

28, 24

# Jahresbericht

über das

Königliche Friedrichs-Gymnasium zu Breslau,

durch welchen

zu den am 16. 17. und 18. März 1864

stattfindenden

## öffentlichen Prüfungen

ehrerbietigst und ergebenst einladet

**Professor L. Gädke,**

Director.



Vorangeht:

Theorie des schiefen Schnittes unter bestimmten Kreisen und Graden.

Von Professor Adolf Anderssen.

Breslau.

Druck von C. H. Storch und Comp.

9br  
30 (1864)

44 P

# Jahresbericht

über die

Königliche Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

in den Jahren 1883/84

von

zu den am 16. IV. und 18. V. 1884

stattgefundenen



öffentlichen Bericht

Professor L. Garke



Theorie der reellen Schwingungen (Kreisen und Geraden)  
von Professor Adolf Hurwitz

Berlin

# Theorie des schiefen Schnittes unter bestimmten Kreisen und Graden.

Von A. Anderssen.

## I. Allgemeine Bestimmungen für den schiefen Schnitt sowohl von Kreisen und Kreisen, als auch von Kreisen und Graden.

1. Der isodrome und antidrome Schnitt zweier Kreise. Soll um einen Punkt  $M$  ein Kreis beschrieben werden, so kann die Drehung des Halbmessers auf zwei einander entgegengesetzte Weisen erfolgen. Zieht man durch den Mittelpunkt  $M$  von links nach rechts eine quer liegende Achse, so kann der Halbmesser oberhalb derselben entweder von links nach rechts (also unterhalb derselben von rechts nach links) oder von rechts nach links (also unterhalb derselben von links nach rechts) gedreht werden. Wir wollen die erstere Drehungsrichtung als die positive, die letztere als die negative betrachten. Demgemäss ist auch die Richtung der Tangente in einem beliebigen Peripheriepunkte, jenachdem durch sie die positive oder die negative Drehungsrichtung bestimmt wird, als positiv oder als negativ zu bezeichnen.

Schneiden sich zwei Kreise  $M$  und  $m$ , und ist  $B$  der eine von ihren Schnittpunkten, so können sich beide Kreise im Punkte  $B$  entweder mit gleicher Tangentenrichtung (isodrom) oder mit entgegengesetzter Tangentenrichtung (antidrom) begegnen. Es sei  $\left\{ \begin{matrix} BC \\ Bc \end{matrix} \right\}$  die positive,  $\left\{ \begin{matrix} BC' \\ Bc' \end{matrix} \right\}$  die negative Richtung der Tangente im Punkte  $B$  an den Kreis  $\left\{ \begin{matrix} M \\ m \end{matrix} \right\}$ , so schneiden sich die Kreise isodrom unter dem Winkel  $CBe$  (oder  $C'Bc'$ ), den die positive Tangentenrichtung  $BC$  mit der positiven  $Bc$  (oder die negative  $BC'$  mit der negativen  $Bc'$ ) bildet, dagegen antidrom unter dem Winkel  $CBe'$  (oder  $C'Bc$ ), den die positive Tangentenrichtung  $BC$  mit der negativen  $Bc'$  (oder die negative  $BC'$  mit der positiven  $Bc$ ) bildet. Schneiden sich zwei Kreise isodrom unter dem Winkel  $\alpha$ , so schneiden sie sich antidrom unter dem Winkel  $\alpha' = \pi - \alpha$ , und umgekehrt. Schneiden sich zwei Kreise orthogonal, so begegnen sie sich sowohl isodrom als auch antidrom unter einem Rechten.

Der isodrome Schnitt zweier Kreise  $M$  und  $m$  wird bestimmt durch denjenigen Winkel, den die, nach dem einen Schnittpunkt  $B$  gezogenen Radien  $MB$  und  $mB$  einschliessen; also durch den Winkel  $MBm$ ; denn sowohl  $\angle CBc$  als auch  $\angle MBm$  ist  $= \frac{\pi}{2} \pm CBm$ , wobei das obere Zeichen gilt, wenn  $CBc$  ein stumpfer, das untere Zeichen, wenn  $CBc$  ein spitzer Winkel ist. Wird gesagt: zwei Kreise schneiden sich unter einem Winkel  $\alpha$ , so soll, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, stets der isodrome Schnitt gemeint sein. Ferner mögen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  etc. stets spitze Winkel, dagegen  $\alpha'$ ,  $\beta'$  etc. ihre (stumpfwinkligen) Supplemente bedeuten.

2. Der gleichartige und der ungleichartige Schnitt. Zwei Kreise  $M$  u.  $m$  werden von einem Kreise  $K$  unter dem Winkel  $\alpha$  gleichartig geschnitten, wenn beide dem letzteren entweder isodrom oder antidrom unter diesem Winkel begegnen, oder was dasselbe ist, wenn die Kreise  $M$  und  $m$  vom Kreise  $K$  isodrom, aber beide unter dem spitzen Winkel  $\alpha$ , oder beide unter dem stumpfen Winkel  $\alpha'$  geschnitten werden. Dagegen werden die Kreise  $M$  und  $m$  von dem Kreise  $K$  unter dem Winkel  $\alpha$  ungleichartig geschnitten, wenn der eine von ihnen dem letzteren isodrom, der andere antidrom unter diesem Winkel begegnet, oder was dasselbe ist, wenn beide dem letzteren isodrom, aber der eine unter dem Winkel  $\alpha$ , der andere unter dem Winkel  $\alpha'$ , begegnen.

Zwei Kreise  $M$  und  $m$  werden von einem Kreise  $K$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig geschnitten, wenn beide dem letzteren entweder isodrom oder antidrom unter dem bezüglichen Winkel begegnen, oder was dasselbe ist, wenn die Kreise  $M$  und  $m$  vom Kreise  $K$  isodrom, aber beide bezüglich unter den spitzen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , oder beide bezüglich unter den stumpfen Winkeln  $\alpha'$  und  $\beta'$  geschnitten werden. Dagegen werden die Kreise  $M$  und  $m$  von dem Kreise  $K$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  ungleichartig geschnitten, wenn der eine von ihnen dem letzteren isodrom, der andere antidrom unter dem bezüglichen Winkel begegnet, oder was dasselbe ist, wenn beide dem letzteren isodrom, aber der eine unter dem bezüglichen spitzen Winkel, der andere unter dem Supplement des bezüglichen Winkels, begegnen.

Zwei Kreise  $M_1$  und  $M_2$  werden von zwei andern Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  relativ gleichartig geschnitten, wenn der Schnitt eines jeden der Kreise  $M$  mit beiden Kreisen  $K$  ein, unter dem bezüglichen Winkel gleichartig ist, also wenn  $\left\{ \begin{matrix} \text{Kr. } M_1 \\ \text{Kr. } M_2 \end{matrix} \right\}$  beiden Kreisen  $K$  unter demselben Winkel, sei es  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \text{ oder } \alpha' \\ \beta \text{ oder } \beta' \end{matrix} \right\}$ , begegnet. Dagegen werden die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  von den Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  relativ ungleichartig geschnitten, wenn der Schnitt eines jeden der Kreise  $M$  mit beiden Kreisen  $K$  ein, unter dem bezüglichen Winkel ungleichartig ist, also wenn  $\left\{ \begin{matrix} \text{Kr. } M_1 \\ \text{Kr. } M_2 \end{matrix} \right\}$  irgend einem der Kreise  $K$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$ , dem andern unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha' \\ \beta' \end{matrix} \right\}$  begegnet.

3. Bestimmungsstücke des schiefen Schnittes zweier Kreise. Ein Kreis  $M$  mit dem Radius  $R$  wird von einem Kreise  $K$  in den Punkten  $B$  und  $b$  geschnitten. Ziehen wir die Radien  $MB$  und  $KB$ , so stellt der Winkel  $MBK$  den Schnittwinkel  $\alpha$  oder  $\alpha'$  beider Kreise vor. Im Punkte  $B$  legen wir eine Tangente  $BC$  von positiver Richtung an den Kreis  $M$ . Ist nun

$\angle MBK$  ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{spitzer} \\ \text{stumpfer} \end{array} \right\}$  Winkel, so ist der Radius  $KB$  des thätigen Kreises von dem rechten Winkel  $MBC$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{eingeschlossen} \\ \text{ausgeschlossen} \end{array} \right\}$  und schneidet daher, über  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ B \end{array} \right\}$  verlängert, (oder auch selbst schon) den leidenden Kreis nochmals im Punkte  $B'$ . Die Sehne  $BB' = 2S$  hat für alle Kreise  $K$ , welche den Kreis  $M$  unter dem Winkel  $\alpha$  isodrom oder antidrom schneiden, den unveränderlichen Werth  $2R \cos \alpha$ , sie ist daher rücksichtlich des leidenden Kreises  $M$  die Bestimmungssehne für den Schnittwinkel  $\alpha$ , und wir bezeichnen ihre halbe Länge durch  $S_\alpha$ . Für den orthogonalen Schnitt ist  $S_\alpha = 0$ , für die Berührung  $= R$ . Jede Sehne  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ , welche an einen beliebigen Radius  $M\mathfrak{B}$  unter dem Winkel  $\alpha$  im Punkte  $\mathfrak{B}$  angelegt wird, stellt die Bestimmungssehne vor. Ein Loth aus dem Mittelpunkte  $M$  auf eine solche Sehne  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$  soll das Bestimmungsloth, und ein mit dem letzteren um  $M$  beschriebener Kreis soll der Bestimmungskreis für den Schnittwinkel  $\alpha$  heissen.

Soll aus einem gegebenen Punkte  $K$  ein Kreis konstruirt werden, der einen gegebenen Kreis  $M$  unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$  schneidet, so beschreibe man um  $M$  den Bestimmungskreis, lege an denselben aus  $K$  eine Tangente an, welche bei gehöriger Verlängerung den Kr.  $M$  in  $B$  und  $B'$  schneidet, und beschreibe um  $K$  zwei Kreise, den einen mit dem Radius  $KB$ , den andern mit dem Radius  $KB'$ , so schneiden beide Kreise den gegebenen  $M$  unter dem Winkel  $\alpha$ , und zwar beide isodrom, wenn der Mittelpunkt  $K$  des thätigen Kreises innerhalb des leidenden Kreises liegt, dagegen der eine isodrom, der andere antidrom, wenn der Punkt  $K$  ausserhalb des Kreises  $M$  liegt. Ist  $K$  ein Peripheriepunkt des Kreises  $M$ , so verschwindet der eine jener beiden Kreise in den Punkt  $K$ . Die Annäherung dieses Punktes  $K$  an den Mittelpunkt  $M$  hat, wie sich aus der Konstruktion des Kr.  $K$  ergibt, das Bestimmungsloth zur Grenze. Im Grenzfalle selbst haben beide Kreise  $K$  die halbe Bestimmungssehne zum Radius und fallen somit in einen zusammen.

Wird ein Kreis  $M$  von zwei Kreisen  $K'$  und  $K''$ , die einander selbst orthogonal schneiden, in demselben Punkte  $B$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  (isodrom oder antidrom) geschnitten, so stehen die Bestimmungssehnen  $BB'$  und  $BB''$  des Kreises  $M$  für die Schnittwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  in  $B$  auf einander senkrecht, und  $\angle \beta$  ist das Komplement des Winkels  $\alpha$ . Offenbar ist das Bestimmungsloth für den Schnittwinkel  $\beta$  gleich der halben Bestimmungssehne für den Schnittwinkel  $\alpha$ . Daher mag der um  $M$  mit dem Radius  $S_\alpha$  beschriebene Kreis, als Bestimmungskreis für den Schnittwinkel  $\beta$ , der Komplementärkreis für den Schnittwinkel  $\alpha$  heissen.

4. Der Schnitt eines Kreises durch eine Grade. Der Kreis  $M$  wird von einer Graden  $L$  in den Punkten  $B$  und  $b$  geschnitten. Da die Drehungsrichtung einer Graden (als eines uneigentlichen Kreises, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt) unbestimmt ist, so verstehen wir unter dem Schnittwinkel eines Kreises  $M$  und einer Graden  $L$  im Allgemeinen nur den spitzen Winkel, den die Tangente in  $B$  mit der Graden bildet. Die Bestimmungssehne  $BB'$  steht in  $B$  auf der Graden  $L$  senkrecht, wie überhaupt immer auf der Peripherie des thätigen Kreises. Füllen wir aus dem Mittelpunkte  $M$  ein Loth  $MD$  auf die Grade  $L$ , so ist  $\angle BMD$ , wie auch  $\angle MBB'$  gleich dem Schnittwinkel  $\alpha$  des Kreises und der Graden. Da das Loth  $MD$  die halbe Bestimmungssehne, mithin ein Kreis um  $M$  mit dem Radius  $MD$  den Komplementärkreis ( $\alpha$ ) vorstellt, so folgt, dass eine Grade, welche den Komplementärkreis ( $\alpha$ ) berührt, den gegebenen Kreis  $M$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet.

Zwei Kreise  $M$  und  $m$  werden von einer Graden  $L$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  (oder auch unter demselben Winkel  $\alpha$ ) gleichartig oder ungleichartig geschnitten, je nachdem die Mittelpunkte der Kreise auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Graden liegen. Alle Graden, von welchen zwei Kreise unter demselben Winkel  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  geschnitten werden, gehen durch den  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt der Kreise.

## II. Aufgaben über den Schnitt von Kreisen und Graden.

5. Einen Kreis zu konstruiren, der eine gegebene Grade  $L$  unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$  schneidet und durch zwei, ausserhalb der Graden gegebene Punkte  $M$  und  $N$  geht.

Fig. 1.

Der gesuchte Kreis schneide die Grade  $L$  in den Punkten  $B$  und  $b$ ; sein Mittelpunkt sei  $K$ , so ist ein Ort desselben bekannt, nämlich der Perpendikel, auf der Verbindungslinie  $MN$  in ihrem Mittelpunkte  $C$  errichtet, welcher der Graden  $L$  im Punkte  $E$  begegnet. Es hat keine Schwierigkeit, aus einem beliebigen Punkte  $\mathfrak{K}$  der  $CE$  einen Kreis zu beschreiben, der die Grade  $L$  ebenfalls unter dem Winkel  $\alpha$  (in den Punkten  $\mathfrak{B}$  und  $b$ ) schneidet. Ist dies geschehen, so haben wir zwei Kreise  $K$  und  $\mathfrak{K}$ , die beide von der Graden  $L$  unter demselben Winkel gleichartig oder ungleichartig geschnitten werden. Folglich ist der Punkt  $E$ , in welchem die Grade  $L$  der Centrallinie  $K\mathfrak{K}$  begegnet, der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise. (4). Demnach ist auch die Verbindungslinie  $EN$  des Punktes  $E$  mit dem einen der gegebenen Punkte ein äusserer oder innerer Aehnlichkeitsstrahl. Wird daher die Grade  $CE$  von dem Kreise  $\mathfrak{K}$  in den Punkten  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$  geschnitten, so ist der eine oder der andere von diesen Punkten dem Punkte  $N$  zugeordnet. Mithin ist der Radius  $KN$  des gesuchten Kreises dem einen oder dem andern der Radien  $\mathfrak{KN}$  und  $\mathfrak{KN}'$  des Hilfskreises parallel und daher Punkt  $K$  bekannt.

Konstruktion. Man errichte auf der Verbindungslinie  $MN$  in ihrem Mittelpunkte  $C$  einen Perpendikel, der die Grade  $L$  in  $E$  schneidet, und verbinde  $E$  mit dem einen der gegebenen Punkte, nämlich gleichviel mit welchem, wenn  $CE$  auf  $L$  senkrecht steht, andernfalls aber mit demjenigen, der in dem spitzen Neigungswinkel der  $CE$  gegen  $L$  liegt, hier mit dem Punkte  $N$ , rechts von  $CE$ . Auf derselben Seite von  $CE$  wähle man in  $L$  einen beliebigen Punkt  $\mathfrak{B}$ , lege in ihm an die Grade  $L$ , unterhalb derselben, einen Winkel  $E\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = \alpha$  an und errichte auf  $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$  in  $\mathfrak{B}$  ein Loth, welches die Grade  $CE$  in  $\mathfrak{R}$  schneidet. Darauf beschreibe man um den Punkt  $\mathfrak{R}$  einen Kreis mit dem Radius  $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$ , der die beliebig zu verlängernde Grade  $EN$  in den Punkten  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$  schneidet, und ziehe durch  $N$  zu den Radien  $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{N}'\mathfrak{R}$  die Parallelen  $NK$  und  $NK'$ , welche der beliebig zu verlängernden Graden  $CE$  in den Punkten  $K$  und  $K'$  begegnen, so erfüllen die, um die Punkte  $K$  und  $K'$  mit den Radien  $KN$  und  $K'N$  beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Denn erstens gehen die Kreise  $K$  und  $K'$  durch die gegebenen Punkte  $M$  und  $N$ . Ferner schneidet zunächst der Hilfskreis  $\mathfrak{R}$  die Grade  $L$  unter dem gegebenen Winkel  $\alpha$ . Da aber die Radien

$\left\{ \begin{array}{l} \text{KN und } \mathfrak{R} \\ \text{K'N und } \mathfrak{R}' \end{array} \right\}$  einander parallel und von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleicher} \\ \text{entgegengesetzter} \end{array} \right\}$  Richtung sind, so ist Punkt E für die Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} \text{K und } \mathfrak{R} \\ \text{K' und } \mathfrak{R}' \end{array} \right\}$  der  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{array} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt. Folglich ist die gegebene Grade L ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äusserer} \\ \text{innerer} \end{array} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahl der Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} \text{K und } \mathfrak{R} \\ \text{K' und } \mathfrak{R}' \end{array} \right\}$  und schneidet daher den Kreis  $\mathfrak{R}$  und den Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} \text{K} \\ \text{K'} \end{array} \right\}$  unter demselben Winkel  $\alpha$ .

Anmerkung 1. Es sei  $\beta$  derjenige Winkel, unter welchem die Verbindungslinie MN der gegebenen Punkte bei gehöriger Verlängerung der Graden L begegnet. So lange  $\alpha > \beta$ , mithin  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  d. i.  $\mathfrak{R}E$

$< \frac{\pi}{2} - \beta$  d. i.  $\mathfrak{R}E$ , wird auch  $\mathfrak{R}B > \mathfrak{R}E$  sein und der Hilfskreis  $\mathfrak{R}$  den Punkt E umfassen. Dann aber sind die Punkte  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$ , folglich auch die Punkte K und K' durch den Punkt E getrennt, und die Kreise K und K' schneiden die Grade L unter dem gegebenen Winkel ungleichartig. Ist  $\angle \alpha = \beta$ , mithin  $\mathfrak{R}B = \mathfrak{R}E$ , so geht der Kreis  $\mathfrak{R}$  durch den Punkt E, und  $\mathfrak{N}$  fällt mit E zusammen. Alsdann fällt der Punkt K' in's Unendliche, und der Kreis K' geht in die Grade MN über.

Ist endlich  $\alpha < \beta$ , also auch  $\mathfrak{R}B < \mathfrak{R}E$ , so ist der Punkt E von dem Kreise K ausgeschlossen, und die Punkte  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$  sind durch E nicht getrennt. Daher liegen jetzt auch die Punkte K und K' auf derselben Seite der Graden L, und die Kreise K und K' schneiden dieselbe gleichartig.

Anmerkung 2. Ist die Verbindungslinie der gegebenen Punkte auf der Graden L senkrecht, so dass die Ortslinie der Mittelpunkte K und K' der Graden L parallel läuft, so ist  $\mathfrak{R}B = KB = KN$ . Wenn man daher um den Punkt N mit dem Radius  $\mathfrak{R}B$  einen Kreis beschreibt, so sind dessen Schnittpunkte mit jener Ortsgraden die Mittelpunkte der die gestellte Forderung erfüllenden Kreise.

Anmerkung 3. Liegen die Punkte M und N auf verschiedenen Seiten der Graden L, so bleibt die Konstruktion im Wesentlichen dieselbe, wird aber unausführbar, wenn die Abnahme des Winkels  $\alpha$  eine bestimmte Grenze überschreitet. Man errichtet nämlich wiederum auf der Verbindungslinie MN, welche der Graden L im Punkte O unter dem Winkel  $\beta$  begegnet, in ihrem Mittelpunkte C den Perpendikel CE und verbindet den Punkt E mit demjenigen der gegebenen Punkte, der von C durch die Grade L getrennt ist, also mit N, wählt hierauf den Punkt B auf der Graden L innerhalb des Winkels CEN und fährt in der oben angegebenen Weise fort. Da aber diesmal die Grade EN vom Winkel CE $\mathfrak{B}$  ausgeschlossen ist, so wird der um  $\mathfrak{R}$  mit  $\mathfrak{R}B$  beschriebene Kreis die Grade EN zu schneiden aufhören, sobald der Radius  $\mathfrak{R}B$  kleiner wird als der, aus  $\mathfrak{R}$  auf EN gefällte Perpendikel  $\mathfrak{R}D$ . Zieht man durch N zu dem letzteren die Parallele Nk, welche der Verlängerung von CE im Punkte k begegnet, so ist der Kreis um k mit dem Radius kN der Grenzkreis, welcher unter allen, durch die Punkte M und N möglichen Kreisen die gegebene Grade unter dem kleinsten Winkel schneidet.

Es sei die halbe Länge der Verbindungslinie  $MN = s$ , der Abstand CO ihres Mittelpunktes C von ihrem Schnittpunkte O = d. Da  $\mathfrak{R}B$  mindestens gleich  $\mathfrak{R}D$  sein muss, so erhalten wir die Gleichung  $\frac{E\mathfrak{R} \cos \beta}{\cos \alpha} > E\mathfrak{R} \sin \mathfrak{R}EN$ , also  $\cos \alpha \sin \mathfrak{R}EN < \cos \beta$ .

Es ist aber  $\sin \mathfrak{R}EN = \frac{s}{\sqrt{s^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{s \cos \beta}{\sqrt{s^2 \cos^2 \beta + d^2 \sin^2 \beta}}$ ; daher

$\cos \alpha < \sqrt{\frac{\cos^2 \beta + d^2 \sin^2 \beta}{s^2}}$ . Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem der um MN, als Durch-

mässer, beschriebene Kreis die Gerade L schneidet, durch  $\gamma$ , so ist  $\cos \gamma = \frac{d \sin \beta}{s}$ , und wir erhalten

$$\cos \alpha < \sqrt{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \text{ oder } \alpha > \arccos \sqrt{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}.$$

Diese Gleichung, in welcher das Zeichen  $>$  auch die Gleichheit vertritt, liefert alle Werthe des Winkels  $\alpha$ , für welche die Aufgabe in dem gegenwärtigen Falle eine Lösung zulässt. Steht MN auf der Geraden L senkrecht, so ist im Grenzfall  $\alpha = \gamma$ , und der um MN als Durchmesser beschriebene Kreis stellt den Grenzkreis vor.

6. Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Grade XX' oder p und YY' oder q bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet.

Fig. 2. Die Grade p und q, welche sich in einem Punkte O (der auch im Unendlichen liegen kann) begegnen, theilen die Ebene in die beiden Winkelflächen pq und p.q. Die Punkte K und k in der Winkelfläche pq sind die Mittelpunkte zweier, die gestellten Bedingungen erfüllenden Kreise; die Punkte  $\left\{ \begin{matrix} B \text{ und } C \\ b \text{ und } c \end{matrix} \right\}$  sind die, dem Scheitel O zunächstliegenden Schnittpunkte des Kreises  $\left\{ \begin{matrix} K \\ k \end{matrix} \right\}$  mit den Graden p und q. Demnach werden die Kreise K und k, jenachdem ihre Mittelpunkte durch den Scheitel O nicht getrennt oder getrennt sind, von den Graden p und q bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig oder ungleichartig geschnitten. Im ersten Falle ist der Scheitel O der äussere, im zweiten Falle der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und k. In beiden Fällen liegen daher die Punkte K, k und O auf einer Geraden. Ebenso liegen in der Winkelfläche p.q die Mittelpunkte K' und k' zweier, der Aufgabe genügenden Kreise in einer Geraden mit dem Scheitel O. Da nun die Punkte K und K' durch die eine der gegebenen Graden, z. B. durch q, getrennt, durch die andere, also durch p, nicht getrennt sind, so werden die Kreise K und K' von der Geraden p unter dem Winkel  $\alpha$  gleichartig, dagegen von der Geraden q unter dem Winkel  $\beta$  ungleichartig geschnitten. Daher geht die Gerade p durch den äusseren, die Gerade q durch den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und K'. Hieraus folgt: Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Grade p und q bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneiden, liegen auf zwei Graden, welche durch die gegebenen Graden p und q harmonisch getrennt sind (also auch durch den Schnittpunkt O derselben gehen). Ist daher die eine dieser beiden Ortslinien gefunden, so hat man auch die andere; zur Bestimmung jener einen aber genügt der Mittelpunkt K irgend eines Kreises, der die, in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt. Um sich einen solchen Punkt K zu verschaffen, hat man nur ein Viereck OBCK zu konstruiren, welches durch drei Winkel O,  $OBK = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,  $OCK = \frac{\pi}{2} + \beta$  und durch das Verhältniss  $\frac{KB}{KC} = 1$  seiner Gestalt nach bestimmt ist.

Konstruktion. Man lege an die Schenkel OX und OY in den beliebigen Punkten D und C, ausserhalb des Winkels XOY, die Winkel  $\angle ODX = \alpha$  und  $\angle OCY = \beta$  an und errichte auf den angelegten Schenkeln  $\overline{OD}$  und  $\overline{OC}$  in D und C Perpendikel, so werden dieselben 1. parallel sein,

wenn die drei Winkel XOY, den wir mit  $\varphi$  bezeichnen,  $\angle D = \frac{\pi}{2} + \alpha$  und  $\angle C = \frac{\pi}{2} + \beta$  zusammen 4 Rechte betragen, also wenn  $\alpha + \beta + \varphi = \pi$  ist, 2. sich in einem Punkte E innerhalb des Winkels XOY schneiden, wenn  $\alpha + \beta + \varphi < \pi$ , 3. sich in einem Punkte E' innerhalb des Winkels X'OY' schneiden, wenn  $\alpha + \beta + \varphi > \pi$ .

Im ersten Falle ist eine Parallele durch O zu jenen parallelen Perpendikeln die gesuchte Ortslinie. Nehmen wir auf derselben einen beliebigen Punkt K, so ist  $\angle KOX = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,

$\angle KOY = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Folglich geht jeder (eigentliche) Kreis aus der gefundenen Ortslinie, der die gegebenen Graden unter den gegebenen Winkeln schneidet, durch den Scheitel O. Ferner ist aber auch jede, auf dieser Ortslinie senkrechte Gerade als ein, aus dem unendlich fernen Punkte der Ortslinie beschriebener (uneigentlicher) Kreis von der verlangten Beschaffenheit zu betrachten.

Im zweiten Falle schneide man auf dem grösseren Schenkel ED des entstandenen Winkels CED ein Stück EF gleich dem kleineren Schenkel EC ab, ziehe die Gerade CF, verlängere sie bis zu ihrem Schnittpunkt B mit dem Schenkel OX und ziehe durch B zu DE eine Parallele, welche die Verlängerung der CE im Punkte K schneidet, so ist eine, durch die Punkte O und K gelegte Gerade die gesuchte Ortslinie. Denn da  $EF = EC$ , so ist auch  $KB = KC$ ; ferner  $\angle KBX = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\angle KCY = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Folglich geht ein um den Punkt K mit dem Radius KB beschriebener Kreis

durch die Punkte B und C und schneidet die gegebenen Graden unter den gegebenen Winkeln. Wie von dem ursprünglichen Kreise K, so ist auch von allen übrigen Kreisen K (d. h. von allen Kreisen aus der Ortslinie L von dem verlangten Verhalten gegen die gegebenen Graden) der Scheitel O ausgeschlossen, da jeder andere Kreis K mit dem ursprünglichen den von letzterem ausgeschlossenen Punkt O zum äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt hat, jenachdem nämlich sein Mittelpunkt von dem ursprünglichen Punkte K durch O nicht getrennt oder getrennt ist. Daher haben auch im gegenwärtigen Falle sämtliche Kreise K in zwei durch O gehenden Graden t und t' ein gemeinschaftliches Tangentenpaar, dessen Winkel tt' durch die Ortslinie L halbirt wird.

Im dritten Falle endlich schneide man, wie zuvor, auf dem grösseren Schenkel E'D des entstandenen Winkels CE'D ein Stück E'F' = E'C ab, ziehe die Gerade CF', welche den Schenkel OX in B' schneidet, und durch B' eine Parallele zur Graden E'D, welche dem Schenkel E'C des Winkels CE'D in K begegnet, so ist wiederum die Verbindungslinie OK die gesuchte Ortslinie L.

Denn  $KB' = KC$ , ferner  $\angle KB'O = \angle E'DO = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\angle KCO = \frac{\pi}{2} - \beta$ ; folglich schneidet ein Kreis um den Punkt K mit dem Radius KB' die gegebenen Graden in den Punkten B' und C unter den gegebenen Winkeln. Wie von dem ursprünglichen Kreise K, so ist auch von allen übrigen Kreisen K der Scheitel O eingeschlossen, da jeder andere Kreis K mit dem ursprünglichen in dem, von letzterem eingeschlossenen Punkte O seinen äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt hat.

Zieht man nun durch den Scheitel  $O$  eine Gerade  $L'$ , welche von der gefundenen  $L$  durch die gegebenen Graden harmonisch getrennt ist, so hat man die gesuchte Ortslinie in dem Winkel  $X'OY (= \varphi')$ . Wird daher aus der Graden  $L'$  ein Kreis konstruirt, der die eine Gerade  $p$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet, (indem man an die letztere in einem beliebigen Punkte  $N$  einen Winkel gleich  $\alpha$  anlegt, auf dem angelegten Schenkel in  $N$  ein Loth errichtet, welches der Graden  $L'$  in einem Punkte  $K'$  begegnet, und um  $K'$  mit dem Radius  $K'N$  einen Kreis beschreibt) so schneidet derselbe auch die andere Gerade  $q$  unter dem Winkel  $\beta$ . Jenachdem  $\alpha + \beta + \varphi' <$  oder  $> \pi$ , ist der Scheitel  $O$  von den Kreisen  $K'$  ausgeschlossen oder eingeschlossen. Im ersten Falle haben sämmtliche Kreise  $K'$  in zwei, durch  $O$  gehenden Graden  $T$  und  $T'$  ein gemeinschaftliches Tangentenpaar, dessen Winkel  $TT'$  durch die Ortslinie  $L'$  halbirt wird.

Die Resultate, welche das Verhalten beider Kreisschaaren  $K$  und  $K'$  gegen den Schnittpunkt  $O$  der gegebenen Graden betreffen, lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen. 1. Ist  $\alpha + \beta < \varphi$ , daher gleichzeitig  $\alpha + \beta + \varphi' < \pi$  und  $\alpha + \beta + \varphi < \pi$ , so ist der Punkt  $O$  von sämmtlichen Kreisen beider Schaaren ausgeschlossen. 2. Ist  $\alpha + \beta > \varphi'$ , daher gleichzeitig  $\alpha + \beta + \varphi' > \pi$  und  $\alpha + \beta + \varphi > \pi$ , so ist der Punkt  $O$  von sämmtlichen Kreisen beider Schaaren eingeschlossen. 3. Ist  $\alpha + \beta > \varphi < \varphi'$ , daher gleichzeitig  $\alpha + \beta + \varphi' > \pi$  und  $\alpha + \beta + \varphi < \pi$ , so ist der Punkt  $O$  von sämmtlichen Kreisen  $K$  ausgeschlossen, dagegen von sämmtlichen Kreisen  $K'$  eingeschlossen. 4. Ist  $\alpha + \beta = \varphi'$ , daher gleichzeitig  $\left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta + \varphi' \\ \alpha + \beta + \varphi \end{matrix} \right\} = \pi$  und  $\left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta + \varphi' > \pi \\ \alpha + \beta + \varphi < \pi \end{matrix} \right\}$ , so gehen sämmtliche Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  durch den Punkt  $O$ , während die Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K' \\ K \end{matrix} \right\}$  den Punkt  $O$   $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix} \right\}$  schliessen.

7. Einen Kreis zu konstruiren, der zwei gegebene Grade  $p$  und  $q$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet und durch einen, ausserhalb der Graden gegebenen Punkt  $A$  geht.

Fig. 3. Die Graden  $p$  und  $q$  mögen sich für's Erste in einem Punkte  $O$  (unter dem Winkel  $\varphi$ ) schneiden. Man konstruirt die beiden Ortslinien  $L$  und  $L'$ , auf welchen sich die Mittelpunkte aller Kreise von dem verlangten Verhalten gegen die Graden befinden, lege an die Gerade  $p$  in einem beliebigen Punkte  $b$  den Winkel  $\alpha$  an und errichte auf dem angelegten Schenkel im Punkte  $b$  ein Loth, so wird dasselbe im Allgemeinen beiden Ortslinien  $L$  und  $L'$  in den Punkten  $k$  und  $k'$  begegnen. Aus diesen Schnittpunkten beschreibe man Kreise mit den Radien  $kb$  und  $k'b$ , so werden beide Kreise die Gerade  $p$  unter dem Winkel  $\alpha$ , daher auch die Gerade  $q$  unter dem Winkel  $\beta$  schneiden. Liegt der gegebene Punkt  $A$  nicht auf einer der beiden Ortslinien, und wird dessen Verbindungslinie mit dem Punkte  $O$  von dem Kreise  $\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}$  in den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} a \text{ und } a' \\ a' \text{ und } a \end{matrix} \right\}$  geschnitten, so ziehe man durch  $A$  zu den Radien  $\left\{ \begin{matrix} ak \text{ und } ak' \\ a'k' \text{ und } a'k \end{matrix} \right\}$  die Parallelen  $\left\{ \begin{matrix} \Delta K \text{ und } \Delta K' \\ \Delta K' \text{ und } \Delta K \end{matrix} \right\}$ , welche der Ortslinie  $\left\{ \begin{matrix} L \\ L' \end{matrix} \right\}$  in den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} K \text{ und } K' \\ K' \text{ und } K \end{matrix} \right\}$  begegnen, und beschreibe um diese Punkte mit den Radien  $\left\{ \begin{matrix} KA \text{ und } K'A \\ K'A \text{ und } K'A \end{matrix} \right\}$  Kreise, so erfüllen dieselben die gestellten Bedingungen. Denn aus der

Konstruktion folgt zunächst, dass die Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} k \text{ und } K \text{ oder } \mathfrak{K} \\ k' \text{ und } K' \text{ oder } \mathfrak{K}' \end{array} \right\}$  die Verbindungslinie  $OA$  unter gleichen Winkeln schneiden. Folglich ist die letztere ein (äusserer oder innerer) Aehnlichkeitsstrahl jener Kreispaares, ein solcher daher auch jede der gegebenen Graden. Mithin werden dieselben von dem Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} K \text{ oder } \mathfrak{K} \\ K' \text{ oder } \mathfrak{K}' \end{array} \right\}$  unter denselben Winkeln, wie von dem Hilfskreise  $\left\{ \begin{array}{l} k \\ k' \end{array} \right\}$ , geschnitten.

Ist  $\alpha + \beta > \varphi'$ , so werden beide Hilfskreise  $k$  und  $k'$  jederzeit von der Graden  $OA$  geschnitten (6), und die Aufgabe hat bei jeder Lage des gegebenen Punktes alle vier Lösungen. Ist  $\alpha + \beta = \varphi'$ , so hat die Aufgabe stets drei Lösungen. Man erhält nämlich beide Kreise  $K'$ , aber nur einen Kreis  $K$ , letzteren dadurch, dass man auf der Ortslinie  $L$  einen Punkt  $K$  von der Beschaffenheit sucht, dass  $KA = KO$  wird.

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn  $\alpha + \beta = \varphi$  ist, nur einen Kreis  $K'$ , die Kreise  $K$  dagegen nur dann, wenn der Punkt  $A$  von dem Winkel  $tt'$  der, aus  $O$  an den Hilfskreis  $k$  gelegten Tangenten (6) eingeschlossen ist.

Ist  $\alpha + \beta > \varphi < \varphi'$ , so erhält man stets beide Kreise  $K'$ , die Kreise  $K$  wiederum nur dann, wenn der Punkt  $A$  in dem Winkel  $tt'$  liegt. Ist endlich  $\alpha + \beta < \varphi$ , so erhält man die Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$ , wenn Punkt  $A$  in dem Winkel  $\left\{ \begin{array}{l} tt' \\ TT' \end{array} \right\}$  liegt, wobei  $T$  und  $T'$  die beiden, aus  $O$  an den Hilfskreis gelegten Tangenten vorstellen.

Die angegebene Konstruktion hat keine Anwendung auf den Fall, wo der Punkt  $A$  auf einer der beiden Ortslinien, z. B. auf der Graden  $L$ , liegt. Man findet nunmehr beide Kreise  $K$  auf folgende Weise. Man halbire den Winkel  $Okb$  und seinen Nebenwinkel durch die Graden  $kd$  und  $kb$ , ziehe durch  $A$  zu beiden Halbierungslinien die Parallelen  $AD$  und  $A\mathfrak{D}$  und durch deren Schnittpunkte  $D$  und  $\mathfrak{D}$  mit der Graden  $p$  wiederum die Parallelen  $DK$  und  $\mathfrak{D}\mathfrak{K}$  zu dem Radius  $kb$ , welche der Ortslinie  $L$  in den Punkten  $K$  und  $\mathfrak{K}$  begegnen. Dann ist  $\angle dkO = \angle DAK$ ,  $\angle dkb = \angle ADK$ ; folglich  $\angle DAK = \angle ADK$ , also  $KA = KD$ . Desgleichen ist  $\angle \mathfrak{K}A\mathfrak{D} = \angle Akb$ ,  $\angle \mathfrak{K}\mathfrak{D}A = \angle bkb$ ; folglich  $\angle \mathfrak{K}A\mathfrak{D} = \angle \mathfrak{K}\mathfrak{D}A$ , also  $\mathfrak{K}A = \mathfrak{K}\mathfrak{D}$ . Daher sind die beiden, um die Punkte  $K$  und  $\mathfrak{K}$  mit den Radien  $KD$  und  $\mathfrak{K}\mathfrak{D}$  beschriebenen Kreise die gesuchten Kreise  $K$ .

Sind die Graden  $p$  und  $q$  parallel, so erleidet die Konstruktion keine Aenderung. Die beiden Ortslinien  $L$  und  $L'$  bilden diesmal mit den gegebenen Graden einen harmonischen Parallelstrahlbüschel, an die Stelle der Verbindungslinie  $OA$  tritt eine Parallele zu den gegebenen Graden durch den Punkt  $A$ , und die Winkel  $tt'$  und  $TT'$  verwandeln sich in zwei Parallelstreifen, von denen der letztere den ersteren einschliesst, da der Hilfskreis  $k'$  den Hilfskreis  $k$  im Punkte  $b$  einschliessend berührt. Daher lässt die Aufgabe im gegenwärtigen Falle  $\left\{ \begin{array}{l} jede \\ keine \end{array} \right\}$  der oben gelegten vier Lösungen zu, wenn der Punkt  $A$   $\left\{ \begin{array}{l} innerhalb \\ ausserhalb \end{array} \right\}$  des Parallelstreifens  $\left\{ \begin{array}{l} tt' \\ TT' \end{array} \right\}$  liegt. Ist  $\angle \alpha = \beta$ , so geht die eine Ortslinie  $L$  in die Mittellinie des Parallelstreifens  $pq$ , die andere,  $L'$ , in die unendlich ferne Grade über, und die gesuchten Kreise  $K$  verwandeln sich in zwei Grade durch den Punkt  $A$ , welche die gegebenen Graden unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden.

Fig. 4.

8. Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Grade  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , die aber nicht durch denselben Punkt gehen, bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  schneidet.

Die gegebenen Graden, welche sich in den drei Punkten  $ab$  oder  $C$ ,  $ac$  oder  $B$ ,  $bc$  oder  $A$  schneiden, theilen die Ebene in die vier Dreiecke  $ABC$ ,  $AB \cdot C$ ,  $AC \cdot B$  und  $BC \cdot A$ , wobei jedes der drei letzteren, z. B. das Dreieck  $BC \cdot A$ , von einer endlichen Strecke ( $BC$ ) und von zwei, durch das Unendliche gehenden Strecken ( $B \cdot A$  und  $C \cdot A$ ) begrenzt ist. Verstehen wir unter dem Zeichen  $L(\alpha, \beta)$  den Ort des Mittelpunktes aller Kreise, von welchen zwei gegebene Grade unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  geschnitten werden, so giebt es durch den Schnittpunkt

$\left. \begin{matrix} C \\ B \\ A \end{matrix} \right\}$  die beiden Ortslinien  $\left\{ \begin{matrix} L(\alpha, \beta) \text{ und } L'(\alpha, \beta) \\ L(\alpha, \gamma) \text{ und } L'(\alpha, \gamma) \\ L(\beta, \gamma) \text{ und } L'(\beta, \gamma) \end{matrix} \right\}$ , unter welchen die erstere von dem Dreiecke  $ABC$

und von dem Dreieck  $\left\{ \begin{matrix} AB \cdot C \\ AC \cdot B \\ BC \cdot A \end{matrix} \right\}$  eingeschlossen, die letztere von beiden Dreiecken ausgeschlossen ist.

Jeder Punkt, in welchem sich irgend zwei dieser Ortslinien, die nicht durch dieselbe Winkelspitze des Dreiecks  $ABC$  gehen, begegnen, ist der Mittelpunkt eines Kreises von der verlangten Beschaffenheit. Denn beschreibt man z. B. um den Punkt  $K_1$ , in welchem sich die Graden  $L(\alpha, \beta)$  und  $L(\alpha, \gamma)$  begegnen, einen Kreis, der die Grade  $a$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet, so wird derselbe, als ein Kreis aus der Ortslinie  $L(\alpha, \beta)$ , auch die Grade  $b$  unter dem Winkel  $\beta$ , und als ein Kreis aus der Ortslinie  $L(\alpha, \gamma)$ , auch die Grade  $c$  unter dem Winkel  $\gamma$  schneiden. Zugleich ergibt sich hieraus, dass auch die Ortslinie  $L(\beta, \gamma)$  den beiden vorigen im Punkte  $K_1$ , und daher auch den Ortslinien  $L'(\alpha, \beta)$  und  $L'(\alpha, \gamma)$  in demselben Punkte  $K_2$  begegnet, da der Schnittpunkt der ersteren mit einer jeden von diesen vom Punkte  $K_1$  durch  $a$  und  $A$  harmonisch getrennt ist. Der Punkt  $K_1$  ist vom Dreieck  $ABC$ , der Punkt  $K_2$  ist, wie die Grade  $L(\beta, \gamma)$ , vom Dreieck  $BC \cdot A$  eingeschlossen. Ähnliches gilt daher auch von den Ortslinien  $L(\alpha, \beta)$  und  $L(\alpha, \gamma)$ ; nämlich die

Graden  $\left\{ \begin{matrix} L(\alpha, \beta) \\ L(\alpha, \gamma) \end{matrix} \right\}$  begegnet den Graden  $\left\{ \begin{matrix} L(\alpha, \gamma) \text{ und } L(\beta, \gamma) \\ L(\alpha, \beta) \text{ und } L(\beta, \gamma) \end{matrix} \right\}$  in dem Punkte  $K_1$ , dagegen den Graden  $\left\{ \begin{matrix} L'(\alpha, \gamma) \text{ und } L'(\beta, \gamma) \\ L'(\alpha, \beta) \text{ und } L'(\beta, \gamma) \end{matrix} \right\}$  in einem, vom Dreieck  $\left\{ \begin{matrix} AB \cdot C \\ AC \cdot B \end{matrix} \right\}$  eingeschlossenen Punkte  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\}$ . Es

giebt demnach vier Kreise, welche der Aufgabe Genüge leisten. Jedes der vier Dreiecke, in welche die Ebene durch die drei gegebenen Graden getheilt wird, enthält den Mittelpunkt eines derselben. Die vier Mittelpunkte bilden ein vollständiges Viereck, dessen sechs Seiten die drei Paare  $L$  und  $L'$  sind. Befinden sich unter den gegebenen Graden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  zwei parallele Grade, so sind auch zwei Seiten jenes Vierecks den letzteren parallel.

9. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Grade  $p$  und  $q$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet und einen gegebenen Kreis  $M$  berührt.

Diese Aufgabe lässt sich in ähnlicher Weise, wie das entsprechende Berührungsproblem Fig. 5. behandeln und auf die im § 7 gelöste Aufgabe zurückführen. Ist nämlich  $R$  der Radius des Kreises  $M$ , so zieht man zunächst ausserhalb des Winkels, in welchem der Mittelpunkt  $M$  liegt, zur Grade  $p$  eine Parallele  $p'$ , welche von  $p$  um das Stück  $R \cos \alpha$  entfernt ist, also dergestalt,

dass eine, zwischen beiden Parallelen liegende und mit beiden das Komplement des Winkels  $\alpha$  bildende Strecke die Länge  $R$  hat, desgleichen eine Parallele  $q'$  zur Graden  $q$ , welche von der letztern um das Stück  $R \cos \beta$  entfernt ist, und man hat nunmehr einen Kreis zu konstruieren, der die Graden  $p'$  und  $q'$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet und durch den Punkt  $M$  geht. Es giebt (7) im Allgemeinen vier derartige Kreise. Der Kreis  $K$  sei einer derselben und schneide die Grade  $\left\{ \begin{smallmatrix} p' \\ q' \end{smallmatrix} \right\}$  in den Punkten  $\left\{ \begin{smallmatrix} b \text{ und } b' \\ c \text{ und } c' \end{smallmatrix} \right\}$ . Zieht man den Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} Kb \\ Kc \end{smallmatrix} \right\}$ , so schneidet derselbe die Parallelen  $\left\{ \begin{smallmatrix} p \text{ und } p' \\ q \text{ und } q' \end{smallmatrix} \right\}$  in den Punkten  $\left\{ \begin{smallmatrix} B \text{ und } b \\ C \text{ und } c \end{smallmatrix} \right\}$  unter dem Komplement des Winkels  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ ; daher ist die Strecke  $\left\{ \begin{smallmatrix} Bb \\ Cc \end{smallmatrix} \right\}$  gleich  $R$ , folglich  $KB = KC$  und  $KM = KB + R$ . Beschreibt man daher um den Punkt  $K$  mit dem Radius  $KB$  einen Kreis, so wird dieser die Graden  $p$  und  $q$  in den Punkten  $B$  und  $C$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneiden und den Kreis  $M$  ausschliessend berühren. Jedem der vier Kreise  $K$  entspricht demnach ein, den Kreis  $M$  von aussen berührender Kreis.

Zieht man aber zweitens innerhalb des Winkels, in welchem der Mittelpunkt  $M$  liegt zu den Graden  $p$  und  $q$ , unter denselben Bedingungen, wie zuvor, die Parallelen  $p''$  und  $q''$ , so hat man jetzt einen Kreis zu beschreiben, der die Graden  $p''$  und  $q''$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet und durch den Punkt  $M$  geht. Es giebt im Allgemeinen abermals vier derartige Kreise. Der Kreis  $K'$  sei einer derselben und schneide die Grade  $\left\{ \begin{smallmatrix} p'' \\ q'' \end{smallmatrix} \right\}$  in den Punkten  $\left\{ \begin{smallmatrix} b' \text{ und } b'' \\ c' \text{ und } c'' \end{smallmatrix} \right\}$ . Zieht man den Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} K'b' \\ K'c' \end{smallmatrix} \right\}$  und verlängert ihn, bis er der Graden  $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right\}$  im Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} B' \\ C' \end{smallmatrix} \right\}$  begegnet, so schneidet derselbe die Parallelen  $\left\{ \begin{smallmatrix} p \text{ und } p'' \\ q \text{ und } q'' \end{smallmatrix} \right\}$  unter dem Komplement des Winkels  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ ; daher ist die Strecke  $\left\{ \begin{smallmatrix} b'B' \\ c'C' \end{smallmatrix} \right\}$  gleich  $R$ , folglich  $K'B' = K'C'$ ,  $K'M = K'B' - R$ . Beschreibt man daher um den Punkt  $K'$  mit dem Radius  $K'B'$  einen Kreis, so schneidet derselbe die Graden  $p$  und  $q$  in den Punkten  $B'$  und  $C'$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  und berührt den Kreis  $M$  einschliessend. Jedem der vier Kreise  $K'$  entspricht demnach ein, den Kreis  $M$  von innen berührender Kreis, und die Aufgabe hat folglich im Allgemeinen acht Lösungen.

### III. Vom schiefen Schnitt eines Kreises durch einen Kreis.

10. Hilfsaufgabe. Aus einer gegebenen Graden  $L$  einen Kreis zu konstruieren, der von zwei gegebenen Kreisen  $M$  und  $m$  den einen ( $M$ ) orthogonal schneidet und den andern ( $m$ ) berührt.

Ist die Grade  $L$  von dem Kreise  $M$  ausgeschlossen, so gehen bekanntlich sämtliche Orthogonalkreise des Kreises  $M$ , deren Mittelpunkte auf der Graden  $L$  liegen, durch zwei konstante Punkte des, aus dem Centrum  $M$  auf die Grade  $L$  gefällten Perpendikels  $MO$ , nämlich durch diejenigen beiden Punkte  $P$  und  $Q$ , in welchen derselbe und seine Verlängerung über  $O$  von einem, aus  $O$  beschriebenen Orthogonalkreise des Kreises  $M$  geschnitten wird. Denn jeder Kreis aus

einem beliebigen Punkte  $O'$  der Graden  $L$  mit dem Radius  $O'P = O'Q$  hat jenen Perpendikel zur Chordale mit dem Kreise  $O$  und wird daher, so wie der letztere, vom Kreise  $M$  orthogonal geschnitten. Die vorliegende Aufgabe reducirt sich daher im gegenwärtigen Falle auf die, durch zwei Punkte  $P$  und  $Q$  einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 6. Schneidet die Grade  $L$  den Kreis  $M$  in den Punkten  $B$  und  $B'$ , so sei  $K$  der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Da der Punkt  $K$  auf der Graden  $L$  liegt, und Kreis  $K$  den Kreis  $M$  orthogonal schneidet, so verhält sich ersterer ebenso gegen jeden andern Kreis, der durch die Schnittpunkte  $B$  und  $B'$  der Graden  $L$  geht, diese Grade also mit dem Kreise  $M$  zur Chordale hat. Daher ist auch umgekehrt jeder Kreis durch die Punkte  $B$  und  $B'$  ein Orthogonalkreis des gesuchten Kreises  $K$ . Geht demnach ein solcher zugleich durch den Punkt  $b$ , in welchem Kreis  $K$  den Kreis  $m$  berührt, und der in Folge dessen auf der Centrale  $Km$  liegt, so hat jener Orthogonalkreis im Punkte  $b$  die Grade  $Kbm$  zur Tangente und schneidet daher in diesem Punkte auch den Kreis  $m$  orthogonal, wodurch sowohl er selbst, als auch die Punkte  $b$  und  $K$  bestimmt sind.

Konstruktion. Man lege durch die Schnittpunkte  $B$  und  $B'$  der Graden  $L$  mit dem Kreise  $M$  einen Kreis, der den Kreis  $m$  orthogonal schneidet, der also den Chordalpunkt  $O$  für den Kreis  $m$  und die Punkte  $B$  und  $B'$  zu seinem Mittelpunkt und die Verbindungslinie  $OB$  zu seinem Radius hat. Sind  $b$  und  $b'$  die Schnittpunkte des Hilfskreises  $O$  mit dem Kreise  $m$ , so ziehe man die Radien  $mb$  und  $mb'$  und verlängere dieselben, bis sie die Grade  $L$  in den Punkten  $K$  und  $K'$  schneiden. Beschreibt man nun einen Kreis um den Punkt  $K$  mit dem Radius  $Kb$ , einen zweiten um den Punkt  $K'$  mit dem Radius  $K'b'$ , so erfüllen beide Kreise die gestellten Bedingungen. Denn erstens berühren beide den Kreis  $m$ . Da ferner die Graden  $Kbm$  und  $K'b'm'$  in den Punkten  $b$  und  $b'$  Tangenten an den Kreis  $O$  sind, der den Kreis  $m$  in eben diesen Punkten orthogonal schneidet, so begegnet derselbe im Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} b \\ b' \end{smallmatrix} \right\}$  auch dem Kreise  $\left\{ \begin{smallmatrix} K \\ K' \end{smallmatrix} \right\}$  unter einem rechten Winkel, so dass zweitens die Kreise  $K$  und  $K'$ , deren Mittelpunkte auf der Chordale der Kreise  $O$  und  $M$  liegen, wie zu dem ersteren ( $O$ ), so auch zu dem letzteren ( $M$ ) Orthogonalkreise sind.

11. Einen Kreis zu konstruiren, der durch zwei gegebene Punkte  $N$  und  $N'$  geht und einen gegebenen Kreis  $M$  unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$  schneidet.

Fig. 7.  $K$  sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises,  $B$  der eine Schnittpunkt desselben mit dem gegebenen Kreise  $M$ . Zieht man den Radius  $KB$ , der entweder unmittelbar oder bei gehöriger Verlängerung den Kreis  $M$  in einem zweiten Punkte  $b$  schneidet, so ist  $Bb$  die Bestimmungssehne  $2S_\alpha$  (3), daher (ihrer Länge nach) bekannt, desgleichen auch der, mit dem gegebenen Kreise concentrische Bestimmungskreis ( $\alpha$ ). Dieser berührt die Sehne  $Bb$  in einem Punkte  $E$ . Beschreibt man daher um den Punkt  $K$  mit dem Halbmesser  $KE$  einen Kreis, so schneidet derselbe den Bestimmungskreis  $M$  orthogonal und lässt zugleich auf dem Radius  $KN$  des gesuchten Kreises, welchem Radius er im Punkte  $F$  begegnet, ein Stück  $FN$  übrig, welches der halben Bestimmungssehne  $BE$  oder  $S_\alpha$  gleich ist, da  $KN - KF = KB - KE$ . Ein um den Punkt  $N$  mit dem Radius  $NF$  beschriebener Kreis, der den Orthogonalkreis  $K$  in  $F$  berührt, ist daher bekannt. Da nun der Punkt  $K$  auf einer Graden  $L$  liegt, durch welche die Verbindungslinie  $NN'$  der gegebenen Punkte senkrecht halbirt wird, und zugleich der Mittelpunkt eines Kreises ist, der den Bestimmungskreis

kreis orthogonal schneidet und den Kreis N berührt, so ist die gegenwärtige Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Konstruktion. Man errichte im Mittelpunkte H der Graden NN' auf derselben ein Loth L, beschreibe um den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises den Bestimmungskreis ( $\alpha$ ) und um den Punkt N einen Kreis mit der halben Bestimmungsschne Sa. Hierauf konstruiere man aus der Graden L einen Kreis, der den Bestimmungskreis orthogonal schneidet und den Hilfskreis N berührt. Es giebt zwei derartige Kreise mit den Mittelpunkten K und K'; Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K \\ K' \end{smallmatrix} \right\}$  berühre den Kreis N im Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} F \\ F' \end{smallmatrix} \right\}$ , und der eine von seinen Schnittpunkten mit dem Bestimmungskreise sei  $\left\{ \begin{smallmatrix} E \\ E' \end{smallmatrix} \right\}$ . Nun beschreibe man um die Punkte K und K' Kreise mit den Radien KN und K'N, so genügen beide Kreise den gestellten Anforderungen. Denn zieht man aus dem Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} K \\ K' \end{smallmatrix} \right\}$  die Tangente  $\left\{ \begin{smallmatrix} KE \\ K'E' \end{smallmatrix} \right\}$  an den Bestimmungskreis und verlängert dieselbe, so dass sie den gegebenen Kreis in den Punkten  $\left\{ \begin{smallmatrix} B \text{ und } b \\ B' \text{ und } b' \end{smallmatrix} \right\}$  schneidet, so ist das Stück  $\left\{ \begin{smallmatrix} BE \\ B'E' \end{smallmatrix} \right\}$  die halbe Bestimmungsschne Sa. Folglich ist

$$\begin{aligned} BE &= NF, & KF \pm NF &= KE \pm BE, & KN &= KB, \\ B'E' &= NF', & K'F' \pm NF' &= K'E' \pm B'E', & K'N &= K'B', \end{aligned}$$

wobei das Zeichen  $\left\{ \pm \right\}$  gilt, wenn der Berührungskreis K oder K' den Hilfskreis N  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{von aussen} \\ \text{von innen} \end{smallmatrix} \right\}$  berührt. Daher geht der, um den Punkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} K \\ K' \end{smallmatrix} \right\}$  mit dem Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} KN \\ K'N \end{smallmatrix} \right\}$  beschriebene Kreis durch die Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} B, N, N' \\ B', N, N' \end{smallmatrix} \right\}$  und schneidet den gegebenen Kreis unter dem gegebenen Winkel, da die Bestimmungsschne  $\left\{ \begin{smallmatrix} Bb \\ B'b' \end{smallmatrix} \right\}$  dem Schnittwinkel  $\alpha$  entspricht.

Anmerkung. Wir verstehen unter den Punkten k, k' und C die Mittelpunkte dreier, durch die Punkte N und N' gehenden Kreise, von denen die beiden ersten den gegebenen Kreis berühren, der dritte denselben in T orthogonal schneidet. Dasjenige Stück der Ortslinie L, welches die Mittelpunkte aller Kreise enthält, die durch die Punkte N und N' gehen und den gegebenen Kreis unter irgend einem Winkel zwischen den Grenzen 0 und  $\pi$  schneiden, nennen wir die fruchtbare Strecke. Je nach der Lage der Punkte N und N' stellen sich nun folgende Eigenthümlichkeiten heraus:

I. Die Punkte N und N' liegen auf einer von dem gegebenen Kreise ausgeschlossenen Graden.

Von den beiden Berührungskreisen k und k' berührt der eine (k) den Kreis M einschliessend, der andere (k') ausschliessend. Die endliche Strecke kk' stellt die fruchtbare Strecke dar. Während  $\angle \alpha$  von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  wächst, also  $\angle \alpha'$  von  $\pi$  bis  $\frac{\pi}{2}$  abnimmt, rücken die Mittelpunkte K und K' der beiden, unter dem Winkel  $\alpha$  schneidenden Kreise aus den Grenzpunkten k und k' einander entgegen, bis sie in C zusammenstreffen, wobei auch die Schnittpunkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} B \text{ und } b \\ B' \text{ und } b' \end{smallmatrix} \right\}$  in T zusammenfallen, während also bis dahin der zweite Schnittpunkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} b \\ b' \end{smallmatrix} \right\}$  des Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} KB \\ K'B' \end{smallmatrix} \right\}$  sich stets  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{innerhalb} \\ \text{ausserhalb} \end{smallmatrix} \right\}$  der Strecke  $\left\{ \begin{smallmatrix} KB \\ K'B' \end{smallmatrix} \right\}$  befand. Hieraus folgt, dass von je zwei konjugirten Kreisen K und K' der erstere unter dem spitzen Winkel  $\alpha$ , der letztere unter

dem stumpfen Winkel  $\alpha'$  (also antidrom unter dem Winkel  $\alpha$ ) schneidet, ferner dass, weil der Radius  $\left\{ \begin{matrix} KR \\ K'B \end{matrix} \right\}$  stets  $\left\{ \begin{matrix} \text{grösser} \\ \text{kleiner} \end{matrix} \right\}$  ist als  $\left\{ \begin{matrix} KE \\ K'E' \end{matrix} \right\}$ , der Berührungskreis  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  den Hilfskreis N  $\left\{ \begin{matrix} \text{ausschliessend} \\ \text{einschliessend} \end{matrix} \right\}$  berührt.

II. Die Punkte N und N' liegen auf einer Geraden, welche den gegebenen Kreis in den Punkten n und n' unter dem Winkel  $x$  schneidet; jedoch so, dass von den beiden Strecken NN' und nn' entweder die eine von der andern ganz eingeschlossen oder beide von einander ausgeschlossen sind. Beide Kreise k und k' berühren den Kreis M im  $\left\{ \begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{matrix} \right\}$  Falle  $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix} \right\}$  schliessend. Die durch das Unendliche gehende Strecke k.k' stellt die fruchtbare Strecke dar. Während im  $\left\{ \begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{matrix} \right\}$  Falle  $\left\{ \begin{matrix} \angle \alpha \\ \angle \alpha' \end{matrix} \right\}$  zunächst von  $\left\{ \begin{matrix} 0 \text{ in } x \\ \pi \text{ in } x' \end{matrix} \right\}$  übergeht, rücken die Mittelpunkte K und K' der konjugirten Kreise von einander hinweg, und zwar K' nach dem Punkte C hin. Wird  $\left\{ \begin{matrix} \alpha = x \\ \alpha' = x' \end{matrix} \right\}$ , so geht der Kreis K in die Gerade NN' über und sein Mittelpunkt in den unendlich fernen Punkt der Ortslinie L, während K' einen Punkt X zwischen k' und C erreicht. Bis dahin schneiden beide Kreise K und K' stets unter einem  $\left\{ \begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix} \right\}$  Winkel, an der Grenze selbst beide unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} \right\}$ . Beide Berührungskreise K und K' berühren daher bis jetzt den Hilfskreis N  $\left\{ \begin{matrix} \text{aus} \\ \text{ein} \end{matrix} \right\}$  schliessend. Geht aber  $\left\{ \begin{matrix} \angle \alpha \\ \angle \alpha' \end{matrix} \right\}$  von  $\left\{ \begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} \right\}$  in  $\frac{\pi}{2}$  über, so kehrt Punkt K auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurück und trifft schliesslich in C mit dem Punkte K' zusammen, der gleichzeitig die Strecke XC durchlaufen hat. Im Anfange dieser Bewegung schneidet Kreis K unter dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{stumpfen Winkel } x' \\ \text{spitzen Winkel } x \end{matrix} \right\}$  und fährt bis zur Grenze fort, unter einem  $\left\{ \begin{matrix} \text{stumpfen} \\ \text{spitzen} \end{matrix} \right\}$  Winkel zu schneiden, während der Schnittwinkel des Kreises K' stets das  $\left\{ \begin{matrix} \text{spitz} \\ \text{stumpf} \end{matrix} \right\}$  winklige Supplement zu jenem bildet. Daher berührt, während dieser Bewegung der Punkte K und K', der Berührungskreis K den Hilfskreis N  $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix} \right\}$  schliessend, der Berührungskreis K'  $\left\{ \begin{matrix} \text{aus} \\ \text{ein} \end{matrix} \right\}$  schliessend und der  $\left\{ \begin{matrix} \text{stumpfe} \\ \text{spitze} \end{matrix} \right\}$  Schnittwinkel  $\left\{ \begin{matrix} x' \\ x \end{matrix} \right\}$  der Geraden NN' ist das  $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$  des Winkels  $\alpha$ .

III. Von den Punkten N und N' liegt der erstere ausserhalb, der letztere innerhalb des gegebenen Kreises, wobei die Gerade NN' den Kreis unter dem Winkel  $x$  schneidet. An die Stelle der beiden Berührungskreise k und k' tritt ein Kreis k, der den gegebenen unter dem kleinstmöglichen Winkel  $\mu$  schneidet. Jeder Punkt der Ortslinie L ist jetzt ein Punkt K oder K'. Wächst  $\angle a$  von  $\mu$  bis  $x$ , so bewegen sich die Mittelpunkte K und K' zweier konjugirten Kreise aus k nach entgegengesetzten Richtungen, an der Grenze selbst geht der Kreis K in die Gerade NN', der Punkt K in den unendlich fernen Punkt der Ortslinie L über, während K' einen Punkt X zwischen k und C erreicht. Bis dahin schneiden beide Kreise, K und K', stets unter einem spitzen Winkel, und die Berührungskreise K und K' berühren beide den Hilfskreis N einschliessend. Während  $\angle \alpha$  von  $x$  bis  $\frac{\pi}{2}$  wächst, kehrt der Punkt K auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen zurück und trifft schliesslich in C mit dem Punkte K' zusammen, der gleichzeitig die Strecke XC durchlaufen hat. Auch während dieser Bewegung fährt Kreis K' fort, unter einem spitzen Winkel zu schneiden, indess der Schnittwinkel des Kreises K stets das Supplement zu jenem bildet. Daher berührt auch von den beiden Berührungskreisen K und K' der erstere den Hilfskreis N einschliessend, der letztere ausschliessend. Aus dem gegenwärtigen Falle erwächst uns die Aufgabe, den Grenzkreis k zu konstruiren, zu deren Lösung wir nun sogleich übergehen.

12. Um den Punkt M ist ein Kreis mit dem Radius R beschrieben; ferner sind zwei Punkte N und N' gegeben, von denen der erstere ausserhalb, der letztere innerhalb des Kreises liegt. Es soll ein Kreis konstruirt werden, der durch die Punkte N und N' geht und den gegebenen Kreis unter dem kleinstmöglichen Winkel schneidet.

Der gesuchte Kreis K hat zum Kennzeichen, dass sich in ihm zwei konjugirte Kreise K u. K', also auch zwei Berührungskreise K und K' des Hilfskreises N vereinigen. Hieraus ersieht man, dass nicht etwa die Grade NN' den Kreis repräsentirt, der unter dem kleinstmöglichen Winkel schneidet; denn es giebt ausser derselben stets noch einen zweiten (eigentlichen) Kreis, der durch die Punkte N und N' geht und den Kreis M unter demselben Winkel schneidet. Wenn nun für's Erste die Ortslinie L des gesuchten Punktes K, welche senkrecht durch den Mittelpunkt H der Verbindungslinie NN' geht, dem gegebenen Kreise in den Punkten T und T' begegnet, so kann dieselbe doch nicht auch den Bestimmungskreis, der dem kleinsten Schnittwinkel  $\mu$  entspricht, schneiden, weil sonst die beiden Berührungskreise K und K', welche zugleich den Bestimmungskreis ( $\mu$ ) orthogonal schneiden, stets durch das Loth MD aus dem Mittelpunkte M auf die Grade L getrennt sein würden oder höchstens in diesem Loth sich vereinigen könnten, wobei der Punkt K in's Unendliche fielen, was, wie wir gesehen haben, nicht der Fall sein kann. Daher gehen die konjugirten Berührungskreise K u. K' des, um den Punkt N mit der halben Bestimmungsehne  $S_\mu$  beschriebenen Hilfskreises durch zwei Punkte F u. F' jenes beliebig zu verlängernden Lothes MD, und sie fallen nur dann in einen Kreis K zusammen, wenn der eine jener beiden Punkte, nämlich F, in der Peripherie des Kreises N liegt. Ziehen wir durch diesen Punkt F eine Parallele zur Grade L, welche der Verbindungslinie NN' im Punkte G und dann einem, um diese Grade NN' als Durchmesser beschriebenen Kreise in X begegnet, so ist  $NX^2 = NG \cdot NN' = 2NG \cdot NH$ . Da der Radius des Bestimmungskreises den Werth  $\sqrt{R^2 - S^2}$  hat, da ferner das Stück  $GH = FD$  der Tangente aus dem Punkte D an den Bestimmungskreis gleich ist, so findet man  $GH^2 = MD^2 - R^2 + S^2 = MD^2 - R^2 + FN^2 = MD^2 - R^2 + GN^2 + DH^2$ ; zugleich ist  $GH^2 = (NH - NG)^2$ . Folglich erhalten wir die Gleichung  $NH^2 - 2NG \cdot NH = MD^2 - R^2 + DH^2$ ,  
also  $NH^2 + (R^2 - MD^2) - DH^2 = 2NG \cdot NH$ ,  
 $NH^2 + DT^2 - DH^2 = NX^2$ . (A).

Beschreiben wir um die Sehne TT' als Durchmesser einen Kreis, der die Grade NH in einem Punkte t schneidet, so ist  $DT^2 - DH^2 = Dt^2 - DH^2 = tH^2$ . Folglich erhalten wir  $NX^2 = NH^2 + tH^2$ . Daher ist der Punkt X bekannt, folglich auch die Punkte F und K.

Konstruktion. Man fälle aus dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises auf die Ortslinie L ein Loth MD, beschreibe um den Mittelpunkt D des innerhalb des Kreises M liegenden Stückes T'T' der Ortslinie mit dem Radius DT einen Kreis, welcher der Verbindungslinie NN' der gegebenen Punkte in t begegnet, und schneide von dem Fusspunkt H der Ortslinie aus auf derselben ein Stück  $HX = Ht$  ab, so dass die Verbindungslinie  $NX = \sqrt{NH^2 + Ht^2}$  wird. Hierauf beschreibe man um den Punkt H einen Kreis mit dem Radius HN und um den Punkt N einen Kreis mit dem Radius NX, welcher dem ersteren in einem Punkte X begegnet, ziehe durch denselben eine Parallele zur Ortslinie L, welche die Grade NN' in G und das Loth MD oder dessen Verlängerung in F schneidet, und verbinde N mit F, so ist der Punkt K, in welchem die Grade NF

Fig. 8.

der Ortslinie L begegnet, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Denn betrachtet man die Grade NF als die halbe Bestimmungsehne für einen Schnittwinkel  $\mu$ , konstruiert um den Mittelpunkt M den Bestimmungskreis ( $\mu$ ) mit dem Radius  $\sqrt{R^2 - NF^2}$ , beschreibt ferner um N einen Kreis mit dem Radius NF, desgleichen um K mit dem Radius KF, welcher den Kreis N in F berührt und das Loth MD in einem zweiten Punkte F' schneiden wird, so muss der letztere Kr. K, was sich durch die umgekehrten Schlüsse, wie in der Analysis, beweisen lässt, auch den Bestimmungskreis M orthogonal schneiden. Stellt man sich nun die Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der durch die Punkte N und N' geht und den gegebenen Kreis M unter dem Winkel  $\mu$  schneidet, so würden (11) die, zur Konstruktion erforderlichen beiden Berührungskreise K und K' in den vorgenannten Berührungskreis K zusammenfallen, wodurch sich der Schnittwinkel  $\mu$  als den kleinstmöglichen kennzeichnet.

Schneidet aber die Ortslinie L den gegebenen Kreis nicht, so gelten die Schlüsse der Analysis nur bis zur Gleichung (A). Verstehen wir in derselben unter der Graden DT die Tangente aus dem Punkte D an den gegebenen Kreis, welche gleich  $\sqrt{MD^2 - R^2}$  ist, so geht die Gleichung (A) nunmehr in folgende über:  $NH^2 - (DT^2 + DH^2) = NX^2$ .

Beschreibt man um D einen Kreis mit dem Radius DT, der diesmal die Grade MD in einem Punkte t schneidet, so ist die Verbindungslinie tH =  $\sqrt{DT^2 + DH^2}$ , und man erhält  $NH^2 - tH^2 = NX^2$ , wonach die Grade NX gefunden wird, wenn man um den Punkt H mit dem Radius Ht einen Kreis beschreibt und aus dem Punkte N an denselben eine Tangente NX' anlegt. Ist aber der Radius Ht grösser als NH, so dass der, mit demselben um H beschriebene Kreis den Punkt N umfasst, so tritt an die Stelle der Tangente NX' die halbe kleinste Sehne NX' durch den Punkt N. Dann aber ist  $NX^2 = -NX'^2$ , also auch  $2NG \cdot NH = -NX'^2$ . Beschreibt man daher um den Punkt N mit dem Radius NX' einen Kreis und fällt aus dem Schnittpunkt desselben mit dem, um die Grade NN' beschriebenen Kreise ein Loth auf die Grade NN', welche von demselben in G' getroffen wird, so findet man den Punkt G, wenn man ein Stück  $NG = NG'$ , aber von entgegengesetzter Richtung auf der Graden NN' abschneidet. Dem  $NX'^2 = 2NG' \cdot NH = -2NG \cdot NH$ , also  $NX^2 = +2NG \cdot NH$ .

Zieht man durch G eine Parallele zur Ortslinie L, so findet man den Punkt F u. s. w. Geht die Grade NN' durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises, so erhält man als Kreis des schiefsten Schnittes den, um diese Grade als Durchmesser beschriebenen.

#### IV. Der imaginäre Orthogonalkreis.

13. Um einen Punkt M ist mit dem Radius R ein Kreis beschrieben; K sei ein beliebiger Punkt in der Ebene. Gleichviel, ob dieser Punkt K ausserhalb oder innerhalb des Kreises M liegt: immer stellt der Ausdruck  $\sqrt{KM^2 - R^2}$  die Tangente aus dem Punkte K an den Kreis M vor. Diese ist, wenn K innerhalb des Kreises liegt, imaginär und gleich  $i\sqrt{R^2 - KM^2} = Si$ , wobei der Modulus S die halbe kleinste Sehne durch den Punkt K

vorstellt. Da nun ein Kreis, der um einen ausgeschlossenen Punkt  $K$  mit der Tangente aus diesem Punkte beschrieben wird, ein Orthogonalkreis des gegebenen ist, so nennen wir im andern Falle, wenn der Punkt  $K$  innerhalb des gegebenen Kreises liegt, den, auf diesen Punkt  $K$  bezogenen (nicht darstellbaren) Kreis mit dem Radius  $Si$  einen imaginären Orthogonalkreis, dagegen den, um denselben Mittelpunkt mit der halben kleinsten Sehne  $S$  beschriebenen Kreis den Modularkreis des ersteren. Demgemäss wird die Peripherie des Modularkreises, da er die kleinste Sehne durch den Punkt  $K$  innerhalb des gegebenen Kreises zum Durchmesser hat, durch den gegebenen Kreis halbirt. Die in Rede stehenden Beziehungen lassen sich daher in folgende Sätze fassen:

Ein imaginärer Kreis  $K$  schneidet einen reellen Kreis  $M$  orthogonal, das heisst: die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit dem einen oder dem andern Schnittpunkt seines Modularkreises ist in dem reellen Kreise die halbe kleinste Sehne durch den Punkt  $K$ .

Ein imaginärer Kreis  $K$  wird von einem reellen Kreise  $M$  orthogonal geschnitten, das heisst: die Peripherie seines Modularkreises wird durch den reellen Kreis halbirt.

Soll daher um einen gegebenen Punkt  $M$  einen Kreis beschrieben werden, der einen, auf den Punkt  $K$  bezogenen imaginären Kreis, dessen Radius  $= Si$  ist, orthogonal schneidet, so beschreibe man um den Punkt  $K$  einen Kreis mit dem Radius  $S$ , verbinde  $K$  mit  $M$ , errichte auf  $KM$  in  $K$  den Durchmesser  $BB'$  senkrecht und schlage aus dem Punkte  $M$  mit dem Halbmesser  $KB$  oder  $KB'$  einen Kreis, so ist derselbe der verlangte.

14. Antichordale und Subchordale. Um die Punkte  $K$  und  $K'$  sind mit den Radien  $r$  und  $r'$  Kreise beschrieben. Ferner ist  $M$  der Mittelpunkt eines, mit dem Radius  $R$  beschriebenen Kreises, der die Peripherien der Kreise  $K$  und  $K'$  halbirt, so dass er mit dem ersten dessen Durchmesser  $Bb$ , mit dem zweiten dessen Durchmesser  $B'b'$  zur gemeinschaftlichen Sehne hat. Ziehen wir die Centrallinie  $KK'$  und fällen auf dieselbe aus dem Punkte  $M$  ein Loth  $MD$ , so ist  $MD^2 = MK^2 - KD^2 = MK'^2 - K'D^2$ . Wir erhalten daher die Gleichung  $R^2 - r^2 - KD^2 = R^2 - r'^2 - K'D^2$ , mithin  $K'D^2 - KD^2 = r^2 - r'^2$ . Daher ist der Punkt  $D$  für alle Punkte  $M$  von der angegebenen Eigenschaft konstant, und wir gelangen zu dem Satze: die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Peripherien zweier gegebenen Kreise halbiren, liegen in einer Geraden, welche auf der Centrale der gegebenen Kreise senkrecht steht und dieselbe so theilt, dass die entstandenen Abschnitte in umgekehrter Ordnung mit den, durch die Chordale beider Kreise erzeugten übereinstimmen. Wir nennen daher diese Ortslinie die Antichordale der gegebenen Kreise.

Beziehen wir aber auf die Mittelpunkte  $K$  und  $K'$  zwei imaginäre Kreise, welche die bereits gegebenen Kreise zu ihren Modularkreisen, also die imaginären Strecken  $\varrho = ri$ ,  $\varrho' = r'i$  zu ihren Radien haben; bezeichnen wir ferner die beiden Abschnitte, in welche die Chordale dieser imaginären Kreise, deren Centrale theilt, durch  $p$  und  $q$ : so ist  $p^2 - q^2 = \varrho^2 - \varrho'^2 = r^2 - r'^2$ . Somit gelangen wir dadurch, dass wir die beiden imaginären Kreise gleichsam als reelle, nämlich mit Radien  $\varrho$  und  $\varrho'$  beschriebene behandeln, gleichfalls zu dem vorigen Satze, dem wir nun folgende Fassung geben können: die Chordale zweier imaginären Kreise ist die Antichordale ihrer Modularkreise.

Es sei nun um einen andern Punkt  $M$  ein Kreis beschrieben, der sich gegen die gegebenen Kreise  $K$  und  $K'$  so verhält, dass er den ersten orthogonal schneidet und die Peripherie des

zweiten halbirt; MD sei wiederum das Loth auf die Centrale KK'. Dann ist  $MD^2 = R^2 + r^2 - KD^2 = R^2 - r'^2 - K'D^2$ ; folglich  $KD^2 - K'D^2 = r^2 + r'^2$ . Dieses Resultat enthält den Satz: hat man zwei Kreise K und K' und beschreibt zu dem ersten einen concentrischen Kreis mit einem Radius, dessen Quadrat gleich ist der Quadratsumme der gegebenen Radien, so ist die Chordale zu jenem concentrischen Kreise und dem Mittelpunkte des zweiten zugleich der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche den ersten der gegebenen Kreise orthogonal schneiden und die Peripherie des zweiten halbiren. Wir nennen diese Ortslinie die Subchordale des ersten Kreises in Bezug auf den zweiten. Beziehen wir aber auf den Mittelpunkt K' des letzteren einen imaginären Kreis, dem wir den Radius  $q' = r'i$  beilegen, so ist die Chordale des reellen Kreises K und des imaginären K' bestimmt durch die Gleichung:  $p^2 - q^2 = r^2 - q'^2 = r^2 + r'^2$ , welches Resultat seinem Sinne nach mit dem vorangehenden übereinstimmt und folgende Fassung erhalten kann: die Chordale eines reellen und eines imaginären Kreises ist die Subchordale des reellen in Bezug auf den Modularkreis des imaginären.

Man sieht hieraus, dass es für die Bestimmung der Chordale oder des Chordalpunktes mehrerer Kreise gleichgültig ist, ob diese Kreise sämtlich reell oder sämtlich imaginär oder zum Theil reell, zum Theil imaginär sind, sobald man nur jeden imaginären Kreis als einen, gleichsam mit dem Radius  $q$ , von der Form  $ri$ , beschriebenen behandelt.

15. Werden zwei Kreise von einem imaginären Kreise orthogonal geschnitten, so liegt der Mittelpunkt des letzteren in beiden reellen Kreisen zugleich, und die, aus seinem Centrum nach den Schnittpunkten seines Modularkreises mit dem einen oder dem andern der reellen Kreise gezogenen Radien sind halbe kleinste Sehnen in dem einen, wie in dem andern. Folglich schneiden sich zwei reelle Kreise, so oft die diesmalige Voraussetzung eintritt, und der Mittelpunkt des imaginären Kreises liegt auf ihrer gemeinschaftlichen Sehne. Hieraus folgt: wird eine Schaar von Kreisen durch zwei imaginäre Kreise K und K' oder durch einen reellen Kreis K und einen imaginären Kreis K' orthogonal geschnitten, so bildet diese Schaar einen Kreisbüschel, das heisst sämtliche Kreise haben zwei Punkte mit einander gemein. Denn irgend einer von diesen Kreisen schneidet auf derjenigen Geraden, welche die Mittelpunkte K und K' verbindet, ein Stück ab, welches er mit jedem der übrigen Kreise zur gemeinschaftlichen Sehne haben muss.

## V. Vom gleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

16. Werden zwei Kreise M und m, von denen der eine, M, den andern, m,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ganz oder zum Theil ausschliesst} \\ \text{ganz einschliesst} \end{array} \right\}$ , von einem Kreise K unter dem Winkel  $\alpha$  gleichartig geschnitten, so sind zwei  $\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht getrennte} \\ \text{getrennte} \end{array} \right\}$  Schnittpunkte desselben, z. B. B und b, von denen der eine dem Kreise M, der andere dem Kreise m angehört, potenzhaltende Punkte eines äussern Aehnlichkeitsstrahles.

Zum Beweise ziehe man durch den Punkt B einen äussern Aehnlichkeitsstrahl, welcher den Kreis m in den Punkten  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{b}'$  schneidet;  $\mathfrak{b}'$  sei der zugeordnete,  $\mathfrak{b}$  der potenzhaltende Punkt in Bezug auf den Punkt B. Zieht man die Radien MB und  $m\mathfrak{b}$ , so ist daher  $\angle MB\mathfrak{b} = \angle m\mathfrak{b}B$ . Ist k ein beliebiger Punkt auf der, die Strecke  $B\mathfrak{b}$  senkrecht halbirenden Graden L, so ist  $\angle k\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \angle k\mathfrak{b}B$ , folglich auch  $\angle MBk = \angle m\mathfrak{b}k$ . Demnach schneidet jeder Kreis, der um einen beliebigen Punkt k der Graden L mit dem Radius kB beschrieben wird, die gegebenen Kreise M und m in den Punkten B und  $\mathfrak{b}$  unter gleichen Winkeln gleichartig. Nun schneidet der gegebene Kreis K die Kreise M und m in den Punkten B und  $\mathfrak{b}$  unter dem Winkel  $\alpha$  gleichartig. Läge sein Mittelpunkt K nicht auf der Ortslinie L, so ziehe man den Radius KB, welcher der Graden L in einem Punkte k begegnen wird, und verbinde k mit dem potenzhaltenden Punkte  $\mathfrak{b}$ ; dann ist  $\angle MBk = \angle m\mathfrak{b}k = \alpha$ . Schneidet man nun auf dem Schenkel  $\mathfrak{b}k$  gleichfalls ein Stück  $\mathfrak{b}\mathfrak{K} = BK$  ab und beschreibt um die Punkte M und m Kreise mit den Radien MK und  $m\mathfrak{K}$ , so stellt der konzentrische Kreis  $\left\{ \begin{matrix} M \\ m \end{matrix} \right\}$  den Ort des Mittelpunktes aller Kreise mit dem Radius KB vor, welche den gegebenen Kreis  $\left\{ \begin{matrix} M \\ m \end{matrix} \right\}$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden. Folglich müsste der Mittelpunkt eines Kreises, der beide gegebene Kreise M und m unter dem Winkel  $\alpha$  gleichartig schneidet und den Radius KB hat, in einem Schnittpunkt jener Ortskreise liegen. Der Punkt K ist aber der Mittelpunkt eines solchen Kreises. Mithin müsste der Ortskreis m dem Ortskreise M im Punkte K begegnen; also wäre  $m\mathfrak{K} = mK$ , was nur dann möglich ist, wenn die Punkte  $\mathfrak{K}$  und K im Punkte k zusammenfallen. Folglich schneidet der gegebene Kreis K die Kreise M und m in den Punkten B und  $\mathfrak{b}$ . Da nun auch diese Punkte, wie die Punkte B und  $\mathfrak{b}$ , bei der vorausgesetzten Lage der Kreise M und m, sowohl auf dem Aehnlichkeitsstrahl  $B\mathfrak{b}$ , als auch auf dem schneidenden Kreise K  $\left\{ \begin{matrix} \text{nicht getrennt} \\ \text{getrennt} \end{matrix} \right\}$  sind, so muss Punkt  $\mathfrak{b}$  mit  $\mathfrak{b}$  zusammenfallen.

17. Werden zwei Kreise M und m, von denen der eine, M, den andern, m,  $\left\{ \begin{matrix} \text{ganz ausschliesst} \\ \text{ganz oder zum Theil einschliesst} \end{matrix} \right\}$ , von einem Kreise K unter dem Winkel  $\alpha$  ungleichartig geschnitten, so sind zwei  $\left\{ \begin{matrix} \text{getrennte} \\ \text{nicht getrennte} \end{matrix} \right\}$  Schnittpunkte desselben, z. B. B und  $\mathfrak{b}$ , von denen der eine dem Kreise M, der andere dem Kreise m angehört, potenzhaltende Punkte eines innern Aehnlichkeitsstrahles.

Zum Beweise ziehe man durch den Punkt B einen innern Aehnlichkeitsstrahl, der den Kreis m in den Punkten  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{b}'$  schneidet;  $\mathfrak{b}'$  sei der zugeordnete,  $\mathfrak{b}$  der potenzhaltende Punkt in Bezug auf den Punkt B. Zieht man die Radien MB und  $m\mathfrak{b}$ , so ist daher  $\angle MB\mathfrak{b} = \angle m\mathfrak{b}B$ . Ist k ein beliebiger Punkt auf der, die Strecke  $B\mathfrak{b}$  senkrecht halbirenden Graden L, so ist  $\angle k\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \angle k\mathfrak{b}B = \pi - k\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ ; daher  $k\mathfrak{b}\mathfrak{b}' - MB\mathfrak{b} = \pi - k\mathfrak{b}\mathfrak{b}' - m\mathfrak{b}B$ ; dies giebt  $\angle MBk = \pi - m\mathfrak{b}k$ . Demnach schneidet jeder Kreis, der um einen beliebigen Punkt k der Graden L mit dem Radius kB beschrieben wird, die Kreise M und m in den Punkten B und  $\mathfrak{b}$  unter gleichen Winkeln ungleichartig. Nun schneidet der gegebene Kreis K dieselben Kreise in den Punkten B und  $\mathfrak{b}$  unter dem Winkel  $\alpha$  ungleichartig. Läge sein Mittelpunkt K nicht auf der Ortslinie L, so ziehe man

den Radius  $KB$ , welcher der Graden  $L$  in einem Punkte  $k$  begegnen wird, und verbinde  $k$  mit dem potenzhaltenden Punkte  $b$ ; dann ist  $\angle MBk = \alpha$  u.  $\pi - mbk = \alpha$ , also  $mbk = \alpha'$ . Schneidet man nun auf dem Schenkel  $bk$  gleichfalls ein Stück  $b\mathfrak{K} = BK$  ab und beschreibe um die Punkte  $M$  und  $m$  Kreise mit den Radien  $MK$  und  $m\mathfrak{K}$ , so stellt der konzentrische Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  den Ort des Mittelpunktes aller Kreise mit dem Radius  $KB$  vor, welche den gegebenen Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{smallmatrix} \right\}$  schneiden. Folglich müsste der Mittelpunkt eines Kreises, der beide gegebene Kreise  $M$  und  $m$  unter dem Winkel  $\alpha$  ungleichartig schneidet und den Radius  $KB$  hat, in einem Schnittpunkt jener Ortskreise liegen. Der Punkt  $K$  ist aber der Mittelpunkt eines solchen Kreises. Mithin müsste der Ortskreis  $m$  dem Ortskreise  $M$  im Punkte  $K$  begegnen, was wiederum nur dann möglich ist, wenn die Punkte  $\mathfrak{K}$  und  $K$  im Punkte  $k$  zusammenfallen. Folglich schneidet der gegebene Kreis  $K$  die Kreise  $M$  und  $m$  in den Punkten  $B$  und  $b$ . Da nun auch diese Punkte, wie die Punkte  $B$  und  $b$ , bei der vorausgesetzten Lage der Kreise  $M$  und  $m$ , sowohl auf dem Aehnlichkeitsstrahl  $Bb$ , als auch auf dem schneidenden Kreise  $K$   $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{getrennt} \\ \text{nicht getrennt} \end{smallmatrix} \right\}$  sind, so muss Punkt  $b$  mit  $b$  zusammenfallen.

18. Werden zwei Kreise  $M$  und  $m$  von zwei andern Kreisen  $K$  und  $K'$   $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{smallmatrix} \right\}$  geschnitten, nämlich vom Kreise  $K$  unter einem Winkel  $\alpha$ , vom Kreise  $K'$  unter einem Winkel  $\beta$ , so geht die Chordale der beiden thätigen Kreise durch den  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{smallmatrix} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt der leidenden Kreise.

Dem vorangehenden Satze gemäss schneidet Kreis  $K$  in zwei solchen Punkten  $B$  und  $b$ , desgleichen Kreis  $K'$  in zwei solchen Punkten  $C$  und  $c$ , deren Verbindungslinie  $Bb$ ,  $Cc$  durch den  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{smallmatrix} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt der Kreise  $M$  und  $m$  geht. Daher entsteht die Gleichung  $\left\{ \begin{smallmatrix} AB \cdot Ab = AC \cdot Ac \\ IB \cdot Ib = IC \cdot Ic \end{smallmatrix} \right\}$ , da die Punkte  $B$  und  $b$ ,  $C$  und  $c$  potenzhaltende Punkte des, durch sie bestimmten  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{smallmatrix} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahles sind. Ziehen wir aber aus dem Punkte  $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix} \right\}$  an den Kreis  $K$  die Tangente  $\left\{ \begin{smallmatrix} AT \\ IT \end{smallmatrix} \right\}$ , desgleichen an den Kreis  $K'$  die Tangente  $\left\{ \begin{smallmatrix} AT' \\ IT' \end{smallmatrix} \right\}$ , deren Rolle, falls die eine oder die andere derselben imaginär wird, ihr Modulus (die halbe kleinste Sehne) übernimmt, so erhalten wir die Gleichungen  $\left\{ \begin{smallmatrix} AT^2 = AB \cdot Ab \\ IT^2 = IB \cdot Ib \end{smallmatrix} \right\}$  und  $\left\{ \begin{smallmatrix} AT'^2 = AC \cdot Ac \\ IT'^2 = IC \cdot Ic \end{smallmatrix} \right\}$  daher ist  $\left\{ \begin{smallmatrix} AT = AT' \\ IT = IT' \end{smallmatrix} \right\}$ . Folglich ist der Punkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix} \right\}$ , aus welchem die Tangenten, oder aber halbe kleinste Sehnen zu beiden thätigen Kreisen gleich sind, ein Punkt auf der Chordale der letzteren.

Anmerkung. So oft die Punkte  $B$  und  $b$ , also auch  $C$  und  $c$  durch den Punkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix} \right\}$  getrennt sind, liegt der letztere in beiden thätigen Kreisen zugleich. Daher die Folgerung:

Werden zwei Kreise, von denen der eine den andern ganz  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ein} \\ \text{aus} \end{array} \right\}$  schliesst, von einem Kreise K unter dem Winkel  $\alpha$ , von einem Kreise  $K_1$  unter dem Winkel  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  geschnitten, so schneiden sich die beiden thätigen Kreise, und ihre gemeinschaftliche Sehne geht durch den  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt der leidenden Kreise.

19. Um die Punkte M und m sind mit den Radien R und r Kreise beschrieben. Bestimmt man ihre beiden Aehnlichkeitspunkte A und I und beschreibt um deren Abstand AI als Durchmesser einen Kreis, so hat derselbe mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale.

Denn schneiden sich die Kreise M und m, so projicire man aus ihrem einen Schnittpunkt S das Gebilde M, m, A, I. Dann ist jedes der beiden Verhältnisse  $Am:Am$  und  $IN:Im = R:r = SM:Sm$ . Folglich halbiren die beiden Strahlen SI und SA den Winkel und Nebenwinkel der beiden andern, SM und Sm, bilden daher mit einander selbst einen rechten Winkel ISA, und der Kreis um den Durchmesser AI geht durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise.

Schneiden sich aber die gegebenen Kreise nicht, so beschreibe man um den Fusspunkt O ihrer Chordale ihren gemeinschaftlichen „kleinsten Orthogonalkreis,“ der ihre Centrale in den Punkten P und Q schneidet. Dann sind diese Punkte P und Q durch beide Kreise M und m harmonisch getrennt, folglich für beide Kreise konjugirt. Ein Perpendikel, in dem einen dieser Punkte, z. B. in P, auf der Centrale errichtet, ist daher für jeden der beiden Kreise M und m die Polare des andern Punktes Q. Liegen nun die Kreise M und m ausser einander, wobei Kreis M den einen der Punkte P und Q, nämlich P, Kreis m den andern, Q, einschliesst, so ziehe man aus dem Punkte A an beide Kreise eine gemeinschaftliche (äussere) Tangente, welche der, für beide Kreise gemeinschaftlichen Polare des Punktes Q in S begegnet. Legt man darauf aus diesem Punkte S sowohl an den Kreis M, als auch an den Kreis m eine zweite Tangente an, so ist die gemeinschaftliche Tangente von der zweiten Tangente an den einen, wie von der an den andern Kreis durch die doppelt konjugirten Graden SP und SQ harmonisch getrennt. Folglich fällt die zweite Tangente aus dem Punkte S an den Kreis M mit der zweiten Tangente an den Kreis m in eine gemeinschaftliche innere Tangente zusammen, welche durch den Punkt I geht. Die Punkte A und I sind daher gleichfalls durch die Graden SP und SQ harmonisch getrennt, und der Kreis um den Durchmesser AI wird durch den Orthogonalkreis O gleichfalls rechtwinklig geschnitten.

Umschliesst aber Kreis M den Kreis m, wobei der eine von den Punkten P und Q, nämlich P, von beiden Kreisen eingeschlossen, der andere, Q, von beiden Kreisen ausgeschlossen ist, so lege man durch den Punkt A eine (der Lage nach) gemeinschaftliche kleinste Sehne, welche dem Kreise m in einem Punkte b, dem Kreise M in einem Punkte B begegnet, und ziehe aus dem

Punkte Q durch den Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} M \\ m \end{array} \right\}$  die Sekante  $\left\{ \begin{array}{l} QBB' \\ Qbb' \end{array} \right\}$ , welche die, für beide Kreise gemeinschaft-

liche Polare des Punktes Q in  $\left\{ \begin{array}{l} S \\ s \end{array} \right\}$  schneidet. Dann sind die Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} B, B' \\ b, b' \end{array} \right\}$  durch den Punkt

$\left\{ \begin{array}{l} S \\ s \end{array} \right\}$  vom Punkte Q harmonisch getrennt. Da nun die harmonischen Gebilde QBSB' und QbSb'

Fig. 9.

den Punkt Q entsprechend gemein haben, so steht auch der dritte Projectionsstrahl  $B'b'$ , wie die beiden andern,  $BbA$  und  $SsP$ , auf der Centrale in einem Punkte  $x$  senkrecht, und es verhält sich  $B'x:b'x = BA:bA = R:r$ . Daher ist der Punkt  $x$  kein anderer, als der innere Aehnlichkeitspunkt, und das Gebilde  $QAPI$  ist, als Projection des Gebildes  $QBSB'$ , gleichfalls harmonisch. Folglich schneidet auch diesmal der Kreis um den Durchmesser  $AI$  den Kreis  $O$  rechtwinklig, hat daher in allen Fällen mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale.

20. Der äussere und innere Potenzkreis. Beschreibt man um den  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{smallmatrix} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt zweier gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  einen Kreis, welcher mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale hat (also ihren gemeinschaftlichen kleinsten Orthogonalkreis  $O$  rechtwinklig schneidet), so heisst derselbe der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{smallmatrix} \right\}$  Potenzkreis. Schneiden sich die gegebenen Kreise, so sind beide Potenzkreise reell und gehen beide durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise. Wenn aber Kreis  $M$  den Kreis  $m$  ganz  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{aus} \\ \text{ein} \end{smallmatrix} \right\}$  schliesst, so ist der äussere Aehnlichkeitspunkt vom Kreise  $O$   $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{aus} \\ \text{ein} \end{smallmatrix} \right\}$  geschlossen, der innere Aehnlichkeitspunkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{smallmatrix} \right\}$  geschlossen (19), daher der äussere Potenzkreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{reell} \\ \text{imaginär} \end{smallmatrix} \right\}$ , der innere Potenzkreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{imaginär} \\ \text{reell} \end{smallmatrix} \right\}$ .

a) Beide Potenzkreise, der äussere und der innere, schneiden sich orthogonal. Denn schneiden sich die gegebenen Kreise, so stehen (19) die, nach ihrem einen Schnittpunkt  $S$  gezogenen Radien  $IS$  und  $AS$  der beiden Potenzkreise auf einander senkrecht. Schneiden sich aber die gegebenen Kreise nicht, so ist die gemeinschaftliche Sehne  $FG$  des reellen Potenzkreises  $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix} \right\}$  und des Orthogonalkreises  $O$  die Polare des Punktes  $\left\{ \begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix} \right\}$  in Bezug auf den Kreis  $O$ , diese geht daher durch den Punkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} I \\ A \end{smallmatrix} \right\}$ , da beide Aehnlichkeitspunkte auch für den Kreis  $O$  konjugirt sind. Folglich hat der Modularkreis des imaginären Potenzkreises die Sehne  $FG$  des reellen zum Durchmesser, letzterer halbirt daher die Peripherie jenes Modularkreises.

b) Jeder Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K \\ K_1 \end{smallmatrix} \right\}$ , welcher die Kreise  $M$  und  $m$  unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{smallmatrix} \right\}$  schneidet, wird von dem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{smallmatrix} \right\}$  Potenzkreise orthogonal geschnitten.

Denn schneiden sich die gegebenen Kreise nicht, so sind beide Potenzkreise Orthogonalkreise des Kreises  $O$ . Schneiden sich aber die gegebenen Kreise, so kann man ihren einen Schnittpunkt als einen unendlich kleinen Kreis  $O$  betrachten, der von beiden Potenzkreisen orthogonal geschnitten wird, und der auch seinerseits (wie der eigentliche Kreis  $O$ ) die gegebenen Kreise orthogonal schneidet. Da nun ein Orthogonalkreis zweier Kreise diese ebensowohl gleichartig, wie ungleichartig schneidet, so werden die gegebenen Kreise

von jedem der beiden Kreise  $\left\{ \begin{smallmatrix} O \text{ und } K \\ O \text{ und } K_1 \end{smallmatrix} \right\}$  unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{smallmatrix} \right\}$  geschnit-

- ten. Daher geht die Chordale der Kreise  $\left\{ \begin{matrix} O \text{ und } K \\ O \text{ und } K_1 \end{matrix} \right\}$  durch den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise. Folglich muss der  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreis, als ein Kreis aus der Chordale der Kreise  $\left\{ \begin{matrix} O \text{ und } K \\ O \text{ und } K_1 \end{matrix} \right\}$ , der den einen derselben, nämlich den Kreis O orthogonal schneidet, auch den andern, nämlich den Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K_1 \end{matrix} \right\}$  orthogonal schneiden.
- c) Schneidet ein Kreis K den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den Kreis M, unter dem Winkel  $\alpha$  und den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreis derselben orthogonal, so schneidet er auch den andern, nämlich den Kreis m, unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \right\}$ .

Es sei B der eine Schnittpunkt des Kreises K mit dem Kreise M. Ziehen wir den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahl  $\left\{ \begin{matrix} AB \\ IB \end{matrix} \right\}$ , so wird derselbe den Kreis m in zwei Punkten schneiden, von welchen der eine, b, in Bezug auf den Punkt B potenzhaltend ist. Da nun ein Kreis durch die potenzhaltenden Punkte B und b eines  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahles  $\left\{ \begin{matrix} AB \\ IB \end{matrix} \right\}$  die Kreise M und m unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidet, daher vom  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreise orthogonal geschnitten wird, so erhalten wir, wenn  $\varrho$  den Halbmesser des Potenzkreises oder, falls letzterer imaginär ist, den Modulus seines Halbmessers vorstellt, die Gleichung  $\varrho^2 = \left\{ \begin{matrix} AB \cdot Ab \\ IB \cdot Ib \end{matrix} \right\}$ . Nun schneidet aber der Aehnlichkeitsstrahl  $\left\{ \begin{matrix} AB \\ IB \end{matrix} \right\}$  auch den thätigen Kreis K, der als ein Orthogonalkreis des  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreises vorausgesetzt wurde, ausser dem Schnittpunkte B noch in einem Punkte x; folglich erhalten wir auch die Gleichung  $\varrho^2 = \left\{ \begin{matrix} AB \cdot Ax \\ IB \cdot Ix \end{matrix} \right\}$ . Aus der Verbindung beider Gleichungen ergibt sich, dass die Punkte x und b zusammenfallen, also Kreis K durch die potenzhaltenden Punkte B und b geht, woraus das zu Erweisende folgt.

21. Die äussere u. innere Chordalpunktslinie. Um die drei Punkte  $M_1, M_2$  u.  $M_3$ , welche nicht auf einer Geraden liegen, sind mit den Radien  $r_1, r_2$  und  $r_3$  Kreise beschrieben. Wir

bestimmen ihren Chordalpunkt C, desgleichen den äussern Aehnlichkeitspunkt  $\left\{ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \right\}$ , sowie den

innern Aehnlichkeitspunkt  $\left\{ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix} \right\}$  der Kreise  $\left\{ \begin{matrix} M_1 \text{ und } M_2 \\ M_1 \text{ und } M_3 \\ M_2 \text{ und } M_3 \end{matrix} \right\}$ . Auf das Kreispaar  $\left\{ \begin{matrix} M_1, M_2 \\ M_1, M_3 \\ M_2, M_3 \end{matrix} \right\}$  be-

zieht sich der äussere Potenzkreis  $\left\{ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \right\}$ , der innere  $\left\{ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix} \right\}$ . Es sei nun Kreis K irgend ein Kreis,

der die drei gegebenen Kreise unter einem beliebigen Winkel  $\alpha$  gleichartig schneidet. Dann wird derselbe von jedem der drei äussern Potenzkreise orthogonal geschnitten. Folglich liegt jeder

Punkt  $K$ , d. h. der Mittelpunkt jedes Kreises  $K$ , auf der Chordale je zweier von diesen drei Potenzkreisen. Folglich haben die letzteren, alle drei, eine gemeinschaftliche Chordale, auf der sämtliche Punkte  $K$  liegen. Zu diesen gehört aber auch der Punkt  $C$ , als Mittelpunkt eines Kreises, der die drei gegebenen Kreise unter dem Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  gleichartig schneidet. Berücksichtigt man noch, dass die gemeinschaftliche Chordale der drei äussern Potenzkreise auf der, ihre Mittelpunkte verbindenden äussern Symmetrale senkrecht steht, so gelangt man zu dem Satze:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise ein Loth auf ihre äussere Symmetrale, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gleichartig schneiden. Diese Ortslinie heisse die äussere Chordalpunktslinie.

Es sei ferner Kreis  $\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix}$  irgend ein Kreis, der die drei gegebenen Kreise unter einem beliebigen Winkel  $\alpha$  ungleichartig, d. h. den Kreis  $\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$  unter dem Winkel  $\alpha$  (oder  $\alpha'$ ), die

Kreise  $\begin{Bmatrix} M_2 \text{ und } M_3 \\ M_1 \text{ und } M_2 \\ M_1 \text{ und } M_3 \end{Bmatrix}$  unter dem Winkel  $\alpha'$  (oder  $\alpha$ ) schneidet. Demnach schneidet jeder

Kreis  $\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix}$  die Kreispaare  $\begin{Bmatrix} M_1 M_2 \text{ und } M_1 M_3 \\ M_2 M_1 \text{ und } M_2 M_3 \\ M_3 M_1 \text{ und } M_3 M_2 \end{Bmatrix}$  unter dem Winkel  $\alpha$  ungleichartig, dagegen das

Kreispaar  $\begin{Bmatrix} M_2 M_3 \\ M_1 M_2 \\ M_1 M_3 \end{Bmatrix}$  gleichartig, wird daher von den Potenzkreisen  $\begin{Bmatrix} I_1 I_2 A_3 \\ I_1 I_3 A_2 \\ I_2 I_3 A_1 \end{Bmatrix}$  orthogonal

geschnitten, so dass sein Mittelpunkt auf der Chordale je zweier von diesen drei Potenzkreisen liegt. Folglich haben die drei Potenzkreise  $\begin{Bmatrix} I_1 I_2 A_3 \\ I_1 I_3 A_2 \\ I_2 I_3 A_1 \end{Bmatrix}$  eine gemeinschaftliche Chordale, auf der

sämtliche Punkte  $\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix}$  liegen. Zu diesen gehört aber auch der Chordalpunkt  $C$ , als Mittel-

punkt eines Kreises, der die drei gegebenen Kreise unter dem Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ungleichartig schneidet. Berücksichtigt man noch, dass die gemeinschaftliche Chordale der zusammengehörigen drei Potenzkreise auf der, ihre Mittelpunkte verbindenden innern Symmetrale senkrecht steht, so gelangt man zu dem Satze:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise ein Loth auf irgend eine ihrer drei innern Symmetralen, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig, und zwar dasjenige Kreispaar gleichartig schneiden,

auf welches sich der mitwirkende äussere Ähnlichkeitspunkt bezieht. Diese drei Ortslinien mögen die drei innern Chordalpunktlinien heissen.

Gleichwie die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{array} \right\}$  Chordalpunktlinie, auf der sämtliche Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K_1 \text{ od. } K_2 \text{ od. } K_3 \end{array} \right\}$  liegen, zugleich die gemeinschaftliche Chordale der drei Potenzkreise  $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ I_1, I_2, A_3 \text{ od. etc.} \end{array} \right\}$  vorstellt, so ist umgekehrt die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{array} \right\}$  Symmetrale  $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ I_1, I_2, A_3 \text{ od. etc.} \end{array} \right\}$  zugleich die gemeinschaftliche Chordale sämtlicher Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K_1 \text{ od. etc.} \end{array} \right\}$ . Denn je zwei Kreise  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K_1 \text{ od. etc.} \end{array} \right\}$  werden von den Potenzkreisen  $\left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{ und } A_2 \\ I_1 \text{ und } I_2 \text{ od. etc.} \end{array} \right\}$  orthogonal geschnitten.

22. Die involutorische Kreisschaar und der Kreisbüschel. Um das gegenseitige Verhalten aller gleichartig, wie ungleichartig schneidenden Kreise zu bestimmen,

bezeichnen wir diejenige der vier Symmetralen, welche die Ähnlichkeitspunkte  $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, A_3 \\ I_1, I_2, A_3 \\ I_1, I_3, A_2 \\ I_2, I_3, A_1 \end{array} \right\}$  verbindet,

durch  $\left\{ \begin{array}{l} a \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}$ , die auf derselben senkrechte Chordalpunktlinie durch  $\left\{ \begin{array}{l} c \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\}$ ; die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{erstere} \\ \text{letztere} \end{array} \right\}$  ist die

gemeinschaftliche  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Centrale} \\ \text{Chordale} \end{array} \right\}$  der „Potenzschaar“ (a oder etc.), welche aus den drei Potenzkreisen ( $A_1, A_2, A_3$  oder etc.) besteht, dagegen die gemeinschaftliche  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chordale} \\ \text{Centrale} \end{array} \right\}$  der „Isogonalschaar“ (K oder etc.). Die Symmetrale (a oder etc.), die Chordalpunktlinie (c oder etc.), die Potenzschaar (a oder etc.) und die Isogonalschaar (K oder etc.) sind einander „zugeordnet.“

So oft einer von den Kreisen einer Potenzschaar imaginär wird, ist die zugeordnete Isogonalschaar ein Kreisbüschel (15), dessen Axe dasjenige Stück der zugeordneten Symmetrale ist, welches der gemeinschaftliche Orthogonalkreis C der gegebenen Kreise auf derselben abschneidet. Jeder Kreis um die Axe des Büschels, der einen der gegebenen Kreise unter dem

Winkel  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ 0 \\ \pi \end{array} \right\}$  schneidet, ist ein Glied der zugeordneten Schaar und schneidet daher alle drei

Kreise  $M_1, M_2, M_3$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ 0 \\ \pi \end{array} \right\}$ . Sind aber alle Kreise einer Potenzschaar

reell, so kommt es darauf an, ob die zugeordnete Symmetrale vom Kreise C, der zugleich jede Potenzschaar orthogonal schneidet, ein- oder ausgeschlossen ist. Im ersten Falle ist die zugeordnete Isogonalschaar wiederum ein Kreisbüschel. Im zweiten Falle bildet die Potenzschaar einen Kreisbüschel (10), dessen Axe ein Stück der zugeordneten Chordalpunktlinie ist und, wie vom Kreise C, so auch von sämtlichen Kreisen der zugeordneten Isogonalschaar harmonisch getheilt wird. Folglich schneidet alsdann diese Schaar die zugeordnete Chordalpunktlinie in einer hyper-

bolischen Involution, so dass vom ersten bis zum letzten ihrer Kreise jeder den folgenden umschliesst oder von ihm umschlossen wird. Wir nennen sie daher eine involutorische Kreisschaar und die zugeordnete Symmetrale die Axe derselben. Giebt es in irgend einer Isogonalschaar, z. B. in der Schaar  $K_1$ , ausser einem Kreise  $K_1(\alpha \alpha' \alpha')$ , d. h. einem solchen, der den Kreis  $M_1$  unter dem Winkel  $\alpha$ , die Kreise  $M_2$  u.  $M_3$  unter dem Winkel  $\alpha'$  schneidet, einen zweiten Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K_1(\alpha \alpha' \alpha') \\ K_1(\alpha' \alpha \alpha) \end{matrix} \right\}$ ,

so bildet dieser zu jenem das  $\left\{ \begin{matrix} \text{symmetrische} \\ \text{konjugirte} \end{matrix} \right\}$  Glied der Schaar. Die Grenzkreise einer jeden Schaar sind zwei symmetrische oder konjugirte Berührungskreise. Ist die Schaar involutorisch, so sind ihre Grenzkreise entweder durch die Axe getrennt, oder die Schaar ist ringförmig. Tritt der erstere Fall ein, so ist die Axe ein Glied der Schaar, d. h. ein Isogonalkreis, muss also die gegebenen Kreise schneiden. Da nun aber, wenn eine  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix} \right\}$  Symmetrale die gegebenen Kreise  $\left\{ \begin{matrix} \text{schneidet} \\ \text{nicht schneidet} \end{matrix} \right\}$ , mindestens ein Glied der zugeordneten Potenzschaar imaginär wird, folglich die zugeordnete Isogonalschaar ein Kreisbüschel sein muss, so folgt:

Bilden die  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix} \right\}$  schneidenden Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K_1 \text{ od. } K_2 \text{ od. } K_3 \end{matrix} \right\}$  eine involutorische Schaar, so ist sie jederzeit  $\left\{ \begin{matrix} \text{ringförmig} \\ \text{durch die Axe getheilt} \end{matrix} \right\}$ .

Schneiden sich je zwei der gegebenen Kreise, und sind die Schnittpunkte jedes Paares durch den dritten Kreis getrennt, so ist jede von den vier Isogonalschaaren  $K, K_1, K_2, K_3$  involutorisch. Denn der Chordalpunkt  $C$  ist von den drei gegebenen Kreisen zugleich eingeschlossen; daher ist ihr gemeinschaftlicher Orthogonalkreis  $C$  imaginär, folglich jede Potenzschaar ein Kreisbüschel (15). Von jenen vier Isogonalschaaren ist die erste,  $K$ , in den Berührungsring eingeschlossen, der von den gleichartig berührenden Kreisen  $k$  und  $k'$  gebildet wird. Da zwischen jedem derselben und den drei gegebenen Kreisen eine einschliessende Berührung stattfindet, beiden daher, als Isogonalkreisen, der Schnittwinkel  $\alpha = 0$  zukommt; da ferner ein rechtwinklig schneidender Kreis nicht vorhanden ist, so giebt es zwischen beiden Grenzkreisen einen Kreis  $K(\mu)$ , der die gegebenen Kreise unter dem grösstmöglichen Winkel  $\mu < \frac{\pi}{2}$  gleichartig schneidet, und dieser theilt die Schaar in zwei gegenseitig symmetrische Schaaren. Auf der Chordalpunktlinie  $c$  bestimmt das endliche Stück  $kk'$  die fruchtbare Strecke derselben. Jede der übrigen Isogonalschaaren wird durch die Axe in zwei konjugirte Schaaren getrennt. Denn ist z. B. die Schaar  $K_1$  von den Berührungskreisen  $k_1$  und  $k'_1$  begrenzt, so liegt Kreis  $\left\{ \begin{matrix} k_1 \\ k'_1 \end{matrix} \right\}$  in demjenigen Bogendreieck, welches vom Kreise  $M_1$   $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix} \right\}$  geschlossen, von dem Kreise  $M_2$  und  $M_3$   $\left\{ \begin{matrix} \text{aus} \\ \text{ein} \end{matrix} \right\}$  geschlossen ist, schneidet also den Kreis  $M_1$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right\}$ , so dass, beim Uebergange von dem Grenzkreise  $\left\{ \begin{matrix} k_1 \\ k'_1 \end{matrix} \right\}$  zur Axe, welche unter dem grössten spitzen Winkel  $x$  und unter dem

kleinsten stumpfen Winkel  $x'$  schneidet, der Schnittwinkel  $\alpha$  von  $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ bis } x \text{ wächst} \\ \pi \text{ bis } x' \text{ abnimmt} \end{array} \right\}$ . Die durch das Unendliche gehende Strecke  $k_1 \cdot k'_1$  ist die fruchtbare Strecke der Chordalpunktslinie  $c_1$ .

Ist der Kreis  $M_3$  vom Kreise  $M_2$  eingeschlossen, dieser vom Kreise  $M_1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ein} \\ \text{aus} \end{array} \right\}$  geschlossen, so ist jede der vier Isogonalschaaren ein Kreisbüschel. Denn jede Potenzschaar enthält mindestens ein imaginäres Glied, da die drei Potenzkreise  $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \\ I_1, I_2, A_3 \end{array} \right\}$  imaginär sind. Jeder von diesen vier Kreisbüscheln ist unbegrenzt, desgleichen die fruchtbare Strecke der zugeordneten Chordalpunktslinie, da es keine Berührungskreise an die drei gegebenen giebt. Aus demselben Grunde ist aber um die Axe eines solchen Büschels an keinen der gegebenen Kreise ein Berührungskreis möglich; sie muss daher ihren einen Endpunkt innerhalb des Kreises  $M_3$ , den andern  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ausserhalb} \\ \text{innerhalb} \end{array} \right\}$  des Kreises  $M_1$  haben. Daher giebt es (12) vier Kreise  $K(\mu)$ ,  $K_1(\mu_1)$ ,  $K_2(\mu_2)$ ,  $K_3(\mu_3)$ , von denen jeder die drei gegebenen Kreise unter dem kleinstmöglichen Winkel schneidet, der erste gleichartig, die drei übrigen ungleichartig. Der Kreisbüschel  $K$  (wie jeder der übrigen) enthält einen Kreis  $K(x)$ , welcher die gegebenen Kreise unter demselben Winkel schneidet, als die Axe des Büschels. Dieser Kreis theilt den Büschel in zwei Hälften, von denen wiederum die eine durch den Kreis des schiefsten Schnittes in zwei symmetrische Theile, die andre durch den Orthogonalkreis  $C$  in zwei konjugirte Theile getrennt wird (11, III). In der ersten Hälfte des Büschels ist dessen Axe das symmetrische, in der zweiten Hälfte das konjugirte Glied zu dem Kreise  $K(x)$ ; in letzterer Beziehung stellt sie den Kreis des stumpfsten Schnittes vor.

Lassen wir den Kreis  $M_3$  in einen, den Kreis  $M_2$  zunächst inwendig berührenden, sodann ihn schneidenden übergehen, wobei wir uns auf den Fall beschränken können, in welchem beide von dem Kreise  $M_1$  umschlossen werden, so findet zunächst nur die Aenderung statt, dass sich der Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} K(\mu) \\ K_1(\mu_1) \end{array} \right\}$  in einen Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} K(o) \text{ oder } k \\ K_1(o) \text{ oder } k_1 \end{array} \right\}$  verwandelt, den der Kreis  $M_1$  einschliessend berührt, während er seinerseits die Kreise  $M_2$  und  $M_3$  in deren eigenem Berührungspunkte  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ein} \\ \text{aus} \end{array} \right\}$  schliessend tangirt, wobei die Axe des Büschels  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K_1 \end{array} \right\}$  zwischen beiden Berührungspunkten liegt. Sodann aber treten aus dem Berührungskreise  $\left\{ \begin{array}{l} k \\ k_1 \end{array} \right\}$  deren zwei  $\left\{ \begin{array}{l} k \text{ und } k' \\ k_1 \text{ und } k'_1 \end{array} \right\}$  hervor, und zwischen den Mittelpunkten der letzteren entsteht auf der zugeordneten Chordalpunktslinie  $\left\{ \begin{array}{l} c \\ c_1 \end{array} \right\}$  eine unfruchtbare Strecke  $\left\{ \begin{array}{l} kk' \\ k_1 k'_1 \end{array} \right\}$ . Der Kreisbüschel  $K$  bleibt ein solcher, da zwei von den äusseren Potenzkreisen imaginär bleiben; aber beide Endpunkte seiner Axe liegen jetzt innerhalb des Kreises  $M_1$  und ausserhalb der Kreise  $M_2$  und  $M_3$ . Jeder Kreis, der seinen Mittelpunkt in der Strecke  $kk'$  hat und durch die Endpunkte der Axe geht, umschliesst die Kreise  $M_2$  und  $M_3$  und wird vom Kreise  $M_1$  umschlossen. Der Kreisbüschel  $K_1$  dagegen kann jetzt in eine involutorische Schaar übergehen, da die zugeordneten Potenzkreise  $I_1, I_2, A_3$  jetzt sämtlich reell sind.

23. Isogonalpunkte. Es sind vier Kreise  $M_1, M_2, M_3, M_4$  gegeben, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben. Da je zwei derselben einen äusseren Potenzkreis, je drei eine äussere Potenzschaar bestimmen, so erhalten wir 6 äussere Potenzkreise und 4 äussere Potenzschaaren, von denen jede eine zugeordnete Chordalpunktlinie ( $c$ ) zur gemeinschaftlichen Chordale hat. Begegnen sich daher irgend zwei von diesen 4 äusseren Chordalpunktlinien in einem Punkte  $K$ , so giebt es um denselben einen Kreis  $K$ , der die zugeordneten beiden Potenzschaaren zugleich orthogonal schneidet. Folglich ist dieser Kreis  $K$  ein gemeinschaftlicher Orthogonalkreis von 5 verschiedenen Potenzkreisen, da jede äussere Potenzschaar mit jeder andern einen Potenzkreis gemein hat, also zwei Potenzschaaren 5 verschiedene Potenzkreise enthalten. Da aber demzufolge nur noch ein Potenzkreis übrig ist, der mit zwei Paaren aus der Zahl derjenigen, die bereits vom Kreise  $K$  orthogonal geschnitten wurden, die beiden noch übrigen Potenzschaaren bilden muss, so werden auch diese beiden Schaaren, mithin alle 6 Potenzkreise vom Kreise  $K$  orthogonal geschnitten. Daher begegnen sich alle vier Chordalpunktlinien ( $c$ ) im Punkte  $K$ . Sind es die unfruchtbaren Strecken derselben, die in diesem Punkte zusammentreffen, so hat der Punkt keine Bedeutung. Steht es aber von irgend einer jener 4 Chordalpunktlinien fest, dass der Punkt  $K$  auf ihrer fruchtbaren Strecke liegt, so ist der Orthogonalkreis  $K$  zu den 4 äusseren Potenzschaaren ein gemeinschaftliches Glied der ihnen zugeordneten 4 Isogonalschaaren, ist also ein Kreis, der die vier gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gleichartig schneidet. Wir nennen alsdann den Punkt  $K$  den äusseren Isogonalpunkt.

In Uebereinstimmung mit der Definition einer innern Chordalpunktlinie  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$  rücksichtlich dreier Kreise, verstehen wir jetzt, wo vier Kreise gegeben sind, unter den innern Chordalpunktlinien  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$  alle diejenigen, die solchen innern Symmetralen zugeordnet sind, deren innere

Aehnlichkeitspunkte durch den Kreis  $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}$  in Verbindung mit je zweien der übrigen bestimmt

werden. Es giebt also drei innere Chordalpunktlinien von der Klasse ( $c_1$ ), 3 von der Klasse ( $c_2$ ), desgleichen von der Klasse ( $c_3$ ) und ( $c_4$ ), die der Reihe nach folgenden Gruppen von Symmetralen zugeordnet sind:

$$\left\{ \begin{matrix} I_{1,2} & I_{1,3} & A_{2,3} \\ I_{1,2} & I_{1,4} & A_{2,4} \\ I_{1,3} & I_{1,4} & A_{3,4} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} I_{2,1} & I_{2,3} & A_{1,3} \\ I_{2,1} & I_{2,4} & A_{1,4} \\ I_{2,3} & I_{2,4} & A_{3,4} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} I_{3,1} & I_{3,2} & A_{1,2} \\ I_{3,1} & I_{3,4} & A_{1,4} \\ I_{3,2} & I_{3,4} & A_{2,4} \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} I_{4,1} & I_{4,2} & A_{1,2} \\ I_{4,1} & I_{4,3} & A_{1,3} \\ I_{4,2} & I_{4,3} & A_{2,3} \end{matrix} \right\},$$

wobei die Indices stets die beiden Kreise bezeichnen, von welchen der Aehnlichkeitspunkt abhängt. Aus dieser Definition ergibt sich durch Wiederholung der obigen Schlüsse: je drei innere Chordalpunktlinien derselben Klasse begegnen sich in einem Punkte derjenigen äusseren Chordalpunktlinie, welche den mitwirkenden äusseren Aehnlichkeitspunkten zugeordnet ist. Die aufgestellten Klassen liefern daher die vier Schnittpunkte  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . Liegt ein solcher, z. B.  $K_1$ , auf der

fruchtbaren Strecke irgend einer der in ihm sich schneidenden Chordalpunktlinien, so ist der Orthogonalkreis  $K_1$  zu irgend einem der mitwirkenden Potenzkreise ein gemeinschaftliches Glied der zugeordneten Isogonalschaaren, von denen die drei innern denselben gegebenen Kreis (im angenommenen Falle den Kreis  $M_1$ ) durch ihren Schnittwinkel auszeichnen, so dass der Kreis  $K_1$  die 4 gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig, und zwar diejenigen drei gleichartig schneidet, auf welche sich die mitwirkende äussere Chordalpunktlinie bezieht. Wir nennen alsdann jeden der vier Punkte  $K_1, K_2, K_3, K_4$  (insofern er nämlich Mittelpunkt eines solchen Isogonalkreises ist) einen innern Isogonalkreis erster Art.

Heben wir aus den vier gegebenen zwei beliebige Kreise heraus, z. B. die Kreise  $M_1$  und  $M_2$ , und verbinden jeden derselben mit beiden übrig gelassenen ( $M_3$  und  $M_4$ ), darauf jeden der letzteren mit beiden herausgehobenen, so erhalten wir die vier Ternern:  $M_1 M_3 M_4, M_2 M_3 M_4, M_3 M_1 M_2, M_4 M_1 M_2$ . Jede derselben liefert (ausser zwei andern) eine solche innere Symmetrale, deren äusserer Ähnlichkeitspunkt entweder durch die herausgehobenen oder durch die übrig gelassenen Kreise bestimmt wird. Diese vier innern Symmetralen sind:

$$(I_{1,3} I_{1,4} A_{3,4}), (I_{2,3} I_{2,4} A_{3,4}), (I_{3,1} I_{3,2} A_{1,2}), (I_{4,1} I_{4,2} A_{1,2}).$$

Eben diesen sind nun wiederum 4 Chordalpunktlinien zugeordnet, auf welche dieselben Schlüsse, wie auf die 4 äussern Chordalpunktlinien, Bezug haben, die sich also gleichfalls in einem Punkte  $K'$  begegnen. Liegt dieser ihr Schnittpunkt auf der fruchtbaren Strecke irgend einer von ihnen, so ist der Orthogonalkreis  $K'$  zu irgend einem der mitwirkenden Potenzkreise wiederum ein solcher, der die vier gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln ungleichartig schneidet, und zwar sowohl das herausgehobene, als auch das übrig gelassene Paar gleichartig, aber das eine unter einem spitzen Winkel  $\alpha$ , das andere unter dem stumpfen Winkel  $\alpha'$ . Offenbar kann es nicht mehr als drei derartige Punkte ( $K', K'', K'''$ ) geben; wir nennen sie innere Isogonalkreise zweiter Art.

Wenn also vier Kreise gegeben sind, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben, so sind im Ganzen 8 Isogonalkreise und 8 verschiedene Isogonalkreise möglich. Sie sind insgesamt nothwendig, sobald an drei unter den gegebenen vier Kreisen, z. B. an die Kreise  $M_1, M_2$  und  $M_3$ , keine Berührungskreise möglich sind. Denn in diesem Falle enthält jeder der 8 Büschel von Chordalpunktlinien ( $K; K_1, K_2, K_3, K_4; K' K'' K'''$ ) wenigstens eine solche, deren fruchtbare Strecke unbegrenzt ist. Gibt es aber Berührungskreise an die drei erstgenannten unter den vier gegebenen Kreisen, und stellen z. B. die Kreise  $k$  und  $k'$  die beiden gleichartig berührenden vor, so ist die Existenz des Isogonalkreises  $K$  entweder von dem Radius des Kreises  $M_4$  (wenn sein Mittelpunkt gegeben ist) oder von der Lage seines Mittelpunktes (wenn sein Radius gegeben ist) abhängig. Nun ist zuvörderst klar, dass irgend ein Kreis  $X$ , der von jedem der Kreise  $k$  und  $k'$  dieselbe Berührung erfährt, wie die Kreise  $M_1, M_2, M_3$ , den Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\}$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \pi \end{smallmatrix} \right\}$  schneidet, auch von jedem Kreise, der die vorgenannten drei unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet, gleichfalls unter dem Winkel  $\alpha$  geschnitten wird; denn die vier äussern Chordalpunktlinien zu den Kreisen  $M_1, M_2, M_3$  und  $X$  haben die Punkte  $k$  und  $k'$  mit einander gemein, fallen daher in eine zusammen. Ist demnach ein gegebener vierter Kreis  $M_4$  so beschaffen, dass man einen Kreis  $X$ , wie den zuvor bestimmten, konstruieren kann, der zugleich jenen in einem Punkte  $x$  berührt, und zwar so, dass die zwischen beiden stattfindende Berührung

eine einschliessende ist, so wird ein Kreis  $K$ , der die Kreise  $M_1, M_2, M_3$  unter einem Winkel  $\alpha$  gleichartig schneidet und durch den Punkt  $\alpha$  geht, wie den Kreis  $X$ , so auch den Kreis  $M_4$  unter demselben Winkel  $\alpha$  schneiden. Aus diesem Kriterium lassen sich in Rücksicht auf jede der drei Lagen, welche die Berührungskreise  $k$  und  $k'$  gegen einander haben können, die näheren Bedingungen ableiten, unter welchen die Aufgabe, durch alle 4 Kreise  $M_1, M_2, M_3, M_4$  einen Isogonalkreis zu legen, lösbar ist. Bilden z. B. die Kreise  $k$  und  $k'$  einen Ring, so ergibt sich, dass jene Aufgabe nur dann keine Lösung zulässt, wenn der vierte Kreis  $M_4$  entweder vom äussern Grenzkreise  $k$  eingeschlossen ist, ohne seinerseits den innern Grenzkreis  $k'$  auszuschliessen, oder den innern Grenzkreis ausschliesst, ohne vom äussern Grenzkreise eingeschlossen zu werden.

## V. Vom ungleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

24. Der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ). Um die Punkte  $M$  und  $m$  sind mit den Radien  $R$  und  $r$  Kreise beschrieben. Wir wollen durch beide Kreise eine Sekante legen, welche dieselben unter zwei gegebenen Winkeln, nämlich Kreis  $M$  unter dem Winkel  $\alpha$ , Kreis  $m$  unter dem Winkel  $\beta$ , gleichartig schneidet. Begegnet diese Sekante dem Kreise  $M$  in den Punkten  $B$  und  $B'$ , dem Kreise  $m$  in den Punkten  $b$  und  $b'$ , und fallen wir auf die Sehnen  $BB'$  und  $bb'$  aus den Mittelpunkten  $M$  und  $m$  die Perpendikel  $MD$  und  $md$ , so stellt (3) der Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} BMD \\ bmd \end{smallmatrix} \right\}$ , den der Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} BM \\ bm \end{smallmatrix} \right\}$  mit dem Perpendikel  $\left\{ \begin{smallmatrix} MD \\ md \end{smallmatrix} \right\}$  bildet, den Schnittwinkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$  vor, und wir finden  $MD = R \cos \alpha$ ,  $md = r \cos \beta$ . Also ist der Perpendikel  $\left\{ \begin{smallmatrix} MD \\ md \end{smallmatrix} \right\}$  in Rücksicht auf den Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  die halbe Bestimmungssehne  $\left\{ \begin{smallmatrix} S_\alpha \\ S_\beta \end{smallmatrix} \right\}$  für den Schnittwinkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ . Wenn wir daher um den Punkt  $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  mit dem Radius  $\left\{ \begin{smallmatrix} S_\alpha \\ S_\beta \end{smallmatrix} \right\}$  den „Komplementärkreis“ für den Schnittwinkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$  beschreiben und an beide Kreise die gemeinschaftlichen äussern Tangenten anlegen, welche sich im äussern Aehnlichkeitspunkt  $A$  eben dieser Kreise begegnen, so erhalten wir zwei Grade, von welchen jede die gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig schneidet. Zugleich verhält sich  $AM:Am = S_\alpha:S_\beta = R \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} : r$ . Setzen wir das Verhältniss der Kosinuse der gegebenen Winkel, nämlich  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ , gleich  $\lambda$ , so verhält sich  $AM:Am = \lambda R:r$ . Sind daher  $x$  und  $y$  irgend zwei Winkel, welche der Gleichung  $\frac{\cos x}{\cos y} = \lambda$  Genüge leisten, und konstruieren wir eine Gerade, welche die gegebenen Kreise unter diesen Winkeln  $x$  und  $y$  gleichartig schneidet, so geht dieselbe ebenfalls durch den Punkt  $A$ . Folglich ist der äussere Aehnlichkeits-

punkt A der beiden Komplementärkreise für die respektiven Schnittwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  zugleich der Schnittpunkt aller Graden, welche die gegebenen Kreise unter solchen Winkeln gleichartig schneiden, deren Kosinusse ein konstantes Verhältniss  $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$  haben. Wir nennen diesen Punkt den äussern Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) der gegebenen Kreise und bezeichnen ihn durch  $A_\lambda$ ; für  $\lambda = 1$ , geht er in den gewöhnlichen äussern Aehnlichkeitspunkt über. Bezeichnen wir die Länge der Centrale Mm durch  $c$ , so ist der Abstand des Punktes  $A_\lambda$  vom Mittelpunkte m des kleinern gegebenen Kreises  $= \frac{cr}{R\lambda - r}$ . Da dieser Ausdruck, wenn  $\lambda$  der Reihe nach  $= \infty$  (also  $\angle \beta = \frac{\pi}{2}$ ),  $= \frac{r}{R}$ ,  $= 0$  (also  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) gesetzt wird, die Werthe  $0$ ,  $\infty$ ,  $-c$  annimmt, so bewegt sich der Punkt  $A_\lambda$ , während  $\lambda$  von  $\infty$  bis  $0$  abnimmt, vom Punkte m aus bis zum unendlich fernen Punkte der Graden Mm und kehrt dann auf der entgegengesetzten Seite zurück bis zum Punkte M; er hat also die, durch das Unendliche gehende Strecke M'm zu seinem Spielraum.

Legen wir aber an die, um die Punkte M und m beschriebenen Komplementärkreise die gemeinschaftlichen innern Tangenten an, die sich im innern Aehnlichkeitspunkte I eben dieser Kreise begegnen, so erhalten wir zwei Grade, von welchen jede die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  ungleichartig schneidet. Offenbar ist jener Punkt I zugleich der Schnittpunkt aller Graden, welche die gegebenen Kreise unter solchen Winkeln ungleichartig schneiden, deren Kosinusse das konstante Verhältniss  $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$  haben. Wir nennen ihn den innern Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) der gegebenen Kreise und bezeichnen ihn durch  $I_\lambda$ . Der Abstand desselben vom Mittelpunkte m ist  $= \frac{cr}{R\lambda + r}$ . Da diese Funktion, zwischen den Grenzen  $\lambda = \infty$  und  $\lambda = 0$ , von  $0$  bis  $c$  kontinuierlich wächst, so ist die endliche Strecke Mm der Spielraum des innern  $\lambda$ -Punktes.

Gilt die Voraussetzung, dass die gegebenen Kreise M und m ausser einander liegen, so liegen auch jene Komplementärkreise stets ausser einander, und es giebt stets eine Grade, welche die Kreise M und m unter beliebig gegebenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig oder ungleichartig schneidet. Gilt aber jene Voraussetzung nicht, so kann der eine Komplementärkreis den andern ganz oder zum Theil einschliessen. Im ersteren Falle würde es weder eine gleichartig, noch eine ungleichartig schneidende Grade mit den Schnittwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  geben. Nichtsdestoweniger haben die beiden Aehnlichkeitspunkte der Komplementärkreise auch jetzt die Bedeutung der Punkte  $A_\lambda$  und  $I_\lambda$ ; aber die gemeinschaftliche kleinste Sehne dieser Kreise durch den Punkt  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda \\ I_\lambda \end{matrix} \right\}$  stellt diejenige Grade vor, welche die gegebenen Kreise unter den kleinstmöglichen Winkeln, deren Kosinusse sich wie  $\lambda:1$  verhalten,  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix} \right\}$  schneidet.

25. Es ist ein Kreis m und eine Grade L gegeben. Wir betrachten die letztere als einen Kreis mit unendlich grossem Radius, dessen unendlich ferner Mittelpunkt vom Punkte m durch die Grade getrennt ist. Es soll nun zu dem Kreise m und der Graden L der äussere und

innere Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) konstruirt werden, wobei  $\lambda = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$  ist, und die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zu Schnittwinkeln der Graden L und des Kreises m bestimmt sind. Fälln wir aus dem Punkte m auf die Grade L ein Loth mn, welches wir sowohl über m bis zu einem beliebigen Punkte x, als auch über n bis zu einem beliebigen Punkte y verlängern, so stellt dasselbe die Centrale des Kreises m und des uneigentlichen Kreises L vor, und es handelt sich nunmehr um die Punkte, in welchen dasselbe von zwei Graden geschnitten wird, die beiderseits der gegebenen Graden und dem gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  begegnen, aber die eine gleichartig, die andere ungleichartig. Behufs ihrer Konstruktion beschreiben wir um den Punkt m den Komplementärkreis für den Schnittwinkel  $\beta$ , legen alsdann durch einen beliebigen Punkt B der Graden L zwei Grade, Bb und Bb', welche der ersteren beiderseits unter dem Winkel  $\alpha$  begegnen, und fallen aus m auf diese Graden die Perpendikel mT und mT', von denen der erstere den Komplementärkreis in t, der letztere in t' schneidet. Legt man nun an eben diesen Kreis in t und t' Tangenten an, und begegnet die erstere der Strecke mx im Punkte A, die letztere der Strecke my im Punkte I, so ist A der äussere, I der innere Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ), da beide Tangenten die Grade L und den Kreis m unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneiden, und zwar die erstere gleichartig, die letztere ungleichartig.

26. Werden zwei gegebene Kreise M und m von irgend zwei Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  (nämlich Kreis M unter dem Winkel  $\alpha$ , Kreis m unter dem Winkel  $\beta$ ) relativ  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  geschnitten, so schneiden die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, oder sie schneiden dieselbe unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$ .

Betrachten wir die Kreise M und m als die thätigen, so werden der Voraussetzung zufolge die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  vom Kreise M unter dem Winkel  $\alpha$ , vom Kreise m unter dem Winkel  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  geschnitten. Folglich ist (18) die Chordale der Kreise M und m ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äusserer} \\ \text{innerer} \end{array} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahl der Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , schneidet daher entweder keinen der letzteren oder beide, und zwar unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$ .

27. Wenn umgekehrt zwei Kreise  $K_1$  und  $K_2$  die Chordale zweier gegebenen Kreise M und m unter gleichen Winkeln gleichartig schneiden, wenn ferner der eine, nämlich  $K_1$ , die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig oder ungleichartig, der andere aber den Kreis M unter eben demselben Winkel schneidet, wie der Kreis  $K_1$ , so wird er auch den Kreis m unter eben demselben Winkel, wie der Kreis  $K_1$ , schneiden. ungleichartig schneiden, wenn ferner der eine, nämlich  $K_1$ , die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig oder ungleichartig, der andere aber den Kreis M unter dem Supplement zu dem bezüglichen Schnittwinkel des Kreises  $K_1$  schneidet, so wird er auch den Kreis m unter dem Supplement zu dem bezüglichen Schnittwinkel des Kreises  $K_1$  schneiden.

Da im  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{array} \right\}$  Falle der Kreis  $M$  die Kreise  $K_1$  u.  $K_2$  unter dem Winkel  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet, so wird er von dem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Potenzkreise derselben orthogonal geschnitten. Nun ist aber die Chordale der gegebenen Kreise im  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{array} \right\}$  Falle ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äusserer} \\ \text{innerer} \end{array} \right\}$  Ähnlichkeitsstrahl der Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , hat also den Mittelpunkt des  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Potenzkreises der letzteren in sich. Folglich schneidet derselbe, wie den einen der gegebenen Kreise, so auch den andern, nämlich den Kreis  $m$ , orthogonal. Folglich wird der Kreis  $m$ , da er den einen der Kreise  $K_1$  und  $K_2$  unter dem Winkel  $\beta$  schneidet, nothwendig beide Kreise unter dem Winkel  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneiden (20, c).

28. Hat man einen reellen Kreis  $M$  und einen imaginären Kreis  $m$ , deren Chordale von zwei Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  geschnitten wird, schneidet ferner der eine von den thätigen Kreisen, nämlich  $K_1$ , den reellen Kreis  $M$  unter einem Winkel  $\alpha$ , den imaginären Kreis  $m$  orthogonal, hinwiederum der andere, nämlich Kreis  $K_2$ , den reellen Kreis  $M$  unter  $\left\{ \begin{array}{l} \text{demselben Winkel } \alpha \\ \text{dem Supplement des Winkels } \alpha \end{array} \right\}$ , so wird der letztere auch den imaginären Kreis orthogonal schneiden.

Da im  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{array} \right\}$  Falle der reelle Kreis  $M$  die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  unter dem Winkel  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet, so wird er von dem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Potenzkreise derselben orthogonal geschnitten. Zugleich ist die Chordale des reellen Kreises  $M$  und des imaginären  $m$  im  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{array} \right\}$  Falle ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äusserer} \\ \text{innerer} \end{array} \right\}$  Ähnlichkeitsstrahl der thätigen Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , hat also den Mittelpunkt ihres  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Potenzkreises in sich. Folglich schneidet derselbe, wie den reellen Kreis  $M$ , so auch den imaginären Kreis  $m$  orthogonal und ist unbedingt reell (14). Da nun dieser Potenzkreis in Gemeinschaft mit dem Kreise  $K_1$  von dem imaginären Kreise  $m$  orthogonal geschnitten wird, so haben beide mit einander, und mit beiden darum auch der Kreis  $K_2$ , eine gemeinschaftliche Sehne, welcher der Mittelpunkt  $m$  des imaginären Kreises angehört. Folglich schneidet der letztere auch den Kreis  $K_2$  orthogonal.

29. Die äussere und innere Bestimmungssekante. Wenn ein Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \end{array} \right\}$ , der zwei gegebene Kreise  $M$  und  $m$  unter dem Winkel  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet, der Chordale beider Kreise begegnet, so giebt es stets eine Gerade, welche die gegebenen Kreise unter denselben Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet. Wir nennen eine solche Gerade im  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{array} \right\}$  Falle die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{array} \right\}$  Bestimmungssekante für die Schnittwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  und bezeichnen dieselbe, da

sie im  $\begin{cases} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{cases}$  Falle eine gemeinschaftliche  $\begin{cases} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{cases}$  Tangente an die, um  $M$  und  $m$  beschriebenen Komplementärkreise für die Schnittwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  vorstellt, durch  $\begin{cases} T(\alpha, \beta) \\ t(\alpha, \beta) \end{cases}$ .

Der Kreis  $K_1$  schneide die gegebenen Kreise unter den spitzen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  und ihre Chordale  $OX$  unter dem Winkel  $\varphi_1$ . Beschreiben wir um den Mittelpunkt  $M$  des grösseren Kreises  $M$  den Komplementärkreis für den bezüglichen Schnittwinkel  $\alpha$ , so enthält der, dem letzteren Kreise sich anschmiegende Strahlbüschel auf jeder Seite der Centrale  $Mm$  zwei Strahlen, welche der Chordale  $OX$  unter dem Winkel  $\varphi_1$  begegnen. Aus diesen vier Strahlen heben wir diejenigen beiden heraus, welche mit dem Mittelpunkte  $K_1$  des thätigen Kreises auf derselben Seite der Centrale liegen und bezeichnen sie durch  $T$  und  $T'$ . Betrachten wir nun eine jede der Graden  $T$  und  $T'$  als einen uneigentlichen Kreis, der den Kreis  $M$  unter dem spitzen Winkel  $\alpha$  schneidet, der also seinen unendlich fernen Mittelpunkt in einem Perpendikel aus  $M$  auf die betreffende Grade, und zwar in dessen Verlängerung über  $M$  hat, so haben beide Kreise  $T$  und  $T'$ , ihre Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten der Chordale  $OX$ , folglich hat der eine von beiden z. B.  $T$ , nothwendig seinen Mittelpunkt auf derselben Seite der Chordale  $OX$ , wie der Kreis  $K_1$ . Da mithin diese beiden Kreise der Chordale der gegebenen Kreise unter dem Winkel  $\varphi_1$  gleichartig begegnen, da ferner Kreis  $K_1$  die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ , der uneigentliche Kreis  $T$  aber den Kreis  $M$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet, so muss derselbe, d. i. die Grade  $T$ , auch den Kreis  $m$  unter dem Winkel  $\beta$  schneiden (27). Daher ist die Grade  $T$  die äussere Bestimmungssekante  $T(\alpha, \beta)$ , begegnet also der Centrale im äussern Aehnlichkeitspunkte  $A_2$ . Setzt man für den Kreis  $K_1$  den Kreis  $K_2$ , der den Kreis  $M$  unter dem spitzen Winkel  $\alpha$ , den Kreis  $m$  unter dem stumpfen Winkel  $\beta'$  und die Chordale  $OX$  unter einem Winkel  $\varphi_2$  schneidet, so lässt sich auf analoge Art beweisen, dass es auch eine innere Bestimmungssekante  $t(\alpha, \beta)$  giebt, die mithin der Centrale im innern Aehnlichkeitspunkte  $I_2$  begegnet.

30. So lange der Punkt  $A_2$  vom Mittelpunkte  $M$  des grösseren Kreises durch  $m$  getrennt ist, welche Lage des Punktes  $A_2$  wir als seine positive bestimmen, hat die Grade  $T$  (mag sie nun auf der einen oder auf der andern Seite der Centrale liegen) sobald sie als ein Kreis, der die gegebenen Kreise unter spitzen Winkeln schneidet, aufgefasst wird, ihren unendlich fernen Mittelpunkt auf derjenigen Seite der Chordale  $OX$ , auf welcher sich der Mittelpunkt  $M$  des grösseren Kreises befindet, und die wir als die positive Seite der Chordale bestimmen. Gleiches gilt daher von allen Kreisen  $K_1$ , welche beide gegebenen Kreise unter spitzen Winkeln schneiden, während alle Kreise  $K_1$ , welche beiden gegebenen unter stumpfen Winkeln begegnen, ihre Mittelpunkte auf der negativen Seite der Chordale haben.

Da der innere Aehnlichkeitspunkt  $I_2$  stets zwischen den Punkten  $M$  und  $m$  liegt, so hat die innere Bestimmungssekante, sobald sie als ein Kreis aufgefasst wird, der den grösseren Kreis  $M$  unter dem spitzen Winkel  $\alpha$  schneidet, ihren unendlich fernen Mittelpunkt stets auf der positiven Seite der Chordale. Gleiches gilt daher von allen Kreisen  $K_2$ , welche den Kreis  $M$  unter dem spitzen Winkel  $\alpha$ , den Kreis  $m$  unter dem stumpfen Winkel  $\beta'$  schneiden, während alle Kreise  $K_2$ , welche dem Kreis  $M$  unter dem stumpfen Winkel  $\alpha'$ , dem Kreis  $m$  unter dem spitzen Winkel  $\beta$  begegnen, ihre Mittelpunkte auf der negativen Seite der Chordale haben. Beachten wir noch, dass

die  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{smallmatrix} \right\}$  Bestimmungssekante der Chordale OX unter dem Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{smallmatrix} \right\}$  begegnet, so wird sich ihre Benennung durch nachstehende Sätze rechtfertigen:

a) Bezeichnen wir durch  $\left\{ \begin{smallmatrix} K_1 \text{ und } K'_1 \\ K_2 \text{ und } K'_2 \end{smallmatrix} \right\}$  zwei Kreise, von denen jeder zwei gegebene Kreise M und m bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$

gleichartig schneidet, der erste aber unter dem spitzen, der zweite unter den stumpfen Winkeln, so schneiden dieselben die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, oder unter demselben Winkel  $\varphi_1$ , unter welchem sie von der äussern Bestimmungssekante geschnitten wird; ihre Mittelpunkte jedoch liegen auf verschiedenen Seiten jener Chordale, und zwar hat der Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K_1 \\ K'_1 \end{smallmatrix} \right\}$ , bei positiver Lage des äussern  $\lambda$ -Punktes, seinen Mittelpunkt auf der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix} \right\}$  Seite derselben. ungleichartig schneidet, der erste aber den Kreis M unter dem spitzen, der zweite unter dem stumpfen Winkel, so schneiden dieselben die Chordale der gegebenen Kreise entweder beiderseits nicht, od. unter demselben Winkel  $\varphi_2$ , unter welchem sie von der innern Bestimmungssekante geschnitten wird; ihre Mittelpunkte jedoch liegen auf verschiedenen Seiten jener Chordale, und zwar hat der Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K_2 \\ K'_2 \end{smallmatrix} \right\}$  seinen Mittelpunkt jederzeit auf der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix} \right\}$  Seite derselben.

b) Wenn umgekehrt (27)

ein Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K_1 \\ K'_1 \end{smallmatrix} \right\}$  den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den grösseren M, unter dem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{smallmatrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{smallmatrix} \right\}$ , ihre Chordale aber unter demselben Winkel  $\varphi_1$  schneidet, unter welchem sie von der äussern Bestimmungssekante T ( $\alpha, \beta$ ) geschnitten wird; wenn endlich auch sein Mittelpunkt, bei positiver Lage des äussern  $\lambda$ -Punktes, auf der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix} \right\}$  Seite jener Chordale liegt, so schneidet er den Kreis m unter dem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{smallmatrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \beta' \end{smallmatrix} \right\}$ . ein Kreis  $\left\{ \begin{smallmatrix} K_2 \\ K'_2 \end{smallmatrix} \right\}$  den einen von zwei gegebenen Kreisen M und m, z. B. den grösseren M, unter dem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{smallmatrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{smallmatrix} \right\}$ , ihre Chordale aber unter demselben Winkel  $\varphi_2$  schneidet, unter welchem sie von der innern Bestimmungssekante t ( $\alpha, \beta$ ) geschnitten wird; wenn endlich auch sein Mittelpunkt auf der  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix} \right\}$  Seite jener Chordale liegt, so schneidet er den Kreis m unter dem  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{stumpfen} \\ \text{spitzen} \end{smallmatrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{smallmatrix} \beta' \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ .

31. Hat man einen reellen Kreis M und einen reellen oder imaginären Kreis m, beschreibt um den Mittelpunkt M des Kreises M, dessen Komplementärkreis für den Schnittwinkel  $\alpha$  und legt an den letztern Kreis eine Tangente an, die, was als möglich vorausgesetzt wird, durch den Mittelpunkt m des Kreises m geht, so dass dieselbe, wenn der Kreis M imaginär ist, die Peripherie seines Modulararkreises halbirt, so stellt diese Tangente, da sie den Kreis M unter dem Winkel  $\alpha$ , den Kreis m, mag er nun reell oder imaginär sein, orthogonal schneidet, die äussere

oder auch die innere Bestimmungssekante  $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$  in Bezug auf die gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  vor. Der Satz (28) begreift daher auch folgenden in sich:

Hat man einen reellen Kreis  $M$  und einen imaginären Kreis  $m$ ; schneidet ferner ein Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  1. den Kreis  $M$  unter dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \right\}$ , 2. die Chordale der gegebenen Kreise unter demselben Winkel, unter welchem sie von der Bestimmungssekante  $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$  beider Kreise geschnitten wird, liegt 3. sein Mittelpunkt in Hinsicht auf den Punkt  $M$  auf  $\left\{ \begin{matrix} \text{derselben} \\ \text{der entgegengesetzten} \end{matrix} \right\}$  Seite jener Chordale, so schneidet derselbe Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  den imaginären Kreis  $m$  orthogonal.

32. Potenzkreise ( $\lambda$ ). Um die Punkte  $M$  und  $m$  sind mit den Radien  $R$  und  $r$  Kreise beschrieben. Ferner sind zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, unter welchen die gegebenen Kreise von andern Kreisen geschnitten werden sollen.

Wir konstruieren die äussere und die innere Bestimmungssekante,  $T(\alpha, \beta)$  und  $t(\alpha, \beta)$ ; jene schneidet die Centrale der gegebenen Kreise in ihrem äussern, diese in ihrem innern Ähnlichkeitspunkte ( $\lambda$ ). Ein Kreis, der den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Ähnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) zu seinem Centrum, und der mit beiden gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Chordale  $OX$  hat (welche die Centrale im Punkte  $O$  schneidet), soll der  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreis ( $\lambda$ ) heissen. Schneiden sich die gegebenen Kreise, so sind beide Potenzkreise ( $\lambda$ ) reell. Liegen die Kreise  $M$  und  $m$  ausser einander, so ist der Spielraum des Punktes  $A_\lambda$ , nämlich die unendliche Strecke  $M.m$ , vom kleinsten gemeinschaftlichen Orthogonalkreise  $O$  der gegebenen Kreise ausgeschlossen (20), daher jedenfalls der äussere Potenzkreis ( $\lambda$ ) reell. Umschliesst der grössere Kreis  $M$  den Kreis  $m$ , so ist der Spielraum des innern  $\lambda$ -Punktes, nämlich die endliche Strecke  $Mm$ , vom Orthogonalkreise  $O$  ausgeschlossen, daher jedenfalls der innere Potenzkreis ( $\lambda$ ) reell. Ist in diesem Falle der äussere Potenzkreis ( $\lambda$ ) imaginär, so hat sein Centrum, also der äussere  $\lambda$ -Punkt, die positive Lage (30).

Jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig schneidet und ihrer Chordale begegnet, wird vom äussern Potenzkreise ( $\lambda$ ) orthogonal geschnitten.

Da der thätige Kreis der Chordale  $OX$  der gegebenen Kreise begegnet, so giebt es für dieselben (29) eine äussere Bestimmungssekante  $T(\alpha, \beta)$ , welche jene Chordale unter einem Winkel  $\varphi_1$  schneiden wird. Da aber diese Grade  $T(\alpha, \beta)$  durch das Centrum des Potenzkreises  $A_\lambda$  geht, denselben also, mag er nun reell oder imaginär sein, orthogonal schneidet, so ist sie in Rücksicht auf die Kreise  $M$  und  $A_\lambda$  eine Bestimmungssekante  $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$ . Zugleich ist der Winkel  $\varphi_1$ , unter welchem diese Grade der Chordale  $OX$  begegnet, der nämliche, unter welchem die letztere vom thätigen Kreise geschnitten wird (30, a). Daher erfüllt jeder Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \\ K'_1 \end{matrix} \right\}$ , der die gegebenen Kreise unter den  $\left\{ \begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix} \right\}$  Winkeln  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \text{ und } \beta \\ \alpha' \text{ und } \beta' \end{matrix} \right\}$  schneidet, folgende Bedingungen:

1. er schneidet die Chordale der Kreise  $M$  und  $A_\lambda$  unter demselben Winkel, unter welchem sie von der Bestimmungssekante  $T(\alpha, \frac{\pi}{2})$  dieser Kreise geschnitten wird;

2. er schneidet den Kreis  $M$  unter dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \right\}$ ;

3. er hat, bei positiver Lage des äusseren  $\lambda$ -Punktes (der einzig möglichen, falls der Kreis  $A_\lambda$  imaginär ist) seinen Mittelpunkt auf der  $\left\{ \begin{matrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{matrix} \right\}$  Seite jener Chordale (30, a); folglich muss derselbe in Folge der Sätze (30, b und 31) den Kreis  $A_\lambda$  orthogonal schneiden.

Jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  ungleichartig schneidet und ihrer Chordale begegnet, wird vom innern Potenzkreise ( $\lambda$ ) orthogonal geschnitten.

Es lässt sich auf ganz analoge Weise, wie zuvor, darthun, dass jeder Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K_2 \\ K'_2 \end{matrix} \right\}$ , der den Kreis  $M$  unter dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{spitzen} \\ \text{stumpfen} \end{matrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \right\}$ , den Kreis  $m$  unter dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{stumpfen} \\ \text{spitzen} \end{matrix} \right\}$  Winkel  $\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta' \end{matrix} \right\}$  schneidet, in Rücksicht auf die Kreise  $M$  und  $I_\lambda$  genau dieselben Bedingungen erfüllt, wie der Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \\ K'_1 \end{matrix} \right\}$  in Rücksicht auf die Kreise  $M$  und  $A_\lambda$ .

Sind überhaupt  $x$  und  $y$  zwei Winkel, deren Kosinuse sich wie die der gegebenen Winkel, also wie  $\lambda:1$  verhalten, und welche, falls der  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussere} \\ \text{innere} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) von beiden gegebenen Kreisen zugleich eingeschlossen ist, nicht kleiner sind, als bezüglich diejenigen Winkel, unter welchen die gegebenen Kreise von der gemeinschaftlichen kleinsten Sehne durch den Punkt  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda \\ I_\lambda \end{matrix} \right\}$  geschnitten werden, so dass eine Bestimmungssekante  $\left\{ \begin{matrix} T(x, y) \\ t(x, y) \end{matrix} \right\}$  vorhanden ist: so wird jeder Kreis, welcher die gegebenen Kreise  $M$  und  $m$  bezüglich unter den Winkeln  $x$  und  $y$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix} \right\}$  schneidet, ein Orthogonalkreis des  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreises ( $\lambda$ ) sein.

33. Die äussere und innere  $\lambda$ -Symmetrale. Um die Punkte  $M_1, M_2$  und  $M_3$ , welche nicht auf einer Graden liegen, sind mit den Radien  $R_1, R_2$  und  $R_3$  Kreise beschrieben. Zugleich sind drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben, unter welchen die gegebenen Kreise von andern Kreisen geschnitten werden sollen. Wir bestimmen für die Kreise  $\left\{ \begin{matrix} M_1 \text{ und } M_2 \\ M_1 \text{ und } M_3 \\ M_2 \text{ und } M_3 \end{matrix} \right\}$  die

Punkte  $\left\{ \begin{matrix} A_{\lambda_1} \text{ und } I_{\lambda_1} \\ A_{\lambda_2} \text{ und } I_{\lambda_2} \\ A_{\lambda_3} \text{ und } I_{\lambda_3} \end{matrix} \right\}$ , wobei  $\lambda_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$

$$\lambda_2 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$$

$$\lambda_3 = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Da die drei Punkte  $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, A_{\lambda_3}$  die äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei Paare von Komplementärkreisen sind, welche behufs der Bestimmung jener Punkte um die Mittelpunkte der gegebenen Kreise beschrieben werden mussten, so liegen dieselben auf einer Geraden, die wir die äussere  $\lambda$ -Symmetrale nennen. Da ebenso die Punkte  $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, I_{\lambda_3}$  die innern Aehnlichkeitspunkte jener drei Paare von Komplementärkreisen sind, so liegen je zwei von diesen Punkten, welche sich auf zwei bestimmte Paare der Komplementärkreise beziehen, mit dem äussern Aehnlichkeitspunkt des dritten Paares auf einer Geraden, und wir erhalten daher drei „innere  $\lambda$ -Symmetralen“  $I_{\lambda_1} I_{\lambda_2} A_{\lambda_3}, I_{\lambda_1} I_{\lambda_3} A_{\lambda_2}, I_{\lambda_2} I_{\lambda_3} A_{\lambda_1}$ . Endlich ist noch jeder der drei äussern Aehnlichkeitspunkte ( $\lambda$ ) das Centrum eines äussern, jeder der drei innern  $\lambda$ -Punkte das Centrum eines innern Potenzkreises ( $\lambda$ ). Setzen wir nun voraus, dass die drei gegebenen Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  und überhaupt drei Winkel  $x, y, z$ , welche den Gleichungen  $\frac{\cos x}{\cos y} = \lambda_1, \frac{\cos x}{\cos z} = \lambda_2$  Genüge leisten, von der Beschaffenheit sind, dass sie, falls die drei gegebenen Kreise nicht ausser einander liegen, die Grenzwerte nicht überschreiten, bei welchen die Möglichkeit einer  $\left\{ \begin{array}{l} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{array} \right\}$  Bestimmungsssekante  $\left\{ \begin{array}{l} T_1(x,y) \\ t_1(x,y) \end{array} \right\}$  für das Kreispaar  $M_1, M_2$ , oder  $\left\{ \begin{array}{l} T_2(x,z) \\ t_2(x,z) \end{array} \right\}$  für das Kreispaar  $M_1, M_3$ , oder  $\left\{ \begin{array}{l} T_3(y,z) \\ t_3(y,z) \end{array} \right\}$  für das Kreispaar  $M_2, M_3$  aufhört, so ergibt sich:

1. Alle Kreise  $K_1$ , welche den drei gegebenen Kreisen  $M_1, M_2, M_3$  bezüglich unter irgend drei Winkeln  $x, y, z$ , wie die vorausgesetzten, gleichartig begegnen, schneiden die drei äusseren Potenzkreise ( $\lambda$ ) orthogonal (32). Folglich haben die letzteren eine gemeinschaftliche Chordale, welche auf der äussern  $\lambda$ -Symmetrale senkrecht steht und die Mittelpunkte aller Kreise  $K_1$  enthält. Zu den Kreisen  $K_1$  gehört aber auch der gemeinschaftliche Orthogonalkreis aller drei gegebenen Kreise, da dessen Schnittwinkel mit den letzteren, von denen jeder  $= \frac{\pi}{2}$  ist, den, für die Winkel  $x, y, z$  gestellten Bedingungen Genüge leisten. Mithin liegt der Chordalpunkt  $C$  der gegebenen Kreise ebenfalls auf der gemeinschaftlichen Chordale der drei äussern Potenzkreise ( $\lambda$ ). Hierauf gründet sich der Satz:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise  $M_1, M_2, M_3$  ein Loth auf eine äussere  $\lambda$ -Symmetrale, welche sich auf drei gegebene Schnittwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  der Kreise  $M_1, M_2, M_3$  bezieht, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die gegebenen unter irgend drei Winkeln gleichartig schneiden, deren Kosinusse sich wie die der gegebenen Winkel verhalten, insbesondere auch der Ort des Mittelpunktes derjenigen beiden Kreise, welche die gegebenen unter den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gleichartig schneiden.

2. Alle Kreise  $K_2$ , welche den drei gegebenen Kreisen  $M_1, M_2, M_3$  bezüglich unter irgend drei Winkeln  $x, y, z$ , wie die vorausgesetzten, ungleichartig begegnen (d. h. bezüglich unter den Winkeln  $x, y', z'$  oder  $x', y, z$  u. s. w.), schneiden zwei innere Potenzkreise ( $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}$  oder etc.), die sich auf die beiden ungleichartig geschnittenen Kreispaaire beziehen, und den zugeordneten äussern Potenzkreis ( $A_{\lambda_2}$  oder etc.), der sich auf das gleichartig geschnittene Kreispaar bezieht, orthogonal (32). Folglich haben die drei zusammengehörigen Potenzkreise ( $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2},$

$\lambda_2$ , oder etc.) eine gemeinschaftliche Chordale, welche auf der zugeordneten innern  $\lambda$ -Symmetrale senkrecht steht und die Mittelpunkte aller Kreise  $K_2$  von bestimmter Klasse enthält. Ein solcher Kreis  $K_2$  ist aber auch stets der gemeinschaftliche Orthogonalkreis der gegebenen Kreise, da er die letzteren unter solchen Winkeln (ungleichartig) schneidet, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten; folglich liegt sein Centrum C mit den Mittelpunkten aller Kreise  $K_2$  irgend einer Klasse auf der gemeinschaftlichen Chordale der zugeordneten drei Potenzkreise ( $\lambda$ ). Hierauf gründet sich der Satz:

Fällt man aus dem Chordalpunkt dreier gegebenen Kreise  $M_1, M_2, M_3$  ein Loth auf eine der drei innern  $\lambda$ -Symmetralen, welche sich auf drei gegebene Schnittwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  der Kreise  $M_1, M_2, M_3$  beziehen, so ist dasselbe der Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die gegebenen unter den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und überhaupt unter irgend drei Winkeln  $x, y, z$ , deren Kosinuse sich wie die der gegebenen Winkel verhalten, ungleichartig schneiden, und zwar diejenigen Kreise gleichartig, auf welche sich der mitwirkende äussere  $\lambda$ -Punkt bezieht.

34. Die äussere  $\lambda$ -Symmetrale ist die gemeinschaftliche Chordale aller Kreise  $K_1$ . Jede innere  $\lambda$ -Symmetrale ist die gemeinschaftliche Chordale aller zugeordneten Kreise  $K_2$ , welche nämlich dasjenige Paar der gegebenen Kreise gleichartig schneiden, auf welches sich der, jener Symmetrale angehörige äussere  $\lambda$ -Punkt bezieht. Daher bildet sowohl die Kreisschaar  $K_1$ , als auch jede der drei Kreisschaaren  $K_2$ , jenachdem die zugeordnete  $\lambda$ -Symmetrale vom gemeinschaftlichen Orthogonalkreise C der gegebenen Kreise geschnitten wird oder nicht, entweder einen Kreisbüschel oder eine involutorische Kreisschaar (22). In beiden Fällen ist eine jede von allen vier Kreisschaaren, wenn die drei gegebenen Kreise ausser einander liegen, durch zwei Kreise begrenzt, welche beiderseits einen gewissen von den gegebenen Kreisen berühren, aber der eine einschliessend, der andere ausschliessend. Ist z. B.  $\alpha < \beta < \gamma$ , so sind die Verhältniss-exponenten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 1$ , und es giebt drei Winkel  $\text{arc. cos } \pm 1, \text{arc. cos } \pm \frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } \pm \frac{1}{\lambda_2}$ , deren Kosinuse sich wie  $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$  verhalten. Alsdann wird die Kreisschaar  $K_1$  begrenzt von zwei Kreisen, deren einer den Kreis  $M_1$  einschliessend berührt und die Kreise  $M_2$  und  $M_3$  unter den Winkeln  $\text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_2}$  schneidet, während der andere den Kreis  $M_1$  ausschliessend berührt und die Kreise  $M_2$  und  $M_3$  unter den Winkeln  $\text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_2}$  schneidet. Aehnliches gilt von den drei Schaaren  $K_2$ . Die beiden Grenzkreise der

Schaar  $K_2$  schneiden die gegebenen  $M_1, M_2, M_3$  der Reihe nach unter den Winkeln

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_2} \text{ und } \pi, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_2} \\ \pi, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_2} \text{ und } 0, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_2} \\ \pi, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_2} \text{ und } 0, \text{arc. cos } \frac{1}{\lambda_1}, \text{arc. cos } -\frac{1}{\lambda_2} \end{array} \right\}$$

Der berührte Kreis ist stets derjenige, auf welchen sich der kleinste unter den drei gegebenen Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezieht.

## VII. Aufgaben über den gleichwinkligen und ungleichwinkligen Schnitt zweier oder mehrerer Kreise durch einen Kreis.

35. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise  $M$  und  $m$  unter dem gegebenen Winkel  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ gleichartig} \\ 2. \text{ ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet, und zwar den einen, z. B.  $M$ , in einem gegebenen Punkte  $B$ .

Fig. 10.

1. Man konstruiere zu jedem der gegebenen Kreise den Bestimmungskreis für den Schnittwinkel  $\alpha$ , lege durch den gegebenen Peripheriepunkt  $B$  des Kreises  $M$  einen äussern Ähnlichkeitsstrahl  $Abb'BB'$  und aus den potenzhaltenden Punkten  $B$  und  $b'$  desselben an die bezüglichen Bestimmungskreise  $M$  und  $m$  die Tangentenpaare  $BT$  und  $BT'$ ,  $b't$  und  $b't'$ . Darauf verlängere man die gleichliegenden Tangenten  $\left\{ \begin{array}{l} BT \text{ und } b't \\ BT' \text{ und } b't' \end{array} \right\}$ , welche nämlich von dem Winkel, den die Radien  $MB$  und  $mb'$  bei gehöriger Verlängerung bilden, beiderseits  $\left\{ \begin{array}{l} \text{aus} \\ \text{ein} \end{array} \right\}$  geschlossen sind, bis sie sich in dem Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$  begegnen, so ist  $KB = Kb'$  (wie auch  $K'B = K'b'$ ); denn  $\angle MBK - MBB' = \angle mb'K - mb'b$  oder  $\angle KBB' = Kb'b$ . Beschreibt man daher um die Punkte  $K$  und  $K'$  Kreise mit den Radien  $KB$  und  $K'B$ , so genügen beide den gestellten Forderungen. Durch die Schnittpunkte  $B$  und  $b'$  dieser Kreise mit den gegebenen giebt es einen Berührungskreis und einen Orthogonalkreis. Der Mittelpunkt  $\left\{ \begin{array}{l} k \\ k' \end{array} \right\}$  des  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersteren} \\ \text{letzteren} \end{array} \right\}$  ist derjenige Punkt der Geraden  $KK'$ , in welchem sich die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Radien } MB \text{ und } mb' \\ \text{Tangenten in } B \text{ und } b' \end{array} \right\}$  bei gehöriger Verlängerung begegnen. Daher sind die Mittelpunkte  $K$  und  $K'$  der beiden gleichartig schneidenden Kreise durch die Mittelpunkte  $k$  und  $k'$  des Berührungs- und Orthogonalkreises harmonisch getrennt. Betrachtet man den konstruirten Ähnlichkeitsstrahl als einen Kreis  $K$ , so liegt das Centrum des konjugirten Kreises  $K'$  in dem Mittelpunkte  $O$  der Strecke  $kk'$ . Der aus diesem Punkte mit dem Radius  $OB$  beschriebene Kreis schneidet daher die gegebenen Kreise unter demselben Winkel, wie jener Ähnlichkeitsstrahl.

2. Die Konstruktion des ungleichartig schneidenden Kreises weicht nur darin von der vorigen ab, dass statt eines äussern ein innerer Ähnlichkeitsstrahl durch den gegebenen Punkt  $B$  gelegt werden muss. Verlängert man diesmal die ungleichliegenden Tangenten  $\left\{ \begin{array}{l} BT \text{ und } b't \\ BT' \text{ und } b't' \end{array} \right\}$  aus den potenzhaltenden Punkten  $B$  und  $b'$  an die bezüglichen Bestimmungskreise, bis sie sich in dem Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$  begegnen, so ist wiederum  $KB = Kb'$  (wie auch  $K'B = K'b'$ ); denn  $\angle MBT + MBB' = \angle mb't + mb'b$  oder  $\angle KBB' = Kb'b$ . Daher erfüllen die, um die Punkte  $K$  und  $K'$

mit den Radien  $KB$  und  $K'B$  beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Auch diese Punkte  $K$  und  $K'$  sind durch die Mittelpunkte des in  $B$  und  $b'$  ungleichartig berührenden und orthogonal schneidenden Kreises harmonisch getrennt.

36. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise  $M$  und  $m$  unter den gegebenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ gleichartig} \\ 2. \text{ ungleichartig} \end{array} \right\}$  schneidet, und zwar den einen, z. B.  $M$ , in einem gegebenen Punkte  $B$ .

Man konstruiere um die Centrale  $Mm$  zwei (kongruente) Kreise, welche auf entgegen- Fig. 11. gesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Sehne einen Peripheriewinkel gleich der Differenz  $\alpha - \beta$  einschliessen. Darauf ziehe man den Radius  $MB$  und verlängere ihn nach beiden Seiten, bis er das, durch den eingeschlossenen Peripheriewinkel  $\alpha - \beta$  bestimmte Segment  $\left\{ \begin{array}{l} \text{jenseits} \\ \text{disseits} \end{array} \right\}$  der Centrale  $Mm$  im Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \end{array} \right\}$  verlässt, und lege aus diesen Punkten  $S_1$  und  $S_2$  durch den Mittelpunkt des

Kreises  $m$  die Sekanten  $S_1c_1mb_1$  und  $S_2b_2mc_2$ , welche den Kreis  $m$  in den Punkten  $c_1$  und  $b_1$ ,  $b_2$  und  $c_2$  schneiden. Zieht man nun 1. die Graden  $Bb_1$  und  $Bb_2$ , welche dem Kreise  $m$  in einem zweiten Punkte  $b'_1$  und  $b'_2$  begegnen, so vertreten diese beiden Graden zusammen einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn  $\alpha = \beta$  wird; die Punkte  $b_1$  und  $b_2$  vertreten einen zugeordneten, die Punkte  $b'_1$  und  $b'_2$  einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte  $B$ . Daher muss, nachdem man um die Mittelpunkte  $M$  und  $m$  die Bestimmungskreise für die Schnittwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  beschrieben hat, von den beiden Tangenten  $BT$  und  $BT'$  aus dem Punkte  $B$  an den Bestimmungskreis  $M$  die eine auf die gleichliegende Tangente aus dem Punkte  $b'_1$  an den Bestimmungskreis  $m$ , die andere auf die gleichliegende Tangente aus dem Punkte  $b'_2$  bezogen werden. Nämlich bei Anwendung des Punktes  $\left\{ \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \end{array} \right\}$  hat man die, von dem Winkel  $\left\{ \begin{array}{l} MB, mb'_1 \\ MB, mb'_2 \end{array} \right\}$  beiderseits  $\left\{ \begin{array}{l} \text{aus} \\ \text{ein} \end{array} \right\}$  geschlossenen Tangenten  $\left\{ \begin{array}{l} BT \text{ und } b'_1t_1 \\ BT' \text{ und } b'_2t_2 \end{array} \right\}$  bis zu ihren Schnittpunkten  $K_1$  und  $K_2$  zu verlängern; dann ist  $K_1B = K_1b'_1$ ;  $K_2B = K_2b'_2$ .

$$\text{Denn } \angle MBK_1 - mb'_1K_1 = (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta);$$

$$\angle MBb'_1 - mb'_1B = S_1Bb_1 - (\pi - S_1b_1B) = \pi - S_1 - \pi = -(\alpha - \beta).$$

$$\text{Durch Subtraktion erhält man } \frac{MBK_1 - MBb'_1}{K_1Bb'_1} = \frac{mb'_1K_1 - mb'_1B}{K_1b'_1B}$$

$$\text{Ferner } \angle MBK_2 - mb'_2K_2 = \alpha - \beta;$$

$$\angle MBb'_2 - mb'_2B = MBb_2 - S_2b_2B = S_2 = \alpha - \beta.$$

$$\text{Durch Subtraktion erhält man } \frac{MBb'_2 - MBK_2}{K_2Bb'_2} = \frac{mb'_2B - mb'_2K_2}{K_2b'_2B}$$

Beschreibt man daher um die Punkte  $K_1$  und  $K_2$  Kreise mit den Radien  $K_1B$  und  $K_2B$ , so schneiden dieselben die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  gleichartig.

Zieht man nun 2. die Graden  $Bc_1$  und  $Bc_2$ , welche den Kreis  $m$  in einem zweiten Punkte  $c'_1$  und  $c'_2$  schneiden, so vertreten diese beiden Graden zusammen einen innern Aehnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn  $\alpha = \beta$  wird; die Punkte  $c_1$  und  $c_2$  vertreten einen zugeordneten, die Punkte  $c'_1$  und  $c'_2$  einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte  $B$ . Daher muss von den beiden Tangenten  $BT$  und  $BT'$  die  $\left. \begin{matrix} \text{eine} \\ \text{andere} \end{matrix} \right\}$  auf die ungleich liegende Tangente aus dem Punkte  $\left\{ \begin{matrix} c'_1 \\ c'_2 \end{matrix} \right\}$  an den Bestimmungskreis  $m$  bezogen werden. Nämlich bei Anwendung des Punktes  $\left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\}$  hat man die, von dem Winkel  $\left\{ \begin{matrix} MB, mc'_1 \\ MB, mc'_2 \end{matrix} \right\}$   $\left\{ \begin{matrix} \text{aus- und ein} \\ \text{ein- und aus} \end{matrix} \right\}$  geschlossenen Tangente  $\left\{ \begin{matrix} BT \text{ und } c'_1 t_3 \\ BT' \text{ und } c'_2 t_4 \end{matrix} \right\}$  bis zu ihren Schnittpunkten  $K_3$  u.  $K_4$  zu verlängern; dann ist  $K_3 B = K_3 c'_1$   $K_4 B = K_4 c'_2$ .

$$\text{Denn } \angle MBK_3 + mc'_1 K_3 = (\pi - \alpha) + \beta = \pi - (\alpha - \beta);$$

$$\angle MBc'_1 + mc'_1 B = S_1 Bc_1 + S_1 c_1 B = \pi - (\alpha - \beta).$$

$$\text{Durch Subtraction erhält man } \frac{MBK_3 - MBc'_1}{K_3 Bc'_1} = \frac{mc'_1 B - mc'_1 K_3}{K_3 c'_1 B}.$$

$$\text{Ferner } \angle MBK_4 + mc'_2 K_4 = \alpha + (\pi - \beta) = \pi + \alpha - \beta;$$

$$\angle MBc'_2 + mc'_2 B = mBc_2 + \pi - mc_2 B = \pi + \alpha - \beta.$$

$$\text{Durch Subtraction erhält man } \frac{MBc'_2 - mBK_4}{K_4 Bc'_2} = \frac{mc'_2 K_4 - mc'_2 B}{K_4 c'_2 B}.$$

Beschreibt man daher um die Punkte  $K_3$  und  $K_4$  Kreise mit den Radien  $K_3 B$  und  $K_4 B$ , so schneiden dieselben die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  ungleichartig.

Anmerkung. Lässt man den Winkel  $mMB$ , durch welchen der Punkt  $B$  bestimmt ist, abnehmen, so gelangt man bald zu solchen Punkten  $B$ , dass von den beiden, um die Centrale  $Mm$  konstruirten Segmenten, welche beiderseits den Peripheriewinkel  $\alpha - \beta$  einschliessen, nur noch das disseitige, aber nicht mehr das jenseitige durch den verlängerten Radius  $MB$  geschnitten wird. Alsdann geht jedoch die Verlängerung des Radius  $MB$  durch das andere Segment desselben Kreises, welches den Peripheriewinkel  $\pi - (\alpha - \beta)$  einschliesst, und verlässt es in einem Punkte  $S_1$ , welcher dieselben Dienste leistet, wie zuvor der jenseits der Centrale gelegene. Zieht man nämlich die Sekante  $S_1 c_1 m b_1$ , darauf die Graden  $Bb_1$  und  $Bc_1$ , welche den Kreis  $m$  nochmals in den Punkten  $b'_1$  und  $c'_1$  schneiden, und legt aus den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} B \text{ und } b'_1 \\ B \text{ und } c'_1 \end{matrix} \right\}$  an die Bestimmungskreise  $M$  u.  $m$  die  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  liegenden Tangenten  $\left\{ \begin{matrix} BT \text{ und } b'_1 t_1 \\ BT' \text{ und } c'_1 t_3 \end{matrix} \right\}$ , welche sich bei gehöriger Verlängerung in dem Punkte  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\}$  begegnen, so ist wiederum  $K_1 B = K_1 b'_1$ ,  $K_2 B = K_2 c'_1$ ;

$$\text{Denn } \angle MBK_1 - mb'_1 K_1 = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta);$$

$$\angle MBb'_1 - mb'_1 B = \pi - S_1 Bb_1 - (\pi + S_1 b_1 B) = -(\pi - S_1) = -(\alpha - \beta).$$

$$\text{Folglich durch Subtraction } \frac{MBb'_1 - MBK_1}{K_1 Bb'_1} = \frac{mb_1 B - mb'_1 K_1}{K_1 b'_1 B}.$$

$$\text{Ferner } \angle MBK_2 + mc'_1 K_2 = \pi - \alpha + \beta = \pi - (\alpha - \beta);$$

$$\angle MBc'_1 - mc'_1 B = \pi - S_1 Bc_1 - S_1 c_1 B = \pi - (\pi - S_1) = \pi - (\alpha - \beta).$$

$$\text{Folglich durch Subtraction } \frac{MBc'_1 - MBK_2}{K_2 Bc'_1} = \frac{mc'_1 B + mc'_1 K_2}{K_2 c'_1 B}.$$

Daher schneidet der um den Punkt  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\}$  mit dem Radius  $\left\{ \begin{matrix} K_1 B \\ K_2 B \end{matrix} \right\}$  beschriebene Kreis die gegebenen Kreise unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig.

37. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis  $m$  und eine gegebene Grade  $L$

1. unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$       2. bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidet, und zwar den Kreis  $m$  (oder auch die Grade  $L$ ) in einem gegebenen Punkte  $b$ .

Die Lösung der ersten Aufgabe ist derjenigen analog, die in § 35 gezeigt wurde. Zur Lösung der zweiten Aufgabe ziehe man einen Durchmesser  $dd_1$ , des Kreises  $m$  senkrecht gegen die Grade  $L$  und lege an denselben zwei andere Durchmesser  $b_1 c_1$  und  $b_2 c_2$  unter dem Winkel  $\alpha - \beta$  an. Zieht man alsdann die Graden  $\left\{ \begin{matrix} bb_1 \text{ und } bb_2 \\ bc_1 \text{ und } bc_2 \end{matrix} \right\}$ , welche der Grade  $L$  in den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} B_1 \text{ und } B_2 \\ B_3 \text{ und } B_4 \end{matrix} \right\}$  und dem Durchmesser  $dd_1$ , in den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} e_1 \text{ und } e_2 \\ e_3 \text{ und } e_4 \end{matrix} \right\}$  begegnen, so vertreten beide Grade zusammen einen  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Ähnlichkeitsstrahl, in welchen sie übergehen, wenn  $\alpha = \beta$  wird.

Die Punkte  $\left\{ \begin{matrix} B_1 \text{ und } B_2 \\ B_3 \text{ und } B_4 \end{matrix} \right\}$  vertreten einen potenzhaltenden Punkt zu dem gegebenen Punkte  $b$ .

Beschreibt man daher einerseits um den Punkt  $m$  den Bestimmungskreis für den Schnittwinkel  $\alpha$  und legt an denselben aus  $b$  die Tangenten  $bt$  und  $b't'$  an; errichtet andererseits auf der Grade  $L$  in den Punkten  $B_1, B_2$  etc. die Perpendikel  $B_1 M_1, B_2 M_2$  etc. und legt an jeden derselben auf beiden Seiten in seinem Fusspunkte den Winkel  $\beta$  an: so werden die Tangenten  $bt$  und  $b't'$  bei gehöriger Verlängerung mit den  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  liegenden Schenkeln  $\left\{ \begin{matrix} B_1 T_1 \text{ und } B_2 T_2 \\ B_3 T_3 \text{ und } B_4 T_4 \end{matrix} \right\}$  der in  $\left\{ \begin{matrix} B_1 \text{ u. } B_2 \\ B_3 \text{ u. } B_4 \end{matrix} \right\}$  angelegten Winkel  $\beta$  in den Punkten  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \text{ und } K_2 \\ K_3 \text{ und } K_4 \end{matrix} \right\}$  zusammentreffen, und zwar so, dass  $K_1 b = K_1 B_1$ ,  $K_2 b = K_2 B_2$ ,  $K_3 b = K_3 B_3$ ,  $K_4 b = K_4 B_4$  wird.

Denn  $mbK_1 - M_1 B_1 K_1 = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = -(\alpha - \beta)$ ;

$$mbB_1 - M_1 B_1 b = \pi - mb_1 b - (\pi - me_1 b) = -mb_1 b + mb_1 b - (\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta).$$

$$\text{Durch Subtraktion erhält man } \frac{mbB_1 - mbK_1}{K_1 b B_1} = \frac{M_1 B_1 b - M_1 B_1 K_1}{K_1 B_1 b}.$$

Ferner  $mbK_3 + M_3 B_3 K_3 = \pi - \alpha + \beta = \pi - (\alpha - \beta)$ ;

$$mbB_3 + M_3 B_3 b = mc_1 b + \pi - me_3 b = mc_1 b + \pi - (mc_1 b + \alpha - \beta) = \pi - (\alpha - \beta).$$

$$\text{Durch Subtraktion erhält man } \frac{mbK_3 - mbB_3}{K_3 b B_3} = \frac{M_3 B_3 b - M_3 B_3 K_3}{K_3 B_3 b}.$$

u. s. w. Daher schneiden die, um die Punkte  $\left\{ \begin{matrix} K_1 \text{ und } K_2 \\ K_3 \text{ und } K_4 \end{matrix} \right\}$  mit den Radien  $\left\{ \begin{matrix} K_1 b \text{ und } K_2 b \\ K_3 b \text{ und } K_4 b \end{matrix} \right\}$

beschriebenen Kreise den Kreis  $m$  und die Grade  $L$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig.

38. Aus den, im Abschnitt V. entwickelten Sätzen ergeben sich die Lösungen und Determinationen folgender, den gleichwinkligen Schnitt betreffender Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruieren, der

I. a) einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade L b) zwei gegebene Kreise M und m  
entweder unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{array} \right\}$  artig schneidet und durch einen gegebenen Punkt N geht,  
oder unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{array} \right\}$  artig schneidet und  
durch zwei gegebene Punkte N und R geht; in einem gegebenen Punkte K sein Centrum hat;

II. drei gegebene Kreise, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen,  
unter gleichen Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{array} \right\}$  artig schneidet und unter einem gegebenen Winkel  $\alpha$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{array} \right\}$  artig  
durch einen gegebenen Punkt N geht; schneidet;

III. drei gegebene Kreise,  
unter welchen der erste den zweiten, der zweite den dritten umfasst, oder der erste den zweiten ein-, den dritten ausschliesst, unter dem kleinstmöglichen Winkel schneidet;

IV. vier gegebene Kreise, von denen keine drei ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben, unter gleichen  
Winkeln  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{array} \right\}$  artig schneidet.

Bei einigen von diesen Aufgaben finden Fälle statt, in welchen sie auf nachstehende Hilfsaufgabe zurückweisen:

Aus einer gegebenen Geraden L einen Kreis zu konstruieren, der von zwei gegebenen Kreisen  $M_1$  und  $M_2$  den ersten orthogonal, den zweiten unter einem beliebig gegebenen Winkel  $\alpha$  schneidet.

Fig. 13. Ist die Gerade L vom Kreise  $M_1$  ausgeschlossen, so gehen alle Orthogonalkreise des letzteren, die ihre Mittelpunkte auf der Geraden L haben, durch zwei konstante Punkte des aus dem Centrum  $M_1$  auf die Gerade gefällten Lothes (10). Schneidet aber die Gerade L den Kreis  $M_1$  in den Punkten F und G, so lege man (11) durch dieselben einen Kreis O, der den Kreis  $M_2$  unter dem Komplement des gegebenen Winkels schneidet, lege darauf in seinen Schnittpunkten B und C an diesen Hilfskreis Tangenten an, welche der Geraden L in den Punkten K u. K' begegnen, so erfüllen die, um beide Punkte mit den Radien KB und K'C beschriebenen Kreise die gestellten Bedingungen. Denn beide schneiden den Hilfskreis O orthogonal, woraus wir schliessen, 1. dass sie auch den Kreis  $M_1$  orthogonal schneiden, weil ihre Mittelpunkte K und K' der Chordale L der Kreise O und  $M_1$  angehören, 2. dass sie (3) den Kreis  $M_2$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, weil der von ihnen orthogonal geschnittene Kreis O den Kreis  $M_2$  unter dem Winkel  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  schneidet.

Anmerkung. Der Kreis  $\left\{ \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\}$  schneidet den Kreis  $M_2$  zum zweiten Mal in dem Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} B' \\ C' \end{array} \right\}$ .  
Legen wir durch die Punkte  $\left\{ \begin{array}{l} F, G, B' \\ F, G, C' \end{array} \right\}$  einen Kreis, so wird derselbe, gleichwie der Kreis FGB, vom

Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  orthogonal geschnitten. Folglich schneidet sowohl der Kreis FGB' als auch der Kreis FGC' den Kreis  $M_2$  unter dem Winkel  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ; beide Kreise fallen daher in einen zusammen, welcher kein anderer ist, als der zweite, durch die Punkte F und G mögliche Hilfskreis O'. Man erhält demnach bei Anwendung dieses zweiten Hilfskreises O' dieselben Kreise K und K', wie zuvor.

Ist von den Punkten F und G der eine vom Kreise  $M_2$  eingeschlossen, der andere ausgeschlossen, so darf der Winkel  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  einen kleinsten Werth  $\frac{\pi}{2} - \mu$ , mithin der Winkel  $\alpha$  einen grössten Werth  $\mu$  nicht überschreiten (12).

39. Aus den im Abschnitt VI entwickelten Sätzen ergeben sich die Lösungen und Determinationen folgender Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruiren, der

- I. durch einen gegebenen Punkt N geht und
  - a) eine gegebene Grade L und einen gegebenen Kreis m
  - b) zwei gegebene Kreise M und m
 bezüglich unter den gegebenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidet;
- II. drei gegebene Kreise  $M_1, M_2, M_3$ , deren Mittelpunkte nicht auf einer Graden liegen, bezüglich unter den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$   $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidet.

Was z. B. die Aufgabe I, a) betrifft, so muss zunächst der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt ( $\lambda$ ) bestimmt werden; zu welchem Zwecke man um den Mittelpunkt m den Komplementärkreis für den Schnittwinkel  $\beta$  beschreibt und an denselben zwei parallele Tangenten anlegt, welche die Grade L unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden. Von den beiden Punkten, in welchen diese Tangenten dem, aus m auf die Grade L gefällten Perpendikel mO begegnen, ist der, von ihr durch m  $\left\{ \begin{matrix} \text{getrennte} \\ \text{nicht getrennte} \end{matrix} \right\}$  der Aehnlichkeitspunkt  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda \\ I_\lambda \end{matrix} \right\}$ . Konstruirt man alsdann den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreis  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda \\ I_\lambda \end{matrix} \right\}$ , dessen Radius, mag er nun reell oder imaginär sein, durch  $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \rho' \end{matrix} \right\}$  bezeichnet werde, und zieht den  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahl  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda N \\ I_\lambda N \end{matrix} \right\}$ , welcher dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidenden Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  in einem zweiten Punkte  $\left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N'_1 \end{matrix} \right\}$  begegnet, so ist  $\rho^2 = A_\lambda N \cdot A_\lambda N_1$ ,  $\rho'^2 = I_\lambda N \cdot I_\lambda N_1$ , da der Kreis  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$  von dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Potenzkreise ( $\lambda$ ) orthogonal geschnitten wird. Nun schneiden aber beide Potenzkreise auch den Orthogonalkreis O rechtwinklig. Folglich ist auch  $\rho^2 = A_\lambda P \cdot A_\lambda Q$ ,  $\rho'^2 = I_\lambda P \cdot I_\lambda Q$ ; mithin  $A_\lambda N \cdot A_\lambda N_1 = A_\lambda P \cdot A_\lambda Q$  und  $I_\lambda N \cdot I_\lambda N_1 = I_\lambda P \cdot I_\lambda Q$ . Daher ist der Punkt  $\left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N'_1 \end{matrix} \right\}$  bekannt, als der Schnittpunkt des Kreises (P, Q, N) mit dem  $\left\{ \begin{matrix} \text{äussern} \\ \text{innern} \end{matrix} \right\}$  Aehnlichkeitsstrahl  $\left\{ \begin{matrix} A_\lambda N \\ I_\lambda N \end{matrix} \right\}$ . Die beiden, durch das Punktenpaar  $\left\{ \begin{matrix} N, N_1 \\ N, N'_1 \end{matrix} \right\}$  möglichen Kreise, welche der Graden L unter dem Winkel  $\alpha$  begegnen, sind die  $\left\{ \begin{matrix} \text{gleich} \\ \text{ungleich} \end{matrix} \right\}$  artig schneidenden Kreise  $\left\{ \begin{matrix} K \text{ und } K_1 \\ K' \text{ und } K'_1 \end{matrix} \right\}$ , welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten.

Fig. 14.

In der Figur sind die beiden gleichartig schneidenden Kreise dargestellt, welche den Kreis  $m$  in den Punkten  $C$  und  $c$ ,  $C_1$  und  $C_1$  schneiden. Daher bilden die, nach den Schnittpunkten  $\left\{ \begin{matrix} C \text{ und } c \\ C_1 \text{ und } c_1 \end{matrix} \right\}$  gezogenen Radien des Kreises  $\left\{ \begin{matrix} K \\ K_1 \end{matrix} \right\}$  Tangenten an den, um den Mittelpunkt  $m$  beschriebenen Bestimmungskreis ( $\beta$ ).

Ist 1. Winkel  $\alpha > \beta$ , mithin  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$  oder  $\lambda < 1$ , so muss ein Kreis, der durch die Punkte  $N$  und  $N_1$  geht und den Kreis  $m$   $\left\{ \begin{matrix} \text{ein} \\ \text{aus} \end{matrix} \right\}$  schliessend berührt, die Grade

$L$  unter einem Winkel  $\alpha = \arccos \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ -\lambda \end{matrix} \right\}$  schneiden; wird dagegen durch die Punkte  $N$  und  $N_1$  ein Kreis gelegt, der die Grade  $L$  berührt, so ist ein Zusammentreffen desselben mit dem Kreise  $m$  unmöglich.

Ist 2. Winkel  $\alpha < \beta$ , mithin  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$  oder  $\lambda > 1$ , so muss ein Kreis, der durch die Punkte  $N$  und  $N_1$  geht und die Grade  $L$  berührt, den Kreis  $m$  unter dem Winkel  $\beta = \arccos \left( \frac{1}{\lambda} \text{ oder } -\frac{1}{\lambda} \right)$  schneiden; wird dagegen durch die Punkte  $N$  und  $N_1$  ein Kreis gelegt, der den Kreis  $m$  berührt, so ist ein Zusammentreffen desselben mit der Graden  $L$  unmöglich.

Hieraus folgt, dass, wenn die Grade  $L$  den Kreis  $m$  nicht schneidet, und wenn im  $\left\{ \begin{matrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{matrix} \right\}$  Falle der Punkt  $N$   $\left\{ \begin{matrix} \text{innerhalb des Kreises } m \\ \text{auf der von } m \text{ abgewendeten Seite der Graden } L \end{matrix} \right\}$  gegeben ist, der Punkt  $N_1$   $\left\{ \begin{matrix} \text{auf der von } m \\ \text{abgewendeten Seite der Graden } L \end{matrix} \right\}$  innerhalb des Kreises  $m$  liegen muss. Alsdann giebt es durch die Punkte  $N$  und  $N_1$  einen Kreis des schiefsten Schnittes (12). Schneidet dieser die Grade  $L$  unter dem Winkel  $\alpha_1$  und den Kreis  $m$  unter dem Winkel  $\beta_1$ , so sind diese Winkel die kleinsten, für welche die Aufgabe, so lange der Exponent  $\lambda$  unverändert bleibt, eine Lösung zulässt.

40. Wir behandeln zum Schluss noch folgende Aufgabe, zu deren Lösung eine gewisse Eigenschaft des Kreises die Hand bietet.

Aus einer gegebenen Graden  $L$  einen Kreis zu konstruiren, der einen gegebenen Kreis  $M$  und eine zweite Grade  $L'$  bezüglich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet.

Fig. 15.

Es sei Punkt  $S$  der Schnittpunkt der gegebenen Graden,  $K$  der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher dem Kreise  $M$  in einem Punkte  $B$ , der Graden  $L'$  in einem Punkte  $C$  begegnet. Durch diesen Punkt  $C$  giebt es einen Kreis  $O$ , der mit dem Kreise  $M$  die Grade  $L$  zur Chordale hat. Zieht man daher die Radien  $KB$  und  $KC$  und verlängert sie bis zu ihrem nochmaligen Schnittpunkte  $B'$  und  $C'$  mit den Kreisen  $M$  und  $O$ , so ist die Sehne  $BB' = CC'$ , weil die Tangenten aus  $K$  an beide Kreise gleich sind. Folglich ist die Grade  $CC'$  ihrer Länge nach bekannt, da sie gleich ist der Bestimmungssehne des Kreises  $M$  für den Schnittwinkel  $\alpha$ . Da ferner der Winkel, den die Grade  $KCC'$  mit der Graden  $L'$  bildet, das Komplement des Schnittwinkels  $\beta$  vorstellt, so ist die Projektion  $SS'$  der Strecke  $CC'$  auf die Grade  $L$ , mittelst einer Parallelen zur Graden  $L'$  durch den Punkt  $C'$ , vollständig bekannt, also auch ein Kreis  $M'$  um die Strecke  $SS'$  als Durchmesser. Wir bezeichnen die Tangenten aus dem Punkte  $K$  an die Kreise  $M$  u.  $M'$  durch  $T$  u.  $T'$ . Nun verhält sich

$$KC : KC' = KS : KS', \text{ folglich}$$

$$KC^2 : KC \cdot KC' = KS^2 : KS \cdot KS', \text{ folglich}$$

$$KC : KS = T : T'.$$

Mithin kommt es darauf an, in der Geraden L einen Punkt K zu finden, aus welchem die Tangenten an zwei gegebene Kreise M und M' ein gegebenes Verhältniss (KC:KS) haben. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus nachstehendem Lehrsatz:

Haben drei Kreise eine gemeinschaftliche Chordale, und legt man aus einem Peripheriepunkte irgend eines derselben an die beiden andern Tangenten (13) an, so verhalten sich deren Quadrate bezüglich wie die Centrallinien zwischen dem herausgehobenen und den beiden übrigen Kreisen.

Die Kreise  $M_1, M_2, M_3$  mit den Radien  $R_1, R_2, R_3$  haben die gemeinschaftliche Chordale OX. Aus einem Punkte  $T_3$  in der Peripherie des Kreises  $M_3$  sind an die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  Tangenten angelegt, welche in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$  berühren: Dann verhält sich  $T_3T_1^2:T_3T_2^2 = M_3M_1:M_3M_2$ . Fig. 16.

Wir verbinden den Punkt  $T_3$  mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise und fallen aus ihm auf die gemeinschaftliche Centrale der letzteren ein Loth  $T_3t_3$ . Dann ist in dem Dreieck  $M_1M_3T_3$

$$T_3M_1^2 = R_3^2 + M_1M_3^2 - 2M_1M_3 \cdot t_3M_3.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten  $R_1^2$  und beachtet, dass  $R_3^2 - R_1^2 = OM_3^2 - OM_1^2 = M_1M_3(OM_3 - OM_1)$  ist, so erhält man

$$\begin{aligned} T_3T_1^2 &= M_1M_3(OM_3 - OM_1) + M_1M_3^2 - 2M_1M_3 \cdot t_3M_3 \\ &= 2M_1M_3 \cdot OM_3 - 2M_1M_3 \cdot t_3M_3 \\ &= 2M_1M_3 \cdot t_3O; \text{ desgleichen} \end{aligned}$$

$$T_3T_2^2 = 2M_2M_3 \cdot t_3O, \text{ woraus der Satz folgt.}$$

Folgerung. Der Ort aller Punkte, aus welchen die an zwei gegebene Kreise angelegten Tangenten das gegebene Verhältniss  $t_1:t_2$  haben, ist ein Kreis, der mit den gegebenen eine gemeinschaftliche Chordale und sein Centrum in der Mitte zwischen denjenigen beiden Aehnlichkeitspunkten hat, welche sich auf die, um die gegebenen Mittelpunkte mit den Radien  $t_1$  und  $t_2$  beschriebenen Kreise beziehen.

Mitteln kommt es darauf an, in der Geraden L einen Punkt K zu finden, aus welchem die Tangenten an zwei gegebene Kreise M und N ein gegebenes Verhältniss (KO:KS) haben. Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus nachstehendem Lehrsatz:

Haben drei Kreise eine gemeinschaftliche Chordale, und legt man aus einem Peripheriepunkte irgend eines derselben an die beiden andern Tangenten (13) an, so verhalten sich deren Quadrate bezüglich wie die Centralniveaus zwischen dem herausgehobenen und den beiden übrigen Kreisen.

Die Kreise  $M_1, M_2, M_3$  mit den Radien  $R_1, R_2, R_3$  haben die gemeinschaftliche Chordale OX. Aus einem Punkte  $T_3$  in der Peripherie des Kreises  $M_3$  sind an die Kreise  $M_1$  und  $M_2$  Tangenten angelegt, welche in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$  berühren. Dann verhält sich  $T_3T_1^2:T_3T_2^2 = M_1M_2:M_3^2$ .

Wir verbinden den Punkt  $T_3$  mit den Mittelpunkten der gegebenen Kreise und führen aus ihm auf die gemeinschaftliche Chordale der letzteren ein Loth  $T_3T_2$ . Dann ist in dem Dreieck  $M_1M_2T_3$

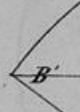
$$T_3M_1^2 = R_1^2 + M_1M_2^2 - 2M_1M_2 \cdot t_3M_1$$
$$T_3M_2^2 = R_2^2 + M_1M_2^2 - 2M_1M_2 \cdot t_3M_2$$
$$= OM_1^2 - OM_2^2 - R_1^2 - R_2^2$$

Schreibt man auf beiden Seiten  $R_1^2$  und beachtet, dass  $R_3^2 = OM_3^2 - OM_1^2 = OM_2^2 - OM_1^2$  ist, so erhält man

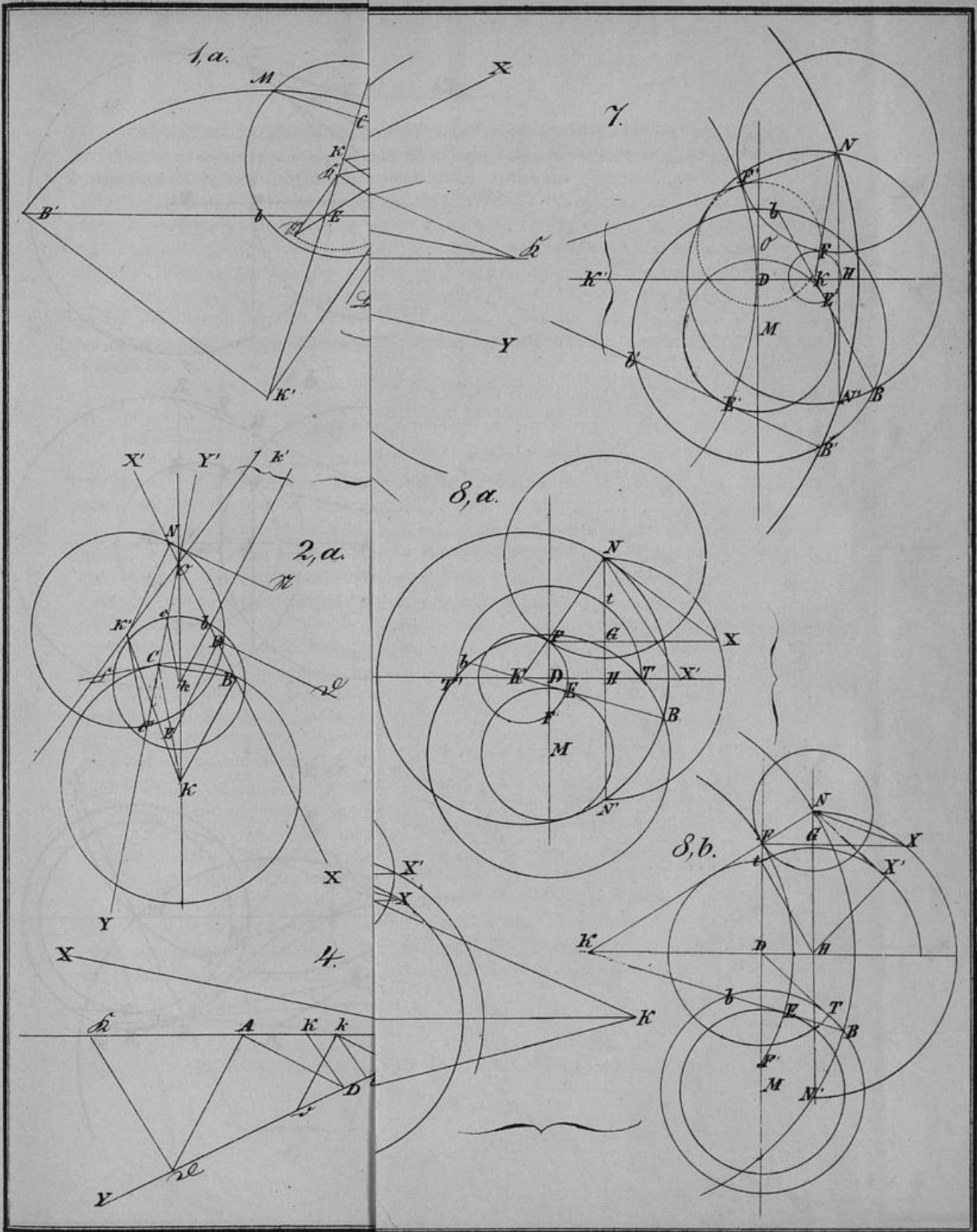
$$T_3T_1^2 = M_1M_2(OM_3 - OM_1) + M_1M_2^2 - 2M_1M_2 \cdot t_3M_1$$
$$= 2M_1M_2 \cdot OM_3 - 2M_1M_2 \cdot t_3M_1$$
$$= 2M_1M_2 \cdot t_3O; \text{ besagtes}$$

$$T_3T_2^2 = 2M_1M_2 \cdot t_3O, \text{ woraus der Satz folgt.}$$

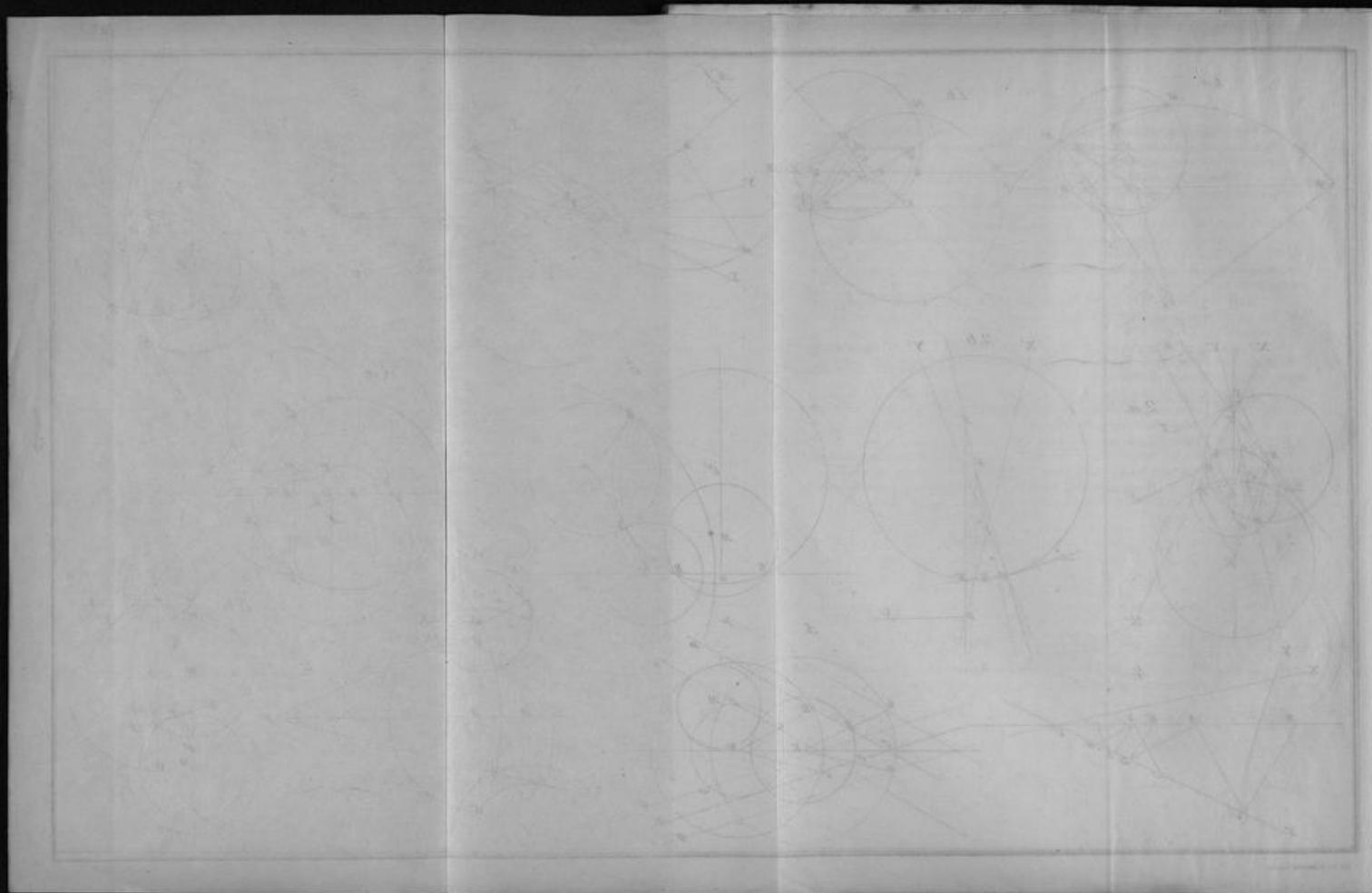
Folgerung. Der Ort aller Punkte, aus welchen die an zwei gegebene Kreise angelegten Tangenten das gegebene Verhältniss  $t_1:t_2$  haben, ist ein Kreis, der mit den gegebenen eine gemeinschaftliche Chordale und sein Centrum in der Mitte zwischen denjenigen beiden Peripheriepunkten hat, welche sich auf die, um die gegebenen Mittelpunkte mit den Radien  $t_1$  und  $t_2$  beschriebenen Kreise berühren.

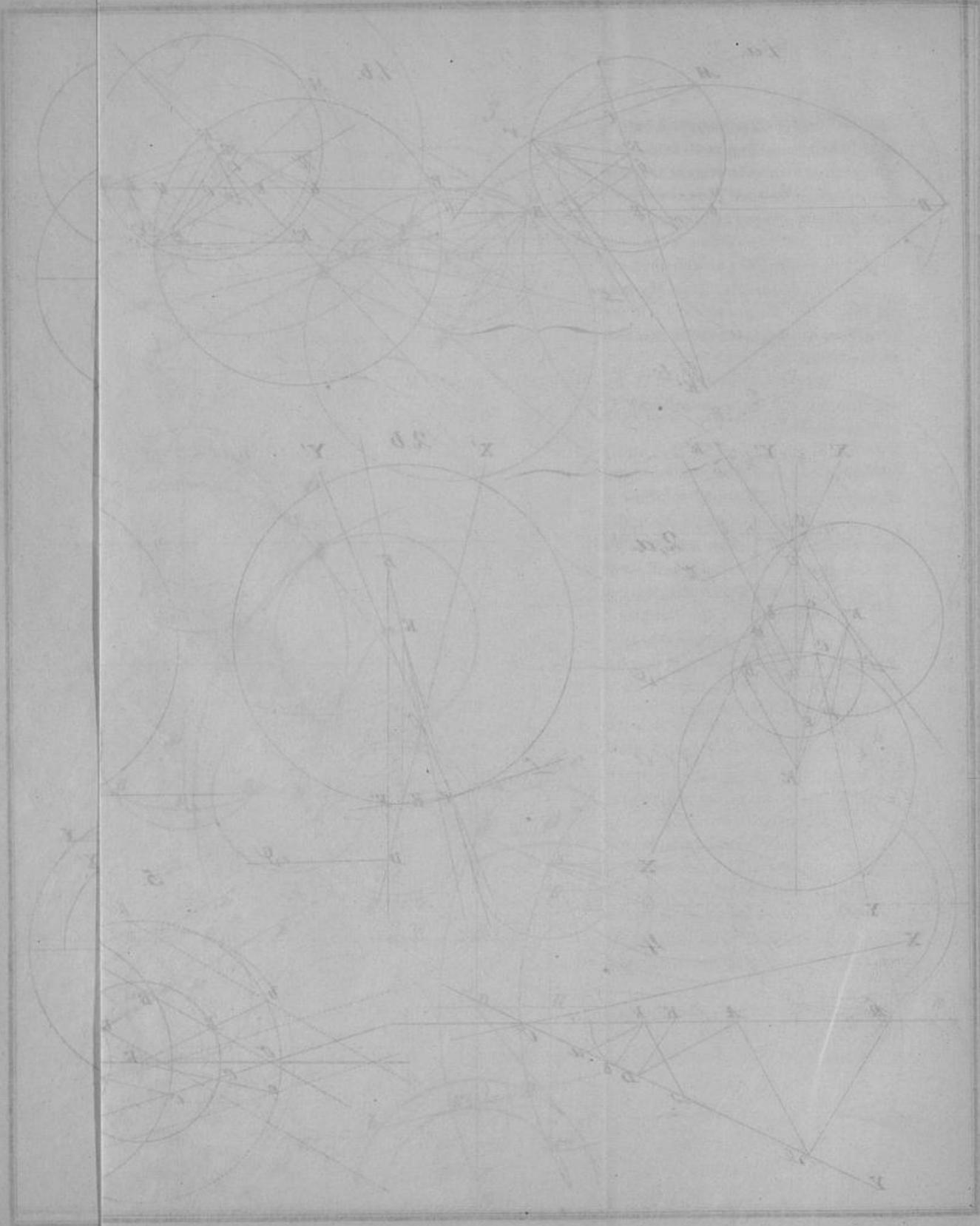


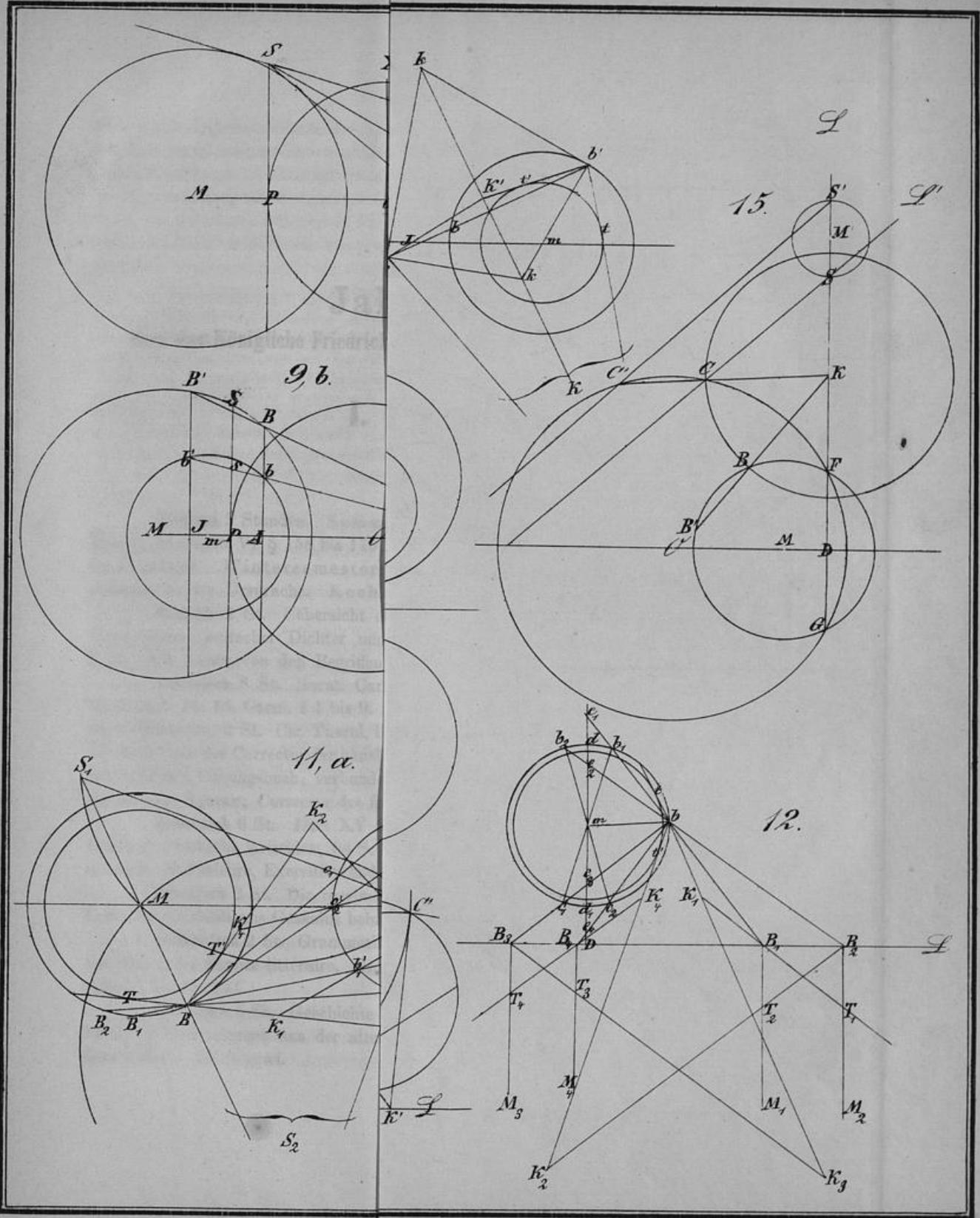
X

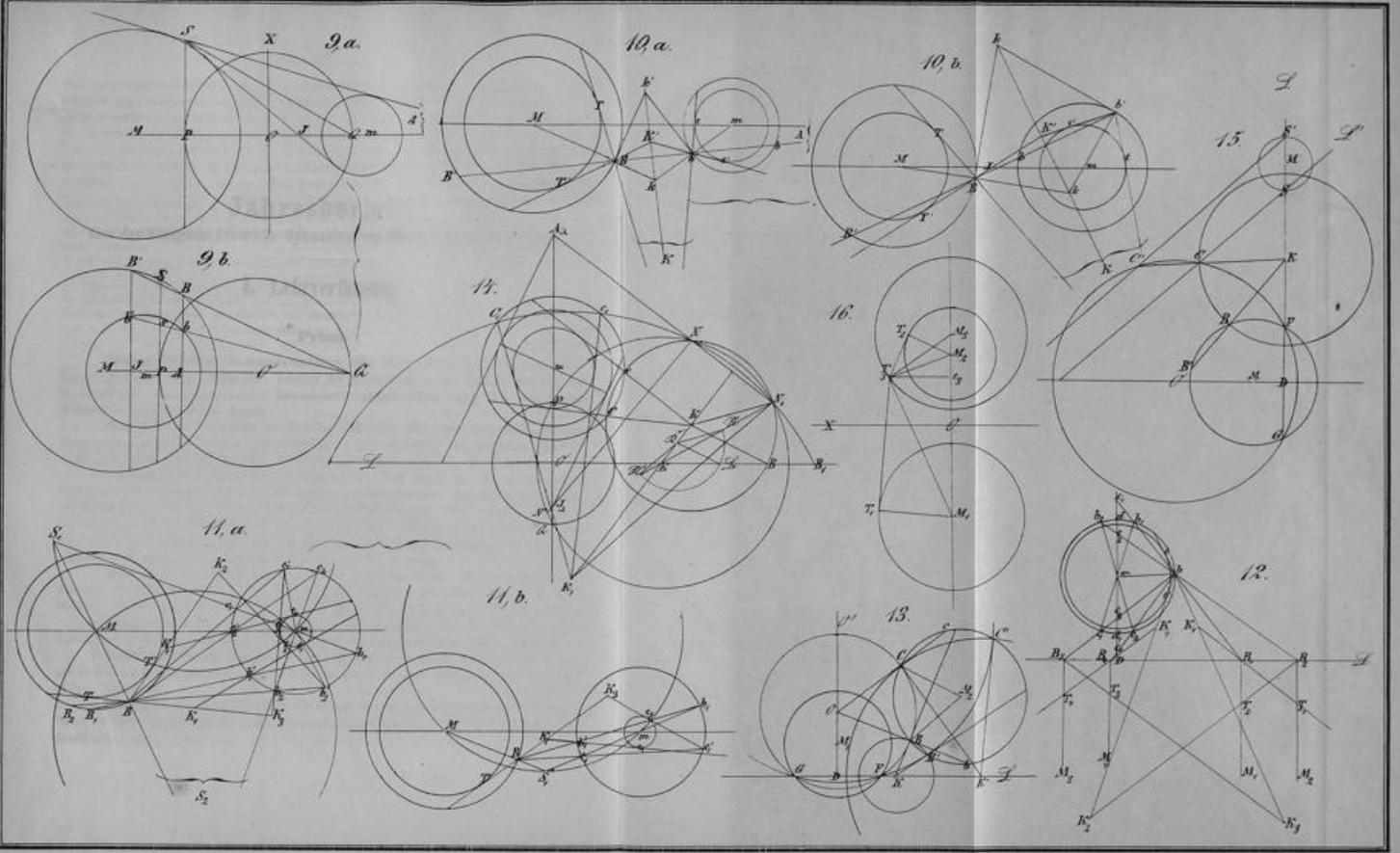




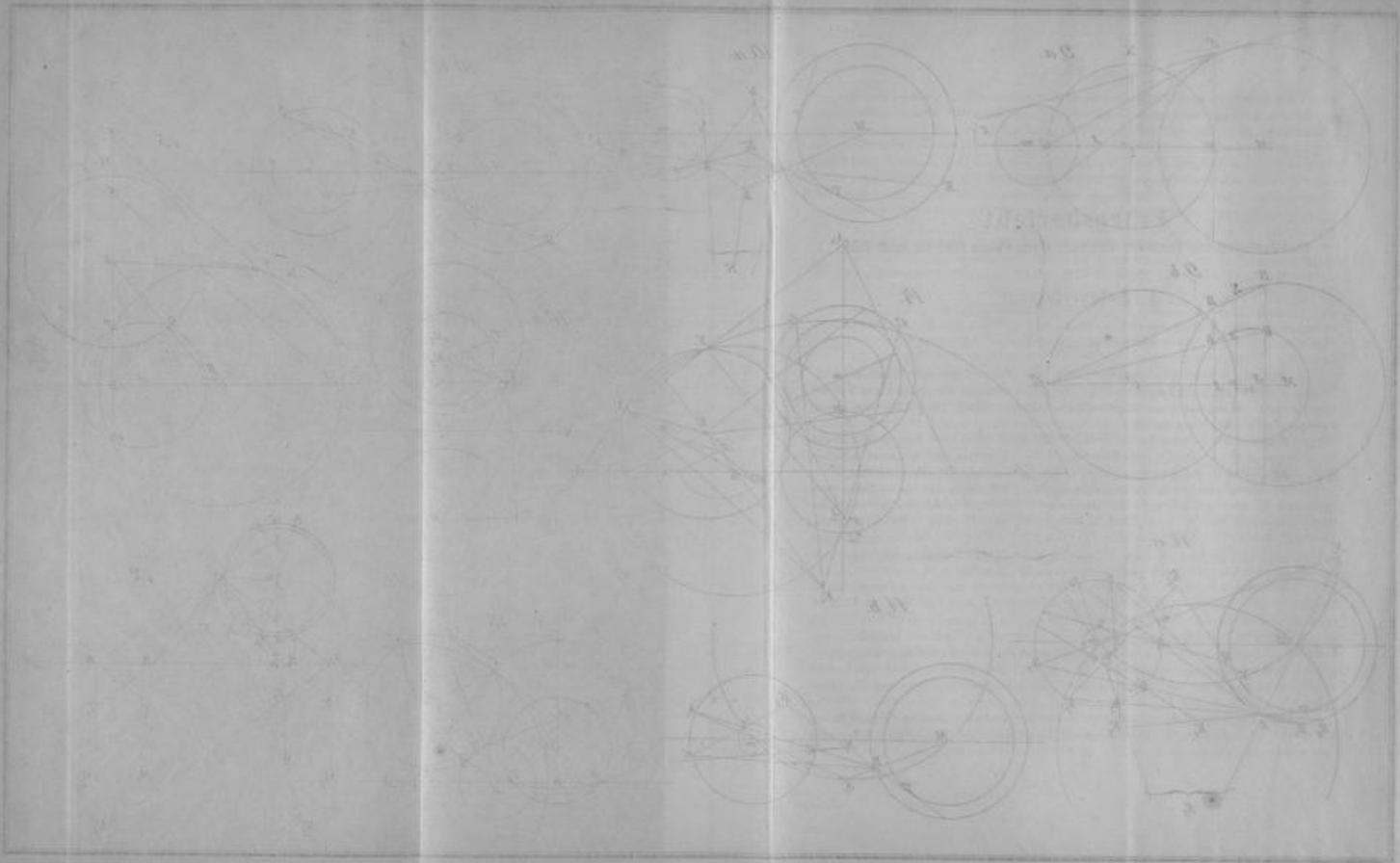


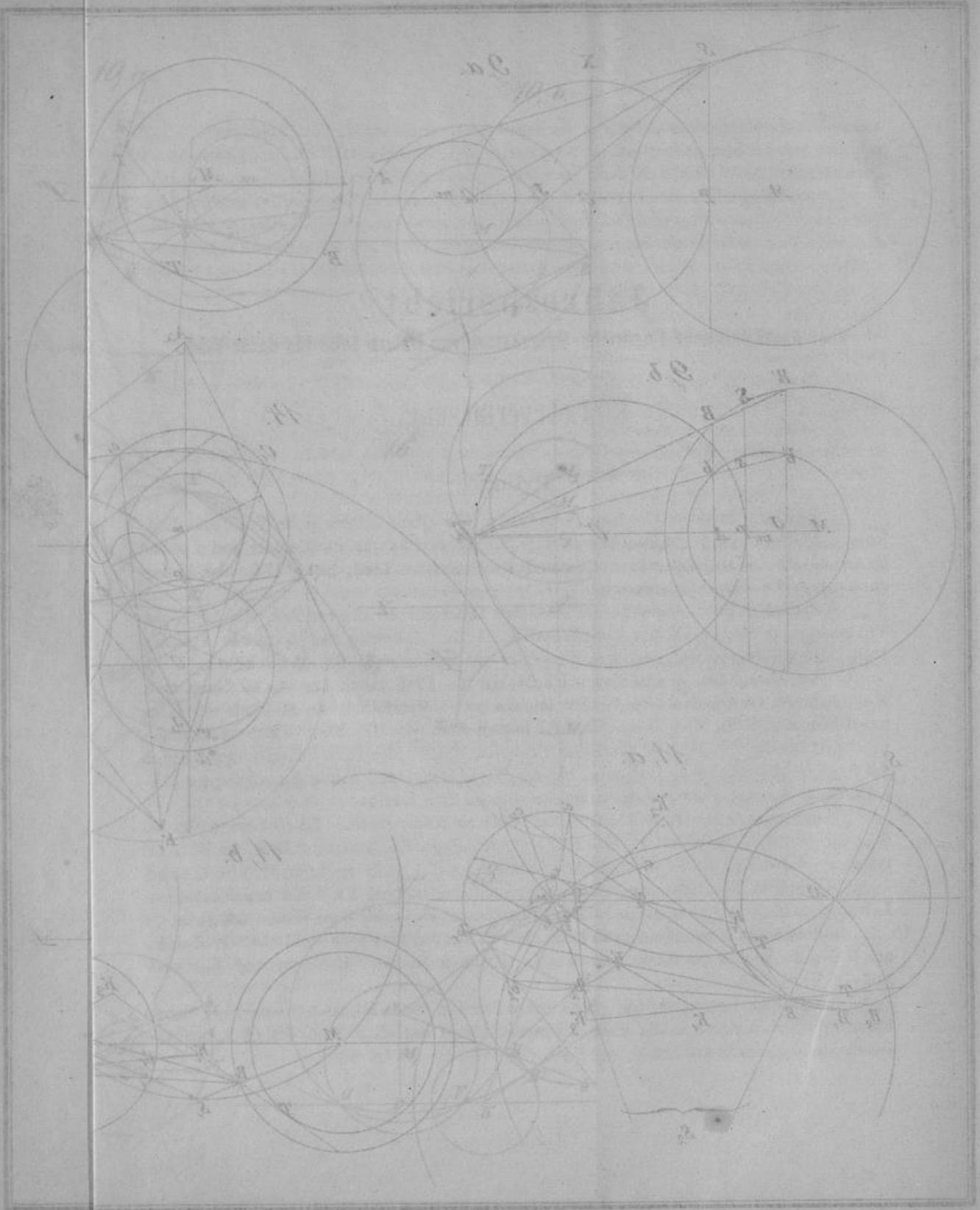






10b. Prof. J. Schönbald, Breslau.





Von dem Programm der Gymnasien in der Provinz von Preussen aus  
 Theil der Elementar-Geographie, 2 St. Die Natur- und Völkergeschichte, die Naturgeschichte  
 allgemeinen Eigenschaften der Gesteine, von der arithmetischen Reihe, das zweite Buch  
 von den Formeln und Combinationen und der binomische Lehrsatz für ganze Potenzen.  
 2 St. Anderssen.  
 2 St. Im Sommer: Mathematische Geographie, im Winter: die Lehre von  
 die Geschichte, 2 St. Anderssen.

## Jahresbericht

über das Königliche Friedrichs-Gymnasium von Ostern 1863 bis dahin 1864.

### I. Lehrverfassung.

#### Prima.

**Religion** 2 Stunden. Sommersemester: Der Glaubenslehre erster Theil nach Hollenberg Abschnitt VI § 158 bis 170, Lectüre der Briefe Pauli an die Galater und Epheser im Grundtext. Wintersemester: Glaubenslehre zweiter Theil, bis § 175. Das Evang. Johannis in der Ursprache. Koch.

**Deutsch** 2 St. Uebersicht der deutschen Litteratur der neueren Zeit, Anleitung zum Verständniss deutscher Dichter und Prosaiker, 1 St. Correctur der deutschen Aufsätze, 1 St. Die Lehre von den Begriffen, Urtheilen und Schlüssen, 1 St. Anderssen.

**Lateinisch** 8 St. Horat. Carm. III 24 bis 30. IV 2 bis 9. 12. 14. 15. Carm. saec. Epod. 1. 2. 13. 16. Carm. I 1 bis 9. Mit lateinischer Interpretation; die Mehrzahl der Oden wurde memorirt, 2 St. Cic. Tuscul. lib. I, II und ein Theil von III. 3 St. — Extemporalia abwechselnd mit der Correctur der häuslichen Exercitia, 1 St. — Mündliche Uebersetzungsübungen aus Seyffert's Uebungsbuch, verbunden mit der Wiederholung und Erklärung schwieriger Abschnitte der Syntax; Correctur der freien Aufsätze. 2 St. Lange.

**Griechisch** 6 St. Ilias XV 200 bis XVII zu Ende. 2 St. Im S. Lange, im W. Gädke. Plutarchs Aristides, im S. 3 St. Hirsch. Sophocles Ajax zum Theil, im W. 2 St. Gädke. Moduslehre, Exercitien und Extemporalien, im S. 1 St. Hirsch, im W. 2 St. Gädke.

**Hebräisch** 2 St. Die regelmässige Formenbildung und ein Theil der unregelmässigen. Leseübungen theils aus Gesenius hebräischem Lesebuche, theils das Buch Ruth. Magnus.

**Französisch** 2 St. Grammatik nach Plötz II Lection 58 bis 69 und 70 bis 75. Lectüre aus Herrig La France littéraire. Daneben Le voyage à Dieppe. Exercitien und Extemporalien. Markgraf.

**Geschichte** 3 St. Geschichte der neueren Zeit von der Reformation bis zur franz. Revolution. Wiederholungen aus der alten und preussischen Geschichte. Nach Pütz Lehrbuch der Geschichte. Markgraf.

**Mathematik** 4 St. Stereometrie und Uebungen in der Lösung von Aufgaben aus allen Theilen der Elementar-Mathematik. 2 St. Die Zins- auf Zinsrechnung, die Lehre von den allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen, von der arithmetischen Reihe des zweiten Ranges, von den Permutationen und Combinationen und der binomische Lehrsatz für ganze Exponenten. 2 St. Anderssen.

**Physik** 2 St. Im Sommer: Mathematische Geographie; im Winter: die Lehre vom Magnetismus und von der Electricität. Anderssen.

**Themata zu den deutschen Aufsätzen.** 1) Welche Eigenschaften der Karthager, Römer und Griechen lassen sich im Nationalcharakter der Engländer wiedererkennen? 2) An's Vaterland, an's theure, schliess' dich an, Dort sind die starken Wurzeln deiner Kraft. 3) Findet der Ausspruch des Sallust, dass Rom seine Grösse der Vortrefflichkeit weniger Männer verdanke, auch auf andere Völker Anwendung? 4) Vertheidigung des Winters gegen seine Ankläger. 5) Darstellung der Handlung in Lessings Trauerspiel Emilia Galotti. 6) Darstellung der Handlung in Lessings Nathan und Entwicklung der diesem Stücke zu Grunde liegenden Idee. 7) Zusammenstellung der Erläuterungen des Aristotelischen Begriffes der Tragödie, die in den Lessingschen Kritiken der Merope und Richards III enthalten sind. (Clausurarbeit.) 8) Der Mensch als Herr der Schöpfung. (Die Abiturienten bearbeiteten zu Ostern 1864 das Thema 8, welches später in der Klasse aufgegeben wurde.)

**Themata zu den lateinischen Aufsätzen.** 1) De caussis atque initiis belli Punici secundi. 2) Bellorum civilium caussis breviter expositis de Cn. Pompeji vita ita disputetur, ut, quibus maxime rebus ea conspicua sit, appareat (Clausurarbeit). 3) Quibus bellis Romani paullatim Italiae imperio potiti sint. 4) Quibus maxime virtutibus Romana respublica aucta sit. 5) Enarretur bellum, quo Alexander Persarum regnum evertit. 6) Respublica Romana calamitatibus acceptis majores amicos habuit quam rebus secundis. 7) De Periclis in civitatem Atheniensium meritis (Clausurarbeit). 8) Qualem in prologo Ajacis Minervam Sophocles finxerit. — Zum Abiturienten-Examen: Quanam res Hannibali adversus Romanos in Italia bellum gerenti impedimento fuerint, quominus ex eo victor discederet.

**Mathematische Aufgaben für die Abiturienten.** 1) Durch den einen Schnittpunkt zweier sich schneidenden Kreise eine Secante beider Kreise so zu legen, dass die Verbindungslinien ihrer Endpunkte mit dem andern Schnittpunkte der Kreise sich wie die Abschnitte der Secante verhalten. 2) Jemand lässt zwei würfelförmige Gruben anlegen, deren Grundflächen sich um  $9 \square'$  unterscheiden. Für den Kubikfuss einer jeden Grube zahlt er soviel Gulden, als die Tiefe der anderen Fuss beträgt, und für beide Gruben zusammen 820 Gulden. Wie tief ist jede Grube? 3) Von einem graden Trapez sei der Umfang = 24 F., die Diagonale = 8 F. und der spitze Winkel =  $53^{\circ} 7' 48''$  gegeben. Die Seiten desselben zu berechnen. 4) Die vollständige Oberfläche eines kegelförmigen Kugelsectors, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, betrage  $\frac{1}{12}$  von der Oberfläche der Kugel. Wie verhält sich der Sector zur Kugel?

## Secunda.

**Religion** 2 St. Biblische Geschichte des Alten Testaments bis auf die Zeit des babylonischen Exils, nach Hollenberg Abschnitt III. Koch.

**Deutsch** 2 St. Erläuterung der Elemente der Poetik. Einiges aus der Dispositionslehre. Lecture und Erklärung einiger Dichtungen. Wallenstein wurde fast ganz gelesen. Monatliche Aufsätze. Markgraf.

**Lateinisch** 10 St. Cicero De imperio Cn. Pompeii. Einige Capitel wurden daraus memorirt. Liv. XXVII, XXVIII 1 bis 34. 5 St. Grammatik nach Berger, die Syntax der Casus, Tempora und Modi. Exercitia aus Seyffert's Uebungsbuch, alle 14 Tage eines. 2 St.

Extemporalien, alle 14 Tage eines. Controlle der Privatlectüre: Liv. XXXIII 12 bis XXXIV 34. Uebungen in freier Rede. 1 St. Geisler. — Virgil. Aen. VII. VIII zum Theil, 2 St. Im S. Tardy, im W. Gädke.

**Griechisch** 6 St. Herodot VI. 2 St. Hom. Od. X bis XIII. 2 St. Grammatik: Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre, unregelmässige Verba. Aus der Syntax Wiederholung der Casuslehre im Anschluss an die Uebersetzung der Stücke 48 bis 60 aus Böhme's Aufgaben, von den Arten des Verbums, vom Gebrauche der Tempora, Böhme 129 bis 136. Schriftliche Uebungen im Uebersetzen in's Griechische, alle 14 Tage Correctur eines Exercitiums. 2 St. Hirsch.

**Hebräisch** 2 St. Ein Theil der regelmässigen Flexion. Leseübungen aus Gesenius Lesebuch. Magnus.

**Französisch** 2 St. Grammatik nach Ploetz II. Lection 29 bis 35 und 46 bis 57. Lectüre aus Herrig. Exercitien und Extemporalien. Markgraf.

**Geschichte und Geographie** 3 St. Griechische Geschichte bis zu den Diadochen. Wiederholungen aus der römischen Geschichte. Nach Pütz. Alte Geographie und Wiederholungen aus der Geographie der aussereuropäischen Erdtheile. Nach Daniel's Leitfaden der Geographie. Markgraf.

**Mathematik** 4 St. Geometrie: Vom regulären Polygon, von der Rectification und Quadratur des Kreises. Trigonometrie. 2 St. Arithmetik: Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. Quadratische Gleichungen. Lehre von den Logarithmen, arithmetischen und geometrischen Reihen. Uebungen in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben. 2 St. Anderssen.

**Physik** 1 St. Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper. Statik und Dynamik der festen Körper. Hydrostatik. Anderssen.

Themata zu den deutschen Aufsätzen. 1) Thue das Gute, wirf es ins Meer — Weiss es der Fisch nicht, weiss es der Herr. 2) Durch viele Streiche fällt auch die stärkste Eiche. 3) a. Vier Dinge sind ähnlich — das Leben, ein Tag, ein Jahr, eine Reise. Sie gleichen einander im frischen Jubelanfang — im schwülen Mittelstück — im müden, satten Ende. 3) b. Das Beste, was wir von der Geschichte haben, ist der Enthusiasmus den sie in uns erregt. 3) c. Ruth, eine Idylle. 4) Fortes fortuna juvat. 5) Gedankengang des Gedichtes: Das eleusische Fest. 6) a. Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand. 6) b. Spaziergang an einem Herbstabende. 7) a. Lob des Waldes. 7) b. In wiefern gebührt den Athenern der erste Preis im Kampfe gegen die Perser? 8. a) Welchen Einfluss übt die See aus auf den Geist und Charakter ihrer Anwohner? 8) b. Was lässt sich für, und was gegen den Ostracismus sagen? 8) b. Charakter Wallensteins nach Schiller. 9) Wer mit dem Leben spielt kommt nie zurecht; Wer sich nicht selbst befiehlt bleibt immer ein Knecht. 10) Begrüssung eines nach geschlossenem Frieden heimkehrenden Kriegers, mit Benutzung der bezüglichen Stellen in den Piccolomini und in der Braut von Messina von Schiller. 11) Concordia res parvae crescunt, discordia maximae dilabuntur, in Hinblick auf die griechische Geschichte.

### Tertia.

**Religion** 2 Stunden. Zusammenhängende Besprechung der ganzen Katechismuslehre nach dem heidelberger und dem lutherischen Katechismus mit den hauptsächlichsten biblischen Beweisstellen. Memoriren von 8 Kirchenliedern. Koch.

**Deutsch** 2 St. Ausgewählte Gedichte aus Echtermeyer's Sammlung wurden erklärt und memorirt. Ueber mehrere von diesen Gedichten wurden von einzelnen Schülern freie Vorträge gehalten. Uebungen im Disponiren und Besprechung der häuslichen Arbeiten. Merckens.

**Lateinisch** 10 St. Caesar Bell. gall. III bis VI. 5 St. Grammatik nach Berger § 205 bis 344, 2 St. Die Lehre von den Tempora und Modi, vom Infinitiv und den Participien, von den coordinirten und subordinirten Sätzen, von der oratio obliqua. Mündliches und schriftliches Uebersetzen ausgewählter Stücke aus Hottenrott's Aufgaben für Tertia. Wöchentlich ein häusliches Exercitium, alle 14 Tage ein Extemporale, 1 St. Memorirt wurden ausgewählte Kapitel und Phrasen aus Caesar. Merckens. — Ovid's Metamorphosen 2 St., im S. V 346 bis 542. Hirsch, im W. VI 146 bis 312, VIII 260 bis 545. Merckens. — (Seit Ende December übernahm den grammatischen Unterricht der 2. Abtheilung in 3 St. Seminarist Dr. Lillie.)

**Griechisch** 6 St. Xenophons Anabasis II 6 bis III 4. Im letzten Vierteljahre jedes Semesters wurden 100 Verse aus Homer's Odyssee IX gelesen und grossentheils memorirt, 3 St. Verba contracta bis Verba anomala, Exercitia zum Theil nach Rost's und Wüstemann's Aufgaben, 2 St. Extemporalia, 1 St. Lange. (Seit Ende December ertheilte den grammatischen Unterricht der 2. Abtheilung in 3 St. Lillie.)

**Französisch** 2 St. Grammatik nach Plötz II, Wiederholung der regelmässigen Conjugation und Einübung der unregelmässigen Verba, Exercitien und Extemporalien. Im S. Lange, im W. Markgraf. (Im W. ausserdem 1 St. Lectüre aus Hirzel's Lesebuch. Gädke.)

**Geschichte und Geographie** 3 St., im W. 4 St. Deutsche Geschichte, nach Pütz. Einprägung von Jahreszahlen nach Cauer's Tabellen, 2 St. Geographie von Deutschland und speciell Preussen, nebst Uebungen im Kartenzeichnen. Nach Daniel. Im Sommer 1 St., im Winter 2 St. Markgraf.

**Mathematik** 4 St. Geometrie: Wiederholung der Longimetrie, Lehre vom Dreieck, vom Parallelogramm und vom Kreise. Beweis und Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes. Von den Proportionen und von der Aehnlichkeit der Figuren, 2 St. Arithmetik: Die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen. Gleichungen des ersten Grades. Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Uebungen in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben. 2 St. Anderssen.

### Quarta.

**Religion** 2 St. Repetition der alttestamentlichen Geschichte nach Zahn. Zweites Hauptstück des lutherischen Katechismus und die betreffenden Fragen des heidelberger. Memoriren von 8 Kirchenliedern. Koch.

**Deutsch** 2 St. Lectüre im Lesebuche von Kehrein, untere Stufe. Uebungen im mündlichen Vortrage von Gedichten und prosaischen Stücken. Correctur der alle zwei Wochen gelieferten Ausarbeitungen. Geisler.

**Lateinisch** 10 St. Cornelius Nepos XIII bis XXV, I bis VI, 5 St. Einübung der Casuslehre nach Berger's Grammatik und Hottenrott's Aufgaben, Correctur der wöchentlichen Exercitien und Extemporalien, 4 St. Wiederholung der Formenlehre und Vocabellernen nach Döderlein, 1 St. Aus Nepos wurde eine Anzahl von Kapiteln memorirt. Geisler.

**Griechisch** 6 St. Einübung der Formenlehre bis zu den verba contracta excl. nach Berger's Grammatik, 3 St. Aus Jacobs Elementarbuch wurden die diesen Theil der Grammatik betreffenden Stücke übersetzt und geeignete Sätze memorirt; mündliche und schriftliche Uebungen aus Rost's Uebungsbuche, 3 St. Im S. Tardy, im W. Lange.

**Französisch** 2 St. Formenlehre bis zur vollständigen Einübung der regelmässigen Conjugation nach dem Elementarbuch von Plötz, Lect. 41 bis 74. Schriftliches Uebersetzen in's Französische und alle 14 Tage Correctur eines Exercitiums. Im S. Lange, im W. Hirsch.

**Geschichte** 2 St. Alte Geschichte, Jahreszahlen daraus nach Cauer, 2 St. Markgraf.

**Geographie** 1 St. Die fünf Erdtheile mit Ausschluss von Deutschland, nach Daniel. Im S. Markgraf, im W. Anderssen.

**Mathematik und Rechnen** 3 St. Wiederholung der Bruchrechnung. Die Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen und Anwendung derselben auf die einfache und zusammengesetzte Regel de tri und Zinsrechnung. Die Decimalbrüche 2 St. Rehbaum. Im S. Anfangsgründe der Planimetrie, 1 St. Anderssen.

### Quinta.

**Religion** 3 St. Im Sommer: Biblische Geschichte des alten Testaments nach Zahn, bis auf Josua; erstes Hauptstück des lutherischen Katechismus und die parallelen Fragen des heidelberger. Lernen von 4 Kirchenliedern. Im Winter (combinirt mit Sexta): Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Zahn, von der Leidensgeschichte Christi an; drittes Hauptstück des lutherischen Katechismus und ausserdem 4 Kirchenlieder. Koch.

**Deutsch** 2 St. Lectüre im Lesebuche von Auras und Gnerlich, erste Stufe, woran Uebungen im mündlichen und schriftlichen Wiedererzählen geknüpft wurden. Schriftliche orthographische Uebungen. Vortrag auswendig gelernter Gedichte. Hirsch.

**Lateinisch** 10 St. Uebersetzen aus Blume's Elementarbuch Curs. I Abschn. 2 bis 4, Cursus II Abschnitt I. Der erweiterte einfache Satz, die Grundzüge der Satzlehre, der Ablat. absol., der Acc. c. Inf. Jeder Satz wurde construiert, mündlich und schriftlich übersetzt, retrovertirt, memorirt, die Verwandlung der activen Sätze in passive und umgekehrt eingeübt. Die durch die Lectüre gewonnenen Vocabeln und Phrasen wurden häufig wiederholt und durch mannigfache mündliche und schriftliche Uebungen präsent erhalten. Ausser diesen Vocabeln lernten und verwendeten die Schüler aus Döderlein die ausgerückt stehenden Vocabeln nebst den in derselben Zeile befindlichen Derivatis und Compositis und empfingen dabei die ersten Elemente der Lehre von der Wortbildung. 5 St. — Uebersetzen der entsprechenden Stücke aus dem deutschen Theile desselben Buches in's Lateinische. Dasselbe Verfahren wie oben. Wöchentlich ein Exercitium. 3 St. — Ausserdem wurde in 2 Stunden der Cursus der Sexta nach Berger's Grammatik wiederholt und durch Hinzunahme der unregelmässigen Formenlehre, der Verba mit unregelmässigen Stammformen, der Verba anomala und defectiva erweitert. Hand in Hand mit mündlichem Einüben gingen Uebungen im schriftlichen Uebersetzen in's Lateinische. Hirsch.

**Französisch** 3 St. Die Elemente nach Plötz I. Exercitien und Extemporalien. Im S. Markgraf, im W. Gädke.

**Geographie** 3 St. Im S. Uebersicht der Erdtheile, im W. Deutschland. Nach Daniel. Uebungen im Kartenzeichnen. Markgraf.

**Rechnen** 4 St. Die vier Species mit Brüchen. Elemente der Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen. Einfache Regel de tri. Rehbaum.

### Sexta.

**Religion** 3 St. Im Sommer: Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Zahn bis zum Einzuge Christi in Jerusalem. Fünftes Hauptstück des lutherischen Katechismus und die parallelen Fragen des heidelberger. Lernen von 4 Kirchenliedern. Im Winter s. Quinta. Koch.

**Deutsch** 2 St. Orthographische Uebungen. Lesen, Erklären und freie Wiedergabe geeigneter Stücke aus dem Lesebuche von Auras und Gnerlich, erste Stufe. Constructionsübungen. Erklären und Memoriren leichter Gedichte. Merckens.

**Lateinisch** 10 St. Die regelmässige Formenlehre bis zu den verba deponentia nach Berger's Grammatik, 3 St. Mündliche und schriftliche Uebersetzung der Vorübungen und des ersten und zweiten Abschnittes des ersten Cursus aus dem Elementarbucho von Blume nebst den entsprechenden Abschnitten des deutschen Theiles. Exercitien und Extemporalien bei der ersten Abtheilung. Merckens. (Seit Ende December 2 St. Flexionsübungen mit den Schülern der 2. Abtheilung. Lillie.)

**Geographie** 3 St. Geographie von Schlesien, Geschichte der Provinz von 1740 ab. Die Elemente der allgemeinen Geographie. Rehbaum.

**Rechnen** 4 St. Die vier Species mit benannten Zahlen. Die Zeitrechnung. Vorübungen in der Bruchrechnung, Addition und Subtraction der Brüche. Rehbaum.

### Technischer und gymnastischer Unterricht.

**Schreiben.** Sexta 3 St., Quinta 2 St. Buchstaben, Wörter, Sätze in deutscher und lateinischer Schrift. Rehbaum.

**Zeichnen.** Sexta, Quinta, Quarta je 2 St. Von den ersten Vorübungen bis zum Kopiren leichter Vorlageblätter. Bayer.

**Gesang.** Untere Abtheilung (VI und V) 2 St. Kennenlernen der Noten, der leichteren Durtonleitern, der Intervalle, der einfachsten Taktarten und einiger Akkorde. Zwanzig Kirchenmelodien einstimmig. Einübung der Oberstimme von vierstimmigen Gesängen. — Mittlere Abtheilung (IV und III) 1 St. Bilden von Dur- und Molltonleitern und einiger Akkorde. Einiges über Rhythmus, Tempo, Takt, Dynamik, Melodik, Aussprache u. s. w. Fünfzehn Kirchenmelodien einstimmig. Einübung von Liedern, Chorälen, Hymnen u. dgl. für gemischten Chor. — Obere Abtheilung (II und I) 1 St. Vierstimmiger Männergesang. Auswahl von

Compositionen ernsten und heiteren Inhalts. Einübung der beiden unteren Stimmen von Gesängen für gemischten Chor. — Chorklasse (I bis VI) 1 St. Schüler, deren Leistungen im Gesang befriedigen. Einübung vierstimmiger Lieder, Choräle, Hymnen u. dgl. — Rehbaum.

**Turnen** zweimal wöchentlich je 2 St. Im Sommer auf dem Turnplatze, im Winter in der städtischen Turnhalle. Geräth- und Freiübungen. Das Winterturnen wurde nach einer Verfügung des städtischen Turnrathes in diesem Jahre zur Ausbildung der im Sommer nöthigen Vorturner benutzt, und zwar so, dass die Schüler der 3 unteren Klassen in 3 Riegen die erste, die der 3 oberen Klassen in gleichfalls 3 Riegen die zweite Stunde turnten. Aufsicht und Leitung der Uebungen hatten die Hilfs-Turnlehrer Hirsch und Rehbaum.

### Vorschule.

Den Unterricht ertheilten nach Massgabe des Lehrplanes, in jeder der beiden Klassen mit 26 Stunden, die Lehrer Adamy und Tschache.

## Stunden-Vertheilung im Winter-Semester 1863/64.

(Vom 8. November ab.)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Vorschule		Summa
							1. Kl.	2. Kl.	
1. Director Gädke Ordinarius von I.	6 Griech.	2 Latein.	1 Franz.		3 Franz.				12
2. Dr. Lange, Professor Ordinarius von III.	8 Latein.		6 Griech.	6 Griech.					20
3. Anderssen, Professor Ordinarius von II.	3 Deutsch 4 Mathem. 2 Physik	4 Mathem. 1 Physik	4 Mathem.	1 Geogr. 1 Mathem.					20
4. Dr. Geisler, Oberlehrer Ordinarius von IV.		8 Latein.		2 Deutsch 10 Latein.					20
5. Hirsch, Ordinar. von V.		6 Griech.		2 Franz.	2 Deutsch 10 Latein.				20 u. Turn.
6. Dr. Markgraf	2 Franz. 3 Gesch.	2 Deutsch 2 Franz. 3 Gesch.	2 Franz. 2 Gesch. 2 Geogr.	2 Gesch.	3 Geogr.				23
7. Dr. Merckens			2 Deutsch 10 Latein.			2 Deutsch 10 Latein.			24
8. Rehbaum, Ordinarius von VI.	1 Gesang			2 Rechnen 1 Gesang	4 Rechnen 2 Schreib.	3 Geogr. 4 Rechnen 3 Schreib.			23 u. Turn.
	1 Gesang								
9. Prediger Dr. Koch	2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion	3 Religion				11
10. Prof. Dr. Magnus	2 Hebr.	2 Hebr.							4
11. Seminarist Dr. Lilie (seit Ende December)			(3 Latein.) (3 Griech.)			(2 Latein.)			8
12. Maler Bayer				2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.			6
13. Vorschullehrer Adamy							16 Stunden	10 Stunden	26
14. Vorschullehrer Tschache							10 Stunden	16 Stunden	26

## II. Verordnungen des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums.

1863. 17. August. Nach dem neuen Reglement über Beschäftigung und Anstellung von Civilanwärttern im Postdienst vom 3. Juni 1863 werden Post-Eleven nur auf Grund eines Maturitätszeugnisses von einem Gymnasium oder einer Realschule 1. Ordn., Post-Expedienten-Anwärter nur nach einjährigem Besuche der Secunda dieser Anstalten (oder nach einjährigem Besuch der Prima einer Realschule 2. Ordn. oder auf Grund des Maturitätszeugnisses einer höheren Bürgerschule), Post-Expeditions-Gehülfen nur bei nachgewiesener Reife für die Secunda eines Gymnasiums oder einer Realschule 1. oder 2. Ordn. angenommen. (Erlass des U. M. v. 11. Aug. 1863).

20. August. Einschärfung der bei Versendung der Programme zu beobachtenden Formalien (U. M. 17. Aug.)

28. September. Die Vorschulen der Gymnasien und Realschulen sind nach einem Erlass des Königl. Ministeriums auf den allgemeinen Elementar-Unterricht zu beschränken und fremde Sprachen von dem Lehrplan derselben auszuschliessen.

27. October. Mittheilung des durch Erlass des Herrn Ministers vom 2. ejusd. bestimmten Lehrplanes für den Unterricht im Zeichnen auf Gymnasien und Realschulen, sowie der Instruction für die Prüfung der Zeichenlehrer von gleichem Datum.

30. December. Betreffend die Abfassung und Feststellung der Qualificationszeugnisse für den einjährigen Militärdienst; desgleichen die bei solchen Schülern zu übende Vorsicht, welche um jenes Attest zu erwerben, erst in Secunda oder Tertia eingetreten sind (U. M. 21. December).

1864. 4. Januar. Von den an der Anstalt erscheinenden Programmen sind an das K. P. S. C. 252 Exemplare einzusenden.

3. März. Betreffend die diesjährige Feier des Allerh. Geburtstages Sr. Majestät.

## III. Chronik.

Mit Ablauf des vorigen Schuljahrs beschloss der Director Herr Prof. Dr. Wimmer seine langjährige verdienstvolle Wirksamkeit an unserem Gymnasium, um die durch das Vertrauen seiner Mitbürger ihm übertragene neu creirte Stelle des hiesigen Stadt-Schulraths anzutreten. Einst selber Zögling der Anstalt, hat er ihr dann vom Beginn seiner amtlichen Thätigkeit fast 17 Jahre als Lehrer, 20 Jahre als Director angehört. Den Gefühlen, mit welchen sein Scheiden Schüler und Lehrer erfüllte, haben beide seiner Zeit Ausdruck geliehen: jene durch einen solennen Fackelzug am 27. März, diese durch die Worte, mit denen Prorector Dr. Lange Tags darauf zu Ende der öffentlichen Prüfung im Namen des Collegiums die Schlussrede des Directors erwiderte, wie durch ein am Abend des 28. ihm veranstaltetes Abschiedsmahl. Die Schule darf es als ihre Ehre und ihre Pflicht in Anspruch nehmen, sich dem Manne auch an dieser Stelle zu bleibendem Danke zu bekennen, welcher ihr mehr als ein Menschenalter durch die Tiefe und den Umfang einer auf zwei anscheinend weit von einander getrennten Wissensgebieten sich mit gleicher Sicherheit und gleichem Erfolge bewegenden

Gelehrsamkeit und durch seltene Lehrbegabung und Lehrertreue eine hervorragende Zierde gewesen, durch beides aber nicht minder als durch die umsichtige Wahrnehmung aller ihrer Interessen seinen Namen für immer mit der Geschichte des Friedrichs-Gymnasiums verknüpft hat. Möge er auch fernerhin sich andauernder Rüstigkeit Körpers und des Geistes erfreuen, und ihm die Genugthuung werden das Schulwesen seiner Vaterstadt immer reicherer Blüthe entgegen zu führen.

Die Verwaltung des Directorats übernahm bis zum Eintreffen des Berichtstatters Herr Prorektor Lange; die bisher vom Director ertheilten Unterrichtsstunden wurden durch die Lehrer vertreten, und zwar bis zum Ablaufe des Sommerhalbjahrs unter Beihülfe des Schulamts-Candidaten und Mitgliedes des hiesigen pädagogischen Seminars Herrn Tardy, welcher letztere von Michaelis ab in eine Lehrstelle am Gymnasium zu St. Maria Magdalena übergang.

Der Unterzeichnete, von dem Presbyterium der Hofkirche, als dem Patrone der Anstalt, in das erledigte Directorat gewählt, zuvor Director des Gymnasiums zu Memel, konnte erst Mitte October hier eintreffen. Nachdem derselbe in einer Sitzung des Presbyteriums am 17. des genannten Monats durch den Vorsitzenden, Herrn Hofprediger Dr. theol. et phil. Gillet in sein Amt eingeführt, auch ihm am 21. das Inventarium übergeben worden, stellte ihn der Herr Curator des Gymnasiums, Geheimer Justizrath Prof. Dr. Abegg, Sonnabend den 24. dem Lehrercollegium und dem Schülercoetus vor. Hierauf ergriff der neue Director das Wort zu einer Ansprache an die Versammlung und erlebte für sein Wirken an der Anstalt den göttlichen Segen. Herr Prorektor Lange hielt die Bewillkommungsrede im Namen des Lehrercollegiums.

Ende December begann der Candidat des höheren Schulamts, zugleich Mitglied des pädagogischen Seminars, Herr Dr. Kurt Lillie sein Probejahr an dem Friedrichs-Gymnasium; es wurde ihm ein Theil des lateinischen und griechischen Unterrichts in der Tertia und Sexta mit überhaupt 8 Stunden zugewiesen.

Eine Erneuerung der Schulräume, zum Theil auch der Utensilien, desgleichen die Herstellung eines eigenen Zeichenlocals wurde während der Sommerferien bewirkt.

Die Frequenz der Anstalt betrug am Beginn des letzten Semesters 258 Schüler, und zwar: in I 25, in II 44, in III 69, in IV 42, in V 43, in VI 35. In den beiden Vorschulklassen befanden sich 82 Schüler.

Am 12. Februar d. J. bestanden folgende Zöglinge die mündliche Abiturienten-Prüfung unter dem Vorsitze des K. Provinzial-Schulraths Herrn Dr. Scheibert.

Namen	Geburtsort	Stand des Vaters	Confession	Alter Jahre	Auf der Schule Jahre	In Prima Jahre	Will studiren
Richard Kretschmer	Koschentin	Rendant	Evang.	21	3 $\frac{1}{2}$	3 $\frac{1}{2}$	Medicin in Breslau.
Leon Blümner	Breslau	Dr. med. und prakt. Arzt	Evang.	18 $\frac{1}{2}$	8	2 $\frac{1}{2}$	Jura in Breslau.
Ludwig Borchert	Breslau	Kaufmann	Jüd.	17 $\frac{3}{4}$	8	2	Philologie in Breslau.
Oswald Rother	Schlegel, Kr. Neurede	Kreistaxator	Kathol.	19 $\frac{1}{2}$	2	2	Kathol. Theologie in München.

#### IV. Bibliothek, Lehrmittel, Sammlungen.

Zur Bibliothek, verwaltet von Dr. Markgraf, sind hinzugekommen:

a) als Geschenke: Von dem Hohen Ministerium: Gerhard Etruskische Spiegel Thl. III und IV Lieferung 8 und 9. Urkunde über die Gründung des Denkmals Friedrich Wilhelm III. vom 17. März 1863. — Vom Präsidium der schlesischen Gesellschaft etc.: Abhandlungen der Gesellschaft; Abtheilung für Naturwissenschaften und Medicin 1862, II Jahresbericht für 1862. — Vom Königl. Universitäts-Buchhändler Herrn F. Hirt: Programm der Berner Cantonschule für 1863. Schilling, Grundriss der Naturgeschichte. Theil I und II in je 2 Exemplaren. Atlas der Naturgeschichte, vom Thier- und Pflanzenreich Lief. I. — Von Herrn Schulrath Dr. Wimmer: Commentarii collegii Conimbricensis societatis Jesu in opera Aristotelis. Coloniae 1600. 5 Bände in 4<sup>o</sup>. Uebersetzung von Virgil Band I; von Livius Band I. — Von dem Primaner Borchert: W. O. v. Horn, Hans Joachim von Ziethen. — Von dem Quartaner Loebel: Frz. Hoffmann Der blinde Knabe.

b) durch Ankauf: Stephani thesaurus ed. Dindorf vol. I fasc. 12, 13. Stiehl Centralblatt 1863. Potthast Wegweiser durch die Geschichtschreiber des Mittelalters. Thucydides ed. Poppo, 11 Bde. Grimm Deutsches Wörterbuch IV 1. Westphal Metrik II 1. Homeri Ilias ed. Doederlein Theil I. Diez Etymologisches Wörterbuch der romanischen Sprachen. 2 Bde. Schnitzlein Iconographia Heft XVI. Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit Heft 41—44. Reymann Topographische Specialkarte von Deutschland Lieferung 152, 153. Cornelius Nepos ed. Dietsch. M. Seyffert Programmata. Leo Meyer Vergleichende Grammatik der griechischen und lateinischen Sprache I. II 1. Demosthenis oratio in Midiam rec. Buttman. Xenophons Anabasis erklärt von Rehdantz Bd. I. Georg Curtius Erläuterungen zur griech. Schulgrammatik. Sophoclis tragoediae rec. Nevius. Marquardt Römische Privatalterthümer I. L. Lange Römische Alterthümer I. II. Scholia Horatiana Acronis et Porphyronis ed. Hauthal vol. I. Hesychii Alexandrini lexici editio minor ed. M. Schmidt.

Ausserdem eine Anzahl von dem Hochwürdigen Presbyterium der Hofkirche überwiesener Bände.

Der physikalische Apparat ist unter Aufwendung erheblicher Kosten erneuert und ergänzt worden.

Für die dem Gymnasium zugewandten Geschenke verfehlen wir nicht unsern ehrfurchtsvollen und ergebensten Dank auszusprechen.

## V. Ordnung der Prüfung.

Mittwoch, den 16. März.

Vormittag 9 Uhr.

### Gesang und Gebet.

Es naht die ernste Rechenschaft,  
O Vater, steh' uns bei mit Kraft  
Und send' uns deinen guten Geist,  
Der auch die Schwachen unterweist.

O Gott, der alles Gute schafft,  
Verleih' uns Freudigkeit und Kraft,  
Dass in der Prüfung wir besteh'n;  
O höre unser kindlich Fleh'n!

- II. Griechisch (Odyssee) Hirsch. — Mathematik Anderssen. — Französisch Markgraf.  
I. Lateinisch (Horaz) Lange. — Physik Anderssen. — Griechisch (Sophocles) Gädke.

Vorträge der Tertianer:

Edmund v. Woysch Nächtliche Erscheinung zu Speyer, von Wolfgang Müller.  
Oskar Engel Reinecke und seine Kinder, von Pfarrius.  
Friedrich Pringsheim Harald, von Wolfgang Müller.

Nachmittag 2 Uhr.

- IV. Religion Koch. — Lateinisch Geisler. — Griechisch Lange.  
III. B. Griechisch Lilie. — A und B. Geographie Markgraf. — A. Lateinisch Merckens.

Vorträge der Quartaner:

Richard Gädke Hans Euler, von Seidl.  
Karl Hitzigrath Der Klabautermann, von Kopisch.  
Fedor Dittrich Die Glücklichen, von Feuchtersleben.

Donnerstag, den 17. März.

Vormittag 9 Uhr.

- VI. Lateinisch Merckens. — Geographie Rehbaum. — Deutsch Merckens.  
V. Lateinisch Hirsch. — Rechnen Rehbaum. — Französisch Gädke.

Vorträge der Quintaner:

Charles Freymond, Richard Lachs, Eugen Kalkowski, Bolko von Rödern „Die Histörchen“  
von Kopisch.

Vorträge der Sextaner:

August Stein Der Trunk aus dem Stiefel, von Pfarrius.  
Paul Friederici Vom schlafenden Apfel, von Reinick.  
Arthur Anschütz Die Neun in der Wetterfahne, von Simrock.  
Richard Wolff Der Schneiderjunge von Krippstadt, von Kopisch.

**Nachmittag 2 Uhr.**

2. Vorschulklasse. Lesen, Sprechübungen, Rechnen Tschache.  
 1. Vorschulklasse. Lesen und Deutsch, Geographie Adamy; Rechnen Tschache; Religion Adamy.

**Vorträge der Vorschüler:**

1. Klasse. Max Priess Fragen nach Gott. Carl Pauly Blau-Veilchen. Louis Pracht Der alte Ziethen. Emil Freymond Der Schooshund und der Kettenhund. Conrad Hayn Der Stieglitz.  
 2. Klasse. Felix Wimmer Das Vergissmeinnicht. Oskar Keil Mitleid im Winter. Georg Jonas Winterlied. Max Fleck Des Kindes Engel. Anton Schlesinger Lied der Landleute. Julius Gräffner Geträumt. Neander Warschauer Die Gänse.

**Freitag, den 18. März.**

**Vormittag 10 Uhr.**

Choral. Vierstimmig v. J. S. Bach.

Wie schön leuchtet der Morgenstern  
 Voll Gnad' und Wahrheit von dem Herrn,  
 Die süsse Wurzel Jesse!  
 Du Davids Sohn aus Jakobs Stamm,  
 Mein König und mein Bräutigam,

Hast mir mein Herz besessen.  
 Lieblich,  
 Freundlich,  
 Schön und herrlich, gross und ehrlich, reich von Gaben,  
 Hoch und sehr prächtig erhaben!

Lateinische Rede des Abiturienten Ludwig Borchert (Durch welche Mittel ist das Nationalgefühl unter den Griechen erhalten worden?)

Ver sacrum von Uhland, gesprochen von dem Unter-Secundaner Max Prieuer.

Aus Uhlands Ludwig der Baier (2. Aufzug), gesprochen von den Ober-Secundanern Remus v. Woysch und Heinrich Wuthe.

**Mein Hochland, Lied von A. Neithardt.**

Mein Herz ist im Hochland, mein Herz ist nicht hier,  
 Mein Herz ist im Hochland, mein Hochland, bei dir.  
 Auf der Jagd nach dem Hirsch, auf der Jagd nach dem  
 Reh,

Mein Herz ist im Hochland, wohin ich auch geh'.

Fahr' wohl, du mein Hochland, fahr' wohl, du mein  
 Nord,

Der Heimath des Muthes, der Tapferkeit Hort.

Wohin ich auch wandre, wohin allerwärts,  
 In den Bergen des Hochlands bleibt ewig mein Herz.

Fahrt wohl, ihr Gebirge, hochglänzender Schnee,  
 Fahrt wohl, grüne Thäler am bläulichen See,  
 Fahrt wohl, dunkle Wälder, wildhangende Huth,  
 Ihr, stürzende Bäche, lautbrausende Fluth.

Mein Herz ist im Hochland, mein Herz ist nicht hier,  
 Mein Herz ist im Hochland, mein Hochland, bei dir.  
 Auf der Jagd nach dem Hirsch, auf der Jagd nach dem  
 Reh,

Mein Herz ist im Hochland, wohin ich auch geh'.

**Frühlingsgruss, Lied von M. v. Eichendorf. Comp. von C. Reinicke.**

Es steht ein Berg im Feuer,  
 Im feurigen Morgenbrand,  
 Und auf der höchsten Spitze  
 Ein Tannbaum über'm Land.

Und auf dem höchsten Gipfel  
 Steh' ich und schau vom Baum:  
 O Welt, du schöne Welt,  
 Man sieht dich vor Blüten kaum!

Aus Schiller's Tell (II, 1), gesprochen von den Ober-Secundanern Moritz Jossmann und Gustav v. Wittenburg.

Deutsche Rede des Abiturienten Leon Blümner (Auf welchen Gründen beruht die Ueberzeugung, dass die Glückseligkeit der menschlichen Gesellschaft in stetem Wachstum begriffen ist?)

Motette. Comp. von Ferd. Möhring.

Frohlocket, ihr Völker der Erde, und preiset Gott! Der Heiland ist erschienen, den Gott der Herr verheissen. Er hat seine Gerechtigkeit der Welt offenbart. Amen.

Entlassung der Abiturienten.

Psalm 67. Comp. von Herm. Küster.

Gott sei uns gnädig und segne uns. Er lasse sein Antlitz leuchten, dass wir erkennen seinen Weg, unter allen Heiden sein Heil! Es danken dir Gott die Völker; es danken dir alle Völker. Die Völker freuen sich und jauchzen, dass du die Leute recht richtest, und regierest die Leute auf Erden. Es danken dir Gott die Völker; es danken dir alle Völker. Das Land giebt sein Gewächs. Es segne uns Gott, und alle Welt fürchte ihn!

Ehre sei dem Vater, und dem Sohne, und dem heiligen Geiste! wie es war vom Anfang, jetzt und immerdar, und von Ewigkeit zu Ewigkeit! Amen.

Schlussbemerkung.

Das Sommerhalbjahr beginnt Dienstag den 5. April. Die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler findet vom 21. bis 24. März während der Vormittagsstunden statt.

Gädke.