verbunden werden der Gesammtwerth der Cosa's sein. Und da die Cosa's mit dem ganzen Censo verbunden einer gewissen Zahl oder bekannten Größe gleich angenommen werden, so werden dessentwegen die zwei Rectangel mit dem Censo oder Quadrate in einer Summe bekannt sein. Zu dieser Summe werden wir das Quadrat eyfh hinzuaddiren, welches bekannt ist, da es zur Seite die Linie hf hat, welche, weil sie der Linie ab gleich ist, bekannt ist, und es wird das ganze Quadrat, das Alles in sich faßt, entstehen; dieses wird bekannt sein, und deswegen seine Seite, welche die Linie ac ist. Von dieser Linie ac, welche uns bekannt ist, werden wir die Linie ab, welche uns bekannt ist, da sie die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, abziehen, und es wird die Seite des Quadrates bcgf als bekannt übrig bleiben, und die Wurzel desselben Quadrats wird ihrerseits bekannt sein. Und dieß wollten wir beweisen. Wenn folglich ein Censo und eine bekannte Zahl von Cosa's gleich einer bekannten Zahl angenommen werden, so thun wir Recht, wenn wir die Hälfte der Anzahl der Cosa's, welche ab ist, nehmen und sie mit sich selbst multipliciren, indem wir das Quadrat eyfh machen, es mit der vorgelegten Zahl, welche man als bekannt giebt, verbinden, welche Zahl die Summe der zwei Rechtecke und des Quadrates bcgf ist, und von der ganzen Summe, welche das gesammte Quadrat ist, die Wurzel nehmen, welche Wurzel den Einheiten oder der Größe der Seite ac entspricht. Wenn wir von dieser die Hälfte der Anzahl der Cosa's, welche ab ist, abziehen, so wird die Wurzel des Censo bcgf übrig bleiben. Diese Wurzel wird durch die Seite bc vorgestellt; obschon in Wahrheit die Wurzel eine Fläche und die Seite bc eine Linie ist, so sind sie doch übereinstimmend in der Zahl der Einheiten, wenn sie rationale Größen sind; und wäre die Linie eine irrationale Größe, so wird auch die Wurzel eine irrationale desselben Namens sein, und dieß wollten wir beweisen, wie es in der ersten Regel der zusammengesetzten Verbindungen enthalten ist. Dieser Figur und dieses Beweises bediente sich Euclides in dem vierten Satze des zweiten Buches, um zu beweisen, daß, wenn die Linie ac in zwei Theile getheilt wäre, wie im Punkte b, das Quadrat der ganzen Linie ac den Quadraten beider Theile, verbunden mit dem zweimal gewonnenen Rechtecke, welches die Theile enthalten, gleich ist. Und dasselbe bewies Campanus, betreffend den 16ten Satz des 9ten Buches in Zahlen von untheilbaren Einheiten, welche auf diese Weise zu unserm Vorhaben dienen wird. Die Hälfte der Anzahl der Cosa's sei ab, und es stelle bc die Einheiten vor, welche die Cosa gilt, a . . . . b . . . . c. Folglich, wenn wir ab mit bc multipliciren, so werden wir die Hälfte des Werthes der Cosa's haben, und wenn wir ab mit bc zweimal multipliciren, so werden wir den ganzen Werth derselben erhalten, der uns jedoch unbekannt sein wird, da, vorausgesetzt, daß ab eine bekannte Zahl sei, bc dennoch unbekannt ist. Aber wenn wir mit diesem Werthe der Cosa's das Quadrat von bc verbinden, das der Censo ist, so wird uns diese ganze Summe bekannt sein, da sie der vorgelegten Zahl gleich ist, die, als bekannt gegeben ist. Mit dieser Summe werden wir das Quadrat von ab verbinden, welches bekannt ist, da ab eine bekannte Zahl ist, und es wird aus dem Ganzen eine bekannte Zahl hervorgehen, die dem Quadrate von ac gleich ist, da die zwei Quadrate von ab und bc mit den zwei Multiplicationen von ab und bc dem Quadrate von ac gleich sind. Von seiner Seite, welche ac ist, werden wir die Zahl ab, die bekannt ist, abziehen, und es wird die Zahl bc übrig bleiben, welche die Seite des Censo ist, und folglich wird der Werth der Cosa bekannt sein. Diese Regel wird jedoch nicht für Zahlen von untheilbaren Einheiten dienen können, wenn die Anzahl der Cosa's ungerade wäre, weil sie keine Hälfte hat. Deswegen haben wir andre Regeln zusammengesetzt, welche zu Allem dienen, und die im zweiten Kapitel des dritten Haupttheiles dieses Werkes geschrieben stehen.

Beweis der zweiten Regel der zusammengesetzten Verbindungen.

Die zweite Regel der zusammengesetzten Verbindungen, die uns sagt, was wir thun sollen, um zu wissen, wie groß der Werth der Cosa sei, wenn die Cosa's mit der Zahl einem Censo gleich wären, werden wir auf diese Weise darthun: Der unbekannte Censo sei das Quadrat abcd (Fig. 3), und von seiner Seite werden wir die Linie ae abschneiden, welche die Anzahl der Cosa's sein mag, indem wir das Wort „Zahl" nehmen, wie es im Anfange dieses Buches erklärt ist. Vom Punkte e werden wir die Linie ef parallel zur Linie oder Seite bc errichten, so wird aus dieser Ursache das Rechteck aefd der ganze Werth der Cosa's sein, und der Rectangel ebcf, welcher vom Censo bleibt, wird die Zahl sein, die man im Verein mit den Cosa's aufgestellt hat. Wir werden hierauf die Anzahl der Cosa's, von der wir annahmen, daß sie ae sei, in zwei gleiche Theile im Punkte p theilen, und wir behaupten, daß, wenn wir mit dem Quadrate von pe das Rechteck ebcf, welches die aufgestellte Zahl ist, verbinden, und von dieser ganzen Summe die Quadratseite nehmen, die wir gewöhnlich Wurzel nennen, und mit dieser Quadratseite die andere Hälfte der Anzahl der Cosa's, welche ap ist, verbinden, auf diese Weise die Seite des unbekannten Censo abcd gebildet sein wird, welche Seite dem Werthe der Cosa entspricht. Zum Beweise dessen werden wir von der Linie bc die Linie bg, gleich der Linie be nehmen und vom Punkte g die Linie gk parallel zur Linie ab ziehen, und über bp das Quadrat bprt construiren. Das Zusammentreffen von gk mit pr sei in s, und mit ef in o und das von rt mit ef geschehe in y. Folglich wird die Figur ebgo ein Quadrat sein und die beiden Rectangel eosp, goyt werden unter sich gleich sein. Und da die zwei Linien ap und tc unter sich gleich sind, aus gleichen Gründen auch die Linien ep und gt, da die einen wie die andern übrig bleiben, wenn man gleiche Linien, welche Seiten von Quadraten sind, von einander abzieht, und da wir ep und ap gleich gemacht haben, so werden auch einem allgemeinen Satze zufolge die zwei Linien gt und tc und die zwei Rectangel goyt und tcfy unter sich gleich sein; gleich auch unter sich die beiden Rectangel eosp und tcfy. Folglich wird das Rectangel ebcf, welches die aufgestellte Zahl ist, gleich sein dem Gnomon, welcher zusammengesetzt ist aus dem Quadrate ebgo, und aus den Ergänzungen eosp uud goyt. Und da der besagte Rectangel ebcf eine bekannte Zahl ist, so wird deswegen der Gnomon bekannt sein. Wir werden hierauf mit dem Gnomon das Quadrat oyrs verbinden, welches uns bekannt ist, weil seine Seite os, da sie der Linie ep gleich ist, bekannt ist, und es wird sich eine bekannte Summe bilden, welche das Quadrat bprt ist, dessen Seite pb bekannt sein wird. Wir werden hierauf mit derselben die Linie ap, die Hälfte der Anzahl der Cosa's, verbinden, die uns bekannt ist, und es wird die ganze Linie ab, welche die Seite des Censo abcd ist, bekannt sein, und folglich wird die Wurzel des Censo, welche der Werth der Cosa ist, unserer Lehre gemäß bekannt sein, und dieß ist, was wir beweisen wollten. Auf dieselbe Weise bewies Euclides in dem 6ten Satze des zweiten Buches, daß, wenn eine Linie in zwei gleiche Theile getheilt wäre, wie ae im Punkte p, und wir in gerader Richtung daran eine andere Linie wie eb ansetzten, das Rechteck, welches zwischen der ganzen Linie ab und der, die man angesetzt hat, welche eb ist, enthalten, zum Quadrate von ep, welches die Hälfte der ersten Linie ist, addirt, dem Quadrate gleich ist, welches über der Linie bp, die aus der Hälfte der ersten Linie und der angesetzten zusammengesetzt ist, errichtet wird. Und dasselbe bewies Campanus in Zahlen von untheilbaren Einheiten, betreffend den 16ten Satz des 9ten Buches, der auf diese Weise zu unserm Vorhaben angewendet wird: Die Wurzel des unbekannten Censo sei die Zahl a . . . d . . . c . . . b, die gleichfalls unbekannt ist, und die Anzahl der Cosa's oder Wurzeln, die man als bekannt annimmt, sei ac. Die Hälfte dieser Anzahl von Wurzeln sei ad oder dc, und es sei uns auch die Zahl bekannt, welche dem Werthe der Wurzeln zur Ergänzung des unbekannten Quadrates fehlt; da sage ich, daß die Zahl ab nicht unbekannt sein kann. Denn es ist offenbar, daß die Multiplication des ab mit sich selbst gleich ist der Multiplication von ab mit allen seinen Theilen, wie es Campanus an demselben Orte beweiset. Demzufolge wird, wenn wir ab mit ac und mit cb multipliciren, Alles zusammen dem Quadrate von ab gleich sein. Und da die Multiplication von ab, welches der Werth von einer Wurzel ist, in ac, welches die Anzahl derselben ist, den ganzen Werth der Wurzeln ausmacht, so wird demnach die Multiplication von ab in cb das sein, was fehlt zur Ergänzung des unbekannten Quadrates, dessen Wurzel ab ist, und folglich wird dieselbe Multiplication von ab in cb die Zahl machen, welche als bekannt angenommen worden ist. Wir werden das Quadrat der dc, welches bekannt ist, hinzufügen, und es wird das Ganze zusammen bekannt sein, und gleich dem Quadrate von db. Und da das Quadrat von db auf diese Art bekannt gemacht worden ist, wird auch seine Wurzel, welche db ist, bekannt sein; und da ad eine bekannte Zahl ist, so muß man die Hälfte der Anzahl der Cosa's wissen; es wird folglich die Zahl ab ganz bekannt sein, welches der Werth einer Cosa ist, wie wir es oben in untheilbaren Zahlen erwiesen haben. Diese Regel und ihr Beweis werden jedoch nicht dienen können, wenn die Anzahl der Cosa's ungerade ist, und die Einheiten untheilbar wären. Durch denselben 6ten Satz des zweiten Buches Euclid's wird man auch die erste Regel der zusammengesetzten Verbindungen beweisen können, die wir durch den 4ten bewiesen haben. Denn es sei die Linie ab (Fig. 4.) die Anzahl der Cosa's und bc die Seite des Censo bcde; man vollende das Rechteck von ac und cb, welches cf sein möge, und dieß wird der gesammte Werth der Cosa's sein verbunden mit dem Censo, welche Summe wir gleich einer bekannten Zahl angenommen haben. Wir werden hierauf die Linie ab in zwei gleiche Theile in g theilen, und es wird das Quadrat von bg bekannt sein, und dieses verbunden mit der Zahl oder dem Rechteck cf wird eine Summe machen, welche dem Quadrate von gc, nach dem 6ten Satze des zweiten Buches, gleich und bekannt sein wird. Bekannt wird folglich sein das Quadrat von gc und eben diese gc. Von dieser gc werden wir bg abziehen, welche, weil sie die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, bekannt ist, und es wird die Linie bc bekannt werden, die Seite des Censo, der unbekannt war; auch wird die entsprechende Wurzel des Censo, welche der Werth der Cosa ist, bekannt sein.

Beweis der dritten Regel der zusammengesetzten Verbindungen.

Die dritte Regel der zusammengesetzten Verbindungen sagt uns, was wir zu thun haben, um den Werth der Cosa zu wissen, wenn eine Zahl und ein Censo Cosa's gleich wären, und zu beweisen ist sie auf diese Weise:

Es sei die Anzahl der Cosa's die Linie ab (Fig. 5), diese werden wir in zwei gleiche Theile im Punkte c theilen; und nehmen wir zuerst an, daß die Seite des Censo kleiner sei, als die Hälfte von ab, so wie es die db ist; wir werden den Censo bdef errichten, und die Linie fe verlängern, bis sie in dem Punkte g eine andere trifft, welche vom Punkte a parallel zur bf ausgeht. Es wird folglich das Rechteck abgf der ganze Werth der Cosa's sein und das Rechteck adeg die Zahl, welche mit dem Censo den Cosa's gleich ist, und wir wollen durch die Kenntniß dieser Zahl und der Anzahl der Cosa's wissen, wie groß der Werth der Cosa sei.

Wir werden, der Regel gemäß, auf bc das Quadrat cbky machen, welches bekannt ist, weil seine Seite bc bekannt ist, und wir werden die Linie de bis zu dem Punkte o in der Seite yk verlängern, und es sei das Zusammentreffen der cy mit der fg in r. Nothwendigerweise werden die zwei Rechtecke cder und efko, welche wir Ergänzungen nennen, gleich sein, und wenn wir zu einem jeden von ihnen das Quadrat bdef hinzugeben, so werden die zwei Rechtecke bdok und cbfr gleich sein. Und da auch das Rechteck acrg dem Rechtecke cbfr gleich ist, so folgt aus einem gemeinen Satze, daß die zwei Rechtecke acrg und bdok unter sich gleich sein werden. Wenn wir demnach zu jedem von ihnen das Rechteck cder hinzufügen, so wird nach einem Grundsatze das Rechteck adeg, welches die gegebene Zahl ist, gleich dem Gnomon, der aus den zwei Ergänzungen und dem Quadrate bdef zusammengesetzt ist, herauskommen, so daß, wenn man vom Werthe des Quadrates cbky, welches bekannt ist, den Gnomon, der, weil er der gegebenen Zahl gleich ist, bekannt ist, abzieht, das Quadrat eoyr als bekannt herauskommen wird. Und da seine Seite er der Linie cd gleich ist, so wird aus dieser Ursache diese Linie cd bekannt sein. Diese werden wir von cb, welche auch bekannt ist, abziehen, und es wird db, das die Seite des Censo ist, bekannt sein, wodurch der Werth der Cosa bekannt herauskommen wird.

Aber nehmen wir vom Anfang, ohne eine Veränderung weder in der gegebenen Zahl, noch in der Anzahl der Cosa's zu machen, an, daß die Seite des Censo nicht db, sondern ad sei, und errichten wir, indem wir die ganze Figur, die wir gebraucht haben, lassen, auf ad das Quadrat adtp und verlängern wir pt und bk bis zu dem Punkte s, wo sie sich treffen. Es wird also das Rechteck absp der Werth der Cosa's sein, der unbekannt ist, wiewohl die Anzahl derselben bekannt ist; und da adtp der Censo ist, so wird das Rechteck dbst die als bekannt gegebene Zahl sein, und ist die Zahl, welche wir gegeben hatten, als wir annahmen, daß der unbekannte Censo bdef wäre.

Die Ursache ist, daß die beiden Rechtecke adeg und dbst unter sich gleich sind wegen der Gleichheit der Seiten ad, de mit den Seiten dt und db, und adeg die gegebene Zahl und gleich dem Gnomon war, der aus den zwei Rectangeln cbfr und efko zusammengesetzt ist. Wenn wir demnach auch bei dieser Anordnung vom Quadrate cbky den besagten Gnomon hinwegnehmen, welcher der Zahl gleich ist, so wird das Quadrat eoyr als bekannt übrig bleiben und seine Seite er wird bekannt sein und folglich cd, das ihr gleich ist; dieses cd werden wir mit ac, der Hälfte der Anzahl der Cosas verbinden, und die ganze Linie ad, die in dieser zweiten Annahme die Seite des Censo ist, wird bekannt sein, und aus demselben Grunde auch der Werth der Cosa; dergestalt, daß, wenn der Censo und die Zahl den Cosa's gleich sind, die Annahme immer zwei Antworten erhalten kann und jede von ihnen genügen wird, da der Censo klein und der Werth der Cosa's größer sein kann, wie in der ersten Anordnung; und der Censo groß, errichtet auf dem größeren Theile, wie in der zweiten, und der Werth der Cosa's kleiner, ohne daß weder die gegebene Zahl noch die Anzahl der Cosa's eine Veränderung erleidet; wenn z. B. ein Censo und die Zahl 20 12 Cosa's gleich gegeben würden, so würde das Quadrat von cb, welches die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist, 36 gelten; zieht man davon den Gnomon, der die gegebene Zahl, nämlich 20 ist, ab, so wird 16 als Werth des Quadrats eoyr herauskommen, dessen Seite, die cd ist, 4 gelten wird. Wenn wir hierauf diese 4 von cb, das 6 ist, abziehen, so wird db die Seite des kleinen Censo, welche 2 ist, übrig bleiben; der Censo wird 4 gelten, das mit der Zahl 20 24 ausmachen wird, das der Werth von 12 Cosa's ist. Jedoch wenn wir jene 4, welche die cd enthält, zu 6, welche ac enthält, hinzusetzen, so wird die Linie ad 10 gelten; diese ist die Seite des großen Censo, und folglich wird die Cosa 10, und der Censo 100 gelten, was mit der Zahl 20 120, gleich 12 Cosa's, ausmachen wird.

Aus diesem ersieht man, daß, so oft bei einer Ueberlegung, die wir anstellen, es sich ergiebt, daß die Zahl und 1 Censo Cosa's gleich sind, 2 Werthe der Cosa entsprechen, und meistentheils beide zur Auflösung der Aufgabe dienen, manchmal ein einziger Werth, wie wir in der Praxis sehen werden. Aus diesem Beweise folgt, daß die Zahl, die man in Verbindung mit dem Censo aufstellt, niemals kleiner sein kann als das Quadrat der Hälfte der Anzahl der Cosa's, sondern entweder kleiner oder gleich, und wenn sie gleich ist, der Werth der Cosa so groß sein wird, als die Hälfte der Anzahl der Cosa's ist.

Beispiel: Nehmen wir an, daß ein Censo mit der Zahl 9 6 Cosa's gleich sei. Da die Hälfte der Anzahl der Cosa's 3 ist, dessen Quadrat 9, so werden wir sagen, daß die Cosa 3 gilt; und so ist es; da der Censo 9 gilt, welche, mit den 9 der Zahl, 18 ausmachen, und eben so viel auch 6 Cosa's, wenn wir einer jeden 3 geben. Und, um uns keine neue Regel zu machen, können wir so sagen: da die Hälfte der Cosa's 3 ist, so wird ihr Quadrat 9 sein; von diesen 9 werden wir die Zahl, welche auch 9 ist, abziehen und es wird Null herauskommen. Und da die Wurzel aus Null Null ist, so werden wir diese Null von 3, welches die halbe Anzahl der Cosa's ist, abziehen, und es werden diese 3 als Werth der Cosa übrig bleiben. Doch diese Ueberlegung ist für den nicht nöthig, der den Beweis inne hat; es ist folgender:

Nehmen wir an, daß die Linie ab die Anzahl der Cosa's sei und cb die Seite des Censo cbed (Fig. 6), und daß vom Punkte a die Linie af parallel zur Linie be ausgehe, und verlängern wir die Linie ed, bis sie mit der af in dem Punkte f zusammentrifft. Es wird folglich das Rechteck abef der ganze Werth der Cosa's sein, die wir dem Censo mit der Zahl gleich gesetzt haben. Dieser Ursache wegen wird das Rechteck acdf die Zahl sein. Nehmen wir hierauf an, daß diese Zahl dem Quadrate der Hälfte der Anzahl der Cosa's gleich sei, so muß folglich die Linie ac die Hälfte der Anzahl der Cosa's, und das darauf errichtete Quadrat eben das Rechteck acdf sein. Denn wenn eine andere Linie, und nicht ac, die Hälfte der Anzahl der Cosa's wäre, so würde, wenn man auf dieser Linie ein Quadrat errichtete, in diesem Falle dieses Quadrat größer oder kleiner als die Zahl sein, von der feststeht, daß sie dem Rechteck acdf gleich ist. Aber da wir angenommen haben, daß die Zahl, welche beim Censo steht, und das Quadrat der Hälfte der Anzahl der Cosa's gleich sein sollen, so müssen auch die zwei Linien ac und cb gleich sein. Und da die Anzahl der Cosa's als bekannt gegeben wird, so wird folglich die Zahl cb bekannt sein, welche die Seite des Censo ist und der entsprechende Werth der Cosa wird auch bekannt sein. Wollen wir demnach zum Schlusse sagen, daß, wenn die Zahl, die beim Censo ist, dem Quadrate der Hälfte der Anzahl der Cosa's gleich ist, wir, gemäß diesem Beweise, die Hälfte der Anzahl der Cosa's als Werth der Cosa nehmen, oder daß wir nach der Regel verfahren werden, da die Nullen weder vergrößern noch verkleinern.

Des Beweises dieser dritten Regel bediente sich Euclides in dem fünften Satz des zweiten Buches, um darzuthun, daß, wenn eine gerade Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile getheilt wird, das, was sich ergiebt aus dem größeren Theile in den kleineren, verbunden mit dem Quadrate der Linie, die zwischen der Mitte der Linie und dem Endpunkte des größeren Theils liegt, dem Quadrate der Hälfte der Linie gleich ist. Und dasselbe bewies Campanus, betreffend den 16ten Satz des 9ten Buches, und Jordanus im 19ten des ersten Buches seiner Arithmetik in Zahlen von untheilbaren Einheiten. Dieß wird sich auf diese dritte Regel auf diese Weise anwenden lassen: a . . . . b . . . : c . . . . d.

Es sei ad die Anzahl der Cosa's, ihre Hälften seien ab, bd und die Seite des Censo sei cd; es wird folglich das, was sich ergiebt, wenn man ad mit cd multiplicirt, der Werth der Cosa's sein, und da, wie Jordanus und Campanus an demselben Orte erwiesen haben, so viel sich ergiebt, wenn man die ganze Zahl mit einem Theile, als wenn man denselben Theil mit sich multiplicirt, verbunden mit der Multiplication eines Theils mit dem andern, so wird demnach der Werth der Cosa's dem gleich sein, was sich ergiebt, wenn man cd mit sich multiplicirt, verbunden mit der Multiplication desselben Theiles cd in ac. Und da cd mit sich selbst den Censo macht, welcher verbunden mit der Zahl den Cosa's gleich ist, so wird deswegen das, was sich ergiebt, wenn man ac mit cd multiplicirt, der Zahl gleich sein, welche bei dem Censo gegeben wurde. Und da das, was sich ergiebt, aus ac mit cd multiplicirt, verbunden mit dem Quadrate von bc, dem Quadrate von bd, der Hälfte der Anzahl der Cosa's gleich ist, so werden wir vom Quadrate von bd, das bekannt ist, das abziehen, was sich aus ac mit cd multiplicirt ergiebt, und was der gegebenen Zahl gleich ist, und es wird das Quadrat von bc als bekannt übrig bleiben, wodurch seine Seite, welche bc ist, bekannt sein wird. Diese Seite bc werden wir von bd hinwegnehmen, und es wird cd, die Seite des Censo und der Werth der Cosa als bekannt herauskommen.

Hätten wir jedoch angenommen, daß die Seite des Censo ac wäre, so würden wir unseren Beweis für die andere Seite machen, und wenn wir bc mit ab verbänden, würde die Seite des Censo oder der Werth der Cosa, der ac ist, als bekannt herauskommen. Aber diese Beweise des Campanus und Jordanus können für die Regel nicht dienen, wenn die Anzahl der Cosa's ungerade ist.

Das Wesentliche in der vorausgeschickten Abhandlung sind die Regeln für die 6 Verbindungen und die Beweise für die Richtigkeit derselben. Damit es leichter möglich werde, die in den vorausgehenden Bogen befolgte Darstellungsweise mit der jetzt üblichen zu vergleichen, möge folgende Zugabe hier Platz finden.

1. Es sei $a.x^2 = bx$; man dividire beiderseits durch x, so ist $ax = b$ also $x = \frac{b}{a}$.

Ist also ein Quadrat, eine gewisse Anzahl mal genommen, gleich seiner, eine gewisse Anzahl mal genommenen Wurzel, so findet man die Wurzel, wenn man die Anzahl der Wurzeln durch die Anzahl der Quadrate dividirt.

2. Es sei $ax^2 = b$; dann ist $x^2 = \frac{b}{a}$ also $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Ist also ein Quadrat, eine gewisse Anzahl mal genommen = einer gegebenen Zahl, so findet man die Wurzel des Quadrats, wenn man die gegebene, bekannte Zahl durch den Coefficienten des Quadrats dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

3. Es sei $ax = b$, so ist $x = \frac{b}{a}$.

Ist also eine unbekannte Größe (Wurzel), eine gewisse Anzahl mal genommen, einer gegebenen, bekannten Zahl gleich, so findet man jene Wurzel, wenn man die gegebene, bekannte Zahl durch die Anzahl der Wurzeln dividirt.

4. Es sei $x^2 + ax = b$, so ist $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$,

$$\text{also } x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}, \text{ also } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Ist also das Quadrat einer Unbekannten sammt der, eine gewisse Anzahl mal genommenen Wurzel desselben einer gegebenen, bekannten Zahl gleich, so findet man gedachte Wurzel, wenn man das Quadrat der halben Anzahl der Wurzeln zu der bekannten Zahl addirt, aus der Summe die Quadratwurzel zieht, davon aber die halbe Anzahl der Wurzeln hinwegnimmt.

5. Es sei $ax + b = x^2$, also $b = x^2 - ax$, und $b + \frac{a^2}{4} = x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$, also auch

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{4}\right)} = x.$$

Ist also eine Unbekannte, eine gewisse Anzahl mal genommen, sammt einer gegebenen, bekannten Zahl = dem Quadrate jener Unbekannten, so findet man diese Unbekannte, wenn man das Quadrat der halben Anzahl der Wurzeln zur gegebenen, bekannten Zahl addirt, aus der Summe die Wurzel zieht, und dazu die halbe Anzahl der Wurzeln addirt.

6. Es sei $x^2 + b = ax$; so ist $x^2 - ax = -b$,

$$\text{und } x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b,$$

$$\text{also } x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)},$$

$$\text{also } x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}.$$

Ist also das Quadrat einer Unbekannten sammt einer gegebenen, bekannten Zahl der, eine gewisse Anzahl mal genommenen Unbekannten gleich, so findet man die Unbekannte, wenn man vom Quadrate der halben Anzahl der Wurzeln die gegebene, bekannte Zahl abzieht, aus dem Reste die Wurzel zieht, und dazu die halbe Anzahl der Wurzeln addirt.

Anmerkung. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß wir unter x^2 das verstehen, was unser Verfasser Censo, und unter x das, was er Cosa nennt.

Bemerkung. Ich lasse den Beweis der dritten Regel der zusammengesetzten Verbindungen ganz so folgen, wie er in dem Werke selbst steht.

Demonstracion dela tercera Regla delas Compuestas.

La tercera Regla delas compuestas nos dize lo q̃ deuemos hazer para saber el valor de la cosa, quando numero y censo fueren yguales a cosas, y demonstrar se ha por este modo. El numero delas cosas sea la linea a. b. la qual partiremos en dos partes yguales enel punto c. y pongamos primeramẽte ser menor el lado del censo que la mitad de a. b. assi como es d. b. y constitueremos el censo b. d. e. f. y estenderemos la linea f. e. hasta encõtrarse enel punto g. con otra q̃ salga del punto a. equidistante a la linea b. f. Sera por tanto el rectangulo a. b. f. g. el entero valor delas cosas, y sera el rectangulo a. d. e. g. el numero q̃ con el censo se yguala con las cosas, y queremos por noticia desse numero, y del numero delas cosas conoscer quanto sea et valor dela cosa. Haremos conforme a la regla sobre b. c. el quadrado c. b. k. y. el qual es noto por que su lado c. b. es noto, y estenderemos la linea d. e. hasta el punto o. enel lado y. k. y sea el encuentro de c. y. con f. g. en r. Necessariamente los dos rectangulos c. d. e. r. y e. f. k. o. aq̃ llamamos suplementos seran yguales, y dando acada uno dellos el quadrado b. d. e. f. los dos rectangulos b. d. o. k. y c. b. f. r. seran yguales. Y por q̃ tambien el rectangulo a. c. r. g. es ygual al rectangulo c. b. f. r. siguese por cõmun sentencia que los dos rectangulos a. c. r. g. y b. d. o. k. seran entre sy yguales. Por loqual sy juntaremos con cada uno dellos el rectangulo c. d. e. r. resultara por cõmun sentencia el rectangulo a. d. e. g. que es el numero que se propuso ygual al gnomon compuesto de los dos suplementos y del quadrado b. d. e. f. Assy q̃ sacando del valor del quadrado c. b. k. y. el qual es conoscido, el gnomon, q̃ por ser ygual al numero q̃ se propuso es conoscido, quedara el quadrado e. o. y. r. conoscido. Y por q̃ su lado e. r. es ygual a la linea c. d. sera por esta causa essa linea c. d. conoscida laqual sacaremos de c. b. q̃ tambien es conoscida, y restara d. b. conoscida, laqual es lado del censo, por laqual el valor dela cosa, q̃dara conoscido. Mas pongamos de principio no haziendo mudança enel numero que se propuso, ny enel numero delas cosas, que el lado del censo no sea d. b. mas sea a. d. y dexando hecha toda la figura de que auemos usado, fundemos sobre a. d. el quadrado a. d. t. p. y estendamos p. t. y b. k. hasta el punto s. de su encuentro. Y sera por tanto el rectangulo a. b. s. p. el valor delas cosas, el qual es ignoto, aun q̃ el numero dellas sea noto, y por q̃ a. d. t. p. es el censo, el rectangulo d. b. s. t. sera el numero que se propuso conoscido, y es el numero q̃ auiamos propuesto quando pusimos que el censo ignoto fuesse b. d. e. f. Es la causa, que los dos rectangulos a. d. e. g. y d. b. s. t. son entre si yguales, por la ygualdad delos lados a. d. y d. e. con los dos d. t. y d. b. y era a. d. e. g. el numero que se propuso, y ygual al gnomon compuesto delos dos rectangulos c. b. f. r. y e. f k o. Y por tanto tambien en esta disposicion si del quadrado c. b. k. y. quitaremos el dicho gnomon, que es ygual al numero, restara el quadrado e. o. y. r. conoscido, y su lado e. r. sera conoscido, y por consiguiente c. d. su ygual, la qual c. d. juntaremos con a. c. mitad del numero delas cosas, y toda la linea a. d. que es lado del censo en esta secunda posicion sera conoscida, y el valor dela cosa por essa razon sera conoscido. De suerte que quando el censo y el numero son yguales alas cosas, podra la posicion tener siempre dos respuestas, y cada una dellas satisfara. Porque puede el censo ser pequeño, y el valor delas cosas major, como en la primera disposiciō. Y puede ser el censo grande. s. fundado sobre la major parte, como en la segunda, y el valor delas cosas sera menor, sin q̄ el numero reciba mudança, ny el numero delas cosas que se propuso. Como si un censo y .20. numero fueren propuestos yguales a .12. cosas el quadrado de c. b. el qual es la mitad del numero delas cosas valdra .36. del qual sacando el gnomon q̄ es el numero propuesto. s. 20. quedaran .16. por valor del quadrado e. o. y. r. cujo lado que es c. d. valdra .4. Pues si estes 4. sacaremus de c. b. que es .6. restara d. b. lado del pequeño censo que valdra .2. y el censo valdra .4. que con el numero .20. haran .24. q̄ es el valor de .12. cosas. Pero si juntaremos estes .4. que tiene c. d. con .6. que tiene a. c. valdra .10. la linea a. d. la qual es lado del censo grande, y por tanto la cosa valdra .10. y el censo valdra .100. que con el numero .20. haran .120. yguales a doze cosas. Desto queda manifiesto que todas las vezes que en el discurso que hazemos resultare que el numero y censo se ygualan con las cosas responden dos valores ala cosa, y las mas vezes siruen entrambos valores para solucion de la question, y algunas vezes un solo valor, como en la practica se vera. Desta demonstracion se sigue, que el numero que con el censo se propone en su compañia, nunca puede ser major, que el quadrado dela mitad del numero delas cosas, mas o sera menor, o sera ygual, y quando fuere ygual, tanto sera el valor dela cosa, quanta fuere la mitad del numero delas cosas.

Exemplo: Pongamos q̄ un censo con el numero .9. son yguales a seis cosas. Por que la mitad del numero delas cosas es .3. cuyo quadrado es .9. diremos que la cosa vale .3. y assi es, por que el censo vale .9. que con los .9. del numero hazen .18. y tanto hazen .6. cosas, dando acada una .3. Y para no hazermos regla nueva, podremos dizir assi por q̄ la mitad delas cosas es .3. el su quadrado sera .9. destos .9. sacaremos el numero que tambien es .9. y quedara cifra. Y por que la raiz de cifra es cifra, sacaremos esa cifra de .3. que es la mitad del numero delas cosas, y restaran essos tres por valor dela cosa. Pero este discurso no es necessario para quien tiene la demonstracion. La qual es esta. Pongamos que la linea a. b. sea el numero delas cosas, y c. b. sea lado del censo c. b. e. d. y falga del puncto a. la linea a. f. equidistante a la linea b. e. y estendamos la linea e. d. hasta concurrir con a. f. en esse punto f. Sera por tanto el rectangulo a. b. e. f. el entero valor de las cosas, las quales pusimos yguales a el censo con el numero. Por esta causa el rectangulo a. c. d. f. sera el numero. Pongamos pues q̄ este numero sea ygual al quadrado dela mitad del numero delas cosas, por lo qual sera necessario q̄ la linea a. c. sea la mitad del numero delas cosas, y q̄ el su quadrado sea esse mismo rectangulo a. c. d. f. Porq̄ si otra linea, y no a. c. fuesse la mitad del numero delas cosas, formando sobre essa tal linea un quadrado, en tal caso esse quadrado resultaria o mayor o menor que el numero, el qual consta ser ygual al rectangulo a. c. d. f. Mas por que pusimos q̃ el numero que esta en la compañia del censo, y el quadrado dela mitad del numero delas cosas fuessen yguales, es por tanto necessario q̃ las dos lineas a. c. y c. b. sean yguales. Y por q̃ el numero delas cosas se da conoscido, sera luego conoscido el numero c. b. el qual es lado del censo, y el respondente valor de la cosa sera tambien conoscido. Digamos pues concluyendo, que quando el numero que esta en compañia del censo fuere ygual al quadrado dela mitad del numero delas cosas, tomaremos conforme a esta demonstracion la mitad del numero delas cosas por valor dela cosa. O obraremos por la regla, pues q̃ las cifras no hazen crecer, ny mengoar. Dela demonstracion desta tercera Regla uso Euclides enla quinta proposicion del secũdo lib. para prouar q̃ si una linea recta fuere partida en dos partes yguales, y en dos desiguales. Lo q̃ se hiziere dela mayor parte en la menor, juntamente con el quadrado dela linea que queda entre el punto medio dela linea y el termino dela parte mayor, sera ygual al quadrado dela mitad dessa linea. Y lo mismo demonstro Campano sobre la proposicion .16. del nono lib. y Iordano enla .19. del primero lib. de su Arithmetica en numeros de vnidades indiuisibles. Laqual se aplicara a esta tercera Regla por este modo: Sea a. d. el numero delas cosas. Las sus mitades sean a. b. b. d.

a . . . . . . b . . . . c . . d

y el lado del censo sea c. d. Y sera por tanto lo q̃ se haze multiplicando a. d. en c. d. el valor delas cosas. Y por q̃ como Campano y Iordano en esse mismo lugar demõstraron, tanto se haze multiplicãdo todo el numero en una parte, como se hara multiplicãdo la misma parte en si, juntamente con la multiplicacion de una parte en la otra, ygual sera luego el valor delas cosas alo que se haze multiplicando c. d. en si, juntamente con la multiplicacion de la misma parte c. d. en a. c. Y por q̃ c. d. en si haze al censo, el qual juntamente con el numero es ygual a las cosas, sera por esta causa lo que se haze multiplicando a. c. en c. d. ygual al numero q̃ fue propuesto en compañia del censo. Y pues que lo que se haze de a. c. en c. d. juntamente con el quadrado de b. c. es ygual al quadrado de b. d. mitad del numero delas cosas, sacaremos del quadrado de b. d. el qual es conoscido, lo q̃ se haze de a. c. en c. d. que es ygual al numero q̃ fue propuesto, y restara el quadrado de b. c. conoscido, por lo qual el su lado que es b. c. sera conoscido. Este lado b. c. sacaremos de b. d. y quedara conoscido c. d. lado del censo, y valor dela cosa. Pero si pusiesemos que el lado del censo fuesse a. c. hariamos nuestra demostracion para la otra parte, y juntando b. c. con a. b. resultaria conoscido el lado del censo o valor dela cosa, que es a. c. Mas estas demonstraciones de Campano y Iordano no pueden seruir para la Regla, quando el numero delas cosas fuere impar.

mitad del numero delas cosas, formando sobre essa tal linea un quadrado, en tal caso esse quadrado resultaria ó mayor ó menor que el numero, el qual consta ser ygual al rectangulo a. c. d. f. Mas por que pusimos q el numero que esta en la compañia del censo, y el quadrado dela mitad del numero delas cosas fuessen yguales: es por tanto necessario q las dos lineas a. c. y c. b. sean yguales. Y pues q el numero delas cosas es da conocido, sera luego conocido el numero c. b. el qual es lado del censo, y correspondiente valor de la cosa sera tambien conocido. Digamos pues concluyendo, que quando el numero que esta en compañia del censo fuere ygual al quadrado dela mitad del numero delas cosas, tomaremos conforme a esta demostracion la mitad del numero delas cosas por valor dela cosa. O [illegible] por la regla [illegible] no haver error, ny menguar. Esta demostracion [illegible] tan facil [illegible] la proposicion del segundo [illegible] para probar q si una linea fuere partida en dos partes yguales, y en dos desiguales, [illegible] dela mayor parte en la menor, juntamente con el quadrado dela linea que queda entre el punto medio dela linea y el termino dela menor parte sera ygual al quadrado dela mitad dessa linea. Y lo mismo demuestra Campano sobre la proposicion 16. del nono [illegible] 12. del primero [illegible] Arithmetica en numeros de yguales [illegible] aplicado a este termino [illegible] este modo: Sea a. c. el numero delas cosas [illegible] b. d. [illegible]

y el lado del censo sea c. b. [illegible] el valor dela cosa. Y por q como Campano [illegible] en este mismo lugar demuestra, tanto se haze multiplicando todo el numero en una parte, como se haze multiplicado la misma parte en si, juntamente con la multiplicacion de una parte con la otra, y assi sera luego el valor dela cosa [illegible] que se haze multiplicando c. b. en si, juntamente con la multiplicacion de la misma parte c. b. [illegible] el qual juntamente con el numero, es ygual a las cosas, [illegible] multiplicando a. c. en c. b. ygual al numero [illegible] que esta en compañia del censo, [illegible] pues que lo que se haze de a. c. en c. d. juntamente con el quadrado [illegible] es ygual al quadrado de c. b. mitad del numero delas cosas [illegible] del quadrado [illegible] el qual es conocido, lo q se haze de a. c. en c. b. que es ygual al numero que fue propuesto, y restaria el quadrado de [illegible] por lo qual el su lado [illegible] conocido. Este lado [illegible] el valor del censo y valor dela cosa. [illegible] que el lado del censo fuesse [illegible], haremos nuestra demostracion para la otra parte, [illegible] resultaria conocido el lado del censo o valor dela cosa que [illegible]. Mas estas demostraciones [illegible] no pueden servir para [illegible] numero dela cosa [illegible].

Fig. 1.

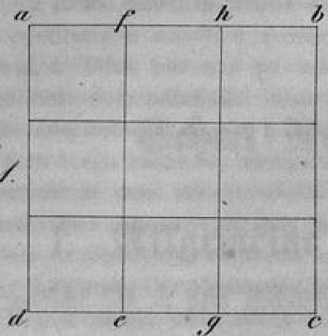

Fig. 2.

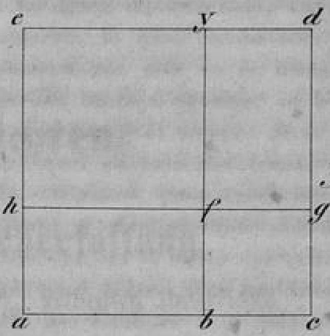

Fig. 3.

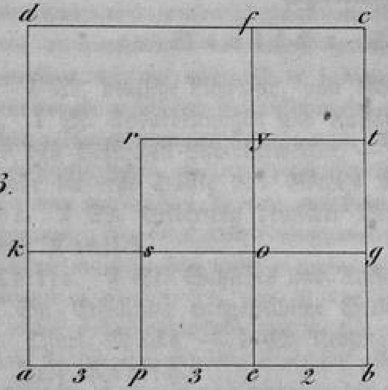

Fig. 4.

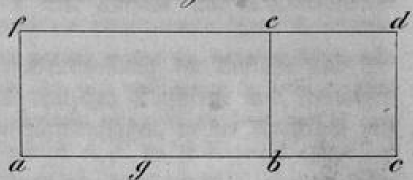

Fig. 5.

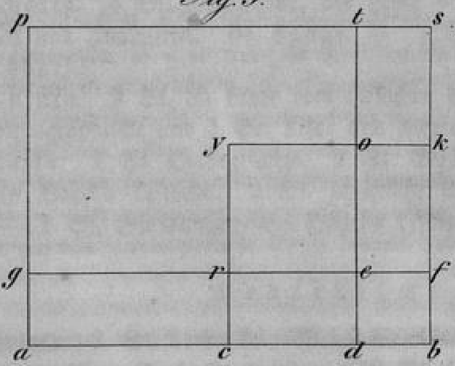

Fig. 6.