Von den Projectionen und den geographischen und astronomischen Planiglobien.

Die große Hülfe, welche die Trigonometrie bei der Construction von Planiglobien und bei dem Gebrauche von allerhand Projectionen gewährt, erlaubt uns nicht, diese Abhandlung *) zu verlassen, ohne etwas Weniges von ähnlichen Anwendungen zu berühren.

§. 1680. Unter Projection versteht man die Darstellung oder Erscheinung eines Gegenstandes auf der Perspectiv-Ebene. Wenn man von allen Punkten einer Figur nach einem gegebenen Gesetze Linien auf eine gegebene Ebene zieht, die aber von derjenigen verschieden ist, in welcher die Figur liegt, so werden alle Punkte der gegebenen Ebene, auf welche jene Linien fallen, die Projection der Figur bilden. So beschaffen würde der Schatten jener Punkte sein, von einem Lichte hervorgebracht. Die Himmels- und Erdkarten z. B. können nur Projectionen sein, weil es sich darum handelt, eine Kugeloberfläche auf einem ebenen Papiere darzustellen, d. h. auf eine einzige Ebene alle Punkte einer sphärischen Oberfläche zu beziehen, welche in ihr einer unendlichen Anzahl von verschiedenen Ebenen angehören.

§. 1681. Um die große Schwierigkeit dieser Darstellung zu begreifen, reicht es hin, ein Blatt Papier an eine Kugel anzulegen, indem man verfährt, als wenn man es darauf leimen wollte. Jedermann wird bald einsehen, daß man, ohne das Blatt beträchtlich zu verringern, indem man es in verschiedene Theile schneidet, niemals damit zum Ziele kommen könnte. Es ist also unmöglich, auf einer geographischen Karte mit Genauigkeit die respektive Entfernung der Länder beizubehalten, und den Längen- und Breiten-Graden jene relative Größe zu geben, welche sie auf der Kugel haben; man kann sich nur mehr oder weniger der Wahrheit nähern.

§. 1682. In den alten Karten machte man die Meridiane parallel und die Längengrade alle gleich. Diese nannte man flache Karten, und sie sind die mangelhaftesten, die man sich denken

*) Ueber Trigonometrie.

kann. Es sei (Fig. I.) P der Pol; EQ ein Bogen des Aequators, z. B. von 12°; A die Stadt Paris, D Dublin, M Marocco. Ich setze voraus, diese zwei letzten Städte seien unter demselben Meridian, da der Längenunterschied zwischen ihnen sehr klein, vielleicht = 0, da die Länge von Marocco noch nicht genau bekannt ist. Wenn man, statt die Meridiane PE und PQ auf der Karte convergent zu machen, so daß sie sich im Pole begegnen, in welcher Art sie auf der Kugel vorkommen, dieselben als parallel annimmt, wie FQ und GE, so wird sich Paris auf der Karte im Punkte H, Dublin in K und Marocco in L befinden.

So viel reicht hin, um zur Einsicht zu bringen, wie ungeheuer die Fehler sein können, in Beziehung auf die gegenseitigen Entfernungen auf dieser Art von Karten.

§. 1683. Es ist nothwendig, auch wohl einzusehn, wie verschieden auf der Kugel die Größe der Längengrade in verschiedenen Entfernungen vom Pole sind. Der Bogen AR des Parallelkreises ist von so vielen Graden, als deren der Bogen EQ enthält. Aber die Länge von AR ist desto kleiner als die von EQ, je näher AR dem Pole ist; da die Länge der Längengrade mit dem Sinus der Entfernung, in der sie vom Pole sind, in demselben Verhältnisse abnimmt.

§. 1684. Um diesen Uebelständen, die ich aus einander gesetzt habe, abzuhelfen, und sich der Wahrheit bei der Anfertigung von Erd- und Himmelskarten zu nähern, hat man seine Zuflucht zu verschiedenen Arten von Projectionen genommen.

Die einfachste Projection ist die orthographische. Das Gesetz dieser Projection ist, daß die von jedem Punkte der Figur, von der man die Projection verlangt, gezogenen Linien perpendikulär auf die Ebene fallen, auf der man die Projection haben will. Wenn man z. B. die orthographische Projektion einer Linie AB (Fig. II.) auf einer Ebene sucht, die von der Linie PI vorgestellt wird, so wird man von jedem Punkte der AB Perpendikuläre, wie BC, FH u. s. w. auf PI ziehen. Der Theil der Linie PI, der zwischen den Perpendikeln enthalten ist, nämlich AC, wird die Projection der AB sein. Die Entfernung der AB von der Projections-Ebene mag was immer für eine sein, die Perpendikel BE, FG u. s. w., werden auf ähnliche Weise die Projection DE = AC der Linie AB auf der Ebene NO angeben.

Aber DE oder AC = AB. cos A. Es ist daher die orthographische Projection = eben dieser Linie, multiplizirt mit dem Cosinus ihrer Neigung zur Projections-Ebene.

§. 1685. Wenn die Figur, deren Projection man verlangt, ein Kreisbogen ist, und wenn die Ebene des Bogens auf der Projectionsebene perpendikulär steht, dann ist der Sinus die orthographische Projection des Bogens, wenn man nur den Ursprung desselben von dem Punkte der Peripherie nimmt, von dem die Perpendikuläre ausgeht, die durch den Mittelpunkt geht. Es sei (Fig. III.)

DFH ein Halbkreis, welchen man sich senkrecht auf der Ebene des Papieres errichtet denkt, in welcher nur der Durchmesser DH bleiben möge. Wenn man von allen Punkten der Peripherie Perpendikuläre wie FC, IE u. s. w. fällt, so wird die Reihe der von denselben auf der Ebene des Papieres angegebenen Punkte den Durchmesser DH bilden. Wenn nun C das Centrum ist, so wird der Bogen FH von 90^{0} und seine Projection CH dem Radius d. h. dem Sinus von 90^{0} gleich sein. So wird $CE = LI = \sin FI$, die Projection des Bogens FI sein. Also u. s. w.

§. 1686. Ist die Ebene des Kreises nicht senkrecht, sondern geneigt zur Projectionsebene, dann werden die Ordinaten FC und IE u. s. w., die auf den Durchmesser fallen, der in der Projectionsebene ist, alle mit ihren respektiven Projectionen CG, EK u. s. w. einen Winkel bilden, welcher der Neigung der zwei Ebenen gleich ist. Es wird also der Cosinus des Neigungswinkels $= \frac{GC}{FC} = \frac{EK}{EI}$ u. s. w. sein, und folglich $FC : CG = EI : EK$ u. s. w. Es ist aber die Eigenschaft einer Ellipse, daß ihre Ordinaten den entsprechenden eines Kreises proportionirt sind, der zu seinem Durchmesser die große Achse derselben hat. Es ist also DGKH, oder die Projection des Halbkreises DFH, die Hälfte einer Ellipse. Was von der einen Hälfte erwiesen ist, muß aus denselben Gründen auch von der andern gelten. Es ist also die orthographische Projection eines geneigten Kreises eine Ellipse.

§. 1687. Wie beschaffen auch immer die Entfernung des Kreises von der Projections-Ebene sein mag, der Erfolg wird immer derselbe sein, da man sich eine andere parallele Ebene wird denken können, welche durch das Centrum des Kreises geht. Es wird daraus in beiden Ebenen eine vollkommen gleiche Ellipse entstehn, da die Linien, welche die zwei Projectionen bestimmen, dieselben sind, nur daß sie rücksichtlich der entferntern Ebene verlängert werden müssen.

§. 1688. Darum scheint ein von weitem schief gesehener Kreis eine Ellipse zu sein, da die geneigten und fernen Gegenstände sich dem Auge in orthographischer Projection darstellen, d. h. als wären sie in einer auf den Sehstrahlen perpendikulären Ebene gelegen. Die Linie BC (Fig. IV.) von dem Punkte O, in einer solchen Entfernung, daß der Winkel O als unendlich klein angesehen werden kann, schief gesehen, erscheint uns so groß, als $AB = BC. \cos ABC = BC. \sin C$. Der erste Werth ist der schon in §. 1684. gefundene. Der zweite giebt uns zu verstehen, daß die scheinbare Größe eines geneigten Gegenstandes im Verhältniß des Sinus der Neigung desselben Gegenstandes zum Sehstrahle abnimmt. Angenommen also, daß DGH (Fig. V.) die orthographische Projection eines schief gesehenen Halbkreises DFH sei, so werden alle Ordinaten CF, EI u. s. w. uns in dem so eben genannten Verhältnisse kleiner erscheinen. Dieses unveränderliche Verhältniß zeigt von Neuem, daß die Projection eines geneigten Kreises eine Ellipse sei, deren größere Achse DH dem Durchmesser des

Kreises gleich ist, und deren kleinere Achse im Verhältniß des Sinus der Neigung des Kreises zu dem Sehstrahl zum sinus totus kleiner ist, als dieser Durchmesser.

§. 1689. Dieß sind die Anfangsgründe der orthographischen Projection; sie ist in der That wenig gebräuchlich bei der Anfertigung geographischer Karten, da sie nicht ohne bedeutende Fehler dienen kann, außer in jenen von geringer Ausdehnung. Ist z. B. FI (Fig. III.) ein kleiner Bogen, so ist die Differenz desselben gegen seine Projection CE nicht von großer Erheblichkeit, und so kann die Entfernung FI zweier Oerter F, I auf der Kugel ohne merklichen Fehler auf der Karte von der Entfernung CE vorgestellt werden. Aber je mehr sich der Punkt I dem Punkte H nähert, desto mehr übertreffen die Zunahmen des Bogens FI die entsprechenden Zunahmen der Linie CE, und die Fehler in Hinsicht auf die respektiven Entfernungen der Länder werden immer unerträglicher. Wir wollen $IH = 60^0 = 2\,FI$ setzen; da wird CE oder $LI = \sin 30^0 = \frac{1}{2}\,CH$; also $CE = EH$ sein, und folglich werden die Distanzen IH, FI, deren erste das Doppelte der zweiten auf der Kugel ist, auf der Karte durch gleiche Linien vorgestellt werden.

§. 1690. Einem so großen Uebelstande zum Trotz, dient die orthographische Projection auf nützliche Weise den Astronomen, um die Umstände der Finsternisse darzustellen und vorherzusagen, weil es sich alsdann nicht um die respektiven Entfernungen der Oerter, sondern nur darum handelt, auf einer geographischen Karte die Curven und Zonen zu beschreiben, welche die Länder umfassen, die in den Schatten eingetaucht sein, und jene, welche gleiche oder verschiedene Phasen beobachten werden.

Die Vorschriften für diese Operationen gehören nicht der gegenwärtigen Abhandlung an, sie befinden sich aber, vollkommen und mit der größten nur zu wünschenden Klarheit auseinandergesetzt, im 10ten Buche der Astronomie Lalande's.

§. 1691. Eine für die Karten, welche einen großen Theil der Kugel umfassen, und ganz vorzüglich für die Weltkarten, bequemere Projection, diejenige, welche minder die natürliche Gestalt der Continente entstellt, ist die stereographische. Bei der orthographischen Projection wird die Oberfläche der Sphäre auf der Ebene jenes größten Kreises vorgestellt, auf welcher alle Sehstrahlen perpendikulär sind, und von welcher das Auge in unendlicher Entfernung vorausgesetzt wird. Bei der stereographischen Projektion wird die Oberfläche der Sphäre abermals auf der Ebene desselben Kreises vorgestellt, das Auge aber im Pol des Kreises selbst angenommen; so ist also von den Sehstrahlen nur einer perpendikulär auf dem Kreise und es ist jener, der durchs Centrum geht.

§. 1692. Wenn BFD (Fig. VI.) die Hemisphäre vorstellt, von der man die Projection haben will, so wird der Durchmesser BD die Projectionsebene vorstellen und das Auge wird im Punkte Q angenommen werden, wenn man voraussetzt, daß der Radius CQ perpendikulär auf BD und C das Centrum der Kugel ist. Die Projection jedes Punktes der Oberfläche der Halbkugel BFD wird auf dem respektiven Punkte der Ebene BCD sein, durch den jeder Sehstrahl geht, welcher an der Hemisphäre endet.

Demgemäß ist der Punkt S die Projection des Punktes H; der Punkt T die des Punktes U; die Linie ST die des Bogens HU u. s. w. Wenn man den Ursprung der Bogen im Punkte F nimmt, welcher seine Projection im Centrum hat, und wenn man überlegt, daß $CT = \tang CQT = \tang \frac{1}{2} FU$ ist, so folgt daraus, daß die stereographische Projection jedes Bogens, der seinen Anfang in dem Punkte hat, dessen Projection das Centrum ist, der Tangente der Hälfte des Bogens selbst gleich ist.

§. 1693. Die schönste Eigenthümlichkeit der stereographischen Projection besteht darin, daß sie durch Kreise alle Kreise der Sphäre, große und kleine, darstellt, nur mit Ausnahme jener, in deren Ebene sich das Auge befindet. So hat z. B. der Kreis, der zum Durchmesser die Sehne UH hat, zur Projection einen Kreis, dessen Durchmesser ST ist. Um dieß wohl zu verstehen, ist es nöthig, zu bedenken, daß die Sehstrahlen, welche vom Punkte Q zu jedem Punkte des Kreises gehen, der zum Durchmesser die Sehne UH hat, einen Kegel bilden. Da dieser Kegel von der Ebene BCD geschnitten wird, so handelt es sich darum, zu beweisen, daß der Schnitt, der durch ST vorgestellt wird, kreisförmig sei.

Nun ist der Winkel $QST = \frac{1}{2} DQ + \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} BQ + \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} QH = QUH$; daher sind die Triangel QST, QUH, welche den Winkel Q gemeinschaftlich haben, ähnlich; aber QUH ist der Achsentriangel des Kegels, der zur Basis den Kreis hat, wovon UH der Durchmesser ist; also muß auch die Basis des Kegels von welchem QST der Achsentriangel ist, kreisförmig sein, weil diese beiden Kegel ähnlich sind, indem ihre homologen Dimensionen, wegen der Aehnlichkeit ihrer Achsentriangel, in Proportion stehen.

§. 1694. Ist Q einer der Pole, so wird die Projectionsebene der Aequator sein. In einem solchen Falle sind die Projectionen der Parallelkreise concentrische Kreise, und die der Meridiane gerade Linien.

In der That, wenn man erstens $FG = FU$ nimmt, so wird die Projection des Parallelkreises, der durch die Punkte G und U geht, dem Gesagten gemäß, ein vom Centrum C aus mit dem Radius $CT = CE$ beschriebener Kreis sein. Ebenso wird die Projection des Parallelkreises, welcher durch die Punkte K und H geht, vorausgesetzt, daß $FK = FH$ sei, ein Kreis sein, der zum Radius CS und C zum Centrum hat. Der Punkt C, der die Projection des Poles F ist, ist demnach das Centrum aller Kreise, welche Projectionen der Parallelkreise sind.

§. 1695. Um einen Parallelkreis auf der Projectionsebene zu beschreiben, muß man als Radius (1692) die Tangente der halben Distanz des Parallelkreises vom Pole nehmen.

Um hernach graphisch die Parallelkreise von Grad zu Grad, oder von 5 Grad zu 5 Grad, oder anders zu beschreiben, so theile man den Quadranten BF in 90 gleiche Theile oder in 18 oder anders. Von jedem Theilungspunkte ziehe man eine Gerade an den Punkt Q; die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der BD werden die Punkte T, S u. s. w., und folglich die Radien CT, CS u. s. w., der respektiven Projectionen der Parallelkreise geben.

§. 1696. Ich habe zweitens gesagt (1694), daß die Projectionen der Meridiane gerade Linien sind. In der That ist das Auge, wenn es sich im Pole befindet, in der Ebene aller Meridiane, da alle durch die Pole gehen; es kann also die Krümmung dieser Kreise nicht sehen.

§. 1697. Um die Projectionen der Meridiane zu beschreiben, wollen wir BFDQB als Aequator folglich als die Projectionsebene betrachten. Jeder Diameter dieses Kreises, dessen Mittelpunkt C die Projection von einem der Pole ist, wird die Projection eines Meridians sein.

§. 1698. Sind die Meridiane und die Parallelkreise beschrieben, so ist keine Schwierigkeit mehr vorhanden, die Länder oder die Sterne auf einer Erd- oder Himmels-Planisphäre nach den respektiven Längen und Breiten festzustellen.

Dieser Projection bedienten sich Ptolomäus, um sein Astrolabium zu construiren und Robert von Vaugondy in gewissen Karten von Rußland; sie ist mehr bei Himmels- als bei Erd-Planiglobien gebräuchlich, besonders in jenen Karten, welche die Hälfte des Himmels umfassen.

§. 1699. Aber wir wollen allgemein die stereographische Projection eines größten Kreises untersuchen.

Das folgende Theorem trat zum Erstenmal in der zweiten Ausgabe dieser Abhandlung ans Licht.

In der stereographischen Projection der Sphäre hat jeder größte Kreis zum Radius die Secante seiner Neigung zur Projectionsebene.

Es stelle die Gerade BD die Projectionsebene vor, und es sei RU der Durchmesser des größten Kreises, von dessen Projection man den Radius sucht. Die Neigung dieses Kreises zur Projectionsebene wird BCU und der Durchmesser desselben Kreises in der genannten Ebene wird PT sein. Aber $PT = CT + CP = \text{tang. } CQT + \text{tang. } CQP = \text{tang. } \tfrac{1}{2} FU + \text{tang. } \tfrac{1}{2} FR = \text{tang. } \tfrac{1}{2} FU + \text{cot. } \tfrac{1}{2} FU = \frac{2}{\text{sin. } FU}$. Also ist $\tfrac{1}{2} PT = \text{cosec. } FU = \text{sec } BU$, was zu beweisen war.

§. 1700. Um daher z. B. die Ekliptik bei der Polarprojection zu zeichnen, sei BFDQB der Aequator, also die Projectionsebene, und es seien Q, F die mit 0^0 und 180^0 bezeichneten Punkte, welche diejenigen sind, in denen die Ekliptik den Aequator schneiden muß. Nimmt man jeden dieser Punkte successiv als Centrum und als Radius die Secante der Schiefe (der Ekliptik), so wird es leicht sein, den Punkt m zu finden, welcher das Centrum der zu beschreibenden Ekliptik ist.

§. 1701. Auf ähnliche Weise betrachte man, wenn man auf einem Himmels-Planiglobium die Projection des Horizontes von was immer für einem Orte der Erde zeichnen will, RU als Diameter besagten Horizontes; Q und F als die Pole des Aequators; BFDQB als Meridian des Ortes, um den es sich handelt; da wird QR oder FU die Polhöhe oder die Breite desselben Ortes sein. D'rum ist der Radius des Kreises, der dazu bestimmt ist, den Horizont vorzustellen, die Cosecante der Breite. Diesen Kreis pflegt man aus Pappendeckel zu machen, und er dient dazu, den Auf- und Untergang der Sterne auf beweglichen Planiglobien zu bestimmen.

§. 1702. Die Polarprojection, von der wir zuerst gehandelt haben, ist die leichteste von allen; aber die gebräuchlichste, besonders für die Weltkarten ist die, welche das Auge im Aequator voraussetzt, im Punkte von 270^0, wenn man unsre Halbkugel, und im Punkte von 90^0, wenn man die entgegengesetzte Halbkugel abzeichnen will.

§. 1703. Bei dieser Projection, welche ich die Aequatoralprojection nennen werde, sind die Meridiane, wie die Parallelkreise Kreise, und ihre Radien findet man auf der Projectionsebene, wie folgt.

Es sei BFDQB der Aequator, D der Punkt, von dem man anfängt, die irdischen Längen zu zählen; Q der Punkt von 90^0, wo man das Auge gestellt annimmt; folglich die Projectionsebene BCD die des ersten Meridians; und es sei UR der Durchmesser eines Meridians, dessen Projection man verlangt und dessen Länge DR ist. Aber $DR = BU$; demnach ist in der Aequatoralprojection der Radius eines Meridians = der Secante der Länge desselben Meridians.

Da jeder Meridian durch die Pole gehen muß, so wird es leicht sein, auf dem Papier das Centrum jedes Meridians zu finden, auf die Weise, welche wir angezeigt haben (1700).

§. 1704. Um die Projection der Parallelkreise zu finden, so sei die Ebene des Aequators von der Linie QF vorgestellt, während das Auge in Q auf 90^0 Länge fest bleibt. Die Projectionsebene BCD ist immer der erste Meridian; aber die Punkte B, D sind die Pole bei der gegenwärtigen Voraussetzung. Ferner sind die Diameter der Parallelkreise, wie GR, auf BD perpendikuläre Linien. Nun ist die stereographische Projection von $GR = PE = CP - CE = \text{tang.}\ \frac{1}{2} FR - \text{tang.}\ \frac{1}{2} FG$. Aber $FR = 180^0 - QR = 180^0 - FG$, und FG ist die Breite des Parallelkreises, wovon GR der Durchmesser ist. Also ist $PE = \text{cot.}\ \frac{1}{2}\ \text{Breite} - \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ \text{Breite} = 2\ \text{cot. Breite}$. Es ist demnach bei der Aequatoralprojection der Radius eines Parallelkreises = der Cotangente der Breite desselben Parallelkreises. Diese Regel und die vorhergehende befreien die Geographen von aller Rechnung, und sind einfacher, als die, welche vor der ersten Ausgabe dieser Abhandlung gegeben wurden.

Da es in der Peripherie des ersten Meridians immer zwei Punkte giebt, durch welche ein Parallelkreis geht, so wird man, wenn die Größe des Radius bekannt ist, leicht das Centrum jedes Parallelkreises auf der Projectionsebene finden.

§. 1705. Will man auf einer Weltkarte die Projection eines Horizontes haben, so genügt es, die Neigung desselben zu dem ersten Meridian zu bestimmen (1699). Nun sei P (Fig. VII.) der Pol; PH seine Erhebung über den in Rede stehenden Horizont MH; PM der erste Meridian, und folglich der Winkel P die Länge jenes Ortes, um dessen Horizont es sich handelt. Da wird der Winkel M die gesuchte Neigung sein. Nun ist in dem bei H rechtwinklichten Triangel PMH $\cos. M = \sin. P \cos. PH$. Also cos. der Neigung = sin. der Länge $\times$ cos. der Breite $= \frac{1}{2}$ sin. (Länge + Breite) + $\frac{1}{2}$ sin. (Länge — Breite). Ich werde (in §. 1709) ein praktisches Beispiel geben.

§. 1706. Um zu zeigen, wie bequem bei der Anwendung die vorausgehenden Regeln sind, sei AFR (Fig. VIII.) der erste Meridian, gesehen von dem Punkte, der auf der Peripherie des Aequators mit 270° bezeichnet ist, und TCN derselbe erste Meridian, gesehen von dem gerade entgegengesetzten Punkte, d. h. von jenem der auf der Peripherie des Aequators mit 90° bezeichnet ist, und es sei aufgegeben, auf besagten Kreisen AFR, TCN die zwei Hemisphären zu zeichnen und darzustellen. Nachdem man durch den Berührungspunkt die Durchmesser geführt hat, welche eine einzige Gerade mn bilden, so möge angenommen werden, daß diese die Projection des Aequators sei, welche eine gerade Linie sein muß, da das Auge, weil es seine Stellung in der Ebene dieses Kreises hat, dessen Krümmung nicht sehen kann. Man ziehe hierauf den Durchmesser AR, TN, perpendikulär auf mn; diese werden die Projectionen der Meridiane von 90° und 270° und ihre Grenzpunkte die Pole sein. Ist A der Nordpol, so wird T derselbe Pol sein; in den Punkten R, N wird der Südpol sein.

§. 1707. Dieß vorausgesetzt, so muß man, um jedes Land in seine gehörige Lage zu setzen, die Längen- und Breitenkreise beschreiben. Setzen wir den Fall, man wolle z. B. den Meridian von 50° beschreiben. Der Radius dieses Kreises ist (nach 1703) die Secante von 50°, welche in den Tafeln = 1,5557 ist. Ich setze voraus, daß der Durchmesser AR der Projection auf einem Maßstabe von gleichen Theilen = 400 sei. Man wird also die aus den Tafeln genommenen trigonometrischen Linien mit 200 multipliciren müssen, und man wird haben: sec. 50° = 311$\frac{1}{7}$ ohngefähr.

Nimmt man diese Distanz auf dem Maßstabe, und das Centrum in einem der Pole A, R, so wird man auf dem Aequator den Punkt r finden, welcher als Centrum dienen soll, um mit dem Radius von 311$\frac{1}{7}$ den Projectionskreis des Meridians von 50° zu beschreiben. Die Projection der Hälfte dieses Meridians ist ADR in der Figur; die andere Hälfte würde vom Pole T zum Pole N gehen, und den Aequator im Punkte von 230° schneiden, und das Centrum, um sie zu beschreiben, würde in die Verlängerung von Sn fallen. Auf dieselbe Weise würden die Tafeln den Radius von jedem andern Meridian geben. Und man wird keine Rechnung zu machen haben, wenn man sich als Radius der Projection eine Linie wählt, welche auf dem Maßstab eine Menge von gleichen Theilen gilt, die eine Potenz von 10 ist.

§. 1708. In Rücksicht auf die Breitenkreise theile man, wenn man sie z. B. von 10 zu 10 Graden zeichnen will, jeden der von den Durchmessern AR, TN begrenzten Halbkreise in 18 gleiche Theile. Ich setze $CN = BN = 30^0$ oder dreien der genannten Theile. Der Parallelkreis, der durch die Punkte B, C geht, wird der von 60^0 der Breite sein. Der Radius dieses Parallelkreises auf der Projectionsebene ist die Cotangente von 60^0; nimmt man diese aus den Tafeln und multiplicirt man sie mit 200, (indem man immer den Durchmesser AR der Projection von 400 Theilen voraussetzt,) so gilt sie $115\frac{1}{2}$. Nimmt man auf dem Maßstabe diese Oeffnung des Zirkels, und trägt man sie von einem der Punkte B, C auf den verlängerten Durchmesser TN, so wird man das Centrum des zu beschreibenden Parallelkreises finden.

Auf dieselbe Weise wird man die Projectionen aller andern Parallelkreise zeichnen können.

§. 1709. Nachdem wir die Art und Weise, die Weltkarten zu zeichnen, gesehen haben, sei jetzt auf denselben der Horizont der von der Sonne in einem gegebenen Augenblicke erleuchteten Hemisphäre zu zeichnen, z. B. in dem Momente, in dem die Venus aus der Scheibe der Sonne im Jahr 1769 heraustrat. Damals stand sie in der Ebene des Meridians von 174^0 und hatte $22^0\ 36'$ nördliche Abweichung; hieraus folgt, daß die Neigung des verlangten Horizonts zur Projectionsebene von $84^0\ 28'$, und daß die Secante von $84^0\ 28'$ der Radius der Projection des besagten Horizontes ist. Diese gegebenen Stücke offenbaren ferner, daß dieser Kreis den Aequator in den Punkten von 84^0 und 264^0 und den Meridian von 174^0 in $67'\ 24'$ südlicher Breite schneiden muß. Die Kenntniß dieser Punkte dient bloß dazu, zu wissen, auf welcher Seite das Centrum des zu beschreibenden Kreises sein müsse. Aber zur Auffindung dieses Centrums ist die Beschreibung des Meridians von 174^0 und des Parallelkreises von $67^0\ 24'$, die zu größerer Klarheit in der Figur aufgestellt sind, nicht nothwendig, und nicht so nützlich, als die Bestimmung der Punkte F, G, und so auch der Punkte H, I, in denen die Projection, welche man sucht, den ersten Meridian schneiden muß. Nun giebt der Triangel PMH (Fig. VII.) (1705) : $\cot. PM = \cos. P$. $\operatorname{Cot.} PH = \cos.$ der Länge $\times$ cot. Breite $= \cos. 174^0 \times \cot. 22^0\ 36'$ im gegenwärtigen Falle, in welchem $PM = 157^0\ 17'$ hervorgeht. Das ist die Größe der Bogen AG, FR, TH, NI, (Fig. VIII.) Daher nehme man $HF = GR = TI = NH = 22^0\ 43'$, hierauf wird man mit den Punkten F und G und mit der Secante von $84^0\ 28'$ als Radius den Punkt finden, der als Centrum dienen soll, um den Bogen FsG zu beschreiben, welcher die Hälfte des gesuchten Horizontes vorstellt. Auf dieselbe Weise wird man verfahren, um den Bogen ISH zu beschreiben, welcher die andere Hälfte vorstellt; ferner ist offenbar, daß die Punkte I, H in Beziehung auf den nächsten Pol gegen die Punkte F, G, entgegengesetzt gestellt sein müssen, auf daß sie zusammenfallen, sobald das Papier dergestalt zusammengelegt wird, daß die verkehrten Seiten der beiden Hemisphären an einander stoßen, wie es in der

Natur statt hat. Aus allen diesen Dingen ersieht man, daß in dem vorliegenden Falle die beleuchtete Hemisphäre die zwei Theile FAG, ITH umfaßt.

§. 1710. Zur Vollendung des über die polare und äquatorale stereographische Projection Gesagten ist noch übrig, über die eines kleineren Kreises zu sprechen, welcher weder parallel noch perpendikulär zur Projectionsebene ist. Nun hat man bereits gesehen (1693), daß ein kleinerer Kreis, dessen Diameter z. B. die Sehne UH ist, (Fig. VI.) zur Projection einen Kreis hat, dessen Durchmesser ST ist. Es bleibt übrig, diesen Durchmesser zu schätzen.

Wir haben $ST = CS - CT = \text{tang.}\,\frac{1}{2}FH - \text{tang.}\,\frac{1}{2}FU$. Man ziehe den Radius CA parallel zur Sehne UH; der Winkel ACD wird die Neigung des kleineren Kreises vom Durchmesser HU zur Projectionsebene BCD und AU wird die Breite des besagten kleineren Kreises in Hinsicht auf seinen größten parallelen Kreis sein. Ich nenne λ diese Breite; η die vorhin berührte Neigung; ich halbire in L den Bogen HU und ich habe $AL = 90^\circ$. Dann ist $FH = FL + LU = 90^\circ - AF + 90^\circ - AU$. Aber $AF = 90^\circ - \eta$ und $AU = \lambda$. Also $FH = \eta + 90^\circ - \lambda$. Auf ähnliche Weise ist $FU = AU - AF = \lambda - (90^\circ - \eta) = \lambda + \eta - 90^\circ$; also $ST = \text{tang.}\left(45^\circ + \frac{\eta - \lambda}{2}\right) + \text{tang.}\left(45^\circ - \frac{\eta + \lambda}{2}\right)$.

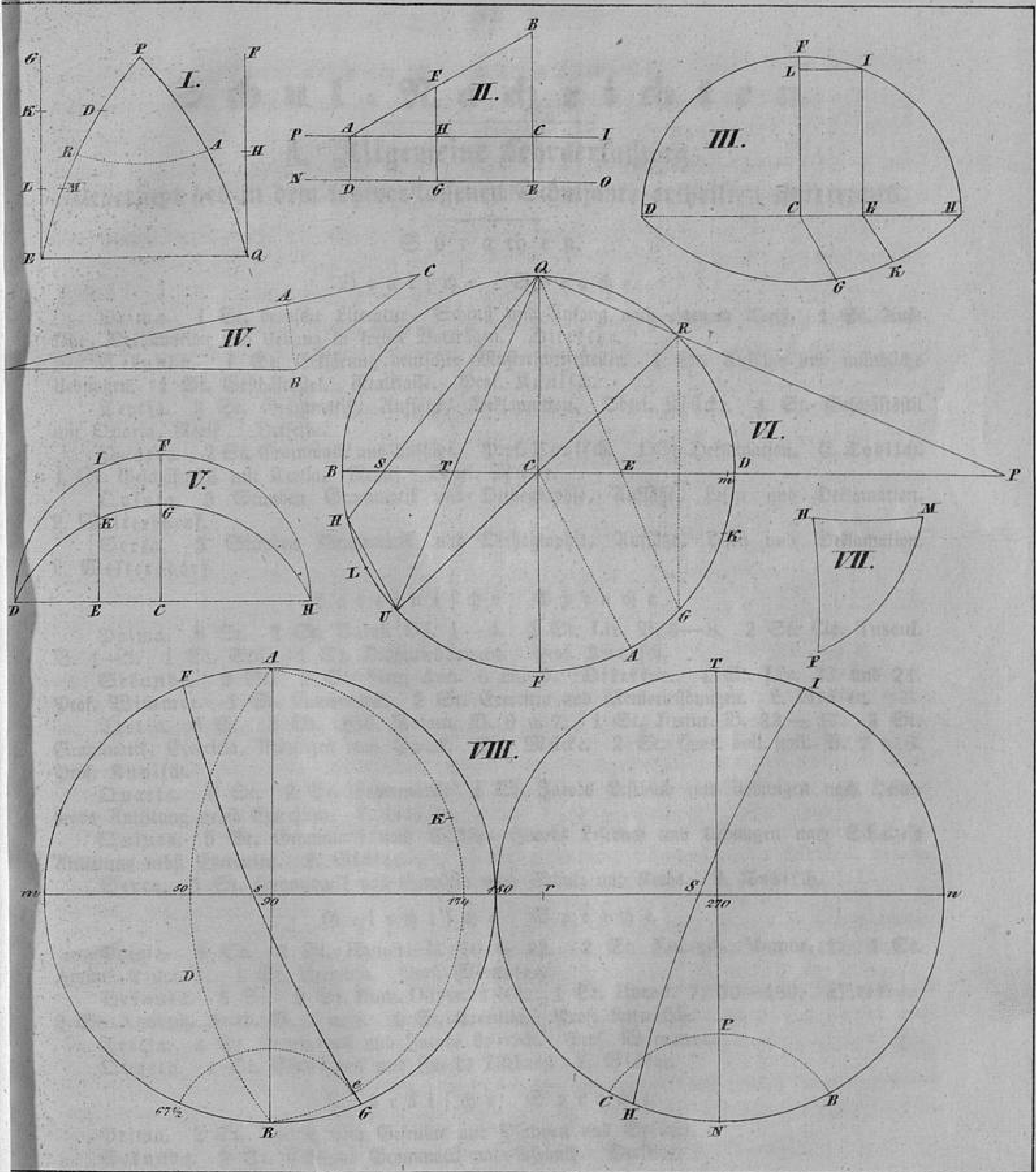
§. 1711. Das zweite Glied läßt sich auch, wie folgt, umformen; vielleicht gefällt es Jemanden mehr.

$$ST = \frac{2\cos.\lambda}{\cos.\eta + \sin.\lambda}$$

§. 1712. Um die Kreise zu beschreiben, welche alle die Punkte der Erde bezeichnen, die in einem gegebenen Momente den Eintritt und Austritt der Venus sehen, wenn sie vor der Scheibe der Sonne vorübergeht, hat Lalande in dem XI. Buche seiner Astronomie mit der höchsten Klarheit die Vorschriften aus einander gesetzt, welche man bei der Berechnung oder bei der graphischen Darstellung eines jeden Umstandes eines Durchganges wünschen kann.

Da es nicht der Zweck dieser Abhandlung ist, einen Astronomen oder Geographen zu bilden, so werde ich mich begnügen, eine Idee von den beiden Arten der Projectionen gegeben zu haben, welche am meisten gewöhnlich sind und in deren zweiter ein großer Theil der Mühe durch meine Formeln vermindert wird.

§. 1713. Da übrigens die Projectionen alle, die einen mehr, die andern weniger, den ihnen eignen Fehler haben, die wahren respektiven Distanzen der Oerter auf der Erde mit einander nicht in Einklang bringen zu können, so sind andre sinnreiche Verfahrungsarten um die Wette von den Geographen erfunden worden; da jedoch noch keine dazu gelangt ist, ihn zu vermeiden, so habe ich einen Versuch gemacht, der mir bei dem größten Theile der Karten den Vorzug zu verdienen scheint, nämlich in allen denen, welche nicht mehr als 60° der Breite umfassen. Es wäre nicht am rechten Orte, ihn hier einzuschalten, da jeder, der will, ihn im 8ten Bande der italienischen Societät kennen lernen kann.



urentafel zu den Projectionen und den geographischen und astronomischen Planiglobien.