Jahresbericht

über das

Königl. Katholische Gymnasium

zu

BRAUNSBERG

in dem Schuljahre 1848/49

mit welchem zu der

Oeffentlichen Prüfung am 2. August

und zu den

Schlussfeierlichkeiten am 3. August

ergebenst einladet

der Direktor der Anstalt

Dr. Ferd. Schultz.

Vorangeht die Abhandlung: Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale, von dem Lehrer der Mathematik und Physik Herrn Weierstrass.

Braunsberg,
gedruckt bei C. A. Heyne.

+27,
REALSCHULE ZU DÜSSELDORF
9br
6 (1849)

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale.

Unter den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung (den Modular- und elliptischen Quadranten nach Gudermann's Benennung) welche zu zwei conjungirten Moduln gehören, findet bekanntlich ein einfacher, zuerst von Legendre aufgefundener Zusammenhang statt, welcher in den jetzt gebräuchlichen Zeichen durch die Gleichung

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

dargestellt wird. In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, für die Abel'schen Integrale aller Ordnungen eine Reihe analoger Relationen zu entwickeln, welche, wie ich glaube, nicht bekannt sind. Es findet sich zwar (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 312) eine gelegentliche Bemerkung von Jacobi, eine von ihm aufgefundene Verallgemeinerung des Legendre'schen Satzes betreffend; allein nach den Andeutungen, die derselbe a. a. O. giebt, glaube ich annehmen zu dürfen, dass die Relation, welche er im Sinne hat, mit derjenigen übereinstimme, die später Hädenkamp (Crelle's Journal, Bd. 22, S. 184) auf dem von Jacobi angegebenen Wege hergeleitet hat. Die Resultate indess, zu welchen ich gelangt bin, sind nicht nur von dem Hädenkamp'schen verschieden, sondern auch weit einfacher und mit der Legendre'schen Formel übereinstimmender.

Die von mir entwickelten Relationen sind für die Theorie der Abel'schen Transcendenten von besonderer Bedeutung. Ich beschäftige mich seit längerer Zeit mit dieser Theorie und namentlich mit der Hauptaufgabe, die von Jacobi eingeführten umgekehrten Functionen der Abel'schen Integrale erster Gattung wirklich darzustellen. Es ist mir gelungen, diese Aufgabe vollständig zu lösen, auf einem Wege, welcher von dem bisher von Göpel u. A. betretenen gänzlich verschieden ist. Ich gehe nämlich unmittelbar von den Integral-Gleichungen aus, durch welche jene Functionen definirt werden, und zeige zunächst, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, dass sie sämmtlich Wurzeln ein und derselben algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten ich sodann durch eine Anzahl von Hülfsfunctionen ausdrücke, welche den sogenannten Θ Functionen, auf welche Jacobi die elliptischen Functionen zurückgeführt hat, vollkommen analog sind, und gleich diesen durch unendliche, nach einem einfachen Gesetze gebildete und beständig convergirende Reihen dargestellt werden können. Diese Reihen-

Entwickelungen gewinne ich, indem ich für die genannten Hülfsfunctionen mehrere charakteristische Eigenschaften nachweise, durch welche sie vollständig bestimmt werden. Dazu aber ist die Kenntniss der Relationen, welche der Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes sind, ein wesentliches Erforderniss. Nun hat zwar der Weg, den ich bei Behandlung der Abel'schen Transcendenten eingeschlagen, das Eigenthümliche, dass man auf ihm selbst in ungesuchter Weise zu jenen Relationen geführt wird, wie ich sie denn in der That auch so zuerst gefunden habe. Es ist aber diese Art der Herleitung einigermassen umständlich, indem namentlich die Bestimmung einiger Constanten Weitläufigkeiten macht. Um so erwünschter war es mir, in einem von Abel in der Abhandlung: Sur une propriété remarquable d'une classe trés étendue de fonctions transcendentes (Oeuvres complètes, Tome II, pag. 54) begründeten Theoreme, durch welches die bekannten Sätze über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale eine sehr bemerkenswerthe Verallgemeinerung erhalten, die eigentliche Quelle zu entdecken, aus der die in Rede stehenden Relationen, so wie noch andere weit allgemeinere, auf eben so einfachem als direktem Wege abgeleitet werden können.

§. 1.

Es sei $R(x)$ eine ganze Function von x; a, b seien irgend zwei Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$1.\quad \frac{1}{2}\,\frac{R(x)-R(y)}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\,\frac{R'(x)+R'(y)}{x-y}=F(x,y)$$

gesetzt, wo $R'(x)$, $R'(y)$ die ersten Differential-Coefficienten von $R(x)$, $R(y)$ bedeuten, so dass, wie man sich leicht überzeugt, $F(x,y)$ eine ganze Function von x, y ist. Alsdann gilt als ein besonderer Fall des angeführten Abel'schen Theorems die folgende Gleichung, in welcher α, β irgend zwei bestimmte Werthe der Veränderlichen x, y bezeichnen:

$$2.\quad \sqrt{R(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{R(y)}}-\sqrt{R(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{R(x)}}=2\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$$

Als nothwendige Bedingung des Bestehens dieser Gleichung ist noch hinzuzufügen, dass innerhalb der Grenzen der Integration $x-y$ nicht $=0$ werden darf.

Es ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{y-x}=\left(\frac{1}{2}\,\frac{R'(x)}{y-x}+\frac{R(x)}{(y-x)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{R(y)}}{x-y}=\left(\frac{1}{2}\,\frac{R'(y)}{x-y}+\frac{R(y)}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(y)}},$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}{(y-x)\sqrt{\mathrm{R}(y)}} - \frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}(y)}}{(x-y)\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \frac{2\,\mathrm{F}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}},$$

also

$$2\int_a^\alpha\!\!\int_b^\beta \frac{\mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}} = \int_b^\beta dy\int_a^\alpha \frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}{(y-x)\sqrt{\mathrm{R}(y)}}\,dx - \int_a^\alpha dx\int_b^\beta \frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}(y)}}{(x-y)\sqrt{\mathrm{R}(x)}}\,dy$$

$$= \sqrt{\mathrm{R}(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{\mathrm{R}(y)}} - \sqrt{\mathrm{R}(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$$

Es sei nun

$$\mathrm{R}(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots\,(x-a_{2n+1})$$

und es werde zunächst angenommen, dass die Zahlen $a_1, a_2 \ldots$ sämmtlich reell und so geordnet seien, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n+1}$$

Alsdann hat $\mathrm{R}(x)$, wenn x zwischen den Grenzen $a_\mu, a_{\mu+1}$ enthalten ist, wo μ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ bedeutet, dasselbe Zeichen wie $(-1)^{\mu-1}$, so dass man setzen kann

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm\, i^{\mu-1}\sqrt{\left[(-1)^{\mu-1}\,\mathrm{R}(x)\right]},$$

wo $\sqrt{\left[(-1)^{\mu-1}\,\mathrm{R}(x)\right]}$ den positiven Werth der Quadratwurzel aus der positiven Grösse $(-1)^{\mu-1}\,\mathrm{R}(x)$ bezeichnen soll. Liegt x zwischen $-\infty$ und a_1, so hat man

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm\, i\sqrt{[-\mathrm{R}(x)]},$$

und wenn x zwischen a_{2n+1} und $+\infty$ enthalten ist

$$\sqrt{\mathrm{R}(x)} = \pm\sqrt{[+\mathrm{R}(x)]}$$

Um nun einem Integral wie $\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$ eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, werde für das Folgende festgesetzt, dass bei der Integration von den beiden Werthen, welche $\sqrt{\mathrm{R}(x)}$ hat, immer derjenige in Anwendung kommen soll, den man erhält, wenn man in den vorstehenden Formeln das obere Zeichen nimmt.

Dies vorausgesetzt setze man in der Gleichung (2) $a = a_\mu$, $b = a_\nu$ und nehme zunächst an, dass $\nu > \mu + 1$ aber $< 2n + 1$ sei, so darf man $\alpha = a_{\mu+1}$, $\beta = a_{\nu+1}$ nehmen, weil in diesem Fall die Differenz $x - y$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht $= 0$ wird. Die linke Seite wird alsdann $= 0$, und man erhält demnach

$$3.\quad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{\mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}} = 0$$

Wenn aber $\nu = \mu + 1$, so kann man den Werth des Doppel-Integrals

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

welches durch S bezeichnet werden möge, mit Hülfe der Gleichung (2) nicht direkt auf dieselbe Weise ermitteln; man gelangt jedoch dazu auf folgendem Wege.

Es werde a_μ durch a, $a_{\mu+1}$ durch c, $a_{\mu+2}$ durch b bezeichnet, so ist

$$S = -\int_a^c \int_b^c \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$$

Sodann seien s, t zwei positive Zahlen, so gewählt, dass $c - s > a$ und $c + t < b$ bleibt, so ist S die Grenze, welcher sich das Doppel-Integral

$$-\int_a^{c-s} \int_b^{c+t} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = S'$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden. Für dieses letztere Integral aber darf man vermöge der Gleichung (2) setzen

$$\frac{1}{2}\int_a^{c-s} \frac{\sqrt{R(c+t)}\,dx}{(x-c-t)\sqrt{R(x)}} - \frac{1}{2}\int_b^{c+t} \frac{\sqrt{R(c-s)}\,dy}{(y-c+s)\sqrt{R(y)}}$$

Dieser Ausdruck wandelt sich, wenn $x = c - u$, $y = c + v$ gesetzt wird, in den folgenden um:

$$S' = \frac{1}{2}\int_{c-a}^{s} \frac{\sqrt{R(c+t)}}{(u+t)\sqrt{R(c-u)}}\,du - \frac{1}{2}\int_{b-c}^{t} \frac{\sqrt{R(c-s)}}{(v+s)\sqrt{R(c+v)}}\,dv$$

Es mögen jetzt σ, τ zwei bestimmte Werthe von s und t bezeichnen, die nur so klein anzunehmen sind, dass sich $\sqrt{R(c-s)}$, $\sqrt{R(c+t)}$ für alle Werthe von s, t, welche nicht grösser als σ, τ sind, durch convergirende Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten, darstellen lassen. Alsdann hat man

$$2S' = \sqrt{R(c+t)}\,.\int_{c-a}^{\sigma} \frac{du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} - \sqrt{R(c-s)}\int_{b-c}^{\tau} \frac{dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}$$

$$+ \int_\sigma^s \frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} - \int_\tau^t \frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}$$

Die Integrale

$$\int_{c-a}^{\sigma} \frac{du}{(t+u)\sqrt{\mathrm{R}(c-u)}}, \int_{b-c}^{\tau} \frac{dv}{(s+c)\sqrt{\mathrm{R}(c+v)}}$$

bleiben für alle Werthe von t, s innerhalb der für diese Veränderlichen bezeichneten Grenzen endlich; $\sqrt{\mathrm{R}(c+t)}$, $\sqrt{\mathrm{R}(c-s)}$ nähern sich aber, wenn t, s unendlich klein werden, der Grenze $\sqrt{\mathrm{R}(c)} = 0$. Daraus folgt, dass die Grenze von S' für $t=0$, $s=0$ dieselbe ist wie die, welcher sich die Formel

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{\mathrm{R}(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{\mathrm{R}(c-u)}} - \frac{1}{2}\int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{\mathrm{R}(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{\mathrm{R}(c+v)}}$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden.

Nach den oben für $\sqrt{\mathrm{R}(x)}$ getroffenen Bestimmungen kann man nun, da $c-u$ zwischen a_{μ} und $a_{\mu+1}$, $c+v$ zwischen $a_{\mu+1}$ und $a_{\mu+2}$ liegt, setzen

$$\sqrt{\mathrm{R}(c+v)} = i^{\mu} \sqrt{\left[(-1)^{\mu}\,\mathrm{R}'(c)\right]} \,.\, \sqrt{v} \,.\, \left(1+\mathrm{F}(v)\right)$$
$$\sqrt{\mathrm{R}(c-u)} = i^{\mu-1} \sqrt{\left[(-1)^{\mu}\,\mathrm{R}'(c)\right]} \,.\, \sqrt{u} \,.\, \left(1+\mathrm{F}(-u)\right)$$

wo $\mathrm{F}(v)$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, die nur ganze, positive Potenzen von v enthält, und $\mathrm{F}(-u)$ aus $\mathrm{F}(v)$ hervorgeht, wenn man $-u$ für v setzt. $\sqrt{u}$ und $\sqrt{v}$ sind positiv zu nehmen. Alsdann ist

$$\int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{\mathrm{R}(c+t)}\;du}{(t+u)\sqrt{\mathrm{R}(c-u)}} = \int_{\sigma}^{s} \frac{i\sqrt{t}\,.\,(1+\mathrm{F}(t))\;du}{(t+u)\sqrt{u}\,.\,(1+\mathrm{F}(-u))}$$

$$= i\int_{\sigma}^{s} \frac{\sqrt{t}\,.\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + i\sqrt{t}\int_{\sigma}^{s} \frac{\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(-u)}{t+u} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}\,.\,(1+\mathrm{F}(-u))}$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich, weil $\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(-u)$ durch $t+u$ dividirbar ist, in eine Reihe von Gliedern entwickeln, welche nur positive Potenzen von s, σ, t enthalten und für $t=0$ verschwinden. Eben so findet man

$$\int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{\mathrm{R}(c-s)}\;dv}{(s+v)\sqrt{\mathrm{R}(c+v)}} = -i\int_{\tau}^{t} \frac{\sqrt{s}\;dv}{(s+v)\sqrt{v}} + \text{eine Reihe von Gliedern, die für}$$

$s=0$ verschwinden.

Daraus ergiebt sich denn, dass der Werth von S die Grenze ist, in welcher sich die Formel

$$\frac{i}{2}\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + \frac{i}{2}\int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dv}{(s+v)\sqrt{v}}$$

nähert, wenn t, s unendlich klein werden. Diese Formel lässt sich aber, wenn man bei dem ersten Integrale die Substitution $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = w$, bei dem andern die Substitution $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}} = w$ anwendet, und $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\tau}} = p$, $\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{t}} = q$ setzt, umwandeln in

$$\frac{1}{i}\int_p^q \frac{dw}{1+w^2},$$

welcher Ausdruck für $s = 0$, $t = 0$ übergeht in

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{2i}.$$

Es ist demnach $\quad \mathrm{S} = \frac{\pi}{2i}$,

oder

$$4.\quad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{\mathrm{F}(x,y)\,dx,dy}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}} = \frac{\pi}{2i}$$

§. 2.

Die Doppel-Integrale auf der linken Seite der Gleichungen (3, 4) des vorhergehenden §. können, weil $\mathrm{F}(x,y)$ in Beziehung auf x sowohl als y eine ganze Function vom $(2n-1)$ten Grade ist, dargestellt werden als ein Aggregat von Gliedern, von denen jedes ein Product zweier Abel'schen Integrale der ersten und zweiten Gattung ist; die Gleichungen (3, 4) geben also eine Reihe von Relationen unter solchen Integralen, die man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale nennen kann.

Wenn $\mathrm{R}(x)$ vom dritten Grade ist, so ist $\mathrm{F}(x,y) = \frac{1}{4}(y-x)$, und es reduciren sich die Gleichungen auf die einzige

$$1.\quad \int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\;dx\;dy}{4\sqrt{\mathrm{R}(x)}\;\sqrt{\mathrm{R}(y)}} = \frac{\pi}{2i}, \quad \text{oder}$$

$$2.\quad \int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\;dx\;dy}{4\sqrt{\mathrm{R}(x)}\;\sqrt{[-\mathrm{R}(y)]}} = \frac{\pi}{2}$$

Setzt man $\sqrt{\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}} = t$, $\sqrt{\dfrac{y-a_1}{a_2-a_1}} = s$, $k = \sqrt{\dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}}$, so ist

$$\frac{dx}{2\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \frac{1}{\sqrt{(a_3-a_1)}}\;\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{[-\mathrm{R}(y)]}} = \frac{1}{\sqrt{(a_3-a_1)}}\;\frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)\;(1-k^2s^2)}},$$

und die Gleichung (2) geht, wenn man

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\;(1-k^2t^2)}} = \mathrm{K}, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)\;(1-k^2t^2)}} = \mathrm{K}_1$$

$$\int_0^1 \frac{k^2\,s^2\,ds}{\sqrt{(1-s^2)\;(1-k^2s^2)}} = \mathrm{J}, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2\,s^2\,ds}{\sqrt{(s^2-1)\;(1-k^2s^2)}} = \mathrm{J}_1$$

setzt, über in die folgende:

$$3.\quad \mathrm{KJ}_1 - \mathrm{JK}_1 = \frac{\pi}{2}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der oben angeführten Legendre'schen. Denn es ist

$$\mathrm{J} = \mathrm{K} - \mathrm{E},$$

und wenn man $k' = \sqrt{(1-k^2)}$, $t = \frac{1}{k}\sqrt{(1-k'^2\,w^2)}$ setzt, so erhält man

$$\mathrm{K}_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\;(1-k'^2\,w^2)}} = \mathrm{K}',$$

und durch dieselbe Substitution

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{E}',$$

mithin

$$4.\quad \begin{aligned} KE' - (K - E)\,K' &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \\ KE' + EK' - KK' &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ich werde jetzt zeigen, dass man den Gleichungen (3, 4) des §. 1 eine ganz ähnliche Gestalt geben kann, wie der Gleichung (3) dieses §. Zu dem Ende wird es aber nöthig sein, einige Bemerkungen über die Form, unter welcher nach meiner Ansicht die Abel'schen Transcendenten zu behandeln sind, voraus zu schicken.

§. 3.

Dem System der Integral-Gleichungen, von welchem man nach Jacobi in der Theorie des Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, kann man immer folgende Form geben, welche mir die angemessenste zu sein scheint, wenn man die Analogie dieser Functionen mit den elliptischen so viel als möglich will hervortreten lassen.

Es werde die Function $R(x)$ in zwei Factoren $P(x)$, $Q(x)$ zerfällt, und zwar sei

$$P(x) = (x - a_1)\,(x - a_3)\,\ldots\,(x - a_{2n-1})$$

$$Q(x) = (x - a_2)\,(x - a_4)\,\ldots\ldots\,(x - a_{2n})\,(x - a_{2n+1})$$

Ferner werde

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1})\,P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right)} = g_{\mathfrak{a}}, \quad \frac{g_{\mathfrak{a}}\,P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} = F_{\mathfrak{a}}(x)$$

gesetzt, wo $\mathfrak{a}$, wie überhaupt jeder im Folgenden als Index vorkommende deutsche Buchstabe, eine der Zahlen 1, 2, 3, . . ., n bedeutet, und es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n Veränderliche, welche als Functionen eben so vieler veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_n$ durch die Gleichungen

$$1.\quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \Sigma \int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ u_2 &= \Sigma \int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= \Sigma \int_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_{\mathfrak{a}}} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \end{aligned} \right.$$

definirt werden, in denen sich das Summenzeichen auf den Index a bezieht. Es handelt sich darum, die Functionen $x_1, x_2, \dots, x_n$ durch ihre Argumente in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form wirklich auszudrücken.

Zunächst erhält man für dieselben unendliche Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots, u_n$ fortschreiten, und zwar ist, wenn man durch $(u_1, u_2, \dots u_n)_\alpha$ eine homogene Function des αten Grades von $u_1, u_2 \dots$ bezeichnet,

$$2.\quad \sqrt{\frac{x_a - a_{2a-1}}{a_{2a} - a_{2a-1}}} = u_a + (u_1, u_2, \dots, u_n)_3 + (u_1, u_2, \dots, u_n)_5 + \dots$$

Diese Reihen convergiren zwar nicht beständig, aber doch für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots,$ die ihrer absoluten Grösse nach bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Sodann kann man mit Hülfe des Abel'schen Theorems nachweisen, das $x_1, x_2, \dots x_n$ Wurzeln ein und derselben Gleichung $n$ten Grades sind, der man die Form

$$3.\quad \frac{a_2 - a_1}{x - a_1}\, p_1^2 + \frac{a_4 - a_3}{x - a_3}\, p_2^2 + \dots + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{x - a_{2n-1}}\, p_n^2 = 1$$

geben kann, wo $p_1, p_2, \dots p_n$ eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$ sind, die ganz den Charakter rationaler Functionen besitzen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2 \dots$ entwickelt hat p_a genau dieselbe Gestalt wie die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2), woraus erhellt, dass p_a eine ungrade Function von $u_1, u_2 \dots$ ist. Ferner hat man

$$4.\quad p_a = \sqrt{\frac{(a_{2a-1} - x_1)\,(a_{2a-1} - x_2)\,\dots\,(a_{2a-1} - x_n)}{(a_{2a-1} - a_{2a})\, P'(a_{2a-1})}}$$

Für $n = 1$ ergiebt sich, wenn man x, u, p für x_1, u_1, p_1 schreibt,

$$u = \int_{a_1}^{x} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a_3 - a_1)}\,.\,dx}{\sqrt{(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)}},$$

$$p = \sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - a_1}},$$

woraus

$$u = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)\,(1-k^2p^2)}},\quad k^2 = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}$$

folgt, so dass $p = \sin \operatorname{am} u$, oder nach Gudermann's kürzerer Bezeichnung (Theorie der Modular-Functionen) $p = \operatorname{sn} u$ ist. In Erweiterung dieser letztern Bezeichnung setze ich

$$p_a = \operatorname{sn}(u_1, u_2, \dots, u_n)_a,$$

so wie ferner

$$5.\quad \sqrt{\frac{(a_{2\mathfrak{a}}-x_1)\,(a_{2\mathfrak{a}}-x_2)\,\ldots\,(a_{2\mathfrak{a}}-x_n)}{P\,(a_{2\mathfrak{a}})}} = \mathrm{cn}\,(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n)_{\mathfrak{a}}$$

$$6.\quad \sqrt{\frac{(a_{2n+1}-x_1)\,(a_{2n+1}-x_2)\,\ldots\,(a_{2n+1}-x_n)}{P\,(a_{2n+1})}} = \mathrm{dn}\,(u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n)$$

Auf diese Weise sind in die Theorie der Abel'schen Transcendenten $(2n+1)$ Functionen eingeführt, welche mit den drei elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u$, in welche sie für $n=1$ übergehen, eine grosse Aehnlichkeit haben. So z. B. lässt sich $\mathrm{sn}\,(u+v)$ rational durch $\mathrm{sn}\,u$, $\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}$, $\mathrm{sn}\,v$, $\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}$ ausdrücken vermittelst der Formel

$$\mathrm{sn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u^2-\mathrm{sn}\,v^2}{\mathrm{sn}\,u\,\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}-\mathrm{sn}\,v\,\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}} = \frac{\mathrm{sn}\,u^2-\mathrm{sn}\,v^2}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u},$$

und ähnliche Formeln gelten für $\mathrm{cn}\,(u+v)$ und $\mathrm{dn}\,(u+v)$. Für die angegebenen Functionen mehrerer Veränderlichen aber findet man, $\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{2g_{\mathfrak{a}}}=e_{\mathfrak{a}}$ setzend:

$$2.\quad \sum_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}}\left(\mathrm{sn}\,(u_1,u_2,\ldots)_{\mathfrak{a}}\,\frac{d\,\mathrm{sn}(v_1,v_2,..)_{\mathfrak{a}}}{dv_{\mathfrak{b}}}-\mathrm{sn}\,(v_1,v_2,..)_{\mathfrak{a}}\,\frac{d\,\mathrm{sn}\,(u_1,u_2,..)_{\mathfrak{a}}}{du_{\mathfrak{b}}}\right).\,\mathrm{sn}(u_1+v_1,u_2+v_2,..)_{\mathfrak{a}}$$
$$= e_{\mathfrak{b}}\,.\left(\mathrm{sn}^2\,(u_1,\,u_2,\,\ldots)_{\mathfrak{b}}-\mathrm{sn}^2\,(v_1,\,v_2,\ldots)_{\mathfrak{b}}\right)$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{b}$ der Reihe nach $=1,2,\ldots,n$, so erhält man n Gleichungen, vermittelst welcher die n Functionen $\mathrm{sn}\,(u_1+v_1,\;u_2+v_2,\ldots)_{\mathfrak{a}}$ rational durch $\mathrm{sn}\,(u_1,\;u_2,\ldots)_{\mathfrak{a}}$, $\mathrm{sn}\,(v_1,\;v_2,\ldots)_{\mathfrak{a}}$ und deren partiellen Differential-Coefficienten, welche letztere algebraische Functionen jener sind, ausgedrückt werden können. Aehnliches gilt für die durch cn, dn bezeichneten Functionen. Bezeichnet man ferner

$$8.\quad \int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{F_{\mathfrak{a}}\,(x)\,dx}{\sqrt{R\,(x)}} \quad \text{durch } K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,,$$

$$9.\quad \int_{a_{2\mathfrak{b}}}^{a_{2\mathfrak{b}+1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}\,(x)\,dx}{\sqrt{R\,(x)}} \quad \text{durch } \frac{\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{i}$$

und setzt $$10.\quad \sum_{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}=n} \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} + \ldots + \overline{K}_{\mathfrak{a},n} = K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so haben diese $2 \cdot n^2$ bestimmten Integrale $K_{a,b}$, $K'_{a,b}$ für die Theorie der Abel'schen Transcendenten eine ganz ähnliche Bedeutung wie die Grössen K, K' für die elliptischen Functionen. So z. B. findet man, wenn man

$$11. \quad \omega_a = m_1 K_{a,1} + m_2 K_{a,2} + \ldots + m_n K_{a,n} + (n_1 K'_{a,1} + n_2 K'_{a,2} + \ldots + n_n K'_{a,n})\, i$$

setzt, wo $m_1, n_1, m_2, n_2 \ldots\ldots$ ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten, für die Functionen sn, cn, dn die charakteristischen Gleichungen

$$12. \begin{cases} \mathrm{sn}(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots, u_n + 2\omega_n)_a = (-1)^{m_a + n_2 + n_2 + \ldots + n_{a-1}} \mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_a \\ \mathrm{cn}(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots, u_n + 2\omega_n)_a = (-1)^{m_a + n_1 + n_2 + \ldots + n_a} \mathrm{cn}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_a \\ \mathrm{dn}(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots, u_n + 2\omega_n) = (-1)^{n_1 + n_2 + \ldots + n_n} \mathrm{dn}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{cases}$$

in welchen Formeln, wenn $a = 1$ ist, $n_0 = 0$ zu setzen ist.

Die Functionen sn, cn, dn stehen übrigens in einem einfachen algebraischen Zusammenhange, vermöge dessen je $(n+1)$ derselben durch die übrigen ausgedrückt werden können.

Was nun ferner die Abel'schen Integrale der zweiten Gattung anlangt, so lassen sich dieselben durch n neue Functionen der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ ausdrücken, von denen ich die $a$te durch $J(u_1, u_2, \ldots, u_n)_a$ bezeichne und auf folgende Weise definire. Man denke sich $x_1, x_2, \ldots$ vermittelst der Gleichung (3) durch $u_1, u_2 \ldots$ ausgedrückt und setze

$$13. \quad J(u_1, u_2, \ldots u_n)_a = \sum_b \int_{a_{2b-1}}^{x_b} \frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{x - a_{2a-1}} \cdot \frac{F_a(x)\, dx}{\sqrt{R(x)}}, ^{*)}$$

*) Anm. In dieser und in einigen folgenden Formeln habe ich mir erlaubt, die allgemein eingeführte Bezeichnung für ein bestimmtes Integral in einem Sinne zu gebrauchen, in welchem sie auch dann noch anwendbar bleibt, wenn die Function unter dem Integral-Zeichen an einer der Grenzen der Integration oder an beiden unendlich wird. Es sei nämlich $F(x)$ eine Function von x, die für alle Werthe dieser Veränderlichen **innerhalb** eines gegebenen Intervalls, dessen Grenzen a, b sind, endlich bleibt, und es lasse sich dieselbe für alle Werthe von x in der Nähe von a durch eine Reihe von der Form

$$S\, A\, (x - a)^m,$$

so wie für die Werthe von x in der Nähe von b durch eine Reihe

$$S\, B\, (x - b)^n$$

darstellen. Sind nun α, β zwei bestimmte Werthe von x innerhalb des gegebenen mit der Bestimmung, dass x und $\sqrt{R(x)}$ bei jeder einzelnen Integration dieselben Werthe durchlaufen wie in den Gleichungen (1). Auf diese Weise erklärt ist $J(u_1, u_2, \ldots)_\mathfrak{a}$ eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2 \ldots\ldots$ völlig bestimmte, eindeutige Function. Drückt man $dx_1, dx_2 \ldots$ durch $du_1, du_2 \ldots$ aus, so ergiebt sich (14) für $J(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\mathfrak{a}$ der Ausdruck

$$\int\left(\frac{du_\mathfrak{a}}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_\mathfrak{a}} + \sum_\mathfrak{b} \frac{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_\mathfrak{b}}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_\mathfrak{a}} \, \frac{e_\mathfrak{b}(a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1})\, du_\mathfrak{b} - e_\mathfrak{a}(a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{b}-1})\, du_\mathfrak{a}}{e_\mathfrak{a}(a_{2\mathfrak{a}-1} - a_{2\mathfrak{b}-1})}\right),$$

wo für $\mathfrak{b}$ der Werth $\mathfrak{a}$ auszuschliessen ist. Durch diese Gleichung ist $J(u_1, u_2, \ldots)_\mathfrak{a}$ vollständig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, dass in der Entwickelung dieser Function nach fallenden Potenzen von $u_\mathfrak{a}$ kein von $u_1, u_2, \ldots u_n$ unabhängiges Glied vorkommen darf. Für den Fall der elliptischen Functionen hat man

$$J(u) = \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u},$$

während man gewöhnlich die elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die Function $\int_0 \mathrm{dn}^2 u \,.\, du$ zurückführt, was keinen wesentlichen Unterschied macht. Für die Abelschen Integrale zweiter Gattung haben aber die hier gewählten Formen den Vorzug, dass sich viele Formeln einfacher gestalten, als es der Fall sein würde, wenn man, was ohne Schwierigkeit angeht, Functionen von u_1, u_2, einführte, welche dem angeführten elliptischen Integral conform sind.

Intervalls, der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b angenommen, so kann man, wenn unter den Exponenten m, n keiner $= -1$ ist (auf welchen Fall ich mich hier beschränke), setzen

$$\int_\alpha^\beta F(x)\, dx = C + S \frac{1}{n+1} B (\beta - b)^{n+1} - S \frac{1}{m+1} A (\alpha - a)^{m+1},$$

wo C einen von α, β unabhängigen Werth hat. Wenn die Exponenten $m+1$, $n+1$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$C = \int_a^b F(x)\, dx$$

Weil aber C auch dann noch einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn einige der Exponenten $m+1$, $n+1$ negativ sind, so scheint es mir gestattet und angemessen zu sein, die Formel $\int_a^b F(x) dx$ allgemein als das constante Glied in der Entwickelung von $\int_\alpha^\beta F(x)\, dx$ nach Potenzen von $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ zu definiren. In diesem Sinne ist im Verlauf der Abhandlung die Bezeichnung $\int_a^b$ überall aufzufassen.

Man bezeichne nun

$$\int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

15.

$$\int_{a_{2\mathfrak{b}}}^{a_{2\mathfrak{b}-1}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch } \frac{\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{i}$$

und

16. $$\sum_{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{n}} \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} + \ldots + \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}} \text{ durch } J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so erhält man $2 . \mathfrak{n}^2$ bestimmte Integrale $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, welche man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Jntegrale zweiter Gattung nennen kann, und die in der Theorie der Abel'schen Transcendenten dieselbe Bedeutung haben wie die Grössen

$$K - E, E'$$

auf welche sie sich für $n = 1$ reduciren, für die elliptischen Functionen. Während z. B.

$$J(u) = \int_0 \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = \int_0 k^2 \operatorname{sn}^2 u \,.\, du - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = u - \int_0 \operatorname{dn}^2 u\, du - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

und daher, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ganze Zahlen sind,

$$J(u + 2\mathfrak{m}K + 2\mathfrak{n}K'i) = J(u) + 2\mathfrak{m}(K - E) + 2\mathfrak{n}E'i$$

ist, so erhält man, wenn man setzt,

$$17. \quad \begin{cases} \omega_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}} K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, i) \\ \varepsilon_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}} (\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, i) \end{cases}$$

$$18. \quad J(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots, u_{\mathfrak{n}} + 2\omega_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{a}} = J(u_1, u_2, \ldots, u_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{a}} + 2\varepsilon_{\mathfrak{a}}$$

Nach diesen vorläufigen Auseinandersetzungen, deren nähere Begründung einer ausführlichen Bearbeitung der Abel'schen Transcendenten vorbehalten bleiben muss, werde ich nun nachweisen, dass die Gleichungen (3, 4) des §. 1. eine Reihe einfacher Relationen unter den $4 . \mathfrak{n}^2$ Grössen $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ enthalten.

§. 4.

Es seien a, b, c, d irgend vier Wurzeln der Gleichung $\mathrm{R}(x)=0$, und es werde

$$\sum_{\mathfrak{a}}\left(\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{y-a_{2\mathfrak{a}-1}}-\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}}\right)\frac{\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}(x)\,\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}(y)}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}}\ \text{durch U}$$

$$\int_a^b\int_c^d \mathrm{U}\,dx\,dy\ \text{durch T}$$

bezeichnet. Substituirt man für $\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}(x)$, $\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}(y)$ die in §. 3. gegebenen Ausdrücke, so erhält man zunächst

$$\mathrm{U}=\frac{1}{4}\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\mathrm{Q}(a_{2\mathfrak{a}-1})}{\mathrm{P}'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\left(\frac{1}{(a_{2\mathfrak{a}-1}-x)^2(a_{2\mathfrak{a}-1}-y)}-\frac{1}{(a_{2\mathfrak{a}-1}-y)^2\,(a_{2\mathfrak{a}-1}-x)}\right)\frac{\mathrm{P}(x)\ \mathrm{P}(y)}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}}$$

und daraus, indem man

$$\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\mathrm{Q}(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}-1}-x)\,(a_{2\mathfrak{a}-1}-y)\,\mathrm{P}'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\ \text{durch V bezeichnet,}$$

$$\mathrm{U}=\frac{1}{4}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)\frac{\mathrm{P}(x)\ \mathrm{P}(y)}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}\sqrt{\mathrm{R}(y)}}.$$

Es ist aber, nach bekannten Sätzen über die Zerlegung der Brüche

$$\frac{\mathrm{Q}(t)}{(t-x)(t-y)\ \mathrm{P}(t)}=$$

$$\frac{\mathrm{Q}(x)}{(x-y)\,\mathrm{P}(x)}\cdot\frac{1}{t-x}-\frac{\mathrm{Q}(x)}{(x-y)\ \mathrm{P}(y)}\cdot\frac{1}{t-y}+\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\mathrm{Q}(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}-1}-x)\,(a_{2\mathfrak{a}-1}-y)\ \mathrm{P}'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\cdot\frac{1}{t-a_{2\mathfrak{a}-1}}$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von t und setzt die beiden Coefficienten von t^{-1} einander gleich, so ergiebt sich

$$\mathrm{V}=1-\frac{\mathrm{Q}(x)}{(y-x)\ \mathrm{P}(x)}+\frac{\mathrm{Q}(y)}{(x-y)\ \mathrm{P}(y)}$$

Setzt man daher $\dfrac{\mathrm{Q}(x)}{\mathrm{P}(x)}=\mathrm{N}(x)$, wo dann $\mathrm{R}(x)=\mathrm{P}^2(x)\,.\,\mathrm{N}(x)$ wird, so ist

$\mathrm{V}=1-\dfrac{\mathrm{N}(x)-\mathrm{N}(y)}{x-y}$, und daher

$$\mathrm{U}=\left(\frac{1}{2}\ \frac{\mathrm{N}(x)-\mathrm{N}(y)}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\ \frac{\mathrm{N}'(x)+\mathrm{N}'(y)}{x-y}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}(x)}\sqrt{\mathrm{N}(y)}}$$

Dieser Ausdruck für U lässt sich (s. §. 1 im Anfange) umgestalten in den folgenden:

$$2\mathrm{U}=\frac{d}{dx}\ \frac{\sqrt{\mathrm{N}(x)}}{(y-x)\sqrt{\mathrm{N}(y)}}-\frac{d}{dy}\ \frac{\sqrt{\mathrm{N}(y)}}{(x-y)\sqrt{\mathrm{N}(x)}}$$

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{N(x)}}{(y-x)\sqrt{N(y)}} = \frac{P(y)}{P(x)}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}$$

$$= \frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} + \frac{P(y)-P(x)}{y-x}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}}$$

$$\frac{\sqrt{N(y)}}{(x-y)\sqrt{N(x)}} = \frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} + \frac{P(x)-P(y)}{x-y}\,\frac{\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}},$$

und daher, wenn man $\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = G(x,y)$ setzt,

$$2U = \frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}$$

$$+\frac{d}{dx}\,\frac{G(x,y)\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\,\frac{G(x,y)\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}}$$

Bezeichnen nun α, β zwei bestimmte Werthe von x in dem Intervall a, b, und zwar der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b gelegen, und ebenso γ, δ zwei Werthe von y in dem Intervall c, d, der erste in der Nähe von c, der andere in der Nähe von d gelegen, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung mit Beachtung der im §. 1 bewiesenen Gleichung

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\,\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} = \frac{2F(x,y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

$$\int_\alpha^\beta\!\!\int_\gamma^\delta U\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta\!\!\int_\gamma^\delta \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_\gamma^\delta \cdot\left(\frac{G(\beta,y)\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)\sqrt{R(y)}} - \frac{G(\alpha,y)\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)\sqrt{R(y)}}\right)dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\frac{G(x,\delta)\sqrt{R(\delta)}}{P(\delta)\sqrt{R(x)}} - \frac{G(x,\gamma)\sqrt{R(\gamma)}}{P(\gamma)\sqrt{R(x)}}\right)dx$$

Denkt man sich jetzt beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $\alpha - a$, $\beta-b$, $\gamma-c$, $\delta-d$ entwickelt, so ist das constante Glied auf der linken Seite die oben durch T bezeichnete Grösse; auf der rechten Seite aber findet sich als constantes Glied das Doppel-Integral $\int_a^b \int_c^d \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$.

Mithin

$$1.\quad \int_a^b \int_c^d \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \int_a^b \int_c^d U\,dx\,dy =$$

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \int_a^b \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \int_c^d \frac{y - a_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}} - \int_c^d \frac{F_{\mathfrak{a}}(y)dy}{\sqrt{R(y)}} \int_a^b \frac{x - a_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \right\}$$

Nimmt man nun $a = a_{2\mathfrak{b}-1}$, $b = a_{2\mathfrak{b}}$, $c = a_{2\mathfrak{c}-1}$, $d = a_{2\mathfrak{c}}$, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung (nach §. 1, Gl. 3)

$$2.\quad \sum_{\mathfrak{a}} (K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0\ ^{*})$$

Nimmt man $a = a_{2\mathfrak{b}}$, $b = a_{2\mathfrak{b}+1}$, $c = a_{2\mathfrak{c}}$, $d = a_{2\mathfrak{c}+1}$, so ergiebt sich

$$3.\quad \sum_{\mathfrak{a}} (\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{c}$ und summirt von $\mathfrak{m} = \mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, und von $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, so findet man

$$4.\quad \sum_{\mathfrak{a}} (K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}) = 0$$

Nimmt man ferner $a = a_{2\mathfrak{b}-1}$, $b = a_{2\mathfrak{b}}$, $c = a_{2\mathfrak{b}}$, $d = a_{2\mathfrak{b}+1}$, so findet sich (nach §. 1, Gl. 4)

$$5.\quad \sum_{\mathfrak{a}} (K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, \overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) = \frac{\pi}{2},$$

und für $a = a_{2\mathfrak{b}-2}$, $b = a_{2\mathfrak{b}-1}$, $c = a_{2\mathfrak{b}-1}$, $d = a_{2\mathfrak{b}}$.

---

*) Wenn in einer Formel, wie hier, mehrere deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ vorkommen, welche, wie schon oben bemerkt worden ist, hier ausschliesslich ganze Zahlen, aus der Reihe 1, 2, 3, ..., $\mathfrak{n}$ genommen, bezeichnen sollen, so bezieht sich das Summenzeichen auf denjenigen von ihnen, der unter dem Σ ausdrücklich angezeigt ist, und der dann sämmtliche in der angegebenen Reihe enthaltenen Werthe durchlaufen muss, während jeder andere einen stehenden Werth hat. Sind unter dem Summenzeichen mehrere Buchstaben bezeichnet, so muss jeder derselben, unabhängig von den übrigen, dieselben Werthe durchlaufen.

$$6.\quad \sum_a \left(\overline{K}_{a,b-1}\ J_{a,b} - \overline{J}_{a,b-1}\ K_{a,b}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder}$$

$$7.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ \overline{J}_{a,b-1} - J_{a,b}\ \overline{K}_{a,b-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Nimmt man endlich $a = a_{2b-1}$, $b = a_{2a}$, $c = a_{2c}$, $d = a_{2c+1}$, und es ist entweder $c > b$ oder $c < b - 1$, so giebt die Gleichung (3) des §. 1

$$8.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ \overline{J}_{a,c} - J_{a,c}\ \overline{K}_{a,c}\right) = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung m für c und summirt von $m = c$ bis $m = n$, so erhält man, wenn c von b verschieden ist,

$$9.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ J'_{a,c} - J_{a,b}\ K'_{a,c}\right) = 0$$

Denn wenn $b > a$ ist, so ist jedes Glied, das bei der Summation in Betracht kommt, nach (9) $= 0$; wenn aber $b < a$ ist, so sind nur diejenigen Glieder nicht $= 0$, welche man für $m = b - 1$ und $m = b$ erhält; deren Summe aber ist in Folge der Gleichungen (5, 6, 7) ebenfalls $= 0$.

Setzt man in der Gleichung (9) $c = b + 1$ und addirt alsdann zu ihr die Gleichung (5), und bemerkt, dass $K'_{a,b} = \overline{K}_{a,b} + K'_{a,b+1}$, $J'_{a,b} = \overline{J}_{a,b} + J'_{a,b+1}$ ist, so erhält man

$$10.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ J'_{a,b} - J_{a,b}\ K'_{a,b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

§. 5.

Die Gleichungen (2, 4, 9, 10) des vorhergehenden §., welche hier noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$1.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ J_{a,c} - J_{a,b}\ K_{a,c}\right) = 0,$$

$$2.\quad \sum_a \left(K'_{a,b}\ J'_{a,c} - J'_{a,b}\ K'_{a,c}\right) = 0,$$

$$3.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ J'_{a,c} - J_{a,b}\ K'_{a,c}\right) = 0, \quad \text{wenn } c \gtrless b,$$

$$4.\quad \sum_a \left(K_{a,b}\ J'_{a,b} - J_{a,b}\ K'_{a,b}\right) = \frac{\pi}{2},$$

enthalten eine Reihe von $(2n^2 - n)$ Relationen unter den $4n^2$ Grössen $K_{a,b}$, $J_{a,b}$, $K'_{a,b}$, $J'_{a,b}$. Die erste Gleichung nämlich, deren linke Seite identisch $= 0$ wird, wenn man $c = b$ nimmt, und nur ihr Zeichen wechselt, wenn diese beiden Indices unter einander vertauscht werden, giebt $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen; eben so viele die zweite; die dritte aber giebt deren $n(n-1)$, und die vierte n, alle zusammen also enthalten $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) + n = 2n^2 - n$ Relationen.

Ich werde jetzt aus diesen Relationen noch einige andere herleiten, welche bei den in der Einleitung angedeuteten Reihen-Entwickelungen der Abel'schen Transcendenten gebraucht werden.

Es bezeichne G die Determinante des Systems

$$\begin{array}{cccc} K_{1,1} & K_{1,2} & \ldots. & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \ldots. & K_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \ldots. & K_{n,n}, \end{array}$$

und $\overline{G}_{a,b}$ den Coefficienten von $K_{a,b}$ in dem Ausdrucke von G, so ist, wenn

$$5.\quad G_{a,b} = \frac{\overline{G}_{a,b}}{G}$$

gesetzt wird,

$$6.\quad \sum_a G_{a,b}\, K_{a,c} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } c \gtrless b, \\ 1, \text{ wenn } c = b \text{ ist,} \end{cases}$$

$$7.\quad \sum_c G_{a,c}\, K_{b,c} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } b \gtrless a, \\ 1, \text{ wenn } b = a \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun hat man (Gl. 1)

$$\sum_c K_{c,m}\, J_{c,n} = \sum_c K_{c,n}\, J_{c,m}, \text{ also}$$

$$\sum_{m,c,n} G_{a,m}\, G_{b,n}\, K_{c,m}\, J_{c,n} = \sum_{n,c,m} G_{a,m}\, G_{b,n}\, K_{c,n}\, J_{c,m}$$

Summirt man auf beiden Seiten in Bezug auf die einzelnen Indices in der Ordnung, in welcher sie unter dem Summenzeichen geschrieben stehen, so erhält man mit Hülfe der Gleichung (7)

$$8.\quad \sum_n G_{b,n}\, J_{a,n} = \sum_a G_{a,m}\, J_{b,m}$$

Setzt man daher

$$9.\quad \sum_c G_{b,c}\, J_{a,c} = F_{a,b}, \quad \text{so ist}$$

$$10.\quad F_{a,b} = F_{b,a}$$

Multiplicirt man die Formel $G_{c,n}\, J_{a,n}$ durch $K_{c,b}$ und summirt dann in Bezug auf c, n, so findet man mit Hülfe der Gleichungen (9, 6)

$$11.\quad J_{a,b} = \sum_c F_{a,c}\, K_{c,b}$$

Ferner ist (Gl. 3, 4)

$$\sum_m (K_{m,c}\, J'_{m,b} - J_{m,c}\, K'_{m,b}) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } c \gtrless b, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } c = b, \end{cases}$$

daher $\sum\limits_{m,c} G_{a,c} \left(K_{m,c}\ J'_{m,b} - J_{m,c}\ K'_{m,b} \right) = \frac{\pi}{2}\ G_{a,b}$

Aber $\sum\limits_{c,m} G_{a,c}\ K_{m,c}\ J'_{m,b} = J'_{a,b}$,

$\sum\limits_{c,m} G_{a,c}\ J_{m,c}\ K'_{m,b} = \sum\limits_{m} F_{m,a}\ K'_{m,b} = \sum\limits_{c} F_{c,a}\ K'_{c,b}$,

also 12. $J'_{a,b} = \frac{\pi}{2}\ G_{a,b} + \sum\limits_{c} F_{c,a}\ K'_{c,b}$

Endlich ist (Gl. 2)

$$\sum_{c} K'_{c,b}\ J'_{c,a} = \sum_{c} K'_{c,a}\ J'_{c,b},$$

und daher, wenn man $J'_{c,a}$ und $J'_{c,b}$ vermittelst der Formel (12) ausdrückt, indem man das einemal c, a, m für a, b, c und das anderemal c, b, m für a, b, c schreibt, und bemerkt, dass

$$\sum_{c,m} F_{m,c}\ K'_{c,b}\ K'_{m,a} = \sum_{c,m} F_{m,c}\ K'_{c,a}\ K'_{m,b}$$

ist, weil man auf der rechten Seite dieser Gleichung m und c mit einander vertauschen und dann wieder $F_{m,c}$ für $F_{c,m}$ setzen darf,

$$13.\quad \sum_{c} G_{c,a}\ K'_{c,b} = \sum_{c} G_{c,b}\ K'_{c,a}$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth, weil in ihr nur Abel'sche Integrale der ersten Gattung vorkommen.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung durch $H_{a,b}$, wo denn

$$14.\quad H_{a,b} = H_{b,a}$$

ist, so erhält man noch

$$15.\quad K'_{a,b} = \sum_{c} H_{c,a}\ K_{c,b}$$

Durch die hier entwickelten Formeln wird übrigens auch der Beweis geliefert, dass die $(2n^2 - n)$ Gleichungen (1, 2, 3, 4) unabhängig von einander sind, d. h. dass keine von ihnen eine Folge der übrigen ist. Dies wird der Fall sein, wenn sich sämmtliche in denselben vorkommende $4n^2$ Grössen durch $(2n^2 + n)$ andere, willkührlich angenommene, ausdrücken lassen.

Nimmt man nun aber die n^2 Grössen $K_{a,b}$ willkührlich, die durch $F_{a,b}$, $H_{a,b}$ bezeichneten aber so an, dass den Bedingungs-Gleichungen (10, 14) Genüge geschieht, und drückt dann durch diese Grössen, deren Anzahl $(2n^2 + n)$ ist, vermittelst der Formeln (11, 12, 15) $J_{a,b}$, $J'_{a,b}$, $K'_{a,b}$ aus, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke derselben in die Gleichungen (1, 2, 3, 4), so überzeugt man sich mit Hülfe der Relationen (6, 7) leicht, dass in jeder dieser Gleichungen die linke Seite identisch $= 0$ wird.

Es ist bei den vorstehenden Entwickelungen ausdrücklich angenommen worden, dass die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ sämmtlich reell und ihrer Grösse nach geordnet seien. Gleichwohl behalten die gewonnenen Resultate unverändert und ohne Ausnahme ihre Gültigkeit, wenn auch diese Bedingungen nicht erfüllt sind; es bedarf alsdann nur einer geeigneten Modification der in §. 1 getroffenen Bestimmungen hinsichtlich der Festsetzung desjenigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$, der bei jeder einzelnen Integration genommen werden muss. Ich kann jedoch, des beschränkten Raumes wegen, in nähere Erörterungen über diesen Gegenstand nicht eingehen. Ebenso muss ich es mir versagen, über den in der Einleitung erwähnten Gebrauch der entwickelten Relationen auch nur andeutungsweise etwas Näheres anzugeben. Ich begnüge mich schliesslich — besonders um darauf hinzuweisen, dass auch die zuletzt gegebenen Entwickelungen nicht ohne Bedeutung sind — den allgemeinen Ausdruck der Hülfsfunctionen hinzustellen, auf welche die Abel'schen Transcendenten zurückgeführt werden können.

Es seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ ganze Zahlen, von denen jede entweder $= 0$, oder $= 1$ zu nehmen ist; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, veränderliche ganze Zahlen, deren jede unabhängig von den übrigen jeden zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenen Werth annehmen kann; man bezeichne ferner $\pi H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $\frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\eta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, und bilde die unendliche Reihe

$$S e^{\Sigma \left(-\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (\alpha_{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(\alpha_{\mathfrak{b}} - \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{b}}) + (\alpha_{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(t_{\mathfrak{a}} + \mu_{\mathfrak{a}}\pi) i\right)},$$

wo sich das Summenzeichen Σ auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, S aber auf $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bezieht. Bezeichnet man die durch diese Reihe dargestellte Function von $t_1, t_2, \ldots$ durch $Hl(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, so hat dieselbe je nach den verschiedenen Werthen, die man den Zahlen $\mu_{\mathfrak{a}}$, $\nu_{\mathfrak{a}}$ geben kann, 4^n verschiedene Formen, welche den Jacobi'schen Θ Functionen, in welche sie für $n = 1$ übergehen, durchaus analog sind. Führt man nun statt $t_1, t_2, \ldots$ die Argumente $u_1, u_2, \ldots$ ein, indem man

$$t_{\mathfrak{a}} = \eta_{1,\mathfrak{a}} u_1 + \eta_{2,\mathfrak{a}} u_2 + \ldots + \eta_{n,\mathfrak{a}} u_n$$

setzt, so erhält man die erwähnten Hülfsfunctionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$, durch welche die von mir eingeführten Functionen sn $(u_1, u_2, \ldots)_a$, cn $(u_1, u_2, \ldots)_a$, dn $(u_1, u_2, \ldots)$, und noch mehrere andere, mit diesen im Zusammenhange stehende, ausgedrückt werden können und zwar eine jede als ein Quotient zweier derselben. Das Nähere hierüber gedenke ich in der erforderlichen Ausführlichkeit in einem grössern Werke zu geben, welches ausser allgemeinen Untersuchungen über die Integrale algebraischer Functionen insbesondere die Grundzüge einer umfassenden Theorie der Abel'schen Transcendenten enthalten soll.

Braunsberg, 17. Juli 1849.

Karl Weierstrass.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Prima. Ordinarius Herr Oberlehrer Dr. Bumke.

A. Sprachen.

1. Deutsch. Literaturgeschichte bis auf die neueste Zeit, nach Hüppe; Lesung und Erklärung mehrerer Stücke der betreffenden Schriftsteller. Schriftliche Arbeiten. 3 St. Schultz.

2. Lateinisch. Cic. de fin. III. IV. — Or. Rosc. Am. und Marc. Mündlich übersetzt wurde aus Kraft's Anleitung §. 47 — 69. Die Lehre vom Satzbau nach Schultz Grammatik §. 428—459. Alle 14 Tage ein Extemporale und eine schriftliche Uebersetzung zu Hause, alle Monat ein Aufsatz. 6 St. Hr. Oberlehrer Lingnau. Hor. carm. I. und II. zum Theil memorirt. Sat. I. 1. und art. poet. 2 St. Schultz.

Griechisch. Plat. Phaed. Die Lehre von den Zwischensätzen und den Modis; nach Buttmann. Schriftliche Arbeiten. Hom. Jl. V—VII. Herod. I. c. 1—20. Soph. Phil. 7 St. Hr. Dr. Bumke.

4. Französisch. Grammat. Wiederholungen; Syntax — zum Theil in Französischer Sprache. Lamartine Voyage etc. Athènes, Bayruth. Extemporalien aus der Französischen Literaturgeschichte. — 2 St. Hr. Dr. Fuuge.

5. Hebräisch. Mos. II. 13—26. Memorirt wurden die zehn Gebote. Grammatik nach Gesenius. 2 St. Hr. Religionslehrer Wien.

6. Polnisch. Formenlehre und Syntax nach Poplinski; schriftliche Uebungen. Polsfus Lesebuch. S. 48—60. Hr. Brandenburg.

B. Wissenschaften.

1. Religionslehre. Erklärung des Evangeliums nach Marcus im Grundtexte; Kirchengeschichte von Constantin bis auf Karl d. Gr. 2 St. Hr. Wien. — Für die evangelischen Schüler: Einleitung zum Ev. Joh., erklärt und gelesen c. 5 bis zu Ende in der Grundsprache; Einleitung zum Briefe an die Gal.; Thomasius, Grundlinien etc. §. 1—23. 2 St. Hr. Pfarrer Liedke.

2. Phil. Propädeutik. Empirische Psychologie, einzelne Wiederholungen aus der Logik. 2 St. Schultz.

3. Mathematik. Weitere Ausführung der Lehre von den Gleichungen; Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Stereometrie und Wiederholung der Trigonometrie; nach Koppe. 4 St. Hr. Gymnasiallehrer Weierstrass.

4. Physik. Statik und Mechanik fester und flüssiger Körper. 1 St. Hr. Weierstrass.

5. Geschichte. Röm. Kaisergeschichte. Mittelalter. Repetizionen. 2 St. Hr. Gymnasiallehrer Dr. Bender.

6. Naturbeschreibung. Mineralogie. Wiederholungen. 1 St. Hr. Oberlehrer Dr. Saage.

Sekunda. Ordinarius Herr Oberlehrer Lingnau.

A. Sprachen.

1. Deutsch. Poetik. Erklärung poetischer Stücke. Kontrole der Privatlektüre. Aufsätze. 4 St. Hr. Dr. Fuuge.

2. Latein. Liv. XXI.; einige Reden aus demselben wurden memorirt. Cic. or. Cat. I. gelesen und memorirt, dann pro Dejot. Grammatik nach Schultz Kap. 58—63 — Beispiele nach August. Alle 8 Tage eine schriftliche Arbeit aus Kraft's Griech. Geschichte §. 71—125. Wöchentlich ein Extemporale, das memorirt wurde. Für die obere Abtheilung einige Versuche in freien Arbeiten. 6 St. Hr. Lingnau.

Virg. Aen. I. und II. 2 St. Hr. Dr. Bender.

3. Griechisch. Xen. Cyrop. III. und IV. Grammatik nach Buttm. Gebrauch der Tempora und Modi, die Präposizionen. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Hr. Dr. Bumke. Hom. Od. XIV., woraus einige Stellen memorirt wurden. 2 St. Hr. Lingnau.

4. Französisch. Charles XII liv. I. und II. Unregelmässige Verba. Extemporalia. Häusliche Arbeiten. 2 St. Bis Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Dr. Fuuge.

5. Hebräisch. Mos. I. 42, 43, 44 nach Vaters Lesebuch. Grammatik nach Gesenius. 2 St. Hr. Wien.

6. Polnisch. Aussprache und Formenlehre nach Poplinski. Schriftliche Uebungen. Polsfus Lesebuch S. 1—23. Hr. Brandenburg.

B. Wissenschaften.

1. Religionslehre. Die Sittenlehre. 2 St. Hr. Wien. Für die evangelischen Schüler: Die Unterscheidungslehren der evang.-protest. und Röm.-kath. Kirche nach dem Duisburger Katechismus. Einleitung zur Apostelgesch., und die ersten Kapitel derselben in der Grundsprache gelesen und erklärt. Kirchengeschichte bis zum Anfange des 16. Jahrh. 2 St. Hr. Liedke.

2. Mathematik. Die Lehre von den Potenzen und Logarithmen, den arithmetischen und geometrischen Reihen, nebst deren Anwendungen. Wiederholung der Aehnlichkeitslehre, Ausmessung der geradlinigen Figuren und des Kreises. Ebene Trigonometrie nach Koppe. Arithmetische und geometr. Aufgaben. 4 St. Hr. Weierstrass.

3. Physik. Statik u. Mechanik fester u. flüssiger Körper. 1 St. Hr. Weierstrass.

4. Geschichte und Geographie. Allgemeine Einleitung. Geschichte der Orientalen, Griechen und Mazedonier. — Asien ausführlich, dann Afrika, Amerika und Australien. 3 St. Hr. Dr. Bender.

5. Naturbeschreibung. Mineralogie. 1 St. Hr. Dr. Saage.

Terzia. Ordinarius für Oberterzia Herr Oberlehrer Dr. Saage, für Unterterzia Herr Dr. Fuuge.

A. Sprachen.

1. Deutsch. Die allgemeinen Eigenschaften des Stils. Synonymik. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Hr. Dr. Bumke.

2. Latein. Oberterzia: Caes. b. G. lib. VI. I. und Anfang von II. Memorirt b. G. VI, 13—29. Grammatik nach Schultz: Tempora und Modi; dazu Uebungen aus Litzinger. Schriftliche Arbeiten. 6 St. Hr. Dr. Saage. — Ovid. Met. lib. II. III. IV. Einzelne Abschnitte wurden memorirt. 2 St. Hr. Dr. Bumke.

Unterterzia: Caes. b. G. lib. VI. VII. — Ovid. Met. lib. I. II; aus I. wurde der Anfang memorirt. Grammatik: Syntax cas. und Wiederholung der Etymologie. Uebungen aus Litzinger. Schriftliche Arbeiten. 8 St. Hr. Dr. Fuuge.

3. Griechisch. Xen. Anab. lib. II. und III. c. 1. Memorirt wurde die Rede des Klearchus II. 5. Grammatik nach Buttmann: die Verba auf μι und die unregelmässigen Verba. Schriftliche Uebungen nach Halm. 5 St. Hr. Wien.

4. Französisch. Oberterzia: Hecker, kleine Erzählungen 40—90. Grammatik: regelmässige und unregelmässige Verba. 2. St. Hr. Dr. Fuuge. Unterterzia: Formenlehre, 2 St. bis Ostern Hr. Oestreich; nach Ostern mit Oberterzia zusammen. Hr. Dr. Fuuge.

B. Wissenschaften.

1. Religionslehre. Einleitung in die Glaubenslehre, und Glaubenslehre, 1. Thl. 2 St. Hr. Wien. — Für die evangelischen Schüler: Einleitung in die kanonischen und apokryphischen Bücher des alten Testaments. Wiederholung des I—III. Hauptstücks des Lutherischen Katechismus; das IV. u. V. wurde memorirt. 2 St. Hr. Liedke.

2. Mathematik. Oberterzia: Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Kreislehre. 2 St. Unterterzia: Wiederholung der Buchstabenrechnung. Gleichungen des ersten Grades. Erster Theil der Kreislehre. 2 St. Kombinirt: Vergleichung und Ausmessung der geradlinigen Figuren, nach Koppe. Arithmetische und geometrische Aufgaben. 2. St. Hr. Weierstrass.

3. Geschichte und Geographie. Römische Geschichte. Geographie von den Ländern Europas ausser Deutschland. 4 St. Hr. Dr. Bender.

4. Naturbeschreibung. Schleimthiere. Botanik. 2 St. Hr. Dr. Saage.

Quarta. Ordinarius Herr Gymnasiallehrer Dr. Bender.

A. Sprachen.

1. Deutsch. Die Lehre vom zusammengesetzten Satz. Lese- und Deklamazions-Uebungen; nach Otto. 4 St. Hr. Brandenburg.

2. Latein. Wiederholungen aus der Formenlehre; Gebrauch der Kasus. Acc. c. inf., Partizipial-Konstrukzion; nach Zumpt. Schriftliche Uebungen; nach Litzinger. — Nep.: Lysander, Alcib., Thras., Conon, Dion, Isocr., Chabr.; Conon memorirt. 6 St. Hr. Dr. Bender. Phaedri fab. sel. 2 St. Hr. Brandenburg.

3. Griechisch. Die Formenlehre bis zu den Verben auf $\mu\iota$, nach Buttmann. Uebersetzung entsprechender Stücke aus Jacobs Elementarbuch. 4 St. Hr. Dr. Saage.

B. Wissenschaften.

1. Religion. Biblische Geschichte; nach Kabath. Die Lehre von den heil. Sakramenten und die Sittenlehre; nach Ontrup. 2 St. Hr. Wien. Für die evangelischen Schüler: Lebensgeschichte Jesu Christi. Das II. Hauptstück des Luther. Katechismus wurde wiederholt, das III. memorirt und erklärt. 2 St. Hr. Liedke.

2. Mathematik. Anfangsgründe der Buchstabenrechnung; Gleichungen des ersten Grades. Die Planimetrie bis zur Kreislehre; nach Koppe. Arithmetische und geometrische Aufgaben. 4 St. Hr. Weierstrass.

3. Geschichte und Geographie. Geschichte der Orientalen und Griechen. 2 St. Bis Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Dr. Bender. — Geographie der aussereuropäischen Welttheile, Deutschland. 2 St. Bis Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Dr. Bumke.

4. Naturbeschreibung. Säugethiere; Insekten. 2 St. Hr. Dr. Saage.

Quinta. Ordinarius Herr Brandenburg.

A. Sprachen.

Deutsch. Die Redetheile; Deklinazion und Konjugazion. Einfacher und erweiterter Satz. Lese- und Deklamazionsübungen; nach Otto. Schriftliche Arbeiten. 4 St. Hr. Dr. Fuuge.

2. Latein. Unregelmässige Perfekta und Supina. Satzlehre; nach Zumpt. Schriftliche Uebungen; nach Litzinger. 6 St. Hr. Brandenburg. Wiederholungen. 3 St. Hr. Lingnau.

B. Wissenschaften.

1. Religionslehre. Biblische Geschichte; nach Kabath. Glaubenslehre bis zur Lehre über den h. Geist. Das kathol. Kirchenjahr. 2 St. Hr. Wien. — Für die evangelischen Schüler: Biblische Geschichte; nach Kohlrausch. Das II. Hauptstück des Luther. Katechismus nebst betreffenden Bibelstellen und Liederversen. 2 St. Hr. Liedke.

2. Mathematik. Proporzionslehre und die sich darauf stützenden bürgerlichen Rechnungsarten. 3 St. Hr. Brandenburg.

3. Geschichte und Geographie. Biographische Erzählungen aus der mittlern und neuern Geschichte. 2 St. Bis Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Dr. Bumke. Geographie von den einzelnen Ländern Europa's. 2 St. Bis Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Dr. Saage.

4. Naturbeschreibung. Einleitung. Vögel; Insekten. 2 St. Hr. Dr. Saage.

Sexta. Ordinarius vor Ostern Herr Oestreich, nach Ostern Schultz.

A. Sprachen.

1. Deutsch. Entwickelung der Redetheile; der einfache Satz. Lese- und Deklamazionsübungen; nach Otto. 4 St. Hr. Brandenburg.

2. Latein. Die regelmässige Formenlehre; nach Zumpt. Uebungen nach Litzinger. 6 St. vor Ostern Hr. Oestreich, dann Schultz. Wiederholungen und Memoriren von Stammwörtern. 3 St. Hr. Dr. Bender.

B. Wissenschaften.

1. Religionslehre. Biblische Geschichte, nach Kabath. Einübung und Erklärung von Bibelstellen. 2 St. Hr. Wien. Für die evangelischen Schüler: Biblische Geschichte; nach Kohlrausch. Das I. Hauptstück des Lutherischen Katechismus. 2 St. Hr. Liedke.

2. Mathematik. Die vier Spezies mit ganzen und gebrochenen, benannten und unbenannten Zahlen. Kopfrechnen. 4 St. Hr. Brandenburg.

3. Geschichte und Geographie. 3 St. Biographische Erzählungen aus der alten Geschichte. Vor Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Lingnau. Die Vorbegriffe der Geographie. Ozeanographie und allgemeine Beschreibung der fünf Erdtheile. Vor Ostern Hr. Oestreich, dann Hr. Weierstrass.

4. Naturbeschreibung. Einzelnes Ausgewählte aus allen drei Reichen. 2 St. Hr. Dr. Saage.

Fertigkeiten.

1. Schönschreiben. In Quarta 1, in Quinta 3, in Sexta 4 St. Hr. Zeichenlehrer Höpffner.

2. Zeichnen. In Quarta 2, in Quinta 2, in Sexta 2 St., ausserdem für diejenigen Schüler der obern Klassen, die sich weiter auszubilden wünschten, 1 St. Hr. Höpffner.

3. Singen. In Sekunda, Terzia und Quarta, Quinta, Sexta und einer Selekta aus allen Klassen je eine Stunde. Hr. Seminarlehrer Wilhelm.

4. Turnen. Uebungen der Schüler während des Sommer-Semesters, jeden Mittwoch und Samstag von 5 bis 7 Uhr, unter Leitung des Herrn Inspektors Heller und unverdrossener, dankenswerther Theilnahme des Herrn Weierstrass.

II. Höhere Verfügungen.

1. Die Pfingstferien sollen auf eine volle Woche ausgedehnt werden. Königsberg, den 1. November 1848.

2. Den Schülern ist nach Ministerialerlass vom 25. November 1848 die Theilnahme an politischen Versammlungen nicht zu gestatten. Den 5. Dezember 1848.

3. Nach Ministerialerlass vom 14. Dezember v. J. bleiben die bestehenden Einrichtungen bis zur erfolgten gesetzlichen Neugestaltung des Schulwesens in voller Kraft. Den 3. Januar 1849.

III. Chronik des Gymnasiums.

1. Das Schuljahr wurde am 13. September 1848 mit einem feierlichen Gottesdienste eröffnet.

2. Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs wurde nach vorhergegangenem Gottesdienste in gewohnter Weise von der Anstalt gefeiert. Die Festrede hielt Herr Gymnasiallehrer Dr. Bender.

3. Herr Oberlehrer Dr. Kruge wurde am 1. Mai c. mit Pension aus seinem Dienstverhältniss zur Anstalt entlassen.

4. Die erledigte Religionslehrerstelle wurde durch Bestallung vom 16. August v. J. dem Herrn Wien übertragen. — Herr Johann Wien ist den 14. Dezember 1820 zu Medien im Kreise Heilsberg geboren. Auf dem Progymnasium zu Rössel und dem Gymnasium zu Braunsberg vorgebildet, besuchte derselbe $2^1/_2$ Jahr die Universität Breslau, wo er theologische und philologische Vorlesungen hörte, und 2 Jahre das hiesige Lyceum Hosianum. Schon im Oktober 1846 trat er als stellvertretender Religionslehrer bei der Anstalt ein und wurde gern und mit frohen Hoffnungen für eine segensreiche Wirksamkeit von derselben aufgenommen. Die h. Weihen erhielt er in der Fastenzeit 1847.

6. Unter dem 16. September pr. erfolgte die definitive Abberufung des frühern Oberlehrers Herrn Dr. Lilienthal als Direktor des Progymnasiums zu Rössel. Die Anstalt hat in ihm einen thätigen und pflichttreuen Lehrer verloren, welcher ihr seit mehr als 20 Jahren gewissenhaft seine Kräfte gewidmet hatte. Unsre besten

Wünsche für eine fernere gedeihliche Wirksamkeit und für sein Wohlergehen haben den Scheidenden begleitet.

6. Herr Hülfslehrer Krause, der bis August v. J. die Stelle des Herrn Lilienthal vertreten hatte, wurde durch Verfügung vom 25. September pr. als ordentlicher Lehrer an das Progymnasium zu Deutsch-Krone berufen. Derselbe hat sich durch seine dreijährige hiesige Thätigkeit die Anerkennung der Anstalt und die Liebe seiner Schüler erworben.

7. Als Lehrer der Mathematik und Physik wurde unter dem 16. September pr. der bisherige Gymnasiallehrer Herr Weierstrass vom Progymnasium zu Deutsch-Krone hieherberufen. — Herr Karl Weierstrass wurde am 31. Oktober 1815 zu Ostenfelde im Regierungsbezirk Münster geboren; er machte seine Gymnasial-Studien auf der Vorbereitungsschule des Gymnasiums zu Münster und dem Gymnasium zu Paderborn, von wo er im Herbst 1834 mit dem Zeugniss der Reife entlassen wurde. Vom Herbst 1834 bis Ostern 1838 widmete er sich auf der Universität Bonn den staatswissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen und mathematischen Studien und besuchte, nachdem er ein halbes Jahr bei den Seinigen zugebracht, noch längere Zeit die Akademie zu Münster, um sich unter der Leitung des Herrn Prof. Gudermann in der höhern Mathematik weiter auszubilden. Um Ostern 1841 machte er bei der wissenschaftlichen Prüfungskommission zu Münster die Prüfung pro facultate docendi und hielt darauf im Schuljahre 1841/42 an dem dortigen Gymnasium das vorschriftsmässige Probejahr. Im Anfang des Schuljahres 1842/43 wurde er als Lehrer der Mathematik und Physik an das Progymnasium zu Deutsch-Krone berufen und hier im folgenden Schuljahre als ordentlicher Lehrer angestellt.

Herr Weierstrass hat folgende wissenschaftliche Arbeiten bekannt gemacht:

1. Ueber die analytischen Fakultäten. Deutsch-Krone, 1843.
2. Ueber die Sokratische Lehrmethode. Deutsch-Krone, 1845.

8. Herr Schulamtskandidat Richard Oestreich blieb nach zurückgelegtem Probejahr vom Mai v. J. an als Lehrer bei der Anstalt thätig, bis er zu Ostern d. J. als Hülfslehrer an das Gymnasium zu Konitz berufen wurde. Er hat sich die Anerkennung der Anstalt und die Liebe seiner Schüler erworben.

9. Die Krankheit des Herrn Oberlehrers Dr. Otto dauerte auch in diesem Jahre fort und machte ihm jede amtliche Thätigkeit unmöglich. Nach ärztlicher Versicherung dürfen wir seinem Wiedereintritt zu Anfang des nächsten Schuljahres mit Gewissheit entgegensehn.

10. Von Anfang Oktober bis Anfang Dezember v. J. war Herr Oberlehrer Lingnau als Abgeordneter zur Nazional-Versammlung in Berlin. Zu seiner Stellvertretung war der Hülfslehrer Herr Julius Winterfeldt vom Gymnasium zu Konitz hieherberufen worden. Der Letztere erkrankte jedoch bald und begab sich nach öfter unterbrochener Thätigkeit in den Osterferien nach Königsberg, wo er seine Gesundheit

wiederzufinden hoffte, aber auf eine traurige Weise den Tod fand. Am 11. Mai wohnten Lehrer und Schüler der Anstalt einer h. Seelenmesse für ihn bei.

11. Bei der Heftigkeit der Cholera in der letzten Hälfte des Oktobers und der ersten Hälfte Novembers v. J. waren wir genöthigt, den auswärtigen Schülern für diese Zeit die Rückkehr zu den Ihrigen zu gestatten. Für die Zurückbleibenden wurde der Unterricht in den Hauptfächern in zwei täglichen Stunden fortgesetzt, um den Nachtheil dieser Unterbrechung so weit als möglich zu mildern. Einzelne Erkrankungen erfolgten dennoch; ein Schüler, der Quartaner Wittenberg von hier, erlag der Krankheit.

12. Das Stipendium Schmüllingianum wurde durch Beschluss der ordentlichen Lehrer vom 27. März c. für das Jahr 1849 dem Oberprimaner Eduard Holzmann aus Mehlsack verliehen.

IV. Statistische Uebersicht.

1. Während des verflossenen Schuljahres haben am Unterrichte Theil genommen, in

Prima A und B	53 Schüler
Sekunda A und B	63 -
Terzia A und B	65 -
Quarta	47 -
Quinta	42 -
Sexta	31 -
zusammen	301 Schüler.

Zu Anfang und im Laufe des Schuljahres sind 62 Schüler aufgenommen worden; abgegangen sind aus Prima 8, aus Sekunda 7, aus Terzia 7, aus Quarta 2, aus Sexta 1, zusammen 25 Schüler. Die Zahl der gegenwärtigen Schüler der Anstalt, die Abiturienten eingeschlossen, beträgt demgemäss 276 Schüler. Der Sekundaner Johann Raschkowski aus Allenstein starb in den Weihnachtsferien bei den Seinigen, der Quartaner Herrmann Wittenberg im October pr. an der Cholera hierselbst.

2. Bei der Abiturientenprüfung am Schlusse dieses Schuljahres, welche am 19. und 20. Juli c. unter dem Vorsitze des Unterzeichneten, der zum Königl. Kommissarius ernannt war, Statt fand, erhielten folgende Primaner das Zeugniss der Reife:

Namen.	Alter.	Geburtsort.	Konfession.	War in Prima.	Studium.	Ort.
1. Joseph Biermanski	19½ J.	Dittrichswalde	kathol.	2 J.	Theologie	Braunsberg.
2. Eduard Holzmann	22½ J.	Mehlsack	kathol.	2 J.	Theologie	Braunsberg.
3. August Küssner	17¾ J.	Rössel	kathol.	2 J.	Philologie	Königsberg.
4. Franz Löffler	21 J.	Braunsberg	kathol.	2 J.	Kameral-Wissens.	Königsberg.
5. Karl Neumann	23 J.	Stuhmsdorf	kathol.	3 J.	Theologie	Braunsberg.
6. Anton Pohlmann	20 J.	Retsch	kathol.	2 J.	Theologie	Braunsberg.
7. Johann Riszewski	21½ J.	Allenstein	kathol.	2 J.	Theologie	Braunsberg.
8. Hubert Saage	21½ J.	Frauenburg	kathol.	2 J.	Kameral-Wissens.	Königsberg.

Neun von den angemeldeten Abiturienten traten vor der mündlichen Prüfung, einer vor Beendigung derselben zurück. Einem konnte die Prüfungskommission das Zeugniss der Reife nicht ertheilen.

Zugleich mit den Schülern des Gymnasiums machte als Extraneus die Prüfung und erhielt das Zeugniss der Reife Karl Guttzeit aus Bandels.

3. Für die Erhaltung und Vermehrung der Bibliothek und der Sammlungen wurde die etatmässige Summe verwendet. An Geschenken erhielt die Anstalt:

a. Durch die hohen vorgesetzten Behörden: 1. Löschin, Genealogie des Preuss. Königshauses; 2. Haupt, Zeitschrift für deutsches Alterthum, 7. Band; 3. Crelle, Journal für Mathematik, 36. 37. und 38. Band; 4. Spruner, hist. geogr. Atlas, 12. Lieferung; 5. Codex Pomeraniae diplomaticus 1. Bnd. 3. Lieferung.

b. Vom Herrn Buchhändler Huye hierselbst:
1. Blätter für literarische Unterhaltung; Jahrgang 1848; 2. Das Ausland; Jahrgang 1848; 3. Magazin für die Literatur des Auslandes, Jahrgang 1848.

Für die Naturalien-Sammlung sind in den letzten Jahren geschenkt worden: 1. ein weisser Hase, von Herrn Major von Heyking; 2. eine grosse Schildkröte und eine Eule aus Philadelphia, von Herrn Rathsherrn Kuckein; 3. ein Birkhahn, vom Herrn Prediger Thiel in Crossen; 4. zwei Fledermäuse vom Herrn Höpffner; 5. ein Reiher und ein Perlhuhn von Herrn Lingnau; 6. ein Rehschädel, von Herrn Weierstrass; 7. zwei Hörner, vom Sekundaner Braun; und einzelnes Andere von Schülern. — Im Namen der Anstalt drücke ich für diese Geschenke hier nochmals den schuldigen Dank aus.

V. Oeffentliche Prüfung und Schlussfeierlichkeiten.

1. Die öffentlichen Prüfungen werden Donnerstag den 2. August in folgender Weise Statt finden:

Vormittags von 8 — 12 Uhr.

Prima.	Religion, Mathematik, Deutsch.
Sekunda.	Latein, Griechisch, Geschichte.
Terzia.	Latein, Französisch, Griechisch.
Quarta.	Latein, Mathematik, Naturgeschichte.

Nachmittags von 2 — 4 Uhr.

Quinta.	Latein, Deutsch.
Sexta.	Latein, Rechnen.

2. Freitag den 3. August Morgens um 8 Uhr Schlussgottesdienst. Um 9 Uhr finden auf dem grössern Rathhaussaale, der uns durch die Güte des Städtischen Magistrats zu diesem Zwecke bewilligt worden, die Entlassungsfeierlichkeiten in folgender Ordnung Statt: Gesang; Deklamazion der Schüler; Abschiedsrede des Abiturienten Franz Löffler; Erwiederung derselben durch den Primaner Joseph Preuschhoff; Bekanntmachung der Versetzungen und Entlassung der Abiturienten; Gesang.

Nach Beendigung der Feierlichkeiten private Vertheilung der Zensuren in den Klassenzimmern des Gymnasiums.

Schlussbemerkung.

Das neue Schuljahr beginnt Dienstag den 11. September c. mit einem feierlichen Gottesdienste Morgens $7^1/_2$ Uhr, zu welcher Zeit sich alle Schüler pünktlich einzufinden haben.

Die Aufnahme neuer Schüler wird am 8. und 10. September Statt finden.

Braunsberg, den 1. August 1849.

Schultz.