Zu der

am 29ten, 30ten und 31ten März 1858

stattfindenden

Prüfung der Schüler

des

Königlichen Friedrichs-Gymnasiums

ladet hierdurch

alle Beschützer, Gönner und Freunde des Schulwesens und dieser Anstalt

ehrerbietigst und ergebenst ein:

Dr. Friedrich Wimmer,
Director.

Vorangeht:
Algebraische Bestimmung der Tangente, der Wendepunkte und des Krümmungskreises der algebraischen ebenen Curven. Von R. Ladrasch.

Breslau.
Druck von C. H. Storch und Comp.

Algebraische Bestimmung

der Tangente, der Wendepunkte und des Krümmungskreises der algebraischen ebenen Curven.

Die Bestimmung der Tangente, der Wendepunkte, des Krümmungskreises und anderer Stücke der Curven geschieht gewöhnlich mit Hülfe der Differential-Rechnung, in manchen Fällen ist die Anwendung derselben sogar nothwendig. In Betreff der algebraischen ebenen Curven ist jedoch die Anwendung der Differential-Rechnung nicht erforderlich, und kann man auf rein algebraischem Wege dahin gelangen. Im Folgenden sollen die Tangente, die Wendepunkte und der Krümmungskreis der algebraischen ebenen Curven auf diesem Wege bestimmt werden.

I. Bestimmung der Tangente.

Tangente an eine Curve heisst diejenige Gerade, die mit der Curve einen Punkt gemein hat, und der die Curve in der unmittelbaren Nähe jenes Punktes (des Berührungspunktes) nur ihre convexe Seite zukehrt. Jede andere Gerade, die mit der Curve einen Punkt gemein hat, der aber die Curve in der unmittelbaren Nähe dieses Punktes sowohl die convexe, als die concave Seite zukehrt, ist eine Secante, d. h. eine Gerade, die mit der Curve im Allgemeinen noch einen Punkt gemein hat oder sie schneidet.

Denkt man sich eine Secante um den einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve gedreht, so bewegt sich der zweite Durchschnittspunkt und kommt, wenn die Drehung fortdauert, jenem als fest gedachten Punkte immer näher, bis er endlich mit ihm zusammenfällt. Der concave Curvenbogen, der anfangs zwischen den beiden Durchschnittspunkten lag, liegt in diesem Falle auf der entgegengesetzten Seite der Geraden, oder die Curve kehrt der Geraden bei dieser Lage ihre convexe Seite zu, d. h. die Gerade ist in dieser Lage eine Tangente an die Curve. — Auf dieser Vorstellung beruht die Bestimmung der Tangente.

Jede algebraische ebene Curve hat die Eigenschaft, dass die Anzahl ihrer Durchschnittspunkte mit einer Geraden im Allgemeinen gleich ist der Zahl, welche die Ordnung der Curve, d. h. den Grad ihrer Gleichung angiebt. Man findet die Coordinaten dieser

Durchschnittspunkte, also diese Punkte selbst, indem man die Gleichung der Curve mit der Gleichung der schneidenden Geraden verbindet. Im Allgemeinen erhält man also, wenn die Gleichung der Curve vom n^{ten} Grade ist, n Durchschnittspunkte (reelle und imaginäre). Ist nun die betreffende Gerade eine Tangente, so muss die Anzahl der Durchschnittspunkte $< n$ sein, da in diesem Falle wenigstens zwei derselben in einen zusammenfallen, d. h. gleiche Coordinaten haben müssen; und umgekehrt: wenn die Anzahl der Durchschnittspunkte $< n$ ist, oder wenn unter den n Durchschnittspunkten mindestens zwei gleiche Coordinaten haben, so ist die betreffende Gerade eine Tangente an die Curve, und zwar in dem Punkte, der durch diese Coordinaten bestimmt ist.

Demnach besteht die Bestimmung der Tangente an eine algebraische ebene Curve darin, die Beziehung aufzusuchen, welche zwischen der Curve und einer Geraden stattfinden muss, damit von den möglichen Durchschnittspunkten mindestens zwei reale zusammenfallen, d. h. die Anzahl der Durchschnittspunkte geringer als der Grad der Curve ist.

Sei $f\,(x,\, y) = o$ die Gleichung einer Curve n^{ten} Grades,
$y = mx + \mu$ die Gleichung der schneidenden Geraden,
so entsteht durch Verbindung dieser beiden Gleichungen folgende:

$$f\,(x,\, mx + \mu) = o$$

eine Gleichung n^{ten} Grades, welche nur die Unbekannte x enthält. Die n Wurzeln dieser Gleichung bestimmen die Abscissen der n Durchschnittspunkte der Curve mit der Geraden. Sind diese Abscissen:

$$x_1,\; x_2,\; x_3,\; x_4, \ldots\ldots x_n$$

so sind die entsprechenden Ordinaten:

$$y_1 = mx_1 + \mu \quad y_2 = mx_2 + \mu \quad y_3 = mx_3 + \mu \;\ldots\ldots\; y_n = mx_n + \mu$$

Ist nun $\qquad x_h = x_k$

so ist auch $\qquad y_h = y_k$

d. h. die beiden Durchschnittspunkte, deren Coordinaten diese sind, fallen in **einen** zusammen.

Es ist jedoch die Auflösung der Gleichung $f\,(x,\, mx + \mu) = o$ nicht nöthig, da die bekannten Beziehungen zwischen den Constanten einer Gleichung unmittelbar aus der Gleichung die Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln aufstellen lassen. Diese Bedingungs-Gleichung enthält ausser den Constanten der Gleichung der Curve noch die Constanten der Geraden, m und μ, und kann demnach bezeichnet werden mit: $\varphi\,(m,\, \mu) = o$. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes, ξ und η, müssen, da derselbe der Curve und der Geraden gemein ist, den Gleichungen $f\,(\xi,\, \eta) = o$ und $\eta = m\xi + \mu$ genügen. Aus letzterer folgt: $\mu = \eta - m\xi$, so dass also zur Bestimmung von m die Gleichung

$$\varphi\,(m,\, \eta - m\xi) = o$$

dient.

Für den Punkt (ξ, η) lautet die Gleichung der **Secante**:

$$y - \eta = m\,(x - \xi)$$

und wird für m der aus der Gleichung $\varphi\,(m, \eta - m\xi) = o$ resultirende Werth gesetzt, so hat man die Gleichung der **Tangente** im Punkte (ξ, η).

Beispiel.

Die Gleichung der Parabel ist: $y^2 = 2ax$. Verbindet man damit die Gleichung: $y = mx + \mu$, so ist

$$m^2\,x^2 + 2\,(m\mu - a)\,x + \mu^2 = o$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Abscissen der Durchschnittspunkte sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind einander gleich, wenn

$$2m\mu = a, \text{ also } \mu = \frac{a}{2m}$$

ist. Da nun, wenn der Berührungspunkt der Tangente die Coordinaten ξ und η hat,

$$\eta^2 = 2a\xi \quad \text{und} \quad \eta = m\xi + \mu, \text{ also } \mu = \eta - m\xi$$

sein muss, so ergiebt sich zur Bestimmung des Werthes von m die Gleichung

$$\frac{a}{2m} = \eta - m\xi$$

woraus

$$m = \frac{\eta}{2\xi}$$

folgt. Mithin ist die Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = \frac{\eta}{2\xi}\,(x - \xi) = \frac{a}{\eta}\,(x - \xi)$$

oder:

$$2\xi y = \eta\,(x + \xi)$$

oder:

$$y\eta = a\,(x + \xi)$$

Die Auflösung der Gleichung $\varphi\,(m, \mu) = o$ ist jedoch schon für $n = 3$ und $n = 4$ bisweilen mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden, und die Aufstellung dieser Gleichung für $n > 4$ im Allgemeinen ganz unmöglich. Daher ist es nöthig, in diesen Fällen die Tangente auf andere Art zu bestimmen.

In der Gleichung der Geraden: $y = mx + \mu$ ist

$$m = tng.\,v$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Geraden und der Abscissen-Axe.

Geht die Gerade durch die beiden Punkte (ξ, η) und (ξ', η') einer Curve, deren Gleichung $f\,(x, y) = o$ ist, so sind folgende Gleichungen zu erfüllen:

$$f\,(\xi, \eta) = o, \quad f\,(\xi', \eta') = o, \quad \eta = m\xi + \mu, \quad \eta' = m\xi' + \mu$$

Aus den beiden letzteren folgt

$$m \text{ oder tg. } v = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}$$

Ist nun $\xi' = \xi + \alpha$, $\eta' = \eta + \beta$, so ist

$$m = \frac{\beta}{\alpha}$$

Nach der oben gegebenen genetischen Erklärung der Tangente nähert sich eine Gerade, welche durch den Punkt (ξ, η) der Curve geht und um diesen Punkt sich dreht, immer mehr der Lage der Tangente und fällt endlich mit ihr zusammen, sobald der zweite Durchschnittspunkt (ξ', η') mit dem ersten (ξ, η) zusammenfällt, also wenn α und β, die Differenzen der Coordinaten der beiden Punkte, gleichzeitig $= o$ werden. In diesem Falle hat m einen bestimmten Werth, nämlich den der trigonometrischen Tangente des Winkels zwischen der geometrischen Tangente an die Curve im Punkte (ξ, η) und der Abscissen-Axe (der erste Differential-Quotient der Curve).

Man hat demnach aus den 3 Gleichungen:

$$f(\xi, \eta) = o \quad (1) \qquad f(\xi + \alpha, \eta + \beta) = o \quad (2) \qquad \beta = \alpha m \; (3)$$

eine solche Gleichung zwischen α, β und m abzuleiten, dass der daraus resultirende Werth von m ein bestimmter bleibt, sobald α und β gleichzeitig $= o$ gesetzt werden. Dieser Werth von m ist der der Tangente im Punkte (ξ, η) entsprechende.

Subtrahirt man die Gleichung (1) von (2), so fallen alle Glieder weg, welche weder α noch β enthalten.

Ist nämlich

$$C.\, \xi^{k}.\, \eta^{\lambda}$$

das allgemeine Glied der Gleichung $f(\xi, \eta) = o$, so ist

$$C(\xi + \alpha)^{k}.\, (\eta + \beta)^{\lambda}$$

das allgemeine Glied der Gleichung $f(\xi + \alpha, \eta + \beta) = o$,
und das allgemeine Glied der Gleichung, die man durch die Subtraction der Gleichung (1) von (2) erhält, wenn der Kürze wegen

$$(\xi + \alpha)^{k} = \xi^{k} + \alpha X \qquad (\eta + \beta)^{\lambda} = \eta^{\lambda} + \beta Y$$

gesetzt wird, gleich

$$C(\alpha X \eta^{\lambda} + \beta Y \xi^{k} + \alpha\beta XY)$$

Es bleiben demnach nur die Glieder der Gleichung (2) übrig, welche α oder β zum Factor haben. Ordnet man dieselben nach Potenzen von α und β, so erhält man die Gleichung

$$p\alpha + q\beta + r\alpha^2 + s\alpha\beta + t\beta^2 + A\alpha^2 + B\beta^2 = o \qquad (4)$$

wo p, q, r, s und t weder α noch β enthalten, A und B aber Functionen von α und β sind, die für $\alpha = o$ und $\beta = o$ auch $= o$ werden.

Die Gleichung (4) kann auch geschrieben werden:

$$\alpha\,(p + r\alpha + \tfrac{1}{2}\,s\beta + A\alpha) + \beta\,(q + \tfrac{1}{2}\,s\alpha + t\beta + B\beta) = o \quad (5)$$

Setzt man nun $\beta = \alpha m$

so geht diese Gleichung über in eine durch α theilbare, so dass man diesen Factor entfernen kann und nun erhält:

$$p + r\alpha + \tfrac{1}{2}s\alpha m + A\alpha + m\,(q + \tfrac{1}{2}s\alpha + t\alpha m + B\alpha m) = o \quad (6)$$

In dieser Gleichung kann man nun $\alpha = o$ setzen und erhält dadurch

$$p + mq = o \qquad \text{oder:} \qquad m = -\frac{p}{q}$$

Dies ist ein bestimmter Werth, der weder α noch β, sondern nur ξ, η und die Constanten der Gleichung der Curve enthält.

Mithin ist die Gleichung der Tangente im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = -\frac{p}{q}\,(x - \xi) \qquad \text{oder:} \qquad p\,(x - \xi) + q\,(y - \eta) = o$$

Die Werthe von p und q erhält man nach dem Obigen, indem man in der Gleichung der Curve $\xi + \alpha$ für x, $\eta + \beta$ für y setzt: dann ist

p gleich der Summe aller Glieder mit dem Factor α,
q „ „ „ „ „ „ „ „ β,

d. h. p ist die erste abgeleitete Function von $f\,(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ
q „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ η

Beispiel:

Setzt man in der Gleichung der Parabel: $y^2 - 2ax = o$ $\xi + \alpha$ für x und $\eta + \beta$ für y, so geht sie über in:

$$\eta^2 + 2\beta\eta + \beta^2 - 2a\xi - 2a\alpha = o$$

Hier ist $p = -2a \qquad q = 2\eta$

folglich die Gleichung der Tangente an die Parabel im Punkte (ξ, η):

$$y - \eta = \frac{a}{\eta}\,(x - \xi) \qquad \text{oder:} \qquad y\eta = a\,(x + \xi)$$

wie oben.

II. Bestimmung der Wendepunkte.

Wenn eine Curve in einem Punkte so beschaffen ist, dass sie unmittelbar vor demselben eine andere Lage gegen die Abscissen-Axe hat, als unmittelbar hinter demselben, also derselben vor diesem Punkte die convexe (concave), hinter ihm die concave (convexe) Seite zukehrt, so nennt man diesen Punkt der Curve Wendepunkt; denn die Curve macht in demselben in Bezug auf ihre Lage gegen jene Axe eine Wendung.

In Bezug auf die Tangente an die Curve in einem solchen Punkte findet der eigenthümliche Fall statt, dass die Curve, obschon sie ihr auch in der unmittelbaren Nähe des Wendepunktes, wie dies immer der Fall ist, stets ihre convexe Seite zukehrt, hinter diesem Punkte auf der entgegengesetzten Seite der Tangente fortgeht, während sie sonst auch hinter dem Berührungspunkte auf derselben Seite der Tangente fortläuft: kurz die Tangente im Wendepunkte einer Curve ist zugleich Secante, von deren Durchschnittspunkten der eine ebenfalls der Wendepunkt ist.

Wenn nun die Tangente im Allgemeinen betrachtet werden kann als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve zwei zusammenfallen: so kann man, dem Obigen gemäss, die Tangente im Wendepunkte betrachten als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten 3 in einen einzigen zusammenfallen, d. h. von deren Durchschnittspunkten 3 dieselben Coordinaten haben.

Man müsste demnach, wenn man eine Curve in Bezug auf Wendepunkte untersuchen will, die Bedingung aufstellen, unter welcher von den Wurzeln der Gleichung:

$$f\,(x,\, mx + \mu) = o$$

3 einander gleich sind. — Die Aufstellung dieser Bedingung ist aber mit noch grösseren Schwierigkeiten verknüpft, als die Bestimmung der Tangente nach dieser Methode. Aus diesem Grunde ist die Untersuchung einer Curve in Bezug auf Wendepunkte nach einer andern Methode anzustellen.

Betrachtet man die Tangente im Wendepunkte als eine Secante, von deren Durchschnittspunkten mit der Curve 3 zusammenfallen, so heisst das ebensoviel, als: 3 unmittelbar nebeneinander liegende Punkte der Curve liegen auf einer Geraden. Wenn daher diese Bedingungen in Bezug auf einen Punkt einer Curve und die beiden unmittelbar neben ihm liegenden Punkte erfüllt ist, so ist dieser Punkt ein Wendepunkt der Curve.

Die Bedingung, dass 3 Punkte, deren Coordinaten ξ und η, ξ' und η', ξ'' und η'' sind, auf einer Geraden liegen, ist: diese Coordinaten müssen den 3 Gleichungen $\eta = m\xi + \mu$, $\eta' = m\xi' + \mu$, $\eta'' = m\xi'' + \mu$ genügen, d. h. der Gleichung:

$$\xi\,(\eta' - \eta'') + \xi'\,(\eta'' - \eta) + \xi''\,(\eta - \eta') = o \qquad (1)$$

Ausserdem müssen, da diese 3 Punkte auf der Curve $f\,(x, y) = o$ liegen, auch die Gleichungen:

$$f\,(\xi, \eta) = o \quad (2) \qquad f\,(\xi', \eta') = o \quad (3) \qquad f\,(\xi'', \eta'') = o \quad (4)$$

erfüllt werden.

Ist nun
$$\xi' = \xi + \alpha \qquad \eta' = \eta + \beta$$
$$\xi'' = \xi + 2\,\alpha \qquad \eta'' = \eta + \beta + \gamma$$

so folgt aus (1) als Bedingung, dass die 3 Punkte auf einer Geraden liegen, $\gamma = \beta$ und die 3 andern Gleichungen gehen dadurch über in:

$$f\,(\xi, \eta) = o \quad (5) \qquad f\,(\xi + \alpha,\, \eta + \beta) = o \quad (6) \qquad f\,(\xi + 2\,\alpha,\, \eta + 2\,\beta) = o \quad (7)$$

Verbindet man diese 3 Gleichungen mit einander und lässt dann α und β gleich o werden, so erhält man die Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) der Curve $f(x, y) = o$ ein Wendepunkt ist.

Von diesen 3 Gleichungen sind die beiden ersten diejenigen, die zur Bestimmung der Tangente im Punkte (ξ, η) dienten. (Dass diese beiden Gleichungen ebenfalls zur Bestimmung des Wendepunktes nothwendig sind, folgt aus dem Obigen.) Aus ihnen ergiebt sich der Gränzwerth $m = -\frac{p}{q}$, der für die Tangente gilt. Vermittelst der Gleichungen (5) und (6) kann man die Gleichung (7) so verändern, dass alle Glieder die α und β nicht enthalten, verschwinden, und die daraus hervorgehende Gleichung nur Glieder enthält, die α und β zu Factoren haben. Man gelangt zu dieser Gleichung dadurch, dass man (5) und (6) von (7) subtrahirt, wie dies bei der Bestimmung der Tangente geschah. Es giebt jedoch noch einen andern Weg, zu ihr zu gelangen, und dieser soll hier eingeschlagen werden, weil er kürzer und bequemer ist.

Da nämlich (7) ebenso aus (6) entstanden ist, wie (6) aus (5), nämlich dadurch, dass $\xi + \alpha$ statt ξ und $\eta + \beta$ statt β gesetzt wurde, so kann auch die reducirte Gleichung (7), welche nur die mit α und β multiplicirten Glieder enthalten soll, aus der oben angeführten reducirten Gleichung (6):

$$p\alpha + q\beta + r\alpha^2 + s\alpha\beta + t\beta^2 + A\alpha^2 + B\beta^2 = o$$

dadurch gebildet werden, dass man in dieser 2α statt α und 2β statt β setzt. Denn das allgemeine Glied der Gleichung (7) ist

$$C\,(\xi + 2\alpha)^{k} \cdot (\eta + 2\beta)^{\lambda} = C \left\{ \xi^{k} + 2\alpha \acute{X} \right\} \left\{ \eta^{\lambda} + 2\beta \acute{Y} \right\}$$

$$= C \left\{ \xi^{k}, \eta^{\lambda} + 2\alpha\eta^{\lambda} \acute{X} + 2\beta\xi^{k} \acute{Y} + 4\alpha\beta \acute{X}\acute{Y} \right\}$$

Dies unterscheidet sich von dem allgemeinen Gliede der Gleichung (6), das bei der Bestimmung der Tangente angegeben ist, nur dadurch, dass überall 2α statt α und 2β statt β steht.

Demnach lautet die reducirte Gleichung (7)

$$2p\alpha + 2q\beta + 4r\alpha^2 + 4s\alpha\beta + 4t\beta^2 + 4A'\alpha^2 + 4B'\beta^2 = o$$

oder

$$2\alpha\,(p + 2r\alpha + s\beta + 2A'\alpha) + 2\beta\,(q + s\alpha + 2t\beta + 2B'\beta) = o$$

(wo A' und B' die Werthe bezeichnen, welche A und B annehmen, wenn 2α und 2β für α und β gesetzt werden).

Setzt man nun in dieser Gleichung $\beta = \alpha m$ und entfernt den gemeinschaftlichen Factor 2, so geht sie über in:

$$\alpha\,(p + 2r\alpha + s\alpha m + 2A'\alpha) + \alpha m\,(q + s\alpha + 2t\alpha m + 2B'\alpha m) = o$$

Nun ist α gemeinschaftlicher Factor, der zu entfernen ist; berücksichtigt man zugleich, dass $p + mq = o$ ist, so erhält man

$$2r\alpha + s\alpha m + 2A'\alpha + m\,(s\alpha + 2t\alpha m + 2B'\alpha m) = o$$

Hier kann noch einmal durch α dividirt werden:

$$2r + sm + 2A' + m(s + 2tm + 2B'm) = o$$

Setzt man nun $\alpha = o$, wodurch auch A' und $B' = o$ werden, so erhält man als Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt ist:

$$r + sm + tm^2 = o$$

oder, wenn für m sein Werth $-\frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$q^2r - pqs + p^2t = o$$

Kann diese Gleichung zugleich mit der Gleichung $f(\xi, \eta) = o$ erfüllt werden, so ist der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt; stehen dagegen diese beiden Gleichungen im Widerspruch mit einander, so hat die Curve keinen Wendepunkt.

Zu bemerken ist noch, dass die Werthe von r und t die zweiten abgeleiteten Functionen von $f(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ und η besonders (die Summen der mit α^2 und β^2 multiplicirten Glieder), s die zweite abgeleitete Function in Bezug auf ξ und η zugleich (die Summe der mit $\alpha\beta$ multiplicirten Glieder) ist.

Beispiel:

Es sei die Curve $y^2 = x^3 + a$ in Bezug auf Wendepunkte zu untersuchen. Setzt man $\xi + \alpha$ für x und $\eta + \beta$ für y, so erhält man:

$$\eta^2 + 2\beta\eta + \beta^2 = \xi^3 + 3\alpha\xi^2 + 3\alpha^2\xi + \alpha^3 + a$$

Mithin ist

$$p = 3\xi^2,\ q = -2\eta,\ r = 3\xi,\ s = o,\ t = -1$$

und die Bedingungsgleichung für den Wendepunkt:

$$4\eta^2\xi - 3\xi^4 = o$$

Diese Gleichung ist sowohl für $\xi = o$ erfüllt, als auch, wenn

$$4\eta^2 = 3\xi^3.$$

Für $\xi = o$ ergiebt sich aus $\eta^2 = \xi^3 + a$:

$$\eta^2 = a \text{ oder } \eta = \pm\sqrt{a}$$

Ist demnach a positiv, so hat η zwei reale Werthe, und die Punkte

$$\xi = o\ \eta = \sqrt{a},\ \xi = o\ \eta = -\sqrt{a}$$

sind Wendepunkte.

Für ein negatives a dagegen ist η imaginär, und der Abscisse $\xi = o$ entspricht gar kein realer Punkt.

Die andere Bedingung für den Wendepunkt: $4\eta^2 = 3\xi^3$ widerspricht der Gleichung $\eta^2 = \xi^3 + a$ nur, wenn a positiv ist. Denn aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\xi^3 = -4a \quad \eta^2 = -3a$$

Für negative Werthe des a giebt es demnach Wendepunkte.

Mithin hat die Curve, deren Gleichung: $y^2 = x^3 + a$, a positiv genommen, ist, zwei Wendepunkte, deren Coordinaten $\xi = o \;\; \eta = \sqrt{a}$

und $\xi = o \;\; \eta = -\sqrt{a}$

sind.

Die Curve: $y^2 = x^3 - a$ dagegen hat auch 2 Wendepunkte; deren Coordinaten sind aber:

$$\xi = \sqrt[3]{4a}\;,\; \eta = \sqrt{3a} \quad \text{und} \quad \xi = \sqrt[3]{4a} \;\; \eta = -\sqrt{3a}$$

Die Gleichung der Tangente an die Curve $y^2 = x^3 + a$ ist, da $p = 3\xi^2$, $q = -2\eta$, also $m = \frac{3\xi^2}{2\eta}$ ist,

$$y - \eta = \frac{3\xi^2}{2\eta}(x - \xi)$$

also, wenn a positiv ist, für $\xi = o \;\; \eta = \pm\sqrt{a}$, die Gleichung der Tangente im Wendepunkte:

$$y = \pm\sqrt{a}$$

d. h. die Tangente im Wendepunkte läuft parallel der Abscissen-Axe.

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der Curve, so erhält man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$x^3 = o$$

deren drei Wurzeln einander gleich sind, die oben aufgestellte Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes.

Für die Curve: $y^2 = x^3 - a$ ist die Gleichung für die Tangente im Wendepunkte $\left(\xi = \sqrt[3]{4a},\; \eta = \pm\sqrt{3a}\right)$:

$$\pm 2y\sqrt{3a} = 3x\sqrt[3]{16a^2} - 6a$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der Curve giebt:

$$x^3 - 3x^2\sqrt[3]{4a} + 3x\sqrt[3]{(4a)^2} - 4a = o$$

eine Gleichung mit 3 gleichen Wurzeln $x = \sqrt[3]{4a}$.

III. Bestimmung des Krümmungskreises.

Mit Ausnahme des Kreises haben alle Curven in ihrem gesammten Verlaufe nicht überall dieselbe Krümmung. Zur Bestimmung der Grösse der Krümmung in den verschiedenen Punkten dient, weil er eben die einzige Curve ist, die überall dieselbe Krümmung hat, der Kreis. Einen Kreis nun, der sich in einem bestimmten Punkte der Curve am genauesten anschliesst, nennt man Krümmungskreis der Curve für diesen Punkt, d. h. die Krümmung der Curve in diesem Punkte ist gleich der des Krümmungskreises. Der Halbmesser dieses Kreises heisst demnach der Krümmungshalbmesser der Curve für jenen Punkt. Da Kreise mit kleinem Halbmesser stärker gekrümmt sind, als Kreise mit grösserem Halbmesser, so leuchtet ein, dass die Krümmung einer Curve in irgend einem Punkte umgekehrt proportional ist dem Halbmesser des betreffenden Krümmungskreises.

Jeder Kreis ist seiner Grösse und Lage nach durch 3 Punkte bestimmt, die ihrer Lage nach gegeben sind: es giebt nur einen Kreis, der durch 3 ihrer Lage nach gegebene Punkte geht. Nimmt man daher auf einer Curve 3 beliebige Punkte an, so lässt sich durch diese 3 Punkte ein bestimmter Kreis legen: dieser Kreis wird sich desto genauer an die Curve anschliessen, d. h. deren Krümmung messen, je näher die 3 Punkte aneinander liegen; und wenn diese 3 Punkte so nahe an einander liegen, dass sie als in einen einzigen zusammenfallend betrachtet werden können, so misst der durch sie gehende Kreis die Krümmung der Curve in diesem Punkte aufs genaueste, ist mithin der Krümmungskreis der Curve für diesen Punkt. Die Bestimmung des Krümmungskreises geschieht demnach auf folgende Weise: man bestimmt einen Kreis, der durch 3 beliebige Punkte der Curve geht, und lässt dann diese 3 Punkte in einen einzigen zusammenfallen.

Seien ξ, ξ', ξ'' die Abscissen, η, η', η'' die zugehörigen Ordinaten dreier Punkte der Curve $f(x, y) = o$, die demnach den Gleichungen:

$$f(\xi,\eta) = o \quad f(\xi',\eta') = o \quad f(\xi'',\eta'') = o$$

genügen müssen; ferner

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = R^2$$

die Gleichung des Kreises, der durch diese 3 Punkte gelegt wird: so müssen die Coordinaten der 3 Punkte auch folgenden 3 Gleichungen genügen:

$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 = R^2, \quad (\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 = R^2, \quad (\xi'' - X)^2 + (\eta'' - Y)^2 = R^2$$

Hieraus ergeben sich für die Coordinaten X und Y des Mittelpunktes des Kreises folgende Werthe:

$$X = \frac{\xi^2(\eta' - \eta'') + \xi'^2(\eta'' - \eta) + \xi''^2(\eta - \eta') - (\eta - \eta')(\eta'' - \eta)(\eta' - \eta'')}{2\,\{\xi(\eta' - \eta'') + \xi'(\eta'' - \eta) + \xi''(\eta - \eta')\}}$$

$$Y = -\frac{\eta'^2(\xi' - \xi'') + \eta'^2(\xi'' - \xi) + \eta''^2(\xi - \xi') - (\xi - \xi')(\xi'' - \xi)(\xi' - \xi'')}{2\,\{\xi(\eta' - \eta'') + \xi'(\eta'' - \eta) + \xi''(\eta - \eta')\}}$$

Setzt man nun

$$\xi' = \xi + \alpha \quad \eta' = \eta + \beta$$
$$\xi'' = \xi + 2\alpha \quad \eta'' = \eta + \beta + \gamma$$

so gehen obige Werthe über in

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha^2\beta + \beta\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha(\beta-\gamma)} = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha^2 + \gamma(\beta+\gamma)}{2(\beta-\gamma)} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

$$Y = \eta + \frac{\beta}{2} - \frac{2\alpha^3 + \alpha\gamma(\beta+\gamma)}{2\alpha(\beta-\gamma)} = \eta + \frac{\beta}{2} - \frac{2\alpha^2 + \gamma(\beta+\gamma)}{2(\beta-\gamma)}.$$

Da nun $\quad (\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 = R^2$

sein muss, so ergiebt sich durch Substitution der Werthe für X und Y:

$$R^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2(\beta-\gamma)^2} \left\{ 4\alpha^2 + (\beta+\gamma)^2 \right\}$$

Sind v und v' die Winkel, welche die Geraden, die durch die Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ einerseits, und $(\xi + 2\alpha, \eta + \beta + \gamma)$ und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ andrerseits gehen, mit der Abscissen-Achse bilden, und setzt man

$$tg\, v = m, \quad tg\, v' = m'$$

so ist

$$\beta = \alpha m \quad \gamma = \alpha m'$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdrücken für X, Y und R^2, so erhält man:

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha m \{2 + m'(m+m')\}}{2(m-m')}$$

$$Y = \eta + \frac{\alpha m}{2} - \frac{\alpha\{2 + m'(m+m')\}}{2(m-m')}$$

$$R = \frac{\alpha^2(1+m^2)(1+m'^2)}{4(m-m')^2} \left\{ 4 + (m+m')^2 \right\}$$

Um nun zum Krümmungskreise überzugehen, hat man zunächst die Werthe zu setzen, welche m und m' annehmen, sobald die 3 Punkte unmittelbar neben einander rücken, d. h. die Werthe, welche m und m' für die Tangenten in den Punkten $(\xi\ \eta)$ und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ haben; dann erst ist $\alpha = o$ zu setzen, wodurch das Zusammenfallen der Punkte in einen einzigen bewirkt wird. Bevor jedoch diese Operation vorgenommen wird, möge noch eine andere Methode, den Krümmungskreis zu bestimmen, angeführt werden, wodurch Gelegenheit geboten wird, die Richtigkeit des eben gefundenen Resultats nachzuweisen.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass der Krümmungskreis 2 Tangenten mit der Curve gemein hat, deren Berührungspunkte die Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ sind. Demnach schneiden sich die auf diesen beiden Tangenten in den Berührungspunkten errichteten Senkrechten, die unter dem Namen Normalen bekannt sind, in dem Mittelpunkte des Krümmungskreises. Man kann daher diesen auch definiren als denjenigen Kreis, der durch die beiden unmittelbar neben einander liegenden Punkte (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ geht und dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der Normalen dieser beiden Punkte, dessen Halbmesser also die Entfernung dieses Durchschnittspunktes von einem der beiden Punkte der Curve ist.

Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten (ξ, η) und $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ sind:

$$y - \eta = m\,(x - \xi)$$

und $$y - (\eta + \beta) = m' \left\{ x - (\xi + \alpha) \right\}$$

mithin die Gleichungen der zu diesen Punkten gehörigen Normalen:

$$y - \eta = -\frac{1}{m}\,(x - \xi)$$

und $$y - (\eta + \beta) = -\frac{1}{m'} \left\{ x - (\xi + \alpha) \right\}$$

also die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes:

$$X = \frac{\left(\eta + \frac{\xi}{m}\right) - \left(\eta + \beta + \frac{\xi + \alpha}{m'}\right)}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}} = \xi + \frac{m\,(\alpha + m'\beta)}{m - m'}$$

$$Y = -\frac{\frac{1}{m'}\left(\eta + \frac{\xi}{m}\right) - \frac{1}{m}\left(\eta + \beta + \frac{\xi + \alpha}{m'}\right)}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}} = \eta - \frac{\alpha + m'\beta}{m - m'},$$

und da $R^2 = (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)\,(\alpha + m'\beta)^2}{(m - m')^2}$$

oder, wenn $\beta = \alpha m$ gesetzt wird:

$$X = \xi + \frac{\alpha m\,(1 + mm')}{m - m'} \qquad Y = \eta - \frac{\alpha\,(1 + mm')}{m - m'}$$

$$R^2 = \frac{\alpha^2\,(1 + m^2)\,(1 + mm')^2}{(m - m')^2}$$

Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den vorhergefundenen, für den besonderen Fall, dass die 3 resp. 2 angenommenen Punkte in einen zusammenfallen, zeigt sich, wenn man den Werth für m' substituirt. Dieser ist jedoch noch zu bestimmen.

Für $m = tg.\,v$, welcher Werth für die Tangente im Punkte (ξ, η) gilt, wurde der Werth $-\frac{p}{q}$ gefunden, wo p und q die ersten abgeleiteten Functionen von $f(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ und η sind. Es sind dies ebenfalls Functionen von ξ und η, enthalten jedoch die Grössen α und β nicht; bezeichnet man sie mit

$$p = \varphi(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad q = \psi(\xi, \eta)$$

so ist $$m = -\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)}.$$

$m' = tg\, v'$ nun ist diejenige Grösse für die Tangente im Punkte $(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, welche m für die Tangente im Punkte (ξ, η) ist. Bezeichnet man daher ihren Werth analog mit $-\frac{p'}{q'}$, so sind p' und q' die Werthe, welche p und q annehmen, wenn in ihnen $\xi + \alpha$ und $\eta + \beta$ für ξ und η gesetzt werden. Demnach ist

$$p' = \varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta) \quad q' = \psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$$

und

$$m' = -\frac{\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)}{\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)}$$

Entwickelt man $\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ und $\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, indem man in $\varphi(\xi, \eta) = p$ und $\psi(\xi, \eta) = q$ $\xi + \alpha$ und $\eta + \beta$ für ξ und η setzt, so erhält man, wie dies schon bei der Bestimmung der Tangente für $f(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ gezeigt wurde, erstens solche Glieder, welche weder α noch β enthalten, deren Summe gleich den ursprünglichen Functionen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ sind, und zweitens solche Glieder, welche α, β, α^2, β^2, $\alpha\beta$, α^3, β^3, $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$ u. s. w. zu Factoren haben. Bezeichnet man die Summe der Glieder, welche den Factor α haben, resp. mit P und P' (es sind dies die ersten abgeleiteten Functionen von $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ in Bezug auf ξ), ferner die Summe der Glieder, welche den Factor β haben, resp. mit Q und Q' (die ersten abgeleiteten Functionen von $\varphi(\xi, \eta)$ und $\psi(\xi, \eta)$ in Bezug auf η), endlich die Summe aller übrigen Glieder, die also mindestens den Factor α^2 oder β^2 oder $\alpha\beta$ haben, resp. mit S und S', wobei noch zu beachten ist, dass P, P', Q, Q' weder α noch β enthalten, also wenn α und $\beta = o$ gesezt werden, unverändert bleiben, während S und S' in diesem Falle $= o$ werden: so lauten $\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$ und $\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta)$, nach Potenzen von α und β geordnet, wie folgt:

$$\varphi(\xi + \alpha, \eta + \beta) = \varphi(\xi, \eta) + \alpha P + \beta Q + S = p + \alpha P + \beta Q + S \quad = p'$$
$$\psi(\xi + \alpha, \eta + \beta) = \psi(\xi, \eta) + \alpha P' + \beta Q' + S' = q + \alpha P' + \beta Q' + S' \quad = q'.$$

Dann ist

$$m - m' = -\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p'q - pq'}{qq'}$$
$$= \frac{\alpha(Pq - Pp) + \beta(Qq - Q'p) + Sq - S'p}{q^2 + \alpha P'q + \beta Q'q + S'q}$$

oder, da $\beta = \alpha m = -\alpha\frac{p}{q}$

$$m - m' = \frac{\alpha q(Pq - P'p) - \alpha p(Qq - Q'p) + Sq^2 - S'pq}{q\,|\,q^2 + \alpha P'q - \alpha Q'p + S'q\,|}$$

Da S und S' den Factor α^2 enthalten, so kann man auf beiden Seiten durch α dividiren, und setzt man dann $\alpha = o$, so erhält man:

$$\frac{m - m'}{\alpha\,(= o)} = \frac{q(Pq - P'p) - p(Qq - Q'p)}{q^3}$$

Bezeichnet man den obigen Werth von $m - m'$, der den Factor α enthält, der Kürze wegen mit αN

(so dass also für $\alpha = o$, $\frac{m - m'}{\alpha} = N$ den zuletzt gefundenen Werth hat):

so ist $\quad m' = m - \alpha N$

also $\quad 1 + m'^2 = 1 + m^2 - 2\alpha m N + \alpha^2 N^2 \quad$ und für $\alpha = o$ $1 + m'^2 = 1 + m^2$

$\quad m + m' = 2m - \alpha N \quad$ und für $\alpha = o$ $m + m' = 2m$

$\quad 1 + mm' = 1 + m^2 - \alpha m N \quad$ und für $\alpha = o$ $1 + mm' = 1 + m^2$

Substituirt man nun diesen Werth für m′ in die nach der ersten Methode gefundenen Werthe für X, Y und R^2, so erhält man:

$$X = \xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{m \{ 2 + (m - \alpha N)(2m - \alpha N) \}}{2N}$$

$$Y = \eta + \frac{\alpha m}{2} - \frac{\{ 2 + (m - \alpha N)(2m - \alpha N) \}}{2N}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2) \{ 1 + (m - \alpha N)^2 \} \{ 4 + (2m - \alpha N^2 \}}{4N^2}$$

mithin für $\alpha = o$

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2)}{N} = \xi + \frac{p(p^2 + q^2)}{p(Qp - Q'q) - q(Pq - P'p)}$$

$$Y = \eta - \frac{1 + m^2}{N} = \eta + \frac{q(p^2 + q^2)}{p(Qq - Q'p) - q(Pq - P'p)}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)^3}{N^2} = \frac{(p^2 + p^2)^3}{\{ p(Qq - Q'p) - q(Pq - P'p) \}^2}$$

Substituirt man ferner $m' = m - \alpha N$ in die nach der zweiten Methode gefundenen Werthe für X, Y und R^2, so erhält man

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2 - m\alpha N)}{N}, \quad Y = \eta - \frac{1 + m^2 - m\alpha N}{N}$$

$$R^2 = \frac{(1 + m^2)\,(1 + m^2 - m\alpha N)^2}{N^2}$$

also für $\alpha = o$

$$X = \xi + \frac{m(1 + m^2)}{N} \qquad Y = \eta - \frac{1 + m^2}{N} \qquad R^2 = \frac{(1 + m^2)^3}{N^2}$$

Nachdem so gezeigt worden, dass die Bestimmung des Krümmungskreises nach den beiden Methoden dasselbe Resultat ergiebt, bleibt noch übrig, die Werthe von P, Q, P' und Q' zu bestimmen.

Mit P, Q, P' und Q' sind die ersten abgeleiteten Functionen von resp. p und q in Bezug auf ξ und η, oder allgemein in Bezug auf x und y bezeichnet worden; p und q selbst sind aber die ersten abgeleiteten Functionen von $f(\xi, \eta)$ oder $f(x, y)$ in Bezug auf x und y. Es ist daher nöthig, p und q selbst zu bestimmen.

Man findet, wie schon früher bemerkt ist, die abgeleiteten Funktionen von $f(x, y)$, indem man darin $x + \alpha$ und $y + \beta$ für x und y setzt und nun die Function nach den Potenzen von α und β entwickelt: dann ist die Summe der Glieder, welche mit α multiplicirt sind, die erste abgeleitete Function von $f(x, y)$ in Bezug auf x, die im Obigen mit p bezeichnet ist; q, die erste abgeleit. Function in Bezug auf y, ist die Summe der mit β multiplicirten Glieder. Die Summen der Glieder, welche mit resp. α^2, β^2, $\alpha\beta$ multiplicirt sind, sind die zweiten abgeleiteten Functionen resp. in Bezug auf x oder y allein, oder in Bezug auf x und y zugleich; diese sind oben mit r, t und s bezeichnet. Bezeichnet, wie oben,

$$C x^k . y^\lambda$$

das allgemeine Glied der Function $f(x, y)$, wo C den constanten Coefficienten eines jeden Gliedes darstellt, und die Exponenten k und λ, wenn $f(x, y)$ eine Function n^{ten} Grades ist, alle ganzen Zahlen von o bis n bedeuten, so jedoch, dass $k + \lambda$ nie $> n$ sein kann: so kann $f(x, y)$ selbst bezeichnet werden durch

$$\Sigma C x^k . y^\lambda$$

mithin

$$f(x + \alpha, y + \beta) \text{ durch } \Sigma C (x + \alpha)^k (y + \beta)^\lambda$$

Entwickelt man nun $(x + \alpha)^k$ und $(y + \beta)^\lambda$, so ist

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \Sigma C \left\{ x^k + k . x^{k-1} . \alpha + k . \frac{k-1}{1 . 2} x^{k-2} . \alpha^2 + A \right\}$$

$$\times \left\{ y^\lambda + \lambda . y^{\lambda-1} . \beta + \frac{\lambda . \lambda_{-1}}{1 . 2} . y^{\lambda-2} . \beta^2 + B \right\}$$

wo A und B die Summe der ferneren Glieder der Binomialreihe bis resp. α^k und β^λ bezeichnen.

Die Ausführung der angezeigten Multiplication giebt:

$$f(x + \alpha, y + \beta) = \Sigma C \left\{ x^k . y^\lambda + k . x^{k-1} . y^\lambda . \alpha + \frac{k . k-1}{1 . 2} x^{k-2} . y^\lambda \alpha^2 + A y^\lambda \right.$$

$$+ \lambda . x^k . y^{\lambda-1} . \beta + k . \lambda x^{k-1} . y^{\lambda-1} . \alpha\beta + \ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{\lambda . \lambda - 1}{1 . 2} x^k . y^{\lambda-2} . \beta^2 + \ldots\ldots \right\}$$

$$= \Sigma C x^k . y^\lambda + \Sigma C . k x^{k-1} . y^\lambda . \alpha + \Sigma . C \lambda . x^k . y^{\lambda-1} . \beta$$

$$+\Sigma C.\frac{k.\overline{k-1}}{1.2}x^{k-2}.y^{\lambda}.\alpha^2+\Sigma C.k.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\alpha\beta+\Sigma C.\frac{\lambda.\overline{\lambda-1}}{1.2}x^{k}.y^{\lambda-2}.\beta^2$$

$$+\Sigma CS$$

wo S die Summe aller übrigen Glieder bezeichnet.

Es ist daher, der obigen Erklärung gemäss,

$$p=\Sigma C.k.x^{k-1}.y^{\lambda}$$

$$q=\Sigma C.\lambda.x^{k}.y^{\lambda-1}$$

$$r=\Sigma C.\frac{k.\overline{k-1}}{1.2}x^{k-2}.y^{\lambda}$$

$$s=\Sigma C.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}$$

$$t=\Sigma C.\frac{\lambda.\overline{\lambda-1}}{1.2}x^{k}.y^{\lambda-2}$$

Um nun die ersten abgeleiteten Functionen von p und q zu finden, hat man in den dafür gefundenen Ausdrücken ebenfalls $x+\alpha$ und $y+\beta$ für x und y zu setzen. So erhält man:

$$\Sigma Ck(x+\alpha)^{k-1}.(y+\beta)^{\lambda}=\Sigma Ck\{x^{k-1}+(k-1)x^{k-2}.\alpha+A'\}\{y^{\lambda}+\lambda y^{\lambda-1}\beta+B'\}$$

$$=\Sigma Ck.x^{k-1}.y^{\lambda}+\Sigma Ck(k-1)x^{k-2}y^{\lambda}.\alpha$$

$$+\Sigma Ck.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\beta+\Sigma CkS'$$

also

P, die erste abg. F. von p in Bezug auf x, $=\Sigma Ck(k-1)x^{k-2}.y^{\lambda}$, d. h. $P=2r$

und Q, „ „ „ „ „ „ „ „ „ y, $=\Sigma Ck.\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}$, d. h. $Q=s$

Ferner ist

$$\Sigma C.\lambda.(x+\alpha)^{k}(y+\beta)^{\lambda-1}=\Sigma C\lambda\{x^{k}+k.x^{k-1}.\alpha+A''\}\{y^{\lambda-1}+(\lambda-1)y^{\lambda-2}.\beta+B''\}$$

$$=\Sigma C\lambda x^{k}.y^{\lambda-1}+\Sigma Ck\lambda.x^{k-1}.y^{\lambda-1}.\alpha$$

$$+\Sigma C\lambda(\lambda-1)x^{k}y^{\lambda-2}.\beta+\Sigma C\lambda S''$$

also P', die erste abgeleitete Form von q in Bezug auf $x = \Sigma Ck\lambda \,.\, x^{k-1} \,.\, y^{\lambda-1}$, d. h. $P' = s$

und Q', „ „ „ „ „ „ „ „ „ $y = \Sigma C\lambda(\lambda-1) x^{k} \,.\, y^{\lambda-2}$, d. h. $Q' = 2t$

Substituirt man nun diese Werthe für P, P', Q, Q' in die Ausdrücke für X, Y und R^2, so erhält man schliesslich:

$$X = \xi - \frac{p\,(p^2+q^2)}{2\,(p^2t - pqs + q^2r)}$$

$$Y = \eta - \frac{q\,(p^2+q^2)}{2\,(p^2t - pqs + q^2r)}$$

$$R^2 = \frac{(p^2+q^2)^3}{4\,(p^2t - pqs + q^2r)^2}$$

Hiermit ist der Krümmungskreis der Curve $f(x, y) = o$ für den Punkt (ξ, η) bestimmt.

Anmerkung: Der Krümmungshalbmesser ist $= \infty$, sobald

$$p^2t - pqs + q^2r = o$$

ist; dies ist die unter II gefundene Bedingung, unter welcher der Punkt (ξ, η) ein Wendepunkt ist. Dadurch ist die Richtigkeit der unter II und III gefundenen Resultate bewiesen. Denn, wenn der Halbmesser des Krümmungskreises $= \infty$ ist, so müssen die 3 Punkte, durch welche er gelegt ist, auf einer Geraden liegen, wovon ja auch bei der Bestimmung des Wendepunktes ausgegangen wurde; und umgekehrt, wenn eine Curve einen Wendepunkt hat, also 3 unmittelbar neben einander liegende Punkte derselben einer Geraden angehören, so muss der durch dieselben Punkte gelegte Kreis, der Krümmungskreis für den Wendepunkt, einen unendlich grossen Halbmesser haben.

Beispiele:

Für die Parabel $(y^2 - 2ax = o)$ ist, wie bei der Bestimmung der Tangente gefunden wurde:

$$p = -2a,\ q = 2\eta,\ r = o,\ s = o,\ t = 1$$

mithin:

$$X = \xi + \frac{a^2+\eta^2}{a} = 3\xi + a$$

$$Y = -\frac{\eta^3}{a^2} = -\frac{2\xi\eta}{a}$$

$$R^2 = \frac{(a^2+\eta^2)^3}{a^4} = \frac{(a+2\xi)^3}{a}$$

Für den Scheitel der Parabel, dessen Coordinaten $\xi = o$ und $\eta = o$ sind, ist demnach

$$X = a,\ Y = o,\ R^2 = a^2$$

d. h. für den Scheitel der Parabel ist der Brennpunkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Für die Curve, deren Gleichung $y^2 = x^3 + a$ ist, wurde bei der Bestimmung des Wendepunktes gefunden:

$$p = 3\xi^2,\ q = -2\eta,\ r = 3\xi,\ s = o,\ t = -1$$

Mithin ist

$$X = \frac{\xi\,(9\xi^4 + 6\xi^3 - 4\eta^2)}{2\,(3\xi^3 - 4\eta^2)}$$

$$Y = -\frac{4\eta^3\,(3\xi + 1)}{3\xi\,(3\xi^3 - 4\eta^2)}$$

$$R^2 = \frac{(9\xi^4 + 4\eta^2)^2}{36\xi^2\,(3\xi^3 - 4\eta^2)^2}$$

Für den Scheitel dieser parabolischen Curve, also für $\eta = o,\ \xi = \sqrt[3]{-a}$ ist

$$X = \frac{\xi\,(3\xi + 2)}{2} \quad Y = o \quad R^2 = \frac{9\xi^4}{4},\ R = \frac{3\xi^2}{2.}$$

Es bleibt nun noch übrig, die hier gefundenen Resultate mit den vermittelst der Differential-Rechnung gefundenen Resultaten zu vergleichen.

Bei der Bestimmung des Krümmungskreises wurden die Werthe von $p,\ q,\ r,\ s,\ t$ folgendermassen festgestellt:

$$p = \Sigma C\,.\,\mathrm{k}\,.\,x^{k-1}\,.\,y^{\lambda}$$

$$q = \Sigma C\,.\,\lambda\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$r = \Sigma C\,.\,\frac{\mathrm{k}\,.\,\mathrm{k}-1}{1\,.\,2}\,x^{k-2}\,.\,y^{\lambda}$$

$$s = \Sigma C\,.\,k\,.\,\lambda\,.\,x^{k-1}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$t = \Sigma C\,\frac{\lambda\,.\,\lambda-1}{1\,.\,2}\,x^{k}\cdot y^{\lambda-2}$$

indem mit $C\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda}$

das allgemeine Glied der Gleichung $f\,(x,\,y)$ bezeichnet, also

$$f\,(x,y) = \Sigma\,C\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda}$$

gesetzt worden war.

Die Differentiation dieser Gleichung ergiebt:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \Sigma\,C\,.\,k\,.\,x^{k-1}\,.\,y^{\lambda}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \Sigma\, C\,.\,\lambda\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \Sigma\, C\,.\,k\,(k-1)\,x^{k-2}\,.\,y^{\lambda}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \Sigma\, C\,.\,k\,.\,\lambda\,.\,x^{k-1}\,.\,y^{\lambda-1}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \Sigma\, C\,.\,\lambda\,(\lambda-1)\,.\,x^{k}\,.\,y^{\lambda-2}$$

Mithin ist

$$p = \frac{\delta f}{\delta x},\ q = \frac{\delta f}{\delta y},\ 2r = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2},\ s = \frac{\delta^2 f}{\delta x . \delta y},\ 2t = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

Substituirt man diese Werthe für p, q, r, s, t, in den gefundenen Resultaten, so ergiebt sich:

1) der Coefficient von x in der Gleichung der Tangente:

$$m \text{ oder tg. } v = -\frac{p}{q} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

2) die Bedingung, unter welcher die Curve einen Wendepunkt hat, dass nämlich

$$q^2 r - pqs + p^2 t = o$$

sei, geht über in:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 - 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x . \delta y}\,.\,\frac{\delta f}{\delta x}\,.\,\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 = o$$

3) die Bestimmungsstücke des Krümmungskreises sind:

$$X = \xi - \frac{\frac{\delta f}{\delta x}\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}}{N}$$

$$Y = \eta - \frac{\frac{\delta f}{\delta y}\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}}{N}$$

$$R^2 = \frac{\left\{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right\}^3}{N^2}$$

wo N die linke Seite obiger Gleichung bedeutet.

Die Resultate, welche man mit Hilfe der Differentialrechnung findet, sind:

1) m oder tg $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$, wie oben;

2) die Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = o$$

oder

$$-\frac{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\delta f}{\delta y}} = o \text{ oder, da } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2 - 2\,\frac{\delta^2 f}{\delta x \,.\, \delta y} \cdot \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 = o, \text{ wie oben;}$$

3) die Bestimmungsstücke des Krümmungskreises:

$$X = \xi - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad Y = \eta + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$R^2 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3}{\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}^2}$$

Da nun aus Obigem sich ergiebt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{N}{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^3}$$

so unterliegt die Uebereinstimmung der auf algebraischem Wege gefundenen Resultate mit den auf analytischem Wege gewonnenen keinem Zweifel.

Schul-Nachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Uebersicht des in dem Schuljahr 1857—58 ertheilten Unterrichts.

Sprachen.

Deutsche Sprache.

Prima. 3 St. Uebersicht der deutschen Literatur des 18. Jahrhunderts, 1 St. Anleitung zum Verständniss deutscher Dichter und Prosaiker, 1 St. Correctur der deutschen Aufsätze, 1 St. Es wurden folgende Themata bearbeitet: 1. Welchen verschiedenen Richtungen der menschlichen Thätigkeit ist es zuzuschreiben, dass wir allmälig mit einem grossen Theile der Erdoberfläche bekannt geworden sind? 2. Darstellung des Gedankenganges in der Schiller'schen Elegie: „der Spaziergang" und Erläuterung der schwierigsten Stellen (Clausur-Arbeit). 3. In der Schiller'schen Ballade: der Ring des Polycrates wird uns eine im Alterthum herrschende Vorstellung von dem Verhältnisse des Menschen zur göttlichen Weltordnung vorgehalten. Worin bestand diese Vorstellung? Welche Lebenserscheinungen dienten zu ihrer scheinbaren Rechtfertigung? Welchen Nutzen gewährte sie trotz ihrer Verwerflichkeit? 4. In wie fern ist der Ausspruch Seneca's: Qui sibi amicus est, eum scito omnibus esse amicum! zu billigen? 5. Der Verstand ist im Menschen zu Haus, Wie der Funke im Stein, Er schlägt nicht von sich selbst heraus, Er will herausgeschlagen sein (Rückert). 6. Ist der Reichthum an Stoff, den eine Dichtung dem Maler darbietet, ein Maasstab für den Kunstwerth derselben? Nach Lessing's Laokoon XII. bis XV. (Clausur-Arbeit.) 7. Des Lebens Mühe lehrt uns allein des Lebens Güter schätzen. 8. Die Macht der Beredtsamkeit in ihren guten und schlimmen Wirkungen dargelegt und durch Beispiele aus der Geschichte veranschaulicht.

Die Abiturienten bearbeiteten die Aufgaben 4 (zu Michaelis 1857) und 8 (zu Ostern 1858), welche später in der Klasse aufgegeben wurden. Anderssen.

Secunda. 2 St. Erläuterung der hauptsächlichsten Begriffe der Poetik an ausgewählten Beispielen grösstentheils aus Echtermeyer's Sammlung. Die altdeutsche Epik wurde den Schülern vorgeführt durch die Lectüre eines grösseren Abschnittes aus den Nibelungen und des armen Heinrichs von Hartmann von der Aue (Beides im Original). Auch wurde Schiller's

Braut von Messina gelesen. Alle Monate wurde ein grösserer Aufsatz geliefert und seine Correctur besprochen Es wurden folgende Themata bearbeitet: Im Sommersemester 1857: 1. Inhalt der 2 ersten Gesänge von Hermann und Dorothea. 2. Die Eroberungszüge des Orients gegen den Occident. 3. Die Bedeutung der geistlichen Ritterorden im Mittelalter. 4. a) Charakterschilderung des Pfarrers aus Göthe's Hermann und Dorothea, oder b) Beschreibung eines Bildes aus der Kunstausstellung. 5. Inhalt der Iphigenie in Aulis von Euripides. 6. Die Rathgeber des Xerxes bei seinem Zuge gegen Griechenland. — Im Wintersemester: 1. Einmal ist keinmal. 2. Wodurch unterscheidet sich die Braut von Messina von andern Dramen? 3. Erklärung und Beurtheilung des Göthe'schen Spruches: „Erkenne dich, leb mit der Welt in Frieden." 4. Entweder a) ein poetischer Versuch in gegebenem Versmaas oder b) Sales y Gomez nach Chamisso. 5. Pantheia, eine Erzählung nach Xenophon. 6. Die Ansicht des Pfarrers in Hermann und Dorothea über die vortheilhaften Folgen der Neugier soll erläutert und beurtheilt werden. 7. Welche Rolle spielt Theben in der griechischen Geschichte? Grünhagen.

Tertia. 2 St. Ausgewählte Gedichte von Schiller, Uhland u. a. aus Echtermeyer's Sammlung wurden erklärt und memorirt. Uebungen im Disponiren, Correctur der häuslichen Arbeiten. Grünhagen.

Quarta. 2 St. Lectüre und Erklärung von Gedichten aus Kehrein's deutschem Lesebuche, untere Stufe, nebst Uebungen im mündlichen Vortrage aus demselben. Extemporalia und Correctur der alle 14 Tage gelieferten Ausarbeitungen. Geisler.

Quinta. 2 St. Lectüre im Lesebuche von Auras und Gnerlich, I. Stufe, woran Erläuterungen zum Verständniss des Inhalts wie des Ausdrucks, namentlich des Satzbaues, auch Uebungen im Wiedererzählen geknüpft wurden. Vortrag auswendig gelernter Stücke. Correctur der vierzehntägigen deutschen Arbeiten. Hirsch.

Sexta. 2 St. 1 St. orthographische Uebungen. 1 St. Lesen, Erklären und Declamiren geeigneter Stücke aus dem Lesebuche von Auras und Gnerlich. Correctur der häuslichen Arbeiten (Erzählung von Fabeln und Sagen, auch Reproduction leichterer Gedichte) und Extemporalien, wöchentlich abwechselnd. Ladrasch.

Lateinische Sprache.

Prima. 8 St. Horat. Carm. lib. I., 32 bis zu Ende, lib. II. und lib. III., theilweise mit lateinischer Interpretation; die Mehrzahl der Oden wurde memorirt, 2 St. Im Sommer: Cic. Tuscul. Disput. lib. I. Im Winter: Tacit. Annal. IV., 66 bis VI. zu Ende, 3 St. — 1 St. Extemporalia und 2 St. Uebersetzungsübungen aus Heinichen's Uebungsbuch, verbunden mit der Wiederholung und Erläuterung der schwierigeren Abschnitte der latein. Syntax; Besprechung der Correctur der monatlichen freien Aufsätze. — Folgende Themata wurden bearbeitet: 1. Quæ belli inter Pyrrhum et Romanos gesti caussa et progressus et eventus fuerit? 2. Res Lydorum breviter narrentur. 3. a) ἀναρχίας δὲ μεῖζον οὐκ ἔστι κακόν; b) Vejens bellum comparetur cum bello Trojano. 4. Quibus potissimum rebus Philippus Macedonum rex Alexandro filio viam ad tantum imperium condendum munierit? 5. Argumentum Horat. carm. I. libr. II. uberius exponatur. 6. De bellis Spartanorum Messeniis. 7. Quae res Hannibali adversus Romanos bellum gerenti maxime fuerint iniquae, exponitur. 8. Darii adversus Scythas expeditio. 9. De regibus Roma expulsis deque republica contra Tarquiniorum conatus fortiter defensa brevis narratio. 10. De Cyro regni Persici conditore narratio. 11. a) Series nexusque sententiarum, quae continentur carmine septimo libri tertii Horatii carminum; b) Quae mala senectutem videantur reddere miserrimam. Lange.

Zum Abiturienten-Examen wurde bearbeitet: Michaelis 1857: Cn. Pompeius quam praeter caeteros fortunam et secundam et adversam expertus sit, exponatur. Ostern 1858: Exponatur Atheniensium in Siciliam expeditio per belli Peloponnesiaci tempestatem suscepta.

Secunda. 10 St. Cicero de senectute und Orat. Catilin. I., II.; Livius lib. XXXIV. bis XXXVI., cap. 11., 5 St. — Grammatik nach Zumpt, die Syntax der Casus, Tempora und Modi. Exercitia aus Seyffert's Uebungsbuch, alle 14 Tage eines, 2 St. — Wöchentliche Extemporalia. Der Stoff dazu wurde in Beziehung gesetzt auf die Privatlectüre (Livius XXVII. bis XXVIII., 35), zu deren Controlle auch mündliche Uebungen veranstaltet werden, 1 St. Die Schüler der obern Abtheilung erhielten einige Anleitung zu freien Aufsätzen. Geisler. Virgil. Aen. VII—IX., 525, 2 St. Hirsch.

Tertia. 10 St. 2 St. Ovid. Metamorph. I., 1—252., II., 1—340. Anderssen. — Caesar Bell. Gall. VIII., I., II., III., IV., 1—20., 4 St. — 4 St. Grammatik nach Putsche: Erklärung der Regeln über den Gebrauch der Tempora und Modi, des Infinitivs und der Participia und der Conjunctionen und Erläuterung der Haupt-Satzarten, 2 St. — 1 St. Extemporalia; 1 St. mündliche und schriftliche Uebersetzung aus Hottenrott's Aufgaben für Tertia. Memorirt wurden Vocabeln und Phrasen aus Caesar und eine Anzahl lateinischer Sprichwörter und Gedenkverse und bei Rückübersetzung gelesener Stellen aus Caesar die Construction eingeübt. Wimmer.

Quarta. 10 St. Cornelius Nepos Vit. I—IX., XI—XIII., XVIII—XXIV., 5 St. Grammatik nach Putsche: Die Casuslehre und Erklärung der wichtigsten Conjunctionen und des Gebrauches derselben, 2 St. Mündliche Uebersetzungsübungen aus Hottenrott's Aufgaben zur Uebung für Quarta. Memorirübungen aus dem Vocabularium von Doederlein. Verbesserung der wöchentlichen Exercitia, 2 St. — Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre und Verbesserung der wöchentlichen Extemporalia, 1 St. Geisler.

Quinta. 10 St. Uebersetzen aus Blume's Lehrcursus der lat. Sprache, lat. Theil Curs. I., Abschn. 2, 3, 4 und Curs. II., Abschn. 1—4, 60. Einzelne Stücke wurden memorirt, 5 St. — Uebersetzen der entsprechenden Stücke aus dem deutschen Theile desselben Buches ins Lat., 3 St. — Wiederholung und Befestigung der Formenlehre, Einübung der unregelmässigen Verba nach Putsche's Grammatik. Memorirt und durch Anwendung geübt wurden aus Döderlein's Vocabularium die gesperrt gedruckten Vocabeln nebst den in derselben Zeile stehenden Derivatis. Correctur der wöchentlichen Exercitien und monatlichen Extemporalien, 2 St. Hirsch.

Sexta. 10 St. Die regelmässige Formenlehre bis zu den Verba defectiva nach Putsche's Grammatik, 2 St. — Memoriren von Vocabeln aus Döderlein's Vocabularium, 1 St. — Uebersetzen des 1. Abschnitts aus Blume's Lehrbuch der latein. Sprache und den Vorübungen dazu, 6 St. — Wöchentlich eine häusliche Arbeit und ein Extemporale, 1 St. Ladrasch.

Griechische Sprache.

Prima. 6 St. Platon's Phaedon, dann Plutarch's Aristides, 3 St. — Homeri Ilias XXIV., I., II. und einzelne Stellen aus anderen Büchern wurden ex tempore übersetzt, 2 St. — Exercitia mit Erläuterung der Syntax, 1 St. Wimmer.

Secunda. 6 St. Xenoph. Cyrop. VI. und VII., 2 St. — Hom. Odyss. VII—XI., woraus wöchentlich etwa 10 Verse memorirt wurden, 2 St. — Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre nach Krüger's Sprachlehre f. Anf. Das Wichtigste aus der Syntax im Anschluss an Rost und Wüstemann's Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Griechische, II. Th., 3. Cursus, woraus die §§ 15—20 übersetzt wurden. Correctur der vierzehntägigen Exercitien und monatlichen Extemporalien, 2 St. Hirsch.

Tertia. 6 St. Xen. Anab. III., 5 — V., 1. Im letzten Vierteljahre jeden Semesters Homer's Odyssee VI., 119 und IX., 216—305, wovon der grösste Theil memorirt wurde, 3 St. — Grammatik nach Krüger's Sprachlehre für Anfänger: Verba liquida, Verba in $\mu\iota$ und Verba anomala, das Wichtigste aus der Syntax der Casus. Correctur der vierzehntägigen Exercitia, 2 St. — 1 St. Extemporalia mit Zugrundelegung des aus der Lectüre gewonnenen Stoffes. Lange.

Quarta. 6 St. Einübung der Formenlehre bis zu den Verba contracta incl. nach Krüger's Spr. f. Anf., 3 St. Aus Jacob's Elementarbuch wurden die diesen Theil der Grammatik betreffenden Stücke übersetzt. Abwechselnd jede Woche eine häusliche Arbeit und ein Extemporale, 3 St. Lange.

Französische Sprache.

Prima. 2 St. Grammatik nach Ploetz: Syntax der Verba, Pronomina, des Artikels und Substantivum. — Gelesen wurde: Discours sur l'état des lettres et des sciences par de la Harpe; Racine les plaideurs I. acte. Freymond.

Secunda. 2 St. Grammatik nach Ploetz: Wiederholung der unregelmässigen Verba; Syntax des Artikels, Substantivs und Adjectivs. Gelesen wurde: Capefigue l'Histoire de Charlemagne, chap. 1—5. Einige Gedichte wurden dictirt und memorirt. Freymond.

Tertia. 2 St. Grammatik nach Ploetz, Lection 1—23. Wiederholung der regelmässigen Verba und Einübung der unregelmässigen Conjugation und Uebersetzung der deutschen und französischen Beispiele aus der Grammatik. Uebersetzung aus Hirzels Lesebuch p. 43—67. Wimmer.

Quarta. 2 St. Formenlehre bis zur vollständigen Einübung der regelmässigen Verben nach den ersten 4 Hauptabschnitten des Elementarbuchs von Ploetz. Grünhagen.

Quinta. 3 St. Elemente der Aussprache und Formenlehre nach Ploetz' Elementarbuch; Uebungen im mündlichen und schriftlichen Uebersetzen aus demselben (Lection 1 bis 50). Wöchentlich eine häusliche Arbeit. Ladrasch.

Hebräische Sprache.

Prima. 2 St. Grammatik, zweiter Theil, nach Gesenius. Gelesen wurden das zweite Buch Mosis und ausgewählte Psalmen. Magnus.

Secunda. 2 St. Grammatik, erster Theil, nach Gesenius. Gelesen und übersetzt wurden Abschnitte aus Gesenius Lesebuche. Magnus.

Englische Sprache.

In der englischen Sprache unterrichtete in je zwei Abtheilungen nach Williams Grammatik und Biering's Lesebuche in je zwei Stunden Whitelaw.

Wissenschaften.

Religion.

Prima. 2 St. Lectüre des Briefes Pauli an die Römer Cap. 1—8 incl. und übersichtliche Darstellung der Geschichte der christlichen Kirche vor der Reformation, 2 St.

Secunda. 2 St. Geschichte des alten und neuen Bundes im Anschluss an die Darstellung von Hollenberg Abschnitt III. § 1—46 und Abschnitt IV. § 47—82. Lernen der Lieder nach Hollenberg 4, 36, 41, 42. Das Bibellesen schloss sich an den behandelten geschichtlichen Stoff an, 2 St.

Tertia mit Quarta combinirt. 2 St. Katechismus nach Hollenberg, erstes, zweites, viertes und fünftes Hauptstück mit den daselbst abgedruckten Bibelstellen. (Die ev. reform. Schüler lernten die entsprechenden Abschnitte aus dem Heidelberger Katechismus.) Lernen der Lieder nach Hollenberg 5, 7, 12, 29, 31, 37, 39, 40, 43; 2 St.

Quinta. 3 St. Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Zahn, § 1—66, mit den jeder Erzählung beigefügten Sprüchen. Lernen des zweiten und vierten Hauptstücks des kleinen luther. Katechismus und Einführung in den Wortsinn. Lernen der Kirchenlieder nach Anders und Stolzenburg, 6, 14, 29, 42, 48, 131, 108, 173; 2 St. Lesen geigneter Stellen aus dem alten Testament (Richter Cap. 1—12, das Buch Ruth und 1. Samuel. 1—31) und im Anschluss daran die Geographie des Landes Kanaan, 1 St.

Sexta. 3 St. Biblische Geschichten des alten Testaments nach Zahn § 1—68. Lernen des ersten Hauptstückes und des zweiten Artikels des zweiten Hauptstückes nach dem kleinen luther. Katechismus mit der Erklärung und Einführung in den Wortsinn. Lernen der Lieder nach Anders und Stolzenburg, 3, 12, 21, 41, 44, 56, 58, 63, 182, 200; 2 St. Lernen und Erklärung der hauptsächlichsten Gleichnisse des Herrn, 1 St.

In sämmtlichen Klassen ertheilte diesen Unterricht Candidat Schiedewitz.

Geschichte und Geographie.

Prima. 3 St. 2 St. Geschichte der neueren Zeit unter Benutzung von Pütz' Lehrbuch. 1 St. Historische und geographische Wiederholungen nach Cauer's Tabellen und Seydlitz' Lehrbuch. Grünhagen.

Secunda. 3 St. 2 St. Griechische Geschichte bis zum Tode Alexander d. Grossen (Pütz' Lehrbuch). 1 St. Geographie von Alt-Griechenland und historische Repetitionen nach Cauer's Tabellen. Grünhagen.

Tertia. 3 St. 2 St. Deutsche Geschichte (nach Pütz). 1 St. Geographie der Staaten Europa's mit Ausschluss Deutschlands. Grünhagen.

Quarta. 3 St. 2 St. Alte Geschichte nach Schwartz' Leitfaden für den biographischen Geschichtsunterricht. 1 St. Uebersicht der Erdtheile nach Schacht's kleiner Schulgeographie. Grünhagen.

Quinta. 3 St. Von der Erde als Weltkörper, den Erdtheilen mit ihren wichtigsten Gebirgen, Hoch- und Tiefländern, Gewässern u.s.w. und den Staaten Europa's (nach Schacht's kleiner Schulgeographie) nebst Andeutung der wichtigsten Naturproducte. Erzählungen aus der alten und mittleren Geschichte. Rehbaum.

Sexta. 3 St. Geographie von Schlesien nach Adamy's Karte und Leitfaden. Die wichtigsten Begebenheiten aus der schlesischen Geschichte nach Löschke. Ladrasch.

Naturgeschichte.

Tertia. 2 St. Erläuterung der Theile und der Lebenserscheinungen der Pflanze und der Familien der Cryptogamen und Monokotyledonen. Wimmer.

Physik.

Prima. 2 St. Die Lehre vom Magnetismus, von der Electricität, vom Electromagnetismus und der Magnetoelectricität. Anderssen.

Secunda. 1 St. Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper. Mechanik der tropfbar-flüssigen Körper. Anderssen.

Mathematik und Rechnen.

Prima. 4 St. Stereometrie und Uebungen in der Lösung von Aufgaben aus allen Theilen der Elementar-Mathematik, 2 St. Die Zins-auf-Zins-Rechnung, die Lehre von den Kettenbrüchen, den diophantischen Gleichungen und von den arithmetischen Reihen des zweiten Ranges. Die Lehre von den Permutationen und Combinationen und der binomische Lehrsatz für ganze, negative und gebrochene Exponenten, 2 St. Anderssen.

Secunda. 4 St. Geometrie: Vom regulären Polygon, von der Rectification und Quadratur des Kreises. Trigonometrie, 2 St. Arithmetik: Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel, Quadratische Gleichungen, Lehre von den Logarithmen, arithmetischen und geometrischen Reihen. Uebungen in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben, 2 St. Anderssen.

Tertia. 4 St. Geometrie: Wiederholung der Longimetrie; Lehre vom Dreieck, vom Parallelogramm und vom Kreise. Beweis und Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes. Von der Proportion und Aehnlichkeit der Figuren, 2 St. Arithmetik: Die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen. Gleichungen des ersten Grades. Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Uebungen in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben, 2 St. Anderssen.

Quarta. 3 St. Elemente der Geometrie bis zu der Lehre von den Parallellinien. — Einübung des Rechnens mit Decimalbrüchen. — Wiederholung der Bruchrechnung, Einübung der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri und Zinsrechnung. Ladrasch.

Quinta. 4 St. Die vier Species in Brüchen. Einfache directe und indirecte Regeldetri mit ganzen Zahlen und Brüchen. Aufgaben zum Tafelrechnen von Blümel, Heft III, und von Stubba, Heft IV. Rehbaum.

Sexta. 4 St. Die vier Species in benannten Zahlen. Zeitrechnung. Vorübungen in der Bruchrechnung, Addition der Brüche. Aufgaben zum Tafelrechnen von Blümel, Heft II und III. Rehbaum.

Fertigkeiten.

Zeichnen.

Freihandzeichnen in Quarta, Quinta und Sexta je zwei Stunden. Die Anfänger wurden im Elementarzeichnen, Nachzeichnen, Vergrössern und Verkleinern der an die Tafel gezeichneten Vorlagen geübt, die Geübteren im Zeichnen nach Vorlegeblättern von Arabesken, Blumen, Thieren, Köpfen, Gebäuden, Landschaften, sowohl in Umrissen als in Ausführung beschäftigt. Rosa.

Kalligraphie.

Quinta und Sexta. 3 Stunden. Rehbaum.

Singen.

Untere Abtheilung. Cl. V und VI. 2 St. Kennenlernen der Noten, der leichteren Durtonleitern, der Intervalle, der einfachsten Taktarten und einiger Accorde. Zweistimmige Lieder. Zwanzig Kirchenmelodien einstimmig. Einübung der Oberstimme von vierstimmigen Gesängen. Rehbaum.

Mittlere Abtheilung. Cl. IV. 2 St. Bilden von Dur- und Molltonleitern und einiger Accorde. Zwanzig Kirchenmelodien einstimmig. Einübung der beiden Oberstimmen von vierstimmigen Gesängen. Rehbaum.

Mittlere Abtheilung. Cl. III. 2 St. Dasselbe wie in Cl. IV. Vierstimmige Lieder, Choräle und einen Psalm. Rehbaum.

Obere Abtheilung. Cl. I und II. 2 St. Vierstimmiger Männergesang. Auswahl von Compositionen ernsten und heiteren Inhalts. Einübung der beiden unteren Stimmen von Gesängen für gemischten Chor. Rehbaum.

Zur Aufführung kommen: Am ersten Examentage ein Choral. Am Tage, an welchem die Vorträge gehalten werden: Anfang. Das Gebet des Herrn von M. Stadler. Mitte. Der 147. Psalm von F. Weiss. „Vertrauen“ von G. W. Fink. Schluss. Chor der Priester aus der „Zauberflöte“ von J. Chr. W. A. Mozart.

Turnen.

Die Schüler nahmen am Turnen im Sommer auf dem städtischen Turnplatze unter der speciellen Aufsicht des Lehrer Hirsch, und die Geübteren und zu Vorturnern sich eignenden an den Winterübungen im Turnsaale unter specieller Aufsicht des Dr. Grünhagen Theil.

Uebersicht des Lehrplanes im Schuljahre $18^{57}/_{58}$.

Fächer.	Klassen und wöchentliche Stunden.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Religion	2	2	2	2	3	3
Deutsch	3	2	2	2	2	2
Lateinisch	8	10	10	10	10	10
Griechisch	6	6	6	6	—	—
Französisch	2	2	2	2	3	—
Geschichte und Geographie	3	3	3	3	3	3
Naturbeschreibung	—	—	1	—	—	—
Physik	2	1	—	—	—	—
Mathematik und Rechnen	4	4	4	3	4	4
Kalligraphie	—	—	—	—	3	3
Zeichnen	—	—	—	2	2	2
Singen	2	2	2	2	2	2
Hebräisch	2	2	—	—	—	—
Englisch	2	2	2	2	—	—

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Dr. Wimmer, Director. Ordinarius von III.	6 Griechisch.		8 Latein. 2 Französ. 1 Naturk.				17
Dr. Lange, Professor. Ordinarius von I.	8 Latein.		6 Griechisch.	6 Griechisch.			20
Anderssen, Professor. Ordinarius von II.	3 Deutsch. 4 Mathem. 2 Physik.	4 Mathem. 1 Physik.	4 Mathem. 2 Latein.				20
Dr. Geisler, Ordinarius von IV.	8 Latein.			10 Latein. 2 Deutsch.			20
Dr. Grünhagen.	3 Geschichte.	3 Geschichte. 2 Deutsch.	3 Geschichte. 2 Deutsch.	3 Geschichte. 2 Französ.			18
Hirsch, Ordinarius von V.	6 Griechisch. 2 Latein.				10 Latein. 2 Deutsch.		20
Rehbaum.	2 Gesang.	2 Gesang.	2 Gesang.	2 Gesang.	2 Gesang. 3 Kalligr. 4 Rechnen. 3 Geogr.	2 Gesang. 3 Kalligr. 4 Rechnen.	22
Ladrasch, interim. Ordinarius von VI.				3 Mathem. u. Rechnen.	3 Französ.	10 Latein. 2 Deutsch. 3 Gesch. u. Geogr.	21
Schiedewitz, Religionslehrer.	2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.	3 Religion.	3 Religion.	12
Dr. Magnus.	2 Hebräisch.	2 Hebräisch.					4
Rosa, Zeichnenlehrer.				2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	6
Freymond, Sprachlehrer.	2 Französ.	2 Französ.					4
Whitelaw, Sprachlehrer.	2 Englisch.	2 Englisch.	2 Englisch.	2 Englisch.			4
							188

Bibliothek und Lehrapparat.

Zur Bibliothek sind im Jahre 18⁵⁷/₅₈ hinzugekommen

a) als Geschenke:

1) Von einem Kgl. Provinzial-Schul-Collegium: Plinius, C. Secundus, Naturgeschichte übers. von Fr. Strack. Ueberarb. von E. Strack. Bremen 1853—55. 1—3. Fiedler, Fr., Verskunst der lat. Sprache mit Aufgaben zur Versification. 3. Aufl. Wesel 1858.

2) Vom Präsidium der Schles. Gesellschaft für vaterl. Kultur der 34. Jahresbericht.

3) Von Herrn Spieler: T. Livii Patavini Histor. Libri, qui supersunt, omnes. Hal. T. I. 1826. T. II. 1822. T. Livii P. Histor. Libri. Ex rec. Kreyssig. Ed. stereot. T. III. Lips. 1829. T. IV. Lips. 1829. T. V. Lps. 1829. T. Livii Operum Omn. Vol. I. ed. Stroth. Doering. Goth. 1796. M. Tullii Ciceronis XIV. select. orationum liber. Ex rec. Ernesti ed. XV. Hal. 1826. M. Tullii Cic. de finibus bon. et mal. lib. V. ex rec. Ernesti. Hal. 1775. M. Tullii Cic. Tusculan. Quaest. l. V. Ex rec. Ernesti. Hal. 1775. M. Tullii Cic. De oratore lib. III. Ex rec. Ernesti. Ed. nov. Hal. 1823. C. Taciti Opera cur. C. H. Weise Ed. stereot. T. I. II. Lps. 1829. 12. Q. Curtii Rufi Hist. Alexandri Magni. Ed. stereot. Lps. 1829. Voltaire, La Henriade, Amsterd. 1775. T. I. II. Platonis Opera. Ed. stereot. T. I. Lips. 1829. Homeri Carm. cur. G. Dindorf. Vol. II. Odyssea. Ed. 2. Lips. 1827. Odyssea. T. II. Ed. stereot. Lps. Ilias T. I. II. Ed stereot. Lips. 1821. Xenophontis Cyrop. ex rec. Hutchinsoni. Lps. 1784. Herodoti Histor. Libri IX. Ed. stereot. Lps. 1828.

4) Ovidii, P. Nasonis Metamorphos. rec. G. E. Gierig. 1. 2. Lps. 1804. Von einem Secundaner.

5) Von den Quartanern v. Glan und Lewy: a) Dieterici, Fr., Reisebilder aus dem Morgenlande. 2r Thl. Berl. 1853. Der alte Sergeant, Leben des Schlesiers J. F. Löffler. Bresl. 1836. Hoffmann, J., Neue Reisebilder. Für die reifere Jugend. 1. Bdch. Weltgegenden. Bresl. 1854. Schmidt, F., Homers Odyssee. Für die Jugend bearbeitet. Berl. 2. Aufl. b) Hofer, A. und seine Kampfgenossen oder die Geschichte Tyrols im Jahre 1809, von C. Weidinger für die Jugend bearb. Lpz. 1853.

b) durch Ankauf:

Falkenstein, Geschichte der Buchdruckerkunst. Lpz. 1840. Seyffert, M., Scholae latinae. Beiträge zu einer method. Praxis des latein. Stils und Compositionsübungen. 2r Thl. Die Chrie. Lpz. 1857. Dunker, M., Geschichte des Alterthums. 3r Bd. Berl. 1856. 4r Bd. Berl. 1857. Naumann, C. Fr., Elemente der Mineralogie. 4. Aufl. Leipz. 1855. Xenophon, Commentarii rec. Dindorf. Lps. 1856. 2 Exemplare. Mommsen, Th., Römische Geschichte. 3r. Bd. 2. Aufl. Berl. 1857. Lüben, A. (Nacke) Pädagog. Jahresbericht von 1856. Lpz. 1857. 10r Jahrgang. Schwarz, H., Dr., die Chemie und Industrie unserer Zeit. In populären Vorträgen. Breslau 1856. Stoll, H. W., Anthologie griech. Lyriker f. d. oberen Klassen der Gymnas. 2. Aufl. Hannov. 1857/58. Humboldt, A. v., Kosmos. 4 Bde. Stuttg. und Tüb. 1858. Grimm's, J. u. W., deutsches Wörterbuch II, 5. Leipz. 1857. Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit. Lief. 32—34. Zeitschrift f. Gymnasialwesen. Jahrg. 11. Berl. 1857. Schwab, G., die schönsten Sagen des klassischen Alterthums. Stuttg. 1846. 1—3. Döderlein, L., Homerisches Glossarium II. Erlangen 1853. III. Erlangen 1858. Plinii, C. Secundi, Naturalis Histor. Libri XXXVII. Rec. Sillig. Vol. VII. Goth. 1857.

Die physikalische Sammlung ist durch einen electro-magnetischen Inductionsapparat vermehrt worden und steht unter der Aufsicht des Professor Anderssen.

Die mineralogische Sammlung hat Referent unter Mithülfe der Herren Ladrasch und Rehbaum und mehrerer Schüler der Tertia während der Sommerferien geordnet.

II. Chronik.

Das Schuljahr wurde Dinstag, den 21. April mit einer allgemeinen Schulandacht eröffnet. Hierauf wurden die für das vorhergehende Semester ertheilten halbjährigen Schulzeugnisse den Schülern eingehändigt, der Lectionsplan bekannt gemacht und die nöthigen Erinnerungen über Fleiss und Aufführung so wie über den Zweck der Abiturienten-Prüfung und die zweckmässigste Vorbereitung zu demselben gegeben.

Das Geburtsfest Sr. Majestät des Königs wurde am 15. October durch Gesang der Schüler, eine Festrede des Director und ein von dem Religionslehrer Schiedewitz gesprochenes Gebet festlich begangen.

Am siebenten April wurde dem Gymnasium die hohe Gnade zu Theil, dass Se. Kgl. Hoheit Prinz Friedrich Wilhelm der öffentlichen Prüfung während des Redevortrages eines Abiturienten und der feierlichen Entlassung der Abiturienten beizuwohnen geruhten.

Das Lehrer-Collegium hat sich während des abgelaufenen Schuljahres einer ununterbrochenen Amtsthätigkeit erfreuen dürfen. Probeamts-Candidaten sind auch in diesem Jahre, so wenig als Mitglieder des Königl. Pädagogischen Seminariums an der Anstalt beschäftigt gewesen.

Nachdem Herr Prediger Tusche in Folge seiner Berufung nach Schweidnitz am Ende des Februar seine Wirksamkeit am Gymnasium beschlossen hatte und der Religionsunterricht bis zum Schlusse des Semesters vertretungsweise von dem Herrn Licentiaten Dr. Sandrock ertheilt worden war, wurde von Ostern ab von E. H. Presbyterium Herr Schiedewitz dem Gymnasium als Religionslehrer überwiesen, welcher von da an diesen Unterricht in sämmtlichen Klassen ertheilt und die Schulandachten am Beginne und Schlusse jeder Woche geleitet hat.

Die Frequenz betrug während des Sommer-Semesters 199, nämlich 27 in Prima, 20 in Secunda, 49 in Tertia, 50 in Quarta, 27 in Quinta, 26 in Sexta; am 17. März: 182, nämlich 23 in Prima, 19 in Secunda, 41 in Tertia, 50 in Quarta, 26 in Quinta und 23 in Sexta. — Der Sextaner Theurich starb am 21. October 1857, indem er von der Oderbrücke am Bürgerwerder in den Strom stürzte.

Der Unterricht in den beiden Vorbereitungsklassen, in welche Schüler von sechs Jahren an aufgenommen und in den Elementar-Kenntnissen unterrichtet werden, leiteten wie früher die Herren Adamy und Tschache.

Mit dem Zeugniss der Reife verliessen das Gymnasium zu Michaelis 1857:

Name:	Alter:	Geburtsort:	Studium:
Reinhold Bürkner	19	Niederhoff bei Breslau.	Bergfach.
Hugo von Wentzky	17	Reichen bei Namslau.	Militair.
Wilhelm Doniges	20	Treptow.	Landwirthschaft.
Zu Ostern 1858:			
Georg Thiel	19	Weigwitz bei Ohlau.	Theologie.
Friedrich Gründel	19	Breslau.	Philologie.

III. Verordnungen der Behörden.

Vom 18. August 1857. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium weiset darauf hin, dass öfter Schüler, welche am Ende des Cursus die Versetzung in eine höhere Klasse nicht hoffen zu dürfen glaubten, das Gymnasium verliessen und bei einem anderen Gymnasium Aufnahme in die nächst höhere Klasse nachsuchten und auch wohl erlangten. Zur Beseitigung solchen Umherziehens wird Strenge bei der Aufnahmeprüfung und auch bei der nachmaligen Versetzung solcher Schüler und Abweisung derjenigen, welche sich nicht an dem regelmässigen Aufnahme-Termine melden, empfohlen.

Vom 3. October 1857. Dasselbe macht Mittheilung über die bei den zu deutschen Aufsätzen gewählten Themata und die Aufführung der Lehrpensa in den Programmen gemachten Wahrnehmungen und erforderlichen Abänderungen.

Vom 3. December 1857. Dasselbe macht im Auftrage des Königl. Ministerium den Directoren und Lehrern die grösste Wachsamkeit und Strenge bei der Anfertigung der Abiturienten-Arbeiten, bei welchen immer noch Unterschleife vorgekommen sind zur Pflicht, und weist darauf hin, dass die Aufgaben zu denselben genau in den vorgeschriebenen Grenzen gehalten, dieselben auch künftig in den Gymnasial-Programmen immer mitgetheilt werden sollen.

Vom 11. Januar 1858. Dasselbe ordnet an, dass die Lehrer bei dem Rechnen-Unterrichte schon jetzt auf die demnächst bevorstehenden Veränderungen in dem Landesgewichte Rücksicht nehmen und die Bekanntschaft mit demselben vorbereiten sollen.

Ordnung der Prüfung.

Montag, den 29. März, Vormittags um 9 Uhr.

Gesang.

I. Geschichte. Grünhagen.
II. Griechisch (Hom. Odyssee). Hirsch.
I. Latein (Horaz). Lange.
II. Mathematik. Anderssen.
I. Griechisch. Wimmer.

Hierauf folgende Vorträge der Tertianer.

Hugo Blümner aus Berlin: Das Gesicht des Reisenden von Freiligrath.
Sigismund Hernstadt aus Waldenburg: Der Schenk von Limburg von Uhland.
Emil Schmidt aus Breslau: Des Sängers Fluch von Uhland.
Hermann v. Falkenhausen aus Breslau: Die Auswanderer von Freiligrath.
Heinrich Nitsche aus Breslau: Sonntagsfrühe nach Hebel.

Nachmittags um 2 Uhr.

III. Lateinisch (Caesar). Wimmer.
II. Lateinisch (Cicero). Geisler.
II. Geschichte. Grünhagen.
I. Französisch. Freymond.
III. Griechisch. Lange.
I. Mathematik. Anderssen.

Hierauf folgende Vorträge der Quartaner:

Friedrich Brettschneider aus Breslau: Rudolph v. Habsburg von Görres.
Max Knoblauch aus Ratibor: Der bestrafte Geiz von Gleim.
Max Schulze aus Fraustadt: Hans Euler von Seidl.
Robert Friedenthal aus Mielsdorf: Pipin der Kurze von Streckfuss.
Franz Gumtau aus Danzig: Das Hufeisen von Göthe.
Ludwig Borchert aus Breslau: Amynt von Gellert.

Dinstag, den 30. März, Vormittags um 9 Uhr.

III. u. IV. Religion. Schiedewitz.
IV. Deutsch. Geisler.
III. Latein (Ovid). Anderssen.
IV. Griechisch. Lange.
III. Mathematik. Anderssen.
IV. Latein. Geisler.

Hierauf folgende Vorträge der Quintaner.

Theodor Adam aus Breslau: Seifried Schweppermann von Oelckers.
Hugo Münster aus Pzitotnica: Ludwig der Eiserne von Hagendorf.
Otto Wimmer aus Breslau: Von des Kaisers Bart von Geibel.
Rudolph Reichenbach aus Breslau: Das ABC von Günther.
Arthur Waage aus Breslau: Frankfurt am Main von Kopisch.
Paul v. Berger aus Hermsdorf u. K.: Das kann ich nicht von Kreihbohm.

Nachmittags um 2 Uhr.

V. Religion. Schiedewitz.
V. Rechnen. Rehbaum.
VI. Latein. Ladrasch.
V. Geographie. Rehbaum.
V. Latein. Hirsch.
VI. Rechnen. Rehbaum.

Hierauf folgende Vorträge der Sextaner.

Albert Pfeiffer aus Breslau: Der Hänfling.
Heinrich Wuthe aus Bolkenhayn: Der Papagei und die Nachtigall.
Franz v. Berger aus Hermsdorf u. K.: Reinecke.
Alwin Schwieder aus Breslau: Die Granitschale.
Albert Cohn aus Breslau: Hans Euler.
Georg Eger aus Breslau: Der Bauer und sein Sohn.

Mittwoch, den 31. März, Vormittags 10 Uhr.

Gesang.

Das Gebet des Herrn von M. Stadler.

Vorträge der Primaner und Secundaner. Die Vorträge der Primaner sind von ihnen selbst ausgearbeitet.

Paul Davidson aus Breslau: Laudes Borussiae. Lateinisch.

Marcell v. Rappard aus Kempen und Georg Martius aus Camenz: Chor aus Schillers Braut von Messina.

Paul Wuthe aus Bolkenhayn: Aus welchen Gründen soll man Einseitigkeit der Bildung vermeiden und nach Harmonie derselben streben?

Constantin Schepky aus Conradswaldau: Ein poetischer Versuch in Terzinen.

Sylvius v. Goldfuss aus Breslau: De l'influence, qu'ont exercée quelques rois de France sur les lettres et les arts.

Gesang.

a) Vertrauen, Lied für gemischten Chor von Fink. b) Psalm 147 von J. Weiss.

Franz Gordan aus Breslau: „Non accepimus vitam brevem sed facimus." Deutsch.

Rudolf v. Wittenburg aus Schlogwitz: Le meunier de Sans souci par Andrieux.

Erich Wuthe aus Bolkenhayn: Libussa und der Page, ein poetischer Versuch.

Friedrich Gründel aus Breslau: Welchen Nutzen gewährt das Studium der Geschichte? — Abschiedsworte.

Entlassung der Abiturienten.

Gesang.

Chor von W. A. Mozart.

Die Prüfung der beiden Vorbereitungs-Klassen durch die Lehrer Adamy und Tschache findet Mittwoch Nachmittags von 2 Uhr ab auf dem Prüfungssaale statt.

Die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler findet vom 7. bis 11. April in den Vormittagsstunden statt.

Der Unterricht beginnt wieder Dinstag, den 13. April.