Zu der

am 6ten, 7ten und 8ten April 1857

stattfindenden

Prüfung der Schüler

des

Königlichen Friedrichs-Gymnasiums

ladet hierdurch

alle Beschützer, Gönner und Freunde des Schulwesens und dieser Anstalt

ehrerbietigst und ergebenst ein:

Dr. Friedrich Wimmer,
Director.

Vorangeht die Abhandlung des Professor **Anderssen**:

Entwickelung aller Eigenschaften
der Logarithmen und Kreisfunktionen aus dem bestimmten Integral $\int_1^x \frac{du}{u}$.

Breslau.
Druck von Robert Nischkowsky.
1857.

Entwickelung aller Eigenschaften

der

Logarithmen und Kreisfunktionen aus dem bestimmten Integral $\int_1^x \frac{du}{u}$,

ausgeführt von A. Anderssen.

Einleitung.

§. 1. Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, ein Verfahren zu veranschaulichen, durch welches alle Eigenschaften einer unbekannten Funktion F(x), welche durch ein bestimmtes Integral $\int_a^x fu\, du$ dargestellt ist, aus dem Begriffe dieses Integrals geschöpft werden können. Da die Funktion F(x) als eine solche vorausgesetzt wird, welche sich durch die vorhandenen und bereits bekannten Functionen nicht ausdrücken lässt, so können wir von der indirekten Definition eines Integrals, welche auf eine gewisse unter den vorhandenen Funktionen zurückweist, als deren Ableitung die zu integrirende mittelbar oder unmittelbar zu erkennen sei, keinen Gebrauch machen, sondern müssen die direkte Definition des Integrals $\int_a^x fu\, du$, als einer Summe von unendlich vielen Gliedern, zum Ausgangspunkte wählen. Demnach verstehen wir unter dem Symbol $\int_a^x fu\, du$ jenen bestimmten endlichen Werth, welchen die Summe

$$\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a + \varepsilon_1) + \varepsilon_3 f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_n f(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich ε dem Verschwinden nähert und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_n = x - a$ ist, unter Voraussetzung der Kontinuität der Funktion fu zwischen a und x, bekanntlich zur Grenze hat; oder wir definiren das Integral $\int_a^x fu\, du$ als eine unendliche Summe von Produkten der gegebenen Funktion fu, deren Variable zuerst den Werth a erhält und beständig um ein unendlich kleines Inkrement ε wächst, in sämmtliche Inkremente der Reihe nach, durch welche die Variable von a bis x aufsteigt.

§. 2. In dieser Definition sind zunächst die Grenzen a und x, wie die Inkremente $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ reell gedacht. Hieran knüpft sich jedoch die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die durch das Symbol $\int_a^x fu\, du$ bezeichnete Summe auch dann noch gegen einen endlichen Werth konvergirt, wenn man die Grenzen a und x mit den allgemeinen Werthen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ vertauscht und die Variable vermöge eines beliebigen, unendlicher Abwechselung fähigen Verfahrens aus der Grenze $\alpha + \beta i$ in die Grenze $\gamma + \delta i$ übergehen lässt; mit andern Worten: ob und unter welchen Bedingungen bei Anwendung imaginärer Grenzen und imaginärer Inkremente irgend eine dem Integral $\int_a^x fu\, du$ analog gebildete Summe, zu deren Bezeichnung vorläufig das Symbol $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\, du$ dienen mag, die Bedeutung des Symbols $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\, du$ erreicht. Es lässt sich nun beweisen (S. Grunerts Archiv der Mathematik, Theil 23, Abhandlung XIV.), dass die Summe $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ im Allgemeinen durch die Reihe

$$\left(\sum_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\beta_1 i} + \sum_{\alpha+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_1 i}\right) + \left(\sum_{\alpha_1+\beta_1 i}^{\alpha_1+\beta_2 i} + \sum_{\alpha_1+\beta_2 i}^{\alpha_2+\beta_2 i}\right) \ldots + \left(\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i} + \sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}\right) + \left(\sum_{\alpha_n+\beta_n i}^{\alpha_n+\delta i} + \sum_{\alpha_n+\delta i}^{\gamma+\delta i}\right)$$

ausgedrückt werden kann, und dass jede Summe $\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1} i}^{\alpha_{n-1}+\beta_n i}$, so wie jede Summe $\sum_{\alpha_{n-1}+\beta_n i}^{\alpha_n+\beta_n i}$, erstere, wenn $f(\alpha_{n-1} + vi)$ zwischen den reellen Grenzen β_{n-1} und β_n, letztere, wenn $f\left(u + \beta_n i\right)$ zwischen den reellen Grenzen α_{n-1} und α_n kontinuirlich ist, gegen einen bestimmten endlichen Werth konvergirt. Es steht also fest, dass die Summe $\sum_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}$ so gebildet werden kann, dass wir berechtigt sind, sie durch das Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\, du$ zu bezeichnen.

§. 3. Ist die Funktion fu schlechthin kontinuirlich, d. h. giebt es absolut keinen (reellen oder imaginären) Werth, für welchen die Funktion fu diskontinuirlich wird, so führt die Betrachtung des Integrals $\int fu\, du$ zwischen imaginären Grenzen zu keinen neuen Ergebnissen. Denn es sind in diesem Falle, wie in der oben citirten Abhandlung gleichfalls bewiesen wird, die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\, du$ denkbaren Summe ihrem Werthe nach nicht verschieden, oder sie sind sämmtlich gleich $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\,du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$, welche Summe gleichbedeutend ist mit der Summe $\int_{\alpha}^{\gamma} f(u+\delta i)du + i\int_{\beta}^{\delta} f(\alpha+vi)\,dv$ und daher, wenn $\beta=o$, $\delta=o$, $\alpha=a$, $\gamma=x$ gesetzt wird, übergeht in $\int_a^x fu\,du$, so dass man auf diesem Wege kein anderes Resultat erhält, als das, durch die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen reellen Grenzen bereits gewonnene.

Anders aber verhält sich die Sache, wenn die Funktion fu zwar zwischen den Grenzen a und x kontinuirlich ist, aber für einen gewissen Werth von der Form $p+qi$ diskontinuirlich wird. Während nämlich in diesem Falle das Integral $\int_a^x fu\,du$ unendlich-vieldeutig ist, liefert die Betrachtung desselben zwischen den reellen Grenzen a und x, bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente, nur einen einzigen seiner Werthe, und alle Eigenschaften, welche aus der Definition desselben unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Inkremente geschöpft worden sind, gelten nur innerhalb der Grenzen a und x und nur für reelle Werthe der Veränderlichen. Jetzt also ist die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen imaginären Grenzen erst fruchtbar und zur Erschöpfung seines Wesens unerlässlich. Denn ist die Funktion fu nicht schlechthin kontinuirlich, so haben die unter dem Symbol $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$ denkbaren Summen keineswegs gleichen Werth, sondern unterscheiden sich von einander, wie von der Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} fu\,du + \int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i} fu\,du$ um Vielfache einer bestimmten Differenz Δ, so dass, wenn die Betrachtung des Integrals $\int fu\,du$ zwischen den reellen Grenzen a und x einen gewissen Werth desselben $\Phi(x)$ ergeben hat, dessen allgemeiner Werth $\varphi(x)$, den wir aus der Betrachtung desselben Integrals zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ erhalten, wenn wir zuletzt $\beta=o$, $\delta=o$, $\alpha=a$ und $\gamma=x$ setzen, durch die Gleichung

$$\varphi(x) = \Phi(x) + m\Delta,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl vorstellt, seinen erschöpfenden Ausdruck erhält.

§. 4. Dieses hiermit in seinen Hauptmomenten angedeutete Verfahren wollen wir nun durch die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ veranschaulichen. Die Funktion $\frac{1}{u}$ ist zwischen den Grenzen 1 und x, wenn x eine beliebige, aber positive Zahl bedentet, kontinuirlich; folglich wird die Summe

$$\varepsilon_1\frac{1}{1} + \varepsilon_2\frac{1}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon_3\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ \ldots\ldots\varepsilon_{n-1}\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2}} + \varepsilon_n\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}},$$

in welcher ε unendlich klein und $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\ldots.+\varepsilon_n=x-1$ ist, gegen einen bestimmten endlichen Werth $\int_1^x \frac{du}{u}$ konvergiren, den wir durch das Symbol Log x bezeichnen. Diese Funktion

Log x wird als **völlig unbekannt** vorausgesetzt. Die elementare Betrachtung der Logarithmen und Kreisfunktionen, so wie deren Vervollständigung durch die Analysis, ist also für uns gar nicht vorhanden; wir abstrahiren überhaupt von der Kenntniss **irgend welcher Transcendenten** und setzen nur die **algebraischen** Funktionen und ihre Ableitungen als bekannt voraus.

§. 5. Aus der in §. 1 aufgestellten Definition eines Integrals $\int_a^b fu\,du$ als der bestimmten Grenze, gegen welche die Reihe

$$\varepsilon_1 f(a)+\varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1)+\varepsilon_3 f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1}f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-2})+\varepsilon_n f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}),$$

in welcher sich ε dem Verschwinden nähert, und $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\varepsilon_n=b-a$ ist, konvergirt, ergeben sich sofort folgende, für unsere Entwickelung ganz besonders wichtige Sätze:

I. $\int_a^b fu\,du=-\int_b^a fu\,du.$ Denn da

$$\begin{aligned}a&=b-\varepsilon_1-\varepsilon_2\ldots-\varepsilon_n,\\ a+\varepsilon_1&=b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n,\\ a+\varepsilon_1+\varepsilon_2&=b-\varepsilon_3-\varepsilon_4\ldots-\varepsilon_n,\\ &\vdots\\ a+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}&=b-\varepsilon_n,\end{aligned}$$

so lässt sich $\int_a^b fu\,du$ auch darstellen durch die Summe

$$\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_1-\varepsilon_2\ldots-\varepsilon_n)+\varepsilon_2 f(b-\varepsilon_2-\varepsilon_3\ldots-\varepsilon_n)\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1}f(b-\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)+\varepsilon_n f(b-\varepsilon_n).$$

Schreiben wir diese Summe in umgekehrter Ordnung und setzen dabei zuerst für die Differenz $b-\varepsilon_n$, dann für $b-\varepsilon_{n-1}$, dann für $b-\varepsilon_{n-2}$, zuletzt für $b-\varepsilon_1$ jedesmal bloss b, so erhalten wir

$$\int_a^b fu\,du=\varepsilon_n f(b)+\varepsilon_{n-1}f(b-\varepsilon_n)+\varepsilon_{n-2}f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})\ldots\varepsilon_2 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3)$$
$$+\varepsilon_1 f(b-\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1}\ldots-\varepsilon_3-\varepsilon_2).$$

Bezeichnen wir nun $-\varepsilon_n$ durch ε'_1, $-\varepsilon_{n-1}$ durch ε'_2, ... $-\varepsilon_2$ durch ε'_{n-1}, $-\varepsilon_1$ durch ε'_n, so finden wir

$$\int_a^b fu\,du=-\{\varepsilon'_1 f(b)+\varepsilon'_2 f(b+\varepsilon'_1)+\varepsilon_3 f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)\ldots\varepsilon'_{n-1}f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2\ldots+\varepsilon'_{n-2})$$
$$+\varepsilon'_n f(b+\varepsilon'_1+\varepsilon'_2\ldots+\varepsilon'_{n-1})\},$$

während $\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3\ldots+\varepsilon'_n=a-b$ ist. Folglich können wir die eingeklammerte Summe durch $\int_b^a fu\,du$ bezeichnen und erhalten $\int_a^b fu\,du=-\int_b^a fu\,du.$

II. $\int_a^b fu\,du=\int_a^c fu\,du+\int_c^b fu\,du$, wo $c>a<b$ ist, welche Gleichung sich sofort

ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass $a + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_m = c$ und $c + \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = b$, und dass daher

$$\int_a^b fu\,du = \{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) \ldots \varepsilon_m f(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{m-1})\} + \{\varepsilon_{m+1} f(c) + \varepsilon_{m+1} f(c+\varepsilon_{m+1}) \ldots + {}_n f(c+\varepsilon_{m+1}+\varepsilon_{m+2} \ldots + \varepsilon_{n-1})\},$$

von welcher Summe der erste Theil offenbar durch $\int_a^c fu\,du$, der zweite durch $\int_c^b fu\,du$ zu bezeichnen ist. Aus der Gleichung II. folgt aber auch $\int_a^c fu\,du = \int_a^b fu\,du - \int_c^b fu\,du$. Man kann also bei Bestimmung eines Integrals zwischen den Grenzen a und c auch über die letztere hinausgehen und dann wieder zu ihr zurückkehren, wenn nur die Funktion fu zwischen den äussersten a und b kontinuirlich ist.

III. $\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,du = \int_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v)\,dv$, vorausgesetzt, dass nicht nur die Funktion fu zwischen den Grenzen $u = \varphi_\alpha$ und $u = \varphi_\beta$, sondern auch die Funktion φ_v zwischen den Grenzen $v = \alpha$ u. $v = \beta$ kontinuirlich ist. Denn

$$\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} fu\,du = \varepsilon'_1 f(\varphi_\alpha) + \varepsilon'_2 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1) + \varepsilon'_3 f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) \ldots \varepsilon'_n f(\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1}),$$

während $\varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n = \varphi_\beta$ ist, wobei die successiven Inkremente ε' der Funktion φ_v von φ_α bis φ_β den successiven Inkrementen ε der Veränderlichen v von α bis β entsprechen, also auch $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \beta$ ist. Vermöge der Kontinuität der Funktion φ_v zwischen den Grenzen α und β finden folgende Gleichungen statt:

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \varepsilon_1 \varphi'(\alpha) = \varepsilon'_1, \text{ daher auch } \varphi(\alpha+\varepsilon_1) = \varphi_\alpha + \varepsilon_1 \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \varphi(\alpha+\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \varphi'(\alpha+\varepsilon_1) = \varepsilon'_2,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2;$$

$$\text{ferner } \varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - \varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \varepsilon_3 \varphi'(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \varepsilon'_3,$$

daher auch

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n) - \varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}) = \varepsilon_n \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}} = \varepsilon'_n, \text{ daher auch}$$

$$\varphi(\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n) = \varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1}} + \varepsilon_n \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_1 \ldots + \varepsilon_{n-1}} = \varphi_\alpha + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \ldots + \varepsilon'_{n-1} + \varepsilon'_n.$$

Demnach verwandelt sich die, das Integral $\int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta}$ fu du vorstellende Summe in folgende

$$\varepsilon_1 \varphi'_\alpha f(\varphi_\alpha) + \varepsilon_2 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1} f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1}) + \varepsilon_3 \varphi'_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2} f(\varphi_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2}) \ldots\ldots \varepsilon_n \varphi'_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}} f(\varphi_{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}}_{=\beta-\varepsilon_n}}),$$

welche sich als die Definition des Integrals $\int_\alpha^\beta \varphi'_v f(\varphi_v)\, dv$ zu erkennen giebt.

IV. $D_b \int_a^b fu\, du = f(b)$. Denn die Ableitung $D_b \int_a^b fu\, du$ bedeutet das Verhältniss

$$\frac{\int_a^{b+\varepsilon_{n+1}} fu\, du - \int_a^b fu\, du}{\varepsilon_{n+1}}, \text{ ist also gleich}$$

$$\frac{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_2 f(a+\varepsilon_1) \ldots + \varepsilon_n f(b-\varepsilon_n) + \varepsilon_{n+1} f(b) - \{\varepsilon_1 f(a) + \varepsilon_1 f(a+\varepsilon_1) \ldots + \varepsilon_n f(b-\varepsilon_n\}}{\varepsilon_{n+1}}$$

$$= \frac{\varepsilon_{n+1} f(b)}{\varepsilon_{n+1}} = f(b).$$

§. 6. Wie bereits in §§. 2 und 3 im Allgemeinen angedeutet wurde, erfordert die erschöpfende Untersuchung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ Betrachtungen folgender Art:

A. die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen den reellen Grenzen 1 und x (zwischen welchen die Funktion $\frac{1}{u}$ kontinuirlich bleibt, wenn x eine positive Zahl bedeutet) unter Voraussetzung ausschliesslich reeller Inkremente;

B. die Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $p + qi$ unter Vorausetzung theils reeller, theils einfacher imaginärer Inkremente von der Form δi, wobei die Veränderliche u

I. durch lauter reelle Inkremente von der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst bis $p + \beta i$, sodann durch lauter imaginäre Inkremente von $p + \beta i$ bis zur andern Grenze $p + qi$ fortschreitet, oder

II. zuerst durch lauter imaginäre Inkremente aus der einen Grenze $\alpha + \beta i$ zunächst in $\alpha + qi$, darauf durch lauter reelle Inkremente aus $\alpha + qi$ in die andere Grenze $p + qi$ übergeht, oder

III. zuerst durch reelle Inkremente von $\alpha + \beta i$ bis zu einem Zwischenwerth $\alpha_1 + \beta i$, sodann durch imaginäre Inkremente von $\alpha_1 + \beta i$, bis zu einem andern Zwischenwerth $\alpha_1 + \beta_1 i$

und sofort **abwechselnd** durch reelle und einfache imaginäre Inkremente bis $p+qi$ anwächst;

C. die Betrachtung des Integrals $\int\frac{du}{u}$ zwischen den imaginären Grenzen $\alpha+\beta i$ und $p+qi$ unter Voraussetzung **komplexer** Inkremente von der Form $\gamma+\delta i$.

A. Betrachtung des Integrals $\int\frac{du}{u}$ zwischen reellen Grenzen unter Voraussetzung reeller Inkremente.

§. 7. Von den unendlich vielen Werthen, welche das Integral $\int_1^x\frac{du}{u}$ zufolge der beschränkten, nur zwischen der Einheit und einer positiven Grenze x stattfindenden Kontinuität der Funktion $\frac{1}{u}$ haben muss, finden wir bei ausschliesslicher Anwendung reeller Inkremente nur einen **einzigen**, welchen wir durch Log x bezeichnet haben. Es ist also

$$\text{Log}\,x=\varepsilon_1\frac{1}{1}+\varepsilon_2\frac{1}{1+\varepsilon_1}+\varepsilon_3\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ldots\varepsilon_n\frac{1}{1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}(=x-\varepsilon_n)}=\int_1^x\frac{du}{u}.$$

Setzt man $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=\varepsilon(1+\varepsilon)$, $\varepsilon_3=\varepsilon(1+\varepsilon)^2,\ldots\ \varepsilon_n=\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}$, so hat man

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\ldots+\varepsilon_n=\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)+\varepsilon(1+\varepsilon)^2\ldots+\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^n-\varepsilon}{(1+\varepsilon)-1}=(1+\varepsilon)^n-1;$$

folglich $1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_n=(1+\varepsilon)^n$; also

$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2=(1+\varepsilon)^2$

$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=(1+\varepsilon)^3$ u. s. w.

Folglich findet man

$$\text{Log}\,x=\varepsilon\frac{1}{1}+\varepsilon(1+\varepsilon)\frac{1}{1+\varepsilon}1+\varepsilon(1+\varepsilon)^2\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\ldots\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}},$$

also, wenn sich n der Grenze ∞ nähert, $\text{Log}\,x=\text{Lim}\,(n\varepsilon)$.

Da nun aus der Gleichung $x=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n=(1+\varepsilon)^n$ für ε der Werth $x^{\frac{1}{n}}-1$ gefunden wird, so folgt $\text{Log}\,x=\text{Lim}\{n(x^{\frac{1}{n}}-1)\}$, wenn sich n der Grenze ∞ nähert.

§. 8. Aus den Gleichungen I. und II. des §. 5 folgt

$$\int_x^{xy}\frac{du}{u}=\int_x^1\frac{du}{u}+\int_1^{xy}\frac{du}{u}=\int_1^{xy}\frac{du}{u}-\int_1^x\frac{du}{u}=\text{Log}\,xy-\text{Log}\,x.$$

Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\beta\varphi'_v\frac{1}{\varphi_v}dv=\int_{\varphi\alpha}^{\varphi_\beta}\frac{1}{u}du$ statt φ_v die Funktion xv, also $\varphi_\alpha=x\alpha$, $\varphi_\beta=x\beta$, $\varphi'_v=x$, so finden wir für $\alpha=1$ und $\beta=y$

$$\int_1^y x\frac{1}{xv}dv,\ \text{das ist}\ \int_1^y\frac{dv}{v}=\int_x^{xy}\frac{du}{u},\ \text{also}\ \int_x^{xy}\frac{du}{u}=\text{Log}\,y.$$

Aus der Vergleichung beider für $\int_x^{xy} \frac{du}{u}$ gefundenen Werthe ergiebt sich

$\text{Log}\, xy = \text{Log}\, x + \text{Log}\, y$, welcher Satz auch die folgenden drei

$\text{Log}\, \frac{x}{y} = \text{Log}\, x - \text{Log}\, y$, $\text{Log}\, x^m = m\, \text{Log}\, x$, $\text{Log}\, \sqrt[m]{x} = \frac{1}{m}\, \text{Log}\, x$, wo m zunächst eine ganze Zahl bedeutet, selbstverständlich macht. Hieraus aber folgt sogleich, dass der Satz $\text{Log}\, x^m = m\, \text{Log}\, x$ für jeden beliebigen reellen Werth von m (und für jeden positiven Werth von x) Gültigkeit hat.

§. 9. Es sei $\text{Log}\, x = z$. Verstehen wir unter e denjenigen Werth, welcher der Gleichung $\text{Log}\, e = 1$ Genüge leistet, so ist $\text{Log}\, e^z = z\, \text{Log}\, e = z$; folglich $\text{Log}\, x = \text{Log}\, e^z$, woraus sich die Gleichung $x = e^z$ ergiebt, in welcher die vorige $\text{Log}\, x = z$ ihre Umkehrung hat. Nun ist nach §. 7 für $n = \infty$

$$\text{Log}\, x = \text{Lim}\, n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = z; \text{ folglich auch}$$

$$\text{Lim}\, n\left([e^z]^{\frac{1}{n}} - 1\right) = z;$$

folglich immer noch unter der Voraussetzung, dass sich n der Grenze ∞ nähert,

$$e^z = \text{Lim}\left(\frac{z}{n} + 1\right)^n.$$

Setzen wir $n = \frac{1}{u}$, so ist unter der Voraussetzung, dass sich u der Grenze o nähert,

$$e^z = \text{Lim}\,(1 + uz)^{\frac{1}{u}},$$

und man erhält nach dem binomischen Lehrsatz

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

welche Reihe, so lange $uz < 1$, also $z < \frac{1}{u}$ ist, mithin für jeden reellen Werth von z konvergent bleibt. Ist also $z = 1$, so finden wir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

B. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung einfacher imaginärer Inkremente.

§. 10. Um zwischen den imaginären Grenzen $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$ für alle drei (nach §. 6) gegenwärtigen Falls möglichen Uebergangsarten der Veränderlichen das Integral $\int \frac{du}{u}$ auszuwerthen, behandeln wir zunächst die beiden einfacheren Fälle, in welchen sich jene Grenzen entweder nur in dem reellen oder nur in dem imaginären Theile unterscheiden.

Betrachten wir zuerst das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$, das ist die Summe

$\varepsilon_1 i \frac{1}{\alpha+\beta i} + \varepsilon_2 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1)i} + \varepsilon_3 i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2)i} \ldots\ldots \varepsilon_n i \frac{1}{\alpha+(\beta+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1})i}$,
wo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n = \delta - \beta$ ist.

Aus dieser Definition folgt $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = i \int_\beta^\delta \frac{dv}{\alpha+vi} = i \int_\beta^\delta \frac{\alpha - vi}{\alpha^2+v^2} dv$, also

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \int_\beta^\delta \frac{v\,dv}{\alpha^2+v^2} + i \int_\beta^\delta \frac{\alpha\,dv}{\alpha^2+v^2}.$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\beta^\delta \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_\beta}^{\varphi_\delta} \frac{du}{u}$ statt φ_v die Funktion $\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}$, also $\varphi_\beta = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}$, $\varphi_\delta = \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}$, $\varphi'_v = \frac{2v}{\alpha^2}$, so erhalten wir

$$\int_\beta^\delta \frac{2v}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^2+v^2}{\alpha^2}} dv, \text{ das ist } 2 \int_\beta^\delta \frac{v\,dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}}^{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}} \frac{du}{u} = \mathrm{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2},$$

weil $\int_x^{xy} \frac{du}{u} = \mathrm{Log}\, y$ ist (S. §. 8). Setzen wir aber in die Gleichung III. des §. 5
$\int_\beta^\delta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi_v^2} dv = \int_{\varphi_\beta}^{\varphi_\delta} \frac{1}{1+u^2} du$ statt φ_v die Funktion $\frac{v}{\alpha}$, also $\varphi_\beta = \frac{\beta}{\alpha}$, $\varphi_\delta = \frac{\delta}{\alpha}$, $\varphi'_v = \frac{1}{\alpha}$, so finden wir

$$\int_\beta^\delta \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \text{ oder } \int_\beta^\delta \frac{\alpha\,dv}{\alpha^2+v^2} = \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2} du; \text{ folglich}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \mathrm{Log} \frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{1+u^2}.$$

Gehen wir nun zum zweiten Fall über und betrachten das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$, das ist die Summe

$$\varepsilon_1 \frac{1}{\alpha+\beta i} + \varepsilon_2 \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\beta i} + \varepsilon_3 \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\beta i} \cdots + \varepsilon_n \frac{1}{\underbrace{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots +\varepsilon_{n-1}}_{=\gamma-\varepsilon_n}+\beta i},$$

woraus folgt $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u} = \int_\alpha^\gamma \frac{dv}{v+\beta i} = \int_\alpha^\gamma \frac{v\,dv}{v^2+\beta^2} - i \int_\alpha^\gamma \frac{\beta\,dv}{v^2+\beta^2}$.

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\gamma \varphi'_v \frac{1}{\varphi_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma} \frac{du}{u}$ statt φ_v die Funktion $\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}$, also $\varphi_\alpha = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$, $\varphi_\gamma = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}$, $\varphi'_v = \frac{2v}{\beta^2}$, so folgt

$$\int_\alpha^\gamma \frac{2v}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\frac{\beta^2+v^2}{\beta^2}} dv \text{ oder } 2\int_\alpha^\gamma \frac{v\,dv}{\beta^2+v^2} = \int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}}^{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}} \frac{du}{u} = \mathrm{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Setzen wir ferner in die Gleichung III. $\int_\alpha^\gamma \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\gamma} \frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{v}{\beta}$, also $\varphi_\alpha = \frac{\alpha}{\beta}$, $\varphi_\gamma = \frac{\gamma}{\beta}$, $\varphi'_v = \frac{1}{\beta}$, so folgt

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\beta} \frac{1}{1+\frac{v^2}{\beta^2}} dv \text{ oder } \int_\alpha^\gamma \frac{\beta\,dv}{\beta^2+v^2} = \int_{\frac{\gamma}{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{du}{1+u^2}; \text{ also}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2} - i\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2}.$$

§ 11. Die Untersuchung der Integrale $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$ und $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$ hat uns somit zu dem Integral $\int \frac{du}{1+u^2}$ geführt. Da die Kontinuität der Funktion $\frac{1}{1+u^2}$ keine unbedingte ist, obschon sie zwischen o und jeder beliebigen reellen Grenze x stattfindet, so ist im Allgemeinen das Integral $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ unendlich-vieldeutig; aber unter Voraussetzung reeller Grenzen und reeller Inkremente hat das Integral $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ nur einen einzigen Werth, den wir durch das Symbol Arc tg x bezeichnen. Es ist also

$$\text{Arc tg}\, x = \varepsilon_1 \frac{1}{1} + \varepsilon_2 \frac{1}{1+\varepsilon_1{}^2} + \varepsilon_3 \frac{1}{1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} + \ldots\ldots \varepsilon_n \frac{1}{1+(\underbrace{\varepsilon_1+\varepsilon_2 \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1}}_{=x-\varepsilon_n})^2} \quad \ldots \text{(a)}$$

Setzen wir in die Gleichung III. des §. 5 $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$

1. statt φ_v die Funktion $-v$, also $\varphi_\alpha = -\alpha$, $\varphi_\beta = -\beta$, $\varphi'_v = -1$,
2. statt φ_v die Funktion $\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{1}{\beta}$, $\varphi'_v = -\frac{1}{v^2}$,

so erhalten wir für $\alpha = 0$ und $\beta = x$ (vergl. die Anmerkung)

1. $\int_0^x -1 \frac{1}{1+v^2} dv$ oder $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{-x} \frac{du}{1+u^2}$, folglich $\text{Arc tg}(-x) = -\text{Arc tg}\, x$;

2. $\int_0^x -\frac{1}{v^2} \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} dv$ oder $-\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_{\frac{1}{0}}^{x} \frac{du}{1+u^2}$; folglich

$$\text{Arc tg}\, x = -\left\{\int_\infty^0 \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}\right\}, \text{ also } \text{Arc tg}\, x = \text{Arc tg}(\infty) - \text{Arc tg}\frac{1}{x}.$$

Demnach ist $\text{Arc tg}\, x + \text{Arc tg}\frac{1}{x}$ eine konstante Grösse $\text{Arc tg}(\infty)$, die wir durch $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen wollen, so dass auch $\text{Arc tg}(-x) + \text{Arc tg}(-\frac{1}{x}) = -\{\text{Arc tg}\, x + \text{Arc tg}\frac{1}{x}\} = -\frac{\pi}{2}$ gefunden wird. Setzen wir $x = 1$, so ergiebt sich daher $2\,\text{Arc tg}\, 1 = \frac{\pi}{2}$, also $\text{Arc tg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$. Um diesen Werth annäherungsweise zu berechnen, setzen wir in die Gleichung (a) für x die Zahl 1, theilen die Einheit in n gleiche Theile, z. B. in zehn, und machen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n = \frac{1}{10}$; so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arc tg}\, 1 = \frac{1}{10}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+(\frac{1}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{10})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{10})^2} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(\frac{9}{10})^2}\right\}.$$

Anmerkung. Man könnte einwenden, dass, wenn man in die Gleichung III. $\int_\alpha^\beta \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ setzt, α nicht gleich o gemacht werden dürfe, weil für diesen Werth die Funktion $\frac{1}{v}$ aufhöre kontinuirlich zu sein, und daher die Gleichung III. nicht mehr stattfinde, und es liesse sich nach dem von uns angewendeten Verfahren auch das Absurdum $\text{Arc tg}(-x) + \text{Arc tg}(-\frac{1}{x}) = +\frac{\pi}{2}$ beweisen. Denn man setze für φ_v die Funktion $-\frac{1}{v}$, also $\varphi_\alpha = \frac{1}{-\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{1}{-\beta}$, $\varphi'_v = \frac{1}{v^2}$, so würden wir für $\alpha = 0$ und $\beta = x$ erhalten

$\int_0^x \frac{1}{v^2} \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} dv$, das ist $\int_0^x \frac{dv}{1+v^2} = \int_{\frac{1}{0}}^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{-\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2}$, also

$\mathrm{Arc\,tg}\,x = -\mathrm{Arc\,tg}\,\infty + \mathrm{Arc\,tg}(-\frac{1}{x})$, demnach $+\frac{\pi}{2} = \mathrm{Arc\,tg}(-x) + \mathrm{Arc\,tg}(-\frac{1}{x})$.

Allein die Funktion $\frac{1}{v}$ ist zwischen den Grenzen $+\varepsilon$ und $+x$ und $-\varepsilon$ und $-x$, wobei ε unendlich klein ist, entschieden kontinuirlich; die Gleichung III. gilt also noch, wenn wir auch — dies ist der eigentliche Sinn der Umwandlung von $+\alpha$ in o — für α den Werth $+\varepsilon$ setzen, und das Fehlerhafte des voranstehenden Beweises liegt darin, dass die Umwandlung von $-\alpha$ in o als gleichbedeutend mit der in $+\varepsilon$ genommen wurde, während sie den Uebergang in $-\varepsilon$ vorstellt, also für $\frac{1}{-\alpha(=0)}$ nur $-\infty$, nicht $+\infty$ gesetzt werden konnte.

§. 12. Nehmen wir nun die in §. 10 für die Integrale $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u}$ und $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u}$ gefundenen Werthe, und berücksichtigen wir, dass nach §. 11

$$\int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc\,tg}\frac{\delta}{\alpha} - \mathrm{Arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}, \text{ und}$$

$$\int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = -\int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{\gamma}{\beta}} \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arc\,tg}\frac{\gamma}{\beta} - \mathrm{Arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta} \text{ ist,}$$

so gelangen wir zu den Ausdrücken

$$\text{(b)} \ldots \int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2} + i\left(\mathrm{Arc\,tg}\frac{\delta}{\alpha} - \mathrm{Arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\text{(c)} \ldots \int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2} - i\left(\mathrm{Arc\,tg}\frac{\gamma}{\beta} - \mathrm{Arc\,tg}\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Lassen wir nun I. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter reelle Inkremente in $\gamma+\beta i$, darauf durch lauter imaginäre Inkremente aus $\gamma+\beta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$ durch die Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\beta i} \frac{du}{u} + \int_{\gamma+\beta i}^{\gamma+\delta i} \frac{du}{u}$, so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (b) α mit γ vertauschen und wir finden

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2+\alpha^2}-i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}\right)+\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\beta^2+\gamma^2}+i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Lassen wir aber II. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in $\alpha+\delta i$, darauf durch lauter reelle Inkremente aus $\alpha+\delta i$ in $\gamma+\delta i$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch die Summe $\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\delta i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha+\delta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$, so müssen wir bei Anwendung der Gleichung (c) β mit δ vertauschen und wir erhalten

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}=\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\alpha^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right)+\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\delta^2}-i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}-\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{\gamma^2+\delta^2}{\alpha^2+\beta^2}+i\left(\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}+\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}-\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}-\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Bezeichnen wir das auf die erste Art definirte Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{\gamma+\delta i}\frac{du}{u}$ durch $f_1(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$, das auf die zweite Art definirte durch $f_2(\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i)$, so ist

$$f_1-f_2=i\left\{\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\beta}+\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}+\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\delta}+\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\gamma}-\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\gamma}-\operatorname{Arctg}\frac{\gamma}{\beta}-\operatorname{Arctg}\frac{\alpha}{\delta}-\operatorname{Arctg}\frac{\delta}{\alpha}\right\},$$

welche Differenz, vermöge der Gleichung $\operatorname{Arctg}x+\operatorname{Arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, sich in $2\pi i$ umwandelt, wenn α und β positiv, γ und δ negativ (oder umgekehrt), und vermöge der Gleichung $\operatorname{Arctg}(-x)+\operatorname{Arctg}(-\frac{1}{x})=-\frac{\pi}{2}$, in $-2\pi i$, wenn α und δ positiv, β und γ negativ (oder umgekehrt), in allen übrigen Fällen aber $=0$ ist.

§. 13. Lassen wir nun III. die Variable aus der Grenze $\alpha+\beta i$ zuerst durch lauter imaginäre Inkremente in den Zwischenwerth $\alpha+\beta_1 i$, von diesem durch lauter reelle Inkremente in einen andern Zwischenwerth $\alpha_1+\beta_1 i$ und so fort abwechselnd bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente bis zu einer Grenze $p+qi$ fortschreiten, so wird uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_2 erscheinen. Fassen wir zunächst zwei auf einander folgende dieser Integrale zusammen, so ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i)+f_2(\alpha_{r+1}\beta_{r+1} i,\ \alpha_{r+2}\beta_{r+2} i)=$$
$$\int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_r+\beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2} i}\frac{du}{u}+\int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2} i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2} i}\frac{du}{u},$$

$$\text{also} = \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u} + f_1(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i) + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}.$$

Nun ist aber

I. wenn α_r und β_{r+1} positiv, α_{r+1} und β_{r+2} negativ (oder umgekehrt), $f_1 = f_2 + 2\pi i$,

II. wenn α_r und β_{r+2} positiv, β_{r+1} und α_{r+1} negativ (oder umgekehrt), $f_1 = f_2 - 2\pi i$,

in allen übrigen Fällen dagegen $f_1 = f_2$; folglich ist in allen diesen übrigen Fällen

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i) + f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i)$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u} + f_2(\alpha_r+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i) + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+1}i}\frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+1}i}^{\alpha_r+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u} + \int_{\alpha_{r+1}+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u}$$

$$= \int_{\alpha_r+\beta_r i}^{\alpha_r+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u} + \int_{\alpha_r+\beta_{r+2}i}^{\alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i}\frac{du}{u} = f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i);$$

in den beiden Ausnahmefällen I. und II. dagegen ist

$$f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i) + f_2(\alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i) = f_2(\alpha_r+\beta_r i,\ \alpha_{r+2}+\beta_{r+2}i) \pm 2\pi i.$$

Wir hatten nun das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ definirt durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_1+\beta_1 i) + f_2(\alpha_1+\beta_1 i,\ \alpha_2+\beta_2 i)\} + \{f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_3+\beta_3 i) + f_2(\alpha_3+\beta_3 i,\ \alpha_4+\beta_4 i)\} +$$
$$\ldots + \{f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i) + f_2(\alpha_{2m-1}+\beta_{2m-1}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i)\} + f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i,\ p+qi).$$

Wählen wir nun in den eingeklammerten m Summen die Repräsentanten von α_r, β_{r+1}, α_{r+1}, β_{r+2} so, wie es in dem einen oder dem andern der beiden Ausnahmefälle I. und II. angegeben ist, so erhalten wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i,\ \alpha_2+\beta_2 i) + f_2(\alpha_2+\beta_2 i,\ \alpha_4+\beta_4 i) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ f_2(\alpha_{2m-2}+\beta_{2m-2}i,\ \alpha_{2m}+\beta_{2m}i) + f_2(\alpha_{2m}+\beta_{2m}i,\ p+qi) \pm 2m\pi i;$$

da aber jetzt die beiden Ausnahmefälle I. und II. nicht mehr stattfinden, so zieht sich diese ganze Summe zurück auf

$$f_2(\alpha+\beta i,\ p+qi) \pm 2m\pi i.$$

Stellen wir uns z. B. das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi}\frac{du}{u}$ vor durch die Summe

$$\{f_2(\alpha+\beta i, -\alpha_1+\beta_1 i)+f_2(-\alpha_1+\beta_1 i, \alpha_2-\beta_2 i\}+\{f_2(\alpha_2-\beta_2 i, -\alpha_3+\beta_3 i)+f_2(-\alpha_3+\beta_3 i, \alpha_4-\beta_4 i)\}$$
$$+ f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi),$$

wo in den beiden eingeklammerten Summen

die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich 1) α und β_1, 2) α_2 und β_3 beide positiv, dagegen die Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich 1) $-\alpha$ und $-\beta_2$, 2) $-\alpha_3$ und $-\beta_4$ beide negativ,

also dem Ausnahmefalle I. entsprechend gewählt sind, so finden wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+2\pi i+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)+2\pi i+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)$$
$$=\{f_2(\alpha+\beta i, \alpha_2-\beta_2 i)+f_2(\alpha_2-\beta_2 i, \alpha_4-\beta_4 i)\}+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)+4\pi i.$$

Da nun aber jetzt in der eingeklammerten Summe die Repräsentanten von α_r und β_{r+1}, nämlich α und $-\beta_2$, so wie die Repräsentanten von α_{r+1} und β_{r+2}, nämlich α_2 und $-\beta_4$, der eine positiv, der andere negativ sind, also weder dem Falle I., noch dem Falle II. entsprechen, so erhalten wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \underbrace{f_2(\alpha+\beta i, \alpha_4-\beta_4 i)+f_2(\alpha_4-\beta_4 i, p+qi)}_{} + 4\pi i$$
$$= \qquad f_2(\alpha+\beta i, p+qi) \qquad + 4\pi i.$$

Stellen wir uns also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ als eine auf unendlich mannigfaltige Art ausführbare Summe von Integralen vor, die sämmtlich dem Integral f_2 analog, d. h. sämmtlich von der Beschaffenheit sind, dass in ihnen die Variable von einem Zwischenwerth $\alpha_r+\beta_r i$ in einen andern Zwischenwerth $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i$ zuerst durch imaginäre, dann durch reelle Inkremente übergeht, so lassen sich die auf einander folgenden Zwischenwerthe $\alpha_r+\beta_r i$, $\alpha_{r+1}+\beta_{r+1} i$, $\alpha_{r+2}+\beta_{r+2} i$ so wählen, dass jede von den unendlich vielen Summen, durch welche das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ definirt werden kann, sich von einander, wie von dem Integral $f_2(\alpha+\beta i, p+qi)$, um Vielfache der Differenz $2\pi i$ unterscheiden. Bezeichnen wir das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+pi} \frac{du}{u}$ unter der Voraussetzung, dass die Variable auf die angegebene Weise bald durch imaginäre, bald durch reelle Inkremente von $\alpha+\beta i$ bis $p+qi$ fortschreitet, durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$, so haben wir die Gleichung

$$\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right) = f_2(\alpha+\beta i, p+qi) + 2m\pi i,$$

wo m jede positive und jede negative ganze Zahl bedeutet.

Anmerkung. Stellen wir uns das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ als eine Summe von Integralen von der Form f_1 vor, so finden wir durch ein dem obigen ähnliches Verfahren denselben Werth, so dass jenes Integral auch bei dieser Auffassung durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ zu bezeichnen ist.

§. 14. Machen wir $\alpha=1$, $\beta=0$, und nennen wir das unendlich-vieldeutige Integral $\left(\int_1^{p+qi} \frac{du}{u}\right)$ den allgemeinen Logarithmus von $p+qi$, den wir im Unterschiede von dem eindeutigen $\text{Log}\,(p+qi) = f_2\,(1, p+qi)$ durch $\log\,(p+qi)$ bezeichnen, so gilt die Gleichung

$$\log\,(p+qi) = f_2(1, p+qi) + 2m\pi i.$$

Ist nun p eine positive Zahl, so erhalten wir

$$\log(p+qi) = \tfrac{1}{2}\text{Log}(p^2+q^2) + i(\underbrace{\text{Arctg}\,\tfrac{1}{q} + \text{Arctg}\,q}_{=\frac{\pi}{2}} - \text{Arctg}\,\tfrac{p}{q}) + 2m\pi i,$$

und da $-\text{Arctg}\,\frac{p}{q} = -\text{Arctg}\,\frac{p}{q} - \text{Arctg}\,\frac{q}{p} + \text{Arctg}\,\frac{q}{p} = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctg}\,\frac{q}{p}$, ist, so folgt

$$\log\,(p+qi) = \tfrac{1}{2}\text{Log}\,(p^2+q^2) + i(2m\pi + \text{Arctg}\,\tfrac{q}{p}),$$

wo $\text{Arctg}\,\frac{q}{p}$ eindeutig und derjenige Arcus ist, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, und zwar zwischen o und $+\frac{\pi}{2}$, wenn q positiv, zwischen o und $-\frac{\pi}{2}$, wenn q negativ ist.

Bedeutet aber p eine negative Zahl, ist also $p = -p'$, so findet man

$$\log\,(p+qi) = \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,(p^2+q^2) + i\,(\tfrac{\pi}{2} + \text{Arctg}\,\tfrac{p'}{q}) + 2m\pi i,$$

und da $\text{Arctg}\,\frac{p'}{q} = \text{Arctg}\,\frac{p'}{q} + \text{Arctg}\,\frac{q}{p'} - \text{Arctg}\,\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,\frac{q}{p'} = \frac{\pi}{2} = \text{Arctg}\,\frac{q}{p}$ ist,

so folgt für ein negatives p

$$\log\,(p \pm qi) = \tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,(p^2+q^2) + i\,([2m+1]\,\pi \pm \text{Arctg}\,\tfrac{q}{p}).$$

Man findet daher auch

$$\log\,(+p) = \text{Log}\,p + 2m\pi i,$$
$$\log\,(-p) = \text{Log}\,p + (2m+1)\pi i,$$

wo Log p den einzigen Werth vorstellt, den man für das, aus bloss reellen Inkrementen konstruirte Integral $\int_1^p \frac{du}{u}$ erhält.

C. Betrachtung des Integrals $\int \frac{du}{u}$ zwischen imaginären Grenzen unter Voraussetzung komplexer Inkremente.

§. 15. Lassen wir nunmehr die Variable durch komplexe Inkremente von der Form $\varepsilon+\delta i$ aus der Grenze $\alpha+\beta i$ in die Grenze $p+qi$ übergehen, definiren wir also das Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\,du$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1+\delta_1 i)f\{\alpha+\beta i\}+(\varepsilon_2+\delta_2 i)f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+(\varepsilon_3+\delta_3 i)f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\}$$
$$\ldots\ldots+(\varepsilon_n+\delta_n i)f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}+i(\beta+\delta_1+\delta_2\ldots+\delta_{n-1})\},$$

in welcher ε und δ reell und unendlich klein und $\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\ldots+\varepsilon_n=p$,
$\beta+\delta_1+\delta_2\ldots\ldots+\delta_n=q$ ist,

so haben wir offenbar die allgemeinste Definition des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\,du$ vor uns, welche die, dem vorangehenden Abschnitt zu Grunde gelegte als ihre Unterart einschliesst. Man könnte daher glauben, dass die Konstruktion des Integrals $\left(\int_1^{p+qi}\frac{du}{u}\right)$ unter Zulassung bloss einfacher und zwar mit reellen abwechselnder imaginärer Inkremente (vergl. §. 13) dessen Benennung als des „allgemeinen Logarithmus" von $p+qi$ nicht rechtfertige. Allein wir werden uns alsbald überzeugen, dass der durch die jetzige Definition des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ bedingte Werth desselben mit dem Werthe des Integrals $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du\right)$ genau übereinstimmt.

§. 16. Nämlich zufolge der jetzt vorausgesetzten, im vorigen §. angegebenen Konstruktion des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} f(u)\,du$ haben wir auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du=\varepsilon_1 f\{\alpha+\beta i\}+\delta_1 i f\{\alpha+\beta i\}+\varepsilon_2 f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\delta_2 i f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\text{etc.}$$

Da nun die Funktion fu zwischen den Grenzen $\alpha+\beta i$ und $p+qi$ als kontinuirlich, d. h. als eine solche vorausgesetzt wird, welche, während die Variable u aus der Grenze $\alpha+\beta i$ durch komplexe Inkremente in die Grenze $p+qi$ übergeht, nie die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so muss sie, so oft der Theil α_r irgend eines Werthes $\alpha_r+\beta_r i$ der Veränderlichen u um ein unendlich kleines Inkrement ε_r wächst, ebenfalls einen unendlich kleinen Zuwachs ϑ_r von der Form $\vartheta'_r+\vartheta''_r i$ erhalten. Es ist also

$$\begin{aligned}
&f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\} &&= f\{\alpha+\beta i\}+\vartheta_1;\ \text{folglich}\\
&f\{\alpha+\beta i\} &&= f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\vartheta_1;\ \text{desgleichen ist}\\
&f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\} &&= f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\vartheta_2;\ \text{folglich}\\
&f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\} &&= f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\}-\vartheta_2;\ \text{ebenso}\\
&f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\} &&= f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+(\beta+\delta_1+\delta_2)i\}-\vartheta_3\ \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Demnach lässt sich die jetzt vorausgesetzte Konstruktion des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ auch in folgende umwandeln:

$$\varepsilon_1 f\{\alpha+\beta i\}+\delta_1 i f\{\alpha+\varepsilon_1+\beta i\}-\delta_1\vartheta_1 i+\varepsilon_2 f\{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i\}+\delta_2 i f\{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i\} -\delta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

Also ist $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du =$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\beta i} fu\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i}+\int_{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i} fu\,du+\int_{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i} fu\,du-\delta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i}$$

$$\underbrace{\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1)i} fu\,du-\delta_1\vartheta_1 i}$$

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i} fu\,du-\vartheta_1\vartheta_1 i-\vartheta_2\vartheta_2 i+\text{etc.}$$

Verfahren wir auf diese Weise mit sämmtlichen Gliedern der obigen Summe, so erhalten wir schliesslich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n+(\beta+\delta_1+\delta_2\ldots\delta_n)i} fu\,du-i(\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2\ldots\ldots+\delta_n\vartheta_n).$$

Achten wir aber auf das Bildungsgesetz dieses Integrals, auf welches sich die transformirte Summe reducirt hat, und bemerken wir, dass die Veränderliche a b w e c h s e l n d bald durch reelle, bald durch e i n f a c h e imaginäre Inkremente in den letzten Grenzwerth übergeht, so ist klar, dass diesem Integral kein anderer Werth, als der, am Ende des §. 13 durch $\left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du\right)$ bezeichnete beizulegen ist.

Was aber die Reihe $\delta_1\vartheta_1+\delta_2\vartheta_2\ldots+\delta_n\vartheta_n$ betrifft, so zerfällt sie vermöge der komplexen Form von ϑ in die beiden Reihen $\delta_1\vartheta'_1+\delta_2\vartheta'_2\ldots.+\delta_n\vartheta'_n+i(\delta_1\vartheta''_1+\delta_2\vartheta_2''\ldots.+\delta_n\vartheta''_n)$.

Ist nun unter den unendlich kleinen Grössen $\vartheta'_1, \vartheta'_2 \ldots \vartheta'_n$ und $\vartheta''_1, \vartheta''_2 \ldots \vartheta''_n$, unter jenen ϑ'_r, unter diesen ϑ''_r die grösste, so ist die Summe

$\delta_1 \vartheta_1 + \delta_2 \vartheta_2 \ldots + \delta_n \vartheta_n < \vartheta'_r(\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n) + i\,\vartheta''_r(\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n)$, also $< \vartheta_r(q-\beta)$,

sie ist demnach unendlich klein und folglich ohne Einfluss auf den Werth des zu untersuchenden Integrals. Wir erhalten daher

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du = \left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+pi} fu\,du\right),$$

d. h. der an das Bildungsgesetz C. (S. §. 6) sich knüpfende Werth des Integrals $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} fu\,du$ ist mit dem durch das Bildungsgesetz B, III. bedingten Werthe dieses Integrals identisch.

§. 17. Dem jetzt vorausgesetzten Bildungsgesetze gemäss verstehen wir unter dem Integral $\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u}$ die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{\alpha+\beta i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i)\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+(\beta+\delta_1)i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i)\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2+(\beta+\delta_1+\delta_2)i}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i)\frac{1}{\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2\ldots+\varepsilon_{n-1}+(\beta+\delta_1+\delta_2\ldots.+\delta_{n-1})i},$$

in welcher $\alpha + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n = p$ und $\beta + \delta_1 + \delta_2 \ldots. + \delta_n = q$ ist.

Machen wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \ldots. = \varepsilon_n$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots. = \delta_n$, so finden wir

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = (\varepsilon_1 + \delta_1 i)\left\{\frac{1}{\alpha+\beta i} + \frac{1}{\alpha+\beta i+\varepsilon_1+\delta_1 i} + \frac{1}{\alpha+\beta i+2(\varepsilon_1+\delta_1 i)}\right.$$
$$\left.\ldots. + \frac{1}{\alpha+\beta i+(n-1)(\varepsilon_1+\delta_1 i)}\right\},$$

wo $\alpha + \beta i + n(\varepsilon_1 + \delta_1 i) = p + qi$ ist. Folglich

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}} + \frac{1}{1+2\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(n-1)\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i}}\right\},$$

wo $1 + n\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i} = \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$ ist. Setzen wir endlich $\frac{\varepsilon_1+\delta_1 i}{\alpha+\beta i} = \varepsilon + \delta i$, so ist

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = (\varepsilon+\delta i)\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\varepsilon+\delta i} + \frac{1}{1+2(\varepsilon+\delta i)} \ldots\ldots + \frac{1}{1+(n-1)(\varepsilon+\delta i)}\right\},$$

wo $1 + n(\varepsilon+\delta i) = \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$ ist. Offenbar ist nun die rechtsstehende Summe die Definition des Integrals $\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u}$, unter Voraussetzung, dass die Inkremente komplex und sämmtlich gleich

$\varepsilon + \delta i$ sind. Folglich finden wir bei Berücksichtigung des §. 16, nach welchem dieses Integral

$$\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} = \left(\int_1^{\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}} \frac{du}{u} \right),$$ mithin nach §. 13 $= \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$ ist,

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i}.$$

Nun ist aber auch

$$\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} = \left(\int_{\alpha+\beta i}^{p+qi} \frac{du}{u} \right) = - \left(\int_1^{\alpha+\beta i} \frac{du}{u} \right) + \left(\int_1^{p+qi} \frac{du}{u} \right)$$
$$= \log (p+qi) - \log (\alpha+\beta i);$$

folglich ergiebt sich $\log \frac{p+qi}{\alpha+\beta i} = \log (p+qi) - \log (\alpha+\beta i)$ oder auch, wenn $p+qi$ statt $\frac{p+qi}{\alpha+\beta i}$, mithin $(p+qi)(\alpha+\beta i)$ statt $p+qi$ gesetzt wird:

$$\log (p+qi)(\alpha+\beta i) = \log (p+qi) + \log (\alpha+\beta i),$$

woraus wir schliessen $\log (xy) = \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y + 2m\pi i$, und zwar für alle reellen und imaginären Werthe von x und y.

§. 18. Einen wesentlichen Bestandtheil des Integrals $\int_1^x \frac{du}{u}$ in dessen allgemeiner Bedeutung bildet ein Integral von der Form $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$, welches wir unter der Voraussetzung, dass die Veränderlichen nur durch reelle Inkremente von o bis x fortschreitet, durch Arc tg x bezeichnet haben. Wir wollen nun auch diesem Integral eine allgemeinere Bedeutung unterlegen und auch in ihm imaginäre Inkremente der Veränderlichen zulassen. Da nun unter dieser Voraussetzung zwei Hauptarten B. und C. (S. §. 6) des Wachsthums der Veränderlichen stattfinden, beide Arten indess nach §. 16 in Rücksicht auf den Werth des zu untersuchenden Integrals zu demselben Ergebnisse führen, so wird offenbar durch Anwendung komplexer Inkremente die ganze Bedeutung dieses Integrals umfasst und erschöpft. Wir definiren demnach jetzt das Integral $\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{1} + (\varepsilon_2 + \delta_2)i \frac{1}{1 + (\varepsilon_1 + \delta_1 i)^2} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i) \frac{1}{1 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\delta_1 + \delta_2)i\}^2}$$
$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i) \frac{1}{1 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1})i\}^2},$$

in welcher $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_n)i = x$ ist, und bezeichnen diese Summe durch arc tg x. Demnach ist

$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{(u+i)(u-i)} = \frac{1}{2i}\left\{\int_0^x \frac{du}{u-i} - \int_0^x \frac{du}{u+i}\right\}$, in welchen beiden Integralen wiederum die Inkremente der Veränderlichen als komplex vorausgesetzt sind, so dass $\int_0 \frac{du}{u \mp i}$ durch die Summe

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 i)\frac{1}{\mp i} + (\varepsilon_2 + \delta_2 i)\frac{1}{\varepsilon_1 + \delta_1 i \mp i} + (\varepsilon_3 + \delta_3 i)\frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\delta_1 + \delta_2)i \mp i}$$

$$\ldots\ldots + (\varepsilon_n + \delta_n i)\frac{1}{\underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1})i \mp i}_{= x - (\varepsilon_n + \delta_n i)}}$$

zu definiren ist. Setzen wir nun in diesen beiden Integralen u' für jedes $u \mp i$, nämlich
$(\mp i)$ für $(o) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \delta_1 i)$ für $(\varepsilon_1 + \delta_1 i) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2] i)$ für $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\delta_1 + \delta_2] i) \mp i$,
$(\mp i + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + [\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1}] i)$ für $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_{n-1} + (\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_{n-1}) i) \mp i$,
welche neue Variable u' für $u = o$ in $\mp i$ und für $u = x$ in $x \mp i$ übergeht, so folgt:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\int_{-i}^{x-i} \frac{du}{u} - \int_{i}^{x+i} \frac{du}{u}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{-\int_1^{-i} \frac{du}{u} + \int_1^{x-i} \frac{du}{u} - \left(-\int_1^{i} \frac{du}{u} + \int_1^{x+i} \frac{du}{u}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{-\log(-i) + \log(x-i) + \log i - \log(x+i)\right\}$$

folglich nach §. 17 $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\left\{\log(1+xi) - \log(1-xi)\right\} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1-xi}$.

Darum nun $\log\frac{1+xi}{1-xi}$ unendlich viele Werthe hat, welche sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden, so hat auch arc tg x unendlich viele Werthe, deren Unterschiede Vielfache von $\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i$, also von π sind. Ist also (arc tg x) einer dieser Werthe, so haben wir

$$\operatorname{arc\,tg} x = (\operatorname{arc\,tg} x) + m\pi.$$

§. 19. Um nun dem Ausdruck für arc tg x, wo $x = p + qi$ ist, ebenfalls die Form $p + qi$ zu geben, brauchen wir nur in die Gleichung $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log\frac{1+xi}{1+xi}$ für x den Werth $p + qi$ einzutragen. Dann ist

$$\operatorname{arctg}(p+qi) = \frac{1}{2i}\log\frac{1-q+pi}{1+q-pi} = \frac{1}{2i}\log\frac{1-q^2-p^2+2pi}{(1+q)^2+p^2} = \frac{1}{2i}\log\left\{\frac{1-q^2-p^2}{(1+q)^2+p^2} + \frac{2p}{(1+q)^2+p^2} \times i\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\log(P+Qi).$$

Ist P positiv, also $1-q^2-p^2>0$, folglich $p^2+q^2<1$, so erhalten wir nach §. 14

$$\operatorname{arc\,tg}(p+qi)=\frac{1}{2i}\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(P^2+Q^2)+i\operatorname{Arctg}\frac{Q}{P}+2m\pi i\right\},$$

ist P negativ, also $1-q^2-p^2<0$, mithin $p^2+q^2>1$, so haben wir

$$\operatorname{arc\,tg}(p+qi)=\frac{1}{2i}\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(P^2+Q^2)+i\operatorname{Arctg}\frac{Q}{P}+(2m+1)\pi i\right\}.$$

Nun ist $P^2+Q^2=\dfrac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}$ und $\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2p}{1-q^2-p^2}$; folglich haben wir im ersten Falle

$$\operatorname{arc\,tg}(p+qi)=\frac{1}{4i}\operatorname{Log}\frac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{2p}{1-q^2-p^2}+m\pi,$$

im zweiten Falle

$$\operatorname{arc\,tg}(p+qi)=\frac{1}{4i}\operatorname{Log}\frac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{([1+q]^2+p^2)^2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{2p}{1-q^2-p^2}+\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi.$$

§. 20. Aus der in §. 18 für arc tg x entwickelten Formel folgt ferner:

$$\text{I. } \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}(-x)=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{1-xi}{1+xi}\right\}=\frac{1}{2i}\log 1=m\pi,$$

$$\text{II. } \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{x+i}{x-i}\right\}=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{x-i}{-x-i}+\log\frac{x+i}{x-i}\right\}$$
$$=\frac{1}{2i}\log(-1)=\left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi.$$

$$\text{III. } \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=\frac{1}{2i}\left\{\log\frac{1+xi}{1-xi}+\log\frac{1+yi}{1-yi}\right\}=\frac{1}{2i}\log\frac{(1+xi)(1+yi)}{(1-xi)(1-yi)}$$
$$=\frac{1}{2i}\log\frac{1-xy+(x+y)i}{1-xy-(x+y)i}=\frac{1}{2i}\log\frac{1+\dfrac{x+y}{1-xy}i}{1-\dfrac{x+y}{1-xy}i}=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Es sei $\operatorname{arc\,tg}x=\alpha$, so ist auch x eine Funktion von α, die wir durch $\operatorname{tg}\alpha$ bezeichnen; desgleichen haben wir, wenn $\operatorname{arc\,tg}y=\beta$ ist, $y=\operatorname{tg}\beta$. Da arc tg x unendlich-vieldeutig ist, oder α unendlich viele Werthe hat, die sich um Vielfache von π unterscheiden, so muss x, als Funktion von α betrachtet, immer zu demselben Werthe zurückkehren, so oft α um π gewachsen ist. Demnach ist die Funktion $x=\operatorname{tg}\alpha$ periodisch, und der Index ihrer Periode ist π, also $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+m\pi)$. Substituiren wir aber die Werthe von x und y in die Formel III., so erhalten wir $\alpha+\beta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; folglich umgekehrt

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Anmerkung. So wie wir die Formeln I. und II., jedoch mit der Einschränkung, dass die Funktion arctg nur den eindeutigen Arctg vorstellt, der die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreiten darf, schon früher (S. §. 11) aus der Gleichung III. §. 5 abgeleitet haben, so liess sich auch die Formel III. unter der angegebenen Einschränkung aus der nämlichen Gleichung entwickeln. Setzen wir nämlich in die Gleichung III. des §. 5 $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'_v \frac{1}{1+\varphi^2_v} dv = \int_{\varphi_\alpha}^{\varphi_\beta} \frac{du}{1+u^2}$ statt φ_v die Funktion $\frac{x+v}{1-xv}$, also $\varphi_\alpha = \frac{x+\alpha}{1-x\alpha}$, $\varphi_\beta = \frac{x+\beta}{1-x\beta}$, $\varphi'_v = \frac{1+x^2}{(1-xv)^2}$, so erhalten wir für $\alpha = o$ und $\beta = z$

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x+v}{1-xv}\right)^2} \times dv, \text{ das ist} \int_0^z \frac{1+x^2}{(1-xv)^2+(x+v)^2} dv = \int_x^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich

$$\int_0^z \frac{1+x^2}{1+x^2v^2+x^2+v^2} dv \text{ oder} \int_0^z \frac{1+x^2}{(1+x^2)+v^2(1+x^2)} dv \text{ oder} \int_0^z \frac{dv}{1+v^2} =$$

$$-\int_0^x \frac{du}{1+u^2} + \int_0^{\frac{x+z}{1-xz}} \frac{du}{1+u^2};$$

folglich $\operatorname{Arctg} \frac{x+z}{1-xz} = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} z$. Diese Formel gilt aber, vorausgesetzt, dass x und z beiderseits positiv sind, nur so lange, als $z < \frac{1}{x}$ ist, da die Funktion $\varphi z = \frac{x+z}{1-xz}$ für den Werth $z = \frac{1}{x}$ diskontinuirlich wird. Es war daher der von uns eingeschlagene Weg nothwendig, um diese Formel allgemein zu beweisen.

§. 21. Wenden wir uns nun zu der umgekehrten Funktion des Logarithmus. Aus der Gleichung $\log x = \operatorname{Log} x + 2m\pi i$ folgt, dass x eine Funktion von $\operatorname{Log} x + 2m\pi i$ ist, welche keine andere sein kann, als $e^{\operatorname{Log} x + 2m\pi i}$, da sie nach §. 9 für $m = o$ sich in $e^{\operatorname{Log} x}$ verwandeln muss. Aus der Gleichung $x = e^{(y = \operatorname{Log} x) + 2m\pi i}$ folgt aber, dass die Funktion e^y so oft zu demselben Werthe zurückkehrt, als der Exponent y um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt wird, dass also e^y eine periodische Funktion ist und zum Index der Periode $2\pi i$ hat. Obschon nun leicht zu sehen ist, dass die unter Voraussetzung reeller Exponenten gültigen Regeln der Potenzenrechnung auch auf Potenzen von der Form e^{p+qi} auszudehnen sind — denn jedes beliebige $p+qi$ ist $= \log(P+Qi)$, woraus, weil $\log(P+Qi)(P'+Q'i) = \log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)$, also auch $(P+Qi)(P'+Q'i) = e^{\log(P+Qi) + \log(P'+Q'i)}$ ist, unmittelbar folgt $e^{p+qi} \times e^{p'+q'i} = e^{(p+p')+(q+q')i}$ — so ist doch die Potenz e^{p+qi} in diesem Augenblicke für uns eine leere Form, und es bleibt noch die Aufgabe übrig, die Bedeutung dieser imaginären Potenz festzustellen.

§. 22. Diese Aufgabe reducirt sich, da $e^{p+qi} = e^p e^{qi}$ ist, auf die, den Werth von e^{qi} zu ermitteln. Es sei $e^{qi} = f_1(q) + i f_2(q)$, also $qi = \log\{f_1(q) + i f_2(q)\}$.

Folglich nach §. 14

$qi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(f_1^2 + f_2^2) + i\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi i$, wenn f_1 positiv ist,

$qi = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(f_1^2 + f_2^2) + i\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi i$, wenn f_1 negativ ist.

Beide Gleichungen sind nur dann möglich, wenn der reelle Theil $= 0$ ist; folglich $\mathrm{Log}\,(f_1^2 + f_2^2) = 0$, also $f_1^2 + f_2^2 = 1$.

Daher

(a) $q = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi$, wenn f_1 positiv,

(b) $q = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi$, wenn f_1 negativ ist.

Um nun die übrigen Eigenschaften der Funktionen $f_1(q)$ und $f_2(q)$ zu finden, geben wir der Veränderlichen q der Reihe nach die Werthe $2m\pi$, $2m\pi + \gamma$ $(< \frac{\pi}{2})$, $2m\pi + \frac{\pi}{2}$, $(2m + \frac{1}{2})\pi + \gamma$, $(2m+1)\pi$, $(2m+1)\pi + \gamma$ und $(2m + \frac{3}{2})\pi$.

1) Es sei $q = 2m\pi$, so kann die Gleichung (b) nicht statt finden; denn sonst wäre

$2m\pi = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + (2m+1)\pi$; folglich

$= \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} = -\pi$,

was unmöglich ist, da der absolute Werth von Arc tg die Grenze $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigen kann. Folglich ist nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und $\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} = 0$, also auch $\frac{f_2}{f_1} = 0$, folglich $f_2 = 0$.

Nun ist $f_1^2 + f_2^2 = 1$; folglich $f_1 = +1$.

Also $f_1(2m\pi) = +1$, $f_2(2m\pi) = 0$.

2) Ist $q = 2m\pi + \gamma$ und $\gamma < \frac{\pi}{2}$, so kann die Gleichung (b) wiederum nicht stattfinden; denn sonst wäre

$$2m\pi + \gamma = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ folglich}$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} = \gamma - \pi = -(\pi - \gamma);$$

da nun $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so wäre der absolute Werth von $\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1}$ wiederum $> \frac{\pi}{2}$ was unmöglich ist. Es ist also nur die Gleichung (a) anwendbar; daher f_1 positiv und $\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{f_2}{f_1} = \gamma$, also $\frac{f_2}{f_1} = \mathrm{tg}\,\gamma$ und $f_2 = f_1\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

Folglich $f_1^2 + f_1^2\,\mathrm{tg}^2\gamma = 1$, also $f_1 = +\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$.

Also $f_1(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$, $f_2(2m\pi + \gamma) = +\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\gamma}}$.

3) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$. Da $f_1(2m\pi + \gamma)$ bis zum Uebergange in $f_1(2m\pi + \frac{\pi}{2})$ beständ-

dig **positiv** bleibt, so ist nur die Gleichung (a) anwendbar, und man erhält $\operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2}$; $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$, also $f_1 = 0$, während f_2 **positiv**, und da $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$, gleich $+1$ ist.

Also $f_1\,(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $f_2\,(2m\pi + \frac{\pi}{2}) = +1$.

4) Es sei $q = 2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma$, so ist die Gleichung (a) unzulässig, denn sonst wäre

$2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi$, also

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$ was unmöglich ist.

Folglich erhalten wir aus der Gleichung (b)

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} + \gamma = \operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + \pi, \text{ also}$$

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = -\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \text{ mithin } \frac{f_2}{f_1} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right);$$

denn da $\operatorname{Arc\,tg}(-x) = -\operatorname{Arc\,tg} x$ ist (S. §. 11), so folgt $-x = \operatorname{tg}(-\operatorname{Arc\,tg} x)$, mithin $-\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, wenn $\operatorname{Arc\,tg} x = \alpha$ gesetzt wird.

Da nun wegen Gültigkeit der Gleichung (b) f_1 **negativ** sein muss, so ist f_2 **positiv** und $f_1{}^2 + f_2{}^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 1$, also $f_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}}$, $f_2 = -f_1\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \frac{+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}}$;

setzen wir $\frac{\pi}{2} + \gamma = \gamma'$, also $\gamma = \gamma' - \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \gamma = \pi - \gamma'$, so ist

$f_1\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi-\gamma)}}$, $f_2\,(2m\pi + \gamma) = +\frac{\operatorname{tg}\,(\pi-\gamma)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi-\gamma)}}$, wo $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist.

5) Ist $q = (2m+1)\pi$, so giebt die Gleichung (a)

$$2m\pi + \pi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi, \text{ also } \operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \pi,$$

was unmöglich ist. Aus der Gleichung (b) erhält man aber $\operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = 0$, folglich $f_2 = 0$; nun ist $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$, folglich wegen Gültigkeit der Gleichung (b) $f_1 = -1$.

Also $f_1\,(2m\pi + \pi) = -1$, $f_2\,(2m\pi + \pi) = 0$.

6) Ist $q = 2m\pi + \pi + \gamma$, so ist ebenfalls nur die Gleichung (b) anwendbar; man findet daher f_1 **negativ** und $\operatorname{Arc\,tg}\frac{f_2}{f_1} = \gamma$, also $f_2 = f_1\operatorname{tg}\gamma$;

folglich $f_1\,(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}$, $f_2\,(2m\pi + \pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}$.

Setzen wir $\pi + \gamma = \gamma'$, so folgt

$f_1\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\gamma-\pi)}}$, $f_2\,(2m\pi + \gamma) = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma-\pi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\gamma-\pi)}}$, wo $\gamma > \pi$ ist.

7) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$, so folgt aus der jetzt allein anwendbaren Gleichung (b), dass f_1 negativ und $\text{Arc tg}\,\frac{f_2}{f_1} = +\frac{\pi}{2}$ ist; daher $\frac{f_2}{f_1} = +\infty$, also $f_1 = -0$ und f_2 ebenfalls negativ und zwar $= -1$, vermöge der Gleichung $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$.

Also $f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = 0$, $f_2(2m\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$.

8) Ist $q = 2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma$, so würde aus der Gleichung (b) folgen, dass der kleinste Werth von $\text{Arc tg}\,\frac{f_2}{f_1} = \frac{\pi}{2} + \gamma$ ist, was nicht der Fall sein kann. Daher ist nur die Gleichung (a) anwendbar und man erhält f_1 positiv und $2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma = \text{Arctg}\,\frac{f_2}{f_1} + 2m\pi + 2\pi$, folglich

$$\text{Arc tg}\,\frac{f_2}{f_1} = -(\frac{\pi}{2} - \gamma),\ f_2 = -f_1\,\text{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \gamma);$$

vermöge der Gleichung $f_1{}^2 + f_2{}^2 = 1$ finden wir also $f_1(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}$,

$$f_2(2m\pi + \frac{3\pi}{2} + \gamma) = -\frac{\text{tg}\,(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\frac{\pi}{2} - \gamma)}}.$$

Setzen wir $\frac{3\pi}{2} + \gamma = \gamma'$, so ergiebt sich

$$f_1(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(2\pi - \gamma)}},\ f_2(2m\pi + \gamma) = -\frac{\text{tg}\,(2\pi - \gamma)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(2\pi - \gamma)}},$$

wo $\gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist.

§. 23. Bezeichnen wir die Funktion $f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 q}}$ durch $\cos q$ und $f_2(q) = \frac{\text{tg}\,q}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 q}}$ durch $\sin q$, so finden wir

$$e^{qi} = \cos q + i \sin q \text{ und}$$
$$e^{(q + 2m\pi)i} = \cos(q + 2m\pi) + i \sin(q + 2m\pi) = e^{qi} \text{ nach §. 21;}$$
folglich $\cos(q + 2m\pi) = \cos q$ und $\sin(q + 2m\pi) = \sin q$.

Beide Funktionen $\cos q$ und $\sin q$ sind also periodisch, und der Index ihrer Periode ist 2π. Ist daher $\left\{\begin{matrix}\cos q\\ \text{oder } \sin q\end{matrix}\right\} = x$, so ist umgekehrt q, als eine Funktion von x betrachtet, die wir durch $\left\{\begin{matrix}\text{arc cos } x\\ \text{oder arc sin } x\end{matrix}\right\}$ bezeichnen, unendlich vieldeutig, und verstehen wir unter $\text{Arc cos}\,x$ und $\text{Arc sin}\,x$ den kleinsten arcus, so ist $\text{arc cos}\,x = \text{Arc cos}\,x + 2m\pi$, $\text{arc sin}\,x = \text{Arc sin}\,x + 2m\pi$. Die Gesetze des Wachsens und Abnehmens der beiden Funktionen $\cos q$ und $\sin q$ ergeben sich nach §. 22 aus folgenden Gleichungen:

1) $\cos(2m\pi) = +1$, $\sin(2m\pi) = 0$.

2) $\cos(2m\pi + \gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\gamma}}$, $\sin(2m\pi + \gamma) = +\frac{\text{tg}\,\gamma}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\gamma}}$, wo $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist.

3) $\cos\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +1$.

4) Wenn $\pi > \gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi+\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\pi-\gamma)}} = -\cos(\pi-\gamma),\ \sin(2m\pi+\gamma) = +\frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1+tg^2(\pi-\gamma)}}$$
$$= +\sin(\pi-\gamma).$$

5) $\cos(2m\pi+\pi) = -1$, $\sin(2m\pi+\pi) = 0$.

6) Wenn $\frac{3\pi}{2} > \gamma > \pi$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi+\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\gamma-\pi)}} = -\cos(\gamma-\pi),\ \sin(2m\pi+\gamma) = -\frac{tg\,(\gamma-\pi)}{\sqrt{1+tg^2(\gamma-\pi)}}$$
$$= -\sin(\gamma-\pi).$$

7) $\cos\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

8) Wenn $2\pi > \gamma > \frac{3\pi}{2}$ ist, so wird

$$\cos(2m\pi+\gamma) = +\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(2\pi-\gamma)}} = \cos(2\pi-\gamma),\ \sin(2m\pi+\gamma) = -\frac{tg^2(2\pi-\gamma)}{\sqrt{1+tg^2(2\pi-\gamma)}}$$
$$= -\sin(2\pi-\gamma).$$

§. 24. Da $e^{(p\pm q)i} = e^{pi}.\ e^{\pm qi}$ ist, so folgt

$$\cos(p\pm q) + i\sin(p\pm q) = (\cos p + i\sin p)(\cos q \pm i\sin q)$$
$$= \cos p\cos q \mp \sin p\sin q + i(\sin p\cos q \pm \cos p\sin q).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cos(p\pm q) = \cos p\cos q \mp \sin p\sin q,$$
$$\sin(p\pm q) = \sin p\cos q \pm \cos p\sin q,$$

woraus sich die noch übrigen Eigenschaften der Funktionen sin q und cos q leicht entwickeln lassen.

§. 25. Beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius 1, legen durch dessen Mittelpunkt O die Koordinatenaxen OX und OY und schneiden von dem Durchschnittspunkt A der Abscissenaxe aus einen Bogen AB $= q$ ab, so sind die auf den Endpunkt B des abgeschnittenen Bogens AB bezogenen Koordinaten Funktionen von q, und es sei die Ordinate BD oder $y = F_1(q)$, die Abscisse DO oder $x = F_2(q)$. Da unn $F_1(q=0) = 0$, $F_2(q=0) = 1$ ist; da ferner für jeden Werth von q die entsprechenden Werthe von $F_1(q)$ und $F_2(q)$ der Gleichung $F_1{}^2(q) + F_2{}^2(q) = 1$ Genüge leisten: so müssen diese beiden Funktionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ von den Werthen $F_1(0) = 0$ und $F_2(0) = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Zuwachs des Bogens q genau um so viel wachsen und abnehmen, um wie viel die Funktionen sin q und cos q von den Werthen $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ab bei jedem unendlich kleinen Inkrement der Veränderlichen q wachsen und abnehmen. Folglich müssen die Funktionen $F_1(q)$ und $F_2(q)$ für jeden Werth des Bogens q mit den Werthen von sin q und cos q genau übereinstimmen. Daher lassen sich die beiden letztern Fuuktionen sin q und cos q durch die, auf den Endpunkt B eines, von der Abscissenaxe aus immer nach derselben Richtung abgeschnittenen Bogens AB$=$q bezogenen Koordinaten x und y geometrisch darstellen, und zwar ist die Abscisse $x = \cos q$, die Ordinate $y = \sin q$. Da nun für den Werth $q = \frac{\pi}{2}$ die Funktion cos q, mithin auch die Abscisse x verschwinden, hingegen die Funktion sin q, mithin auch die Ordinate y den Werth 1 annehmen muss; jenes Verschwinden der Abscisse x, so wie jener Uebergang der Ordinate y in den Werth 1 aber nicht eher statt finden kann, als bis der Bogen q gleich einem Quadranten geworden ist: so folgt, dass die Zahl $\frac{\pi}{2}$, die wir in §. 11 als den Werth der Funktion $\text{Arc tg}\,(x = \infty)$ definirt und berechnet haben, die Anzahl von Längeneinheiten angiebt, die der vierte Theil eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises beträgt, oder dass die Zahl π die Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1 vorstellt.

Schul-Nachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Uebersicht des in dem Schuljahre $18^{56}/_{57}$ ertheilten Unterrichts.

Sprachen.

Deutsche Sprache.

Prima. 3 St. Uebersicht der deutschen Literatur von Anfang des 18. Jahrhunderts bis Göthe, 1 St. Anleitung zum Verständniss deutscher Dichter und Prosaiker. 1 St. Correctur der deutschen Aufsätze, 1 St. Anderssen. Es wurden folgende Themata bearbeitet: 1. Der Krieg auch hat seine Ehre, der Beweger des Menschengeschickes. (Schiller.) 2. Können die alten Deutschen wie zuweilen geschieht, für Wilde gehalten, und mit den Urvölkern Nordamerika's auf eine Linie gestellt werden? 3. Die Zunge, das wohlthätigste und zugleich verderblichste unter den menschlichen Gliedern. 4. Wie lässt es sich erklären, dass die griechische Mythologie auch bei den neuern Völkern, trotz der Abweichung ihrer religiösen Vorstellungen von denen des Griechenthums, dennoch heimisch geblieben ist? 5. „Tage, werdet uns zum Kranze, der des Greises Schläf' umzieht! (Herder.) Durch welchen Lebensgebrauch kommt dieser Wunsch zur Erfüllung, und welches sind die Blumen, die jenen Kranz bilden? 6. Prüfung des Satzes: Geringes ist oft die Wiege des Grossen. 7. Der Pflug, ein Begründer der menschlichen Cultur und Gesittung. 8. Parallele zwischen Themistokles und Camillus. 9. Zusammenhängende Darstellung der Hauptgedanken, welche in den ersten sechs Abschnitten von Lessing's Laokoon enthalten sind.

Die Abiturienten bearbeiteten folgende Themata:

Zu Michaeli 1856. Verdient die Weigerung des Sokrates, die zu seiner Befreiung aus dem Kerker von Kriton getroffenen Anstalten zu benutzen, Tadel oder Bewunderung?

Zu Ostern 1857. Welchen verschiedenen Richtungen der menschlichen Thätigkeit ist es zuzuschreiben, dass wir mit einem grossen Theile der Erdoberfläche bekannt geworden sind?

Secunda. 2 St. Erläuterung der hauptsächlichsten Begriffe der Poëtik an ausgewählten Beispielen aus Echtermeyers Sammlung. Von grösseren klassischen Gedichten wurde erklärt

Göthe's Herrmann und Dorothea. Alle Monate wurde ein grösserer Aufsatz geliefert und seine Correctur besprochen; daneben wurden kleinere Arbeiten, Entwürfe und Dispositionen angefertigt. Grünhagen. Es wurden folgende Themata bearbeitet: I. Im Sommer-Semester 1856. 1. Der Strom, ein Bild des menschlichen Lebens. 2. Die Sänger bei den Griechen. 3. Pompeji und Herculanum. 4. Vergleichung zwischen Alexander dem Grossen und Pyrrhus. 5. Der Egmont Göthe's und der Geschichte. 6. Beschreibung des Circus Maximus. 7. Die Familie der Barkas. Im Wintersemester $18^{56}/_{57}$: 1. Der Siege göttlichster ist das Vergeben. 2. Beurtheilung der Enthauptung des Samniten Pontius durch die Römer. 3. Inhaltsangabe der Rede des Prätors Aristaenus (Livius l. XXXII. cap. 21.). 4. Ein frei zu wählender Stoff aus der römischen Geschichte in metrischer Form (neuere Nibelungen-Strophe) oder: Erläuterung des Uhland'schen Gedichts: „des Sängers Fluch." 5. Wer herrschen will, muss erst gehorchen lernen. 6. Gegenüberstellung der politischen Wirksamkeit des Pompejus und des Sulla.

Tertia. 2 St. Ausgewählte Gedichte von Schiller, Uhland u. a. aus Echtermeyers Sammlung wurden erklärt und memorirt. Correctur der häuslichen Arbeiten. Grünhagen.

Quarta. 2 St. Lecture und Erklärung von Gedichten aus Kehrein's deutschem Lesebuche, untere Stufe, nebst Uebungen im mündlichen Vortrage aus demselben. Extemporalia und Correctur der alle vierzehn Tage gelieferten Ausarbeitungen. Geisler.

Quinta. 2 St. Lecture im Lesebuche von Auras und Gnerlich, Uebung im Declamiren, Correctur der vierzehntägigen deutschen Arbeiten. Hirsch.

Sexta. 2 St. Orthographische Uebungen und schriftliche Erzählung von Fabeln und Sagen, auch Reproduction leichter Gedichte und Versuche im Beschreiben, Vorlesen, Erklären und Declamiren geeigneter Stücke aus Auras und Gnerlich's Lesebuche. Ladrasch.

Lateinische Sprache.

Prima. 8 St. Horat. Carm. lib. IV., Carmen saeculare und einige Epoden, hierauf lib. I.; einige davon wurden memorirt. 2 St. Im Sommer: Cicero de Offic. II., 18. bis III. Im Winter: Tacit. Ann. III., 65 bis IV., 65. 3 St. — 1 St. Extemporalia und 2 St. Uebersetzungs-Uebungen aus Heinichen's Uebungsbuch, verbunden mit der Wiederholung und Erläuterung der lateinischen Syntax; Besprechung der Correctur der monatlichen freien Aufsätze. Lange.

Bearbeitet wurden folgende Themata:

1. Quibus potissimum rebus Pericles de Atheniensium re publica bene meruerit? 2. Bellum Samnitium usque ad sponsionem caudinam (nach Liv. lib. 8, 22 bis lib. 9, 11). 3. De Catonis Uticensis tuendae libertatis studio. 4. In beneficiis tribuendis quarum rerum ratio adhibenda sit? (Clausurarbeit.) 5. Qui fiat ut res bellicae vulgo ampliores et splendidiores quam urbanae esse videantur? 6. Quomodo Corinthii Spartiatis persuadere studuerint, ut Atheniensibus bellum denunciarent? (Thucyd. I., 68—72.) 7. Quae potissimum res Cajum Julium Caesarem in affectando imperio adjuverint? 8. Per quos viros quibusque artibus post Themistocli mortem res Atheniensium auctae sint? 9. Quid intuens Horatius (satira prima libri primi) fortuna quemquam contentum esse negat? 10. Qualis amicitia esse debeat, quam diuturnam fore augurari possis?

Zum Abiturienten-Examen wurde bearbeitet: Michaelis 1856. Marius et Sulla ita inter sese comparentur, ut, uter eorum melius de Romanorum republica meruerit, exemplis allatis exponatur. Ostern 1857. Quae belli inter Pyrrhum et Romanos gesti caussa et progressus et quid impedimento fuerit, quominus ille victor ex eo discederet?

Secunda. 10 St. Virgil Aen. V., 114 und VI. Einige Abschnitte wurden memorirt und daran Uebungen im Versbau geknüpft. 2 St. — Livius lib. XXXI.—XXXIV. 4 St. Cicero de amicitia und pro lege Manilia. 2 St. — Grammatik nach Zumpt, die Syntax der Casus, Tempora und Modi. Exercitia aus Seyfferts Uebungsbuch, alle 14 Tage eines. 1 St. — Extemporalia, wozu der Stoff in Beziehung gesetzt ist auf die Privatlecture (Livius 26. und 27 B.), alle 14 Tage eines. — Privatim wurden einzelne Schüler veranlasst, zur Zusammenstellung einiger Stellen des Virgil, zu phraseologischen Sammlungen, auch zur Anfertigung von Plänen. Geisler.

Tertia. 10 St. — Ovid. Metamorph. Ausgewählte Stücke aus dem zwölften und dreizehnten Buche, wovon 100 Verse memorirt wurden. 2 St. Lange. — Caesar B. Gall. VI. VII. 4 St. Grammatik nach Putsche; Erklärung der Tempora und der Hauptregeln über den Gebrauch des Indicativ, Conjunctiv, Infinitiv, über die Participialsätze und die wichtigsten Satzarten. 2 St Mündliche und schriftliche Uebersetzung aus Hottenrott's Aufgaben z. Uebung für Tertia. 1 St. Extemporalia 1 St. Wiederholung der bei der Lecture des Caesar vorgekommenen Vocabeln und einfachen Phrasen. Wimmer.

Quarta. 10 St. — Cornelius Nepos Vit. I—IX. XI—XVIII. 5 St. — Grammatik nach Putsche: Die Casuslehre und Erklärung der wichtigsten Conjunctionen und des Gebrauches derselben. 2 St. — Mündliche Uebersetzungsübungen aus Hottenrott's Aufgaben zur Uebung für Quarta. Memorirübungen aus dem Vocabularium von Doederlein. Verbesserung der wöchentlichen Exercitia. 2 St. — Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre und Verbesserung der wöchentlichen Extemporalia. 1 St. Geisler.

Quinta. 10 St. — Uebersetzen aus Blume's Lehrkursus der lat. Sprache, lat. Th. Curs. I. Abschn. 2., 3., 4. und Curs. II. Abschn. 1., 2., 3., 4., 1—20. 4 St. — Uebersetzen der entsprechenden Stücke aus dem deutschen Theile desselben Buches. 3 St. — Wiederholung der regelmässigen und Einübung der unregelmässigen Formen nach Putsche's Grammatik. Memorirt wurden aus Döderlein's Vocabularium die gesperrt gedruckten Vocabeln nebst den nächsten Derivatis. 3 St. — Wöchentliche Exercitia und monatliche Extemporalia. Hirsch.

Sexta. 10 St. Einübung der regelmässigen Formen bis zu den Verba defectiva nach Putsche's Grammatik. 2 St. — Memoriren von Vocabeln aus Döderleins Vocabularium. 1 St. — Uebersetzen der entsprechenden Stücke aus Blume's Lehrc. d. lat. Spr. 1. Abschn. und den Vorübungen dazu. 6 St. — Wöchentlich ein Exercitium, alle 14 Tage ein Extemporale. 1 St. Ladrasch.

Griechische Sprache.

Prima. 6 St. Thucydides, zweites Buch, 3 St. — Homeri Ilias XXII—XXIV.; ausserdem wurden Abschnitte aus dem sechsten, achten und zehnten ex tempore übersetzt, und das XX. und XXI. Buch wiederholt. 2 St. — Exercitia mit Erläuterung der Syntax. 1 St. Wimmer.

Secunda. 6 St. Xenophon Cyrop. IV., 4—V. incl. 2 St. — Homer Odyssee III.—VI.

incl., woraus 200 Verse memorirt wurden. 2 St. — Grammatik. Wiederholung der Formenlehre nach Krüger's Sprachlehre f. A. Einübung der wichtigsten Regeln der Syntax, im Anschluss an Rost und Wüstemann's Anleit. z. Uebers. a. d. Deutschen in d. Griechische, II., 2., woraus §. 8 bis 15. grösstentheils übersetzt wurden. Correctur der vierzehntägigen Exercitia und monatlichen Extemporalia. 2 St. Hirsch.

Tertia. 6 St. Xenophon Anab. II., 4—III., 4. Im letzten Vierteljahre jeden Semesters Homers Odyssee IV., 1—51. und VI. 1—118., wovon ein Theil memorirt wurde. 8 St. — Grammatik nach Krügers Spr. f. A.: Verba liquida, Verba in $\mu\iota$ und V. anomala, das Wichtigste aus der Syntax der Casus. Correctur der vierzehntägigen Exercitia. 2 St. Extemporalia. 1 St. Lange.

Quarta. 6 St. Einübuug der Formenlehre bis zu den Verba contracta incl. nach Krüger's Spr. f. A. 3 St. Aus Jacobs Elementarbuch wurden die diesen Theil der Grammatik betreffenden Stücke übersetzt. Abwechselnd jede Woche ein Exercitium und ein Extemporale. 3 St. Ladrasch.

Französische Sprache.

Prima. 2 St. Grammatik nach Ploetz Leçon 24—39, 39—45 und 63—68. Wiederholung der Syntax nach dem Anhange p. 324. Uebersetzungsübungen aus demselben, und Extemporalia. — Gelesen wurde Athalie von Racine. Freymond.

Secunda. 2 St. Grammatik nach Ploetz, die Syntax nebst Wiederbolung der unregelmässigen Verba. Uebersetzungsübungen aus demselben und Extemporalia. — Gelesen wurde aus Choix de nouvelles, Münster 1855. L'ours de la Maledetta, Le lépreux de la cité d' Aoste. Versificirte Fabeln wurden dictirt und memorirt. Freymond.

Tertia. 2 St. Grammatik nach Ploetz. Curs. II. Leç. 1—15. Die regelmässigen und unregelmässigen Verba. Alle vierzehn Tage eine häusliche Uebersetzungsaufgabe und ein Extemporale, welche in der Schule verbessert wurden. Uebersetzen aus Hirzel's Franz. Lesebuche. Lange.

Quarta. 2 St. Formenlehre bis zur vollständigen Einübung der regelmässigen Verben nach den ersten vier Hauptabschnitten des Elementarbuches von Ploetz. Grünhagen.

Quinta. 3 St. Elemente der Aussprache; Leseübungen und Einübung der Formenlehre nach Ploetz Elementarbuch 1—40. Schriftliche Uebungen aus Demselben. Lange.

Hebraeische Sprache.

Prima. 2 St. Grammatik, zweiter Theil, nach Gesenius. Gelesen wurden das zweite Buch Mosis und ausgewählte Psalmen. Magnus.

Secunda. 2 St. Grammatik, erster Theil, nach Gesenius. Gelesen und übersetzt wurden Abschnitte aus Gesenius Lesebuche. Magnus.

Englische Sprache.

In der englischen Sprache unterrichtete in je zwei Abtheilungen nach Williams Grammatik und Biering's Lesebuche in je zwei Stunden Whitelaw.

Wissenschaften.

Religion.

Prima. 2 St. Im Sommer: Erklärung von Hollenbergs Hülfsbuch, Abschnitt III. §. 46. Abschnitt IV. §. 47—86. Gelesen wurde Apostelgeschichte. 1—10. Capitel im Urtexte. Im Winter: Hollenberg's Hülfsbuch, Abschnitt IV. §. 87—91. Fortsetzung der Lesung der Apostelgeschichte im Urtexte bis zu Ende. Tusche.

Secunda. 2 St. Hollenberg's Hülfsbuch, Abschnitt III. §. 1—36. §. 37—45. Memorirt wurden die Kirchenlieder No. 41., 42., 45., 47., 48., 49., 50., 52. Sämmtliche messianische Prophetieen wurden gelesen und die wichtigsten memorirt. Tusche.

Tertia und Quarta. 2 St. Katechismus nach Hollenberg's Hülfsbuch, 1., 2., 3. Hauptstück mit Sprüchen. Memorirt wurden die Kirchenlieder No. 35., 17., 29., 31., 37., 39., 40., 43. Im Winter: Wiederholung des Katechismus. Die Kirchenlieder No. 3., 22., 30., 38., 8., 44. Gelesen wurden Abschnitte aus den fünf Büchern Mosis, Josua und ausgewählte Psalmen. Tusche.

Quinta. 2 St. Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Zahn's Historien. Das zweite, vierte und fünfte Hauptstück des Katechismus. Memorirt wurden acht Lieder aus der Sammlung von Anders und Stolzenburg. Hirsch.

Sexta. 3 St. Biblische Geschichte des alten Testaments nach Zahn's Historien. Das erste und dritte Hauptstück des Katechismus. Zehn Lieder aus der genannten Sammlung wurden memorirt. Hirsch.

Geschichte und Geographie.

Prima. 3 St. — 2 St. Geschichte des Mittelalters und des Anfanges der neueren Zeit unter Benutzung von Pütz's Lehrbuch. 1 St. Historisch-geographische Wiederholung. Grünhagen.

Secunda. 3 St. — 2 St. Römische Geschichte bis auf die Kaiserzeit (Pütz's Lehrbuch). 1 St. Geographie von Alt-Italien und Repetition der alten Geographie. Grünhagen.

Tertia. 3 St. 2 St. Brandenburgisch-Preussische Geschichte bis zum Ende der Befreiungskriege. 1 St. Geographie des preussischen Staates und der anderen deutschen Staaten nach Seydlitz's Leitfaden. Grünhagen.

Quarta. 3 St. 2 St. Alte Geschichte nach Schwartz's Leitfaden für den biographischen Geschichtsunterricht. 1 St. Uebersicht der Erdtheile nach Schacht's kleiner Schul-Geographie. Grünhagen.

Quinta. 3 St. Von der Erde überhaupt, den Erdtheilen und den Staaten Europa's (Schacht's kleine Schulgeographie) nebst Andeutung der wichtigsten Naturproducte und Erzählungen aus der Geschichte alter Zeit. Rehbaum.

Sexta. 3 St. Geographie von Schlesien nach Adamy's Karte und Leitfaden. Die wichtigsten Begebenheiten der Schlesischen Geschichte nach Löschke. Ladrasch.

Naturgeschichte.

Tertia. 2 St. Erläuterung und Demonstration der wichtigsten und bekanntesten Mineralien und Gesteine. Uebersicht der Klassen und Ordnungen des Thierreiches. Wimmer.

Physik.

Prima. 2 St. Die Lehre von der Wärme, vom Schalle und vom Licht. Anderssen.

Secunda. 1 St. Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper. Mechanik der festen Körper. Anderssen.

Mathematik und Rechnen.

Prima. 4 St. Stereometrie und Uebungen in der Lösung von Aufgaben aus allen Theilen der Elementar-Mathematik. 2 St. — Die Lehre von den Kettenbrüchen, den diophantischen Gleichungen und von den arithmetischen Reihen des zweiten Ranges. Die Lehre von den Permutationen und Combinationen und der binomische Lehrsatz für ganze, negative und gebrochene Exponenten. 2 St. Anderssen.

Secunda. 4 St. Geometrie: Vom regulären Polygon, von der Rectification und Quadratur des Kreises. Trigonometrie. 2 St. Arithmetik: Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel, Quadratische Gleichungen, Lehre von den Logarithmen, arithmetischen und geometrischen Reihen. Uebungen in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben. 2 St. Anderssen.

Tertia. 4 St. Geometrie: Wiederholung der Longimetrie. Lehre vom Dreieck, vom Parallelogramm und vom Kreise. Beweis und Anwendung des pythagoraeischen Lehrsatzes. Von der Proportion und Aehnlichkeit der Figuren. 2 St. Arithmetik: Die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen. Gleichungen des ersten Grades. Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Uebung in der Lösung geometrischer und algebraischer Aufgaben. 2 St. Anderssen.

Quarta. 3 St. Elemente der Geometrie bis zu der Lehre von den Parallellinien. Einübung des Rechnens mit Decimalbrüchen. Wiederholung der Bruchrechnung und der Regel de tri. Gesellschaftsrechnung. Ladrasch.

Quinta. 4 St. Die Zeitrechnung. Die vier Species in Brüchen. Einfache directe Regel de tri mit ganzen Zahlen und Brüchen. Rehbaum.

Sexta. 4 St. Die vier Species in benannten Zahlen. Vorübungen in der Bruchrechnung, Addition und Subtraction der Brüche. Rehbaum.

Fertigkeiten.

Zeichnen.

Freihandzeichnen in Quarta, Quinta und Sexta je zwei Stunden. Die Anfänger wurden im Elementarzeichnen, Nachzeichnen, Vergrössern und Verkleinern der an die Tafel gezeichneten Vorlagen geübt, die Geübteren im Zeichnen nach Vorlegeblättern von Arabesken, Blumen, Thieren, Köpfen, Gebäuden, Landschaften, sowohl in Umrissen als in Ausführung beschäftigt. Rosa.

Kalligraphie.

Quinta und Sexta. 3 Stunden. Rehbaum.

Singen.

Untere Abtheilung. Quinta und Sexta. 2 St. Kennenlernen der Noten, der leichteren Durtonleitern, der Vorzeichnungen und einiger Accorde. Zweistimmige Lieder. Dreissig Kirchenmelodieen einstimmig. Einübung der Oberstimme von vierstimmigen Liedern und Motetten. Rehbaum.

Mittlere Abtheilung. Quarta 2 St. Bilden von Dur- und Molltonleitern und einiger Accorde. Dreissig Kirchenmelodieen einstimmig. Die beiden Oberstimmen von vierstimmigen Chorälen, Liedern und Motetten wurden eingeübt. Rehbaum.

Obere Abtheilung. Tertia und Secunda. 2 St. Dreissig Kirchenmelodieen einstimmig. Choräle, Lieder und Motetten vierstimmig im gemischten Chor. Rehbaum.

Turnen.

Die Schüler nahmen am Turnen im Sommer auf dem städtischen Turnplatze unter der speciellen Aufsicht des Lehrer Hirsch, und die Geübteren und zu Vorturnern sich Eignenden an den Winterübungen im Turnsaale unter specieller Aufsicht des Dr. Grünhagen Theil.

Uebersicht des Lehrplanes im Schuljahre $18^{56}|_{57}$.

Fächer.	Klassen und wöchentliche Stunden.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Religion	2	2	2	2	2	2
Deutsch	3	2	2	2	2	2
Lateinisch	8	10	10	10	10	10
Griechisch	6	6	6	6	—	—
Französisch	2	2	2	2	3	—
Geschichte und Geographie	3	3	3	3	3	3
Naturbeschreibung	—	—	2	—	—	—
Physik	2	1	—	—	—	—
Mathematik und Rechnen	4	4	4	3	4	4
Kalligraphie	—	—	—	—	3	3
Zeichnen	—	—	—	2	2	2
Singen	—	2	2	2	2	2
Hebräisch	2	2	—	—	—	—
Englisch	2	2	2	2	—	—

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Dr. Wimmer, Director. Ordinarius von III.	6 Griechisch.		8 Latein. 2 Naturkunde.				16
Dr. Lange, Professor. Ordinarius von I.	8 Latein.		2 Latein. 2 Französisch.	8 Latein. 5 Griechisch.	3 Französisch.		21
Anderssen, Professor. Ordinarius von II.	3 Deutsch. 4 Mathematik. 2 Physik.	4 Mathematik. 1 Physik.	4 Mathematik.				18
Dr. Geisler, Ordinarius von IV.		10 Latein.		10 Latein. 2 Deutsch.			22
Dr. Grünhagen.	3 Geschichte.	3 Geschichte. 2 Deutsch.	3 Geschichte. 2 Deutsch.	2 Französisch. 3 Geschichte.			18
Hirsch, Ordinarius von V.		6 Griechisch.			10 Latein. 2 Deutsch. 2 Religion.	3 Religion.	23
Rehbaum.		2 Gesang.	2 Gesang.	2 Gesang.	2 Gesang. 4 Rechnen. 3 Geographie. 3 Kalligraphie.	2 Gesang. 4 Rechnen. 3 Kalligraphie.	20
Ladrasch, interim. Ordinarius von VI.				6 Griechisch. 3 Mathematik.		10 Latein. 2 Deutsch. 3 Geographie.	24
Tusche, Prediger. Religionslehrer.	2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.	2 Religion.			6
Rosa, Zeichnenlehrer.				2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	6
Dr. Magnus, Privatdocent.	2 Hebräisch.	2 Hebräisch.					4
Freymond, Sprachlehrer.	2 Französisch.	2 Französisch.					4
Whitelaw, Sprachlehrer.		2 Englisch.	2 Englisch.				4
							186

Bibliothek und Lehrapparat.

Zur Bibliothek sind im Jahre $18^{56}/_{57}$ hinzugekommen

a) als Geschenke:

1) Von einem Kgl. Provinzial-Schul-Collegium: Friedrichs II., K. v. Pr., eigenhändige Instruction für d. Staats- u. Cabinetsminister Graf Finck v. Finckenstein v. 10. Jan. 1757. Facsimile. Berl. 1854. — Wangemann, das Lutherbüchlein. Eine kurze Geschichte der Reformation. 2. Aufl. Stettin. 1855. — Harvard, university, catalogue $18\frac{5}{5}\frac{4}{5}$. Cambridge. 1854. 8o. New Haven, Annual Report of the trustees of the State Normal School. May. 1854. Jale college, catalogue $18\frac{5}{5}\frac{4}{5}$. Kayser, J., Griechische Wörter u. Wortfamilien zur Förderung des Auswendiglernens zusammengestellt. Darmstadt. 1856. Nees von Esenbeck u. Endlicher, Genera plantarum. Fasc. XXIX. 1856. Bonn.

2) Vom Magistrat zu Goldberg: V. Trotzendorfs, Doctrina de Invocatione übers. v. J. Gröhe. Goldberg. 1856. 8.

3) Vom Präsidium der Schlesischen Gesellschaft der 33. Jahresbericht.

4) Von Herrn Dr. Scholtz: Norddeutsche Jugendzeitung von Fabricius. Jahrgang 1853, 1. 2, u. Jahrgang 1854. Dielitz, Naturbilder und Reisescizzen f. d. Jugend. 3. A. Berl. 1850. Zonenbilder f. d. Jugend bearb. Berl. 1852. Streif- u. Jagdzüge. Berl. 1851. Panoramen. Berl. 1849. Körner, Das deutsche Vaterland. Eine Samml. v. Erzählungen, Schilderungen Beschreibungen u. Briefen. 2 Abth. Berl. Hoffmann; Fr., Abenteuer zu Wasser und Land. Stuttg. 1852. Wegener, L., das Leben der Thiere. Bilder u. Erzähl. Leipz. 1851. Die Schiffbrüchigen auf Spitzbergen. Ein Gemälde der Nordpolarwelt. Leipz. Henning, Fr. Vaterl. Geschichte f. d. deutsche Jugend. Berl.

5) Von Herrn Oberlehrer Gläser: Modell eines römischen Gebäudes.

6) Vom Studiosus G. Geras: Curtius Rufus c. indice Freinshemii ed. Rapp. Argentor. 1670.

7) Vom Tertianer v. Prittwitz: Horn, Ein Kongo-Neger. Wiesbad.

8) Von den Quartanern Rappaport, Riesenfeld und Holländer: a) Harnisch, W., die wichtigsten neuern Land- u. Seereisen. Für d. Jug. bearb. 10r. Th. Leipz. 1830. b) Sommer, A., Gedenkbuch, enthaltend die Geschichte u. Beschreib. des Friedrichsdenkmals in Berlin. 4. Aufl. Berl. 1853. c) Hoffmann, Fr., Nur immer brav. Eine Erzähl. Stuttg. 1857. Nieritz, G., Die Haideschule. Eine lehrreiche Erzähl. f. d. Jug. Leipz.

b) durch Ankauf:

Schultz, F., Lateinische Synonymik. Paderborn. 1856. Bekker, Imm., Anecdota Graeca. Vol. I—III. Berol. 1814—21. Mommsen, Th., Röm. Geschichte. I. 2. Aufl. Berl. 1856. Duncker, Geschichte des Alterthums. I. II. Sophocles, Erklärt von F. W. Schneidewin. 1—6 in 2 Bändch. 2. Aufl. Leipz. 1853. Plinii Caec. Sec. Epistolae. Mit krit. bericht. Text erläut. von Döring. 1. 2. Freiberg. 1843. — Aristotelis et Theoprasti scripta quaedam H. Stephan. ed. 1557. — Fortsetzungen der schon früher angezeigten periodisch-erscheinenden Werke und Zeitschriften von Grimms Wörterbuch, Klotz Wörterbuch, Schnitzlein Iconographie, Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Nacke's Paed. Jahresbericht, Mützell's Zeitschrift.

II. Chronik.

Das Schuljahr wurde Dinstag den 1. April mit Vertheilung der halbjährigen Zeugnisse, Vorlesung der Schulgesetze und Bekanntmachung des Lectionsplanes eröffnet. Bei der Austheilung der Zeugnisse wurden diejenigen Schüler in allen Classen namhaft gemacht, welche durch Fleiss und Betragen sich einer lobenden Auszeichnung würdig gemacht, wie auch diejenigen, deren ungenügender Fleiss oder tadelnswerthe Aufführung zu öfteren Klagen Veranlassung gegeben und Strafen nöthig gemacht hatte. Der Director setzte den Schülern die Grundzüge der von den Höchsten Behörden gegebenen neuen Organisation des Gymnasial-Unterrichts auseinander, wodurch, indem einerseits die classischen Sprachen, andererseits der Religions-Unterricht die Schwerpunkte desselben bilden, zu welchen die anderen Unterrichts-Gegenstände in stete Beziehung zu bringen sind, Vereinfachung und Concentration des gesammten Unterrichts erstrebt wird. Daran wurde eine Belehrung über die Bedeutung der Abiturientenprüfung, als Schlussstein des Schullebens und als Bewährung, dass die Schule an dem Schüler ihre Aufgabe erfüllt habe, geknüpft und vor der falschen Vorbereitung zu dieser Prüfung gewarnt. Der Act wurde durch gemeinschaftlichen Gesang einiger Strophen eines geistlichen Liedes und ein von dem Prediger Tusche gesprochenes Gebet eingeleitet.

In ähnlicher Weise haben während dieses Schuljahres die auf die Anweisung der Hohen Behörden eingerichteten Schulandachten am Beginn und am Schlusse jeder Woche stattgefunden, deren Leitung der Religionslehrer Prediger Tusche sich bereitwillig unterzogen hat.

Das Geburtsfest Sr. Majestät des Königs wurde am 15. October durch Gesang der Schüler, eine Festrede des Lehrer Ladrasch und ein von dem Religionslehrer Prediger Tusche gesprochenes Gebet festlich begangen.

Am 19. Juni beehrte Sr. Excellenz Herr Minister von Raumer das Gymnasium mit einem Besuche, wohnte dem Unterrichte in der Prima bei und liess sich auf dem Prüfungssaale die versammelten Lehrer vorstellen.

Herr Ladrasch musste um Pfingsten, wo er am Typhus erkrankte, durch einige Wochen vertreten werden. Sonst haben alle Lehrer sich ununterbrochener Amtsthätigkeit zu erfreuen gehabt.

Nachdem den Schülern bekannt gemacht worden war, dass von Ostern ab 1857 eine Dispensation vom Griechischen nicht mehr gestattet sei, und der Parallel-Unterricht in Realien aufhören würde, wurden schon von Ostern 1856 ab ein Theil dieser Stunden*), von Michaelis 1856 ab auch der Unterricht im Linear- und Plan-Zeichnen aufgehoben und seitdem ist Herr Haberstrohm, welcher durch fünfzehn Jahre mit gewissenhaftem Eifer und gutem Erfolge diesen Unterricht ertheilt hatte, aus der Zahl der am Gymnasium beschäftigten Lehrer ausgeschieden.

Der bisherige Religionslehrer am Gymnasium Herr Prediger Tusche schied aus diesem Amte mit dem ersten März dieses Jahres, da er als Garnisonprediger nach Schweidnitz berufen Breslau verliess. Derselbe hat durch eine Reihe von Jahren den Religionsunterricht in den vier oberen Classen mit dem besten Erfolge ertheilt und das Lehrerkollegium wird seiner segensvollen Wirksamkeit ein dankbares Andenken bewahren.

*) In der vorangehenden Uebersicht sind diese Real-Parallelstunden, deren je zwei von Anderssen und Rehbaum, je eine von Lange und Grünhagen ertheilt wurden, da sie nur noch der verbliebenen Real-Schüler wegen beibehalten wurden, nicht mit aufgeführt worden.

Die Frequenz des Gymnasiums hat sich in Folge der Aufhebung der Dispensation vom Griechischen — eine Maasregel, welche übrigens von dem Lehrerkollegium freudig begrüsst wurde, weil sie dem Gymnasium seinen Charakter wiedergiebt und für die Einheit und die Erfolge des Unterrichts nur erspriesslich sein kann — und der Realparallelstunden, wie vorauszusehen war, verringert. Sie betrug während des Sommersemesters 211, nämlich 20 in I., 29 in II., 41 in III., 55 in IV., 30 in V. und 36 in VI., von denen im Laufe desselben 43 abgingen: am 25. März d. J. 168, nämlich 18 in I., 24 in II., 37 in III., 44 in IV., 26 in V. und 19 in VI.

Mit dem Zeugniss der Reife verliessen das Gymnasium zu Michaelis 1856:

Name:	Alter:	Geburtsort:	Studium:
Hermann v. Packisch	$20\frac{1}{2}$	Breslau.	Bergfach.
Richard v. Strachwitz	$21\frac{1}{2}$	Bruschewitz bei Breslau.	Jura.
Gustav Geras	$21\frac{1}{2}$	Lübben.	Jura.
Zu Ostern 1857:			
Rudolph Tardy	$18\frac{1}{4}$	Hussinetz bei Strehlen.	Mathematik.
Julius Rudolph	18	Breslau.	Medicin.

III. Verordnungen der Behörden.

Vom 3. März. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium veranlasst die Directoren der oft mit schädlichen Folgen verbundenen Liebhaberei der Jugend, sich Eiersammlungen anzulegen, entgegenzuwirken.

Vom 8. April. Das Presbyterium der Hofkirche theilt seine Entschliessungen in Bezug auf den Lectionsplan mit.

Vom 18. April. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium theilt einen Ministerial-Erlass vom 10. April mit, worin auf die Zweckmässigkeit des Memorirens lateinischer Vocabeln in den unteren Klassen hingewiesen wird, indem die Directoren veranlasst werden, mit den philologischen Lehrern in Berathung zu treten und festzustellen, in welcher Weise und nach welchem Vocabularium in jeder Klasse memorirt werden soll.

Vom 24. April. Dasselbe giebt Anweisung, dass Censuren für die oberen Klassen wenigstens halbjährlich, für die unteren wenigstens vierteljährlich ertheilt werden sollen. Fleiss und Aufmerksamkeit so wie Leistungen sollen nur durch fünf Prädicate: vorzüglich, gut, hinreichend, nicht hinreichend, gering, bezeichnet werden, diese Zeugnisse sollen auch für die Versetzungen in so fern einen Maasstab bieten, als solchen Schülern, deren Leistungen zur Zeit der Versetzung in mehr als 2 Hauptfächern als nicht hinreichend oder als gering bezeichnet sind, auch nach längeren Ferien eine Nachprüfung zum Aufsteigen in eine höhere Klasse nicht zu gestatten sei. Dieselben Praedicate sollen auch bei den Abgangszeugnissen Anwendung finden.

Vom 19. Mai. Dasselbe weiset die Directoren an den Abiturienten, insbesondere denen, welche sich dem höheren Lehrfache widmen wollen, davon Kenntniss zu geben, dass bei den Universitäten Fürsorge getroffen worden ist, dass den Studirenden, welche nicht bei der theologischen Facultät eingeschrieben sind, Gelegenheit geboten werde, religionswissenschaftliche Vorträge zu hören.

Vom 30. Juli. Dasselbe verordnet, dass die Theilnahme am Unterrichte im Polnischen in der Regel nur von Tertia an aufwärts gestattet werde, und nur auf eine schriftliche Erklärung des Vaters resp. Vormundes, in welcher zugleich die Verpflichtung zu einem regelmässigen Besuche ausgesprochen ist, und dass der Austritt nur am Ende eines Semesters und auch nur auf eine schriftliche Erklärung des Vaters oder Vormundes erfolgen könne.

Vom 13. August. Dasselbe giebt in Verfolg der Verfügung vom 1. Februar 1856 die weitere Veranlassung zu Conferenz-Berathungen über den Religionsunterricht und die in den Schulen zur Belebung des religiösen und kirchlichen Sinnes angeordneten Klassen- resp. allgemeinen Andachten am Beginne und Schlusse jedes Schultages, um für diesen Unterricht und Alles, was mit ihm in naher und nächster Beziehung steht, die in dem Ministerial-Rescripte geforderte principielle Uebereinstimmung in Auffassung und Lehrweise und die Concentration und die Einheitlichkeit in dem Zusammenwirken aller betheiligten Lehrer anzubahnen.

Vom 20. August. Das Presbyterium der Hofkirche übersendet die Vocation für den zum ordentlichen Lehrer an den Vorbereitungs-Klassen bei dem Friedrichs-Gymnasium berufenen Gotthold Tschache zur Einhändigung und eidlichen Verpflichtung desselben.

Vom 18. December. Dasselbe theilt Abschrift der Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums vom 24. November, den Religionsunterricht der katholischen Schüler an den evangelischen Gymnasien betreffend, mit.

Ordnung der Prüfung.

Montag, den 6. April, Vormittags um 9 Uhr.

Gesang.

I. Latein (Cicero). Lange.
I. Griechisch (Homer). Wimmer.
II. Geschichte. Grünhagen.
I. Physik. Anderssen.
II. Griechisch (Xenophon). Hirsch.

Hierauf folgende Vorträge der Tertianer:

Colmar Grubert: Der blinde König von Uhland.
Rich. Polst: Der Schenk von Limburg von Uhland.
Emil Schmidt: Der alte Hans von Wiedemann.
Eugen v. Randow: Est est von Müller.
Arwed v. Prittwitz: Harald von Müller.

Nachmittags um 2 Uhr.

I. Mathematik. Anderssen.
III. Lateinisch (Caesar). Wimmer.
I. Geschichte. Grünhagen.
II. Französisch. Freymond.
II. Lateinisch (Virgil). Geisler.
III. Griechisch. Lange.

Hierauf folgende Vorträge der Quartaner:

Franz Gumtau: Der getreue Eckart von Göthe.
Carl Kühn: Der Galeerensclave von Blankenburg.
Heinrich Nitsche: Archibald Douglas von Bornemann.
Paul Deutsch: Der Szekler Landtag von Chamisso.
Robert Davidson: Die Trommel von Besser.
Hans Chorus: Max und Dürer von A. Grün.

Dinstag, den 7. April, Vormittags um 9 Uhr.

III. Französisch. Lange.
IV. Mathematik. Ladrasch.
IV. Rechnen. Rehbaum.
III. Geschichte. Grünhagen.
IV. Griechisch. Ladrasch.
IV. Lateinisch. Geisler.

Hierauf folgende Vorträge der Quintaner:

Wilhelm Hiersekorn: Der Meister und sein Bau von Seidl.
Otto Wimmer: Der Knabe im Erdbeerschlag von Hebel.
Richard Grubert: Der Igel und der Dachs von Gleim.
Johannes Hellmar: Der König und der Müller von Curtmann.
Oscar Heidenreich: Der Eine oder der Andere von Hebel.
Max Knoblauch: Jodokus und sein Schaffner von Kosegarten.

Nachmittags um 2 Uhr.

V. und VI. Religion. Hirsch.
V. Rechnen: Rehbaum.
V. Geographie: Rehbaum.
VI. Latein. Ladrasch.
VI. Rechnen. Rehbaum.
V. Latein: Hirsch.

Hierauf folgende Vorträge der Sextaner:

Theodor Adam: Der Sturmvogel und die Schiffenden.
Rudolph Reichenbach: Der grösste Lehrer.
Paul Sachs: Der dankbare Zwerg.
Paul Neumann: Der Rabe, der Pfau und die Schildkröte.
Herrmann Becker: Der Fischreiher.

Mittwoch, den 8. April, Vormittags 10 Uhr.

Gesang.

Die Himmel rühmen des Ewigen Ehre von L. v. Beethoven.

Vorträge der Primaner und Secundaner. Die Vorträge der Primaner sind von ihnen selbst ausgearbeitet.

Julius Rudolph aus Breslau: Der Jugurthinische Krieg, ein Bild des Verfalls des Römischen Staates. Lateinisch.
Georg Glock aus Breslau: Moise sur le Nil.
Adalbert Suckow aus Breslau: Die Werbung von Lenau.
Friedrich Gründel aus Breslau: Die Kreuzzüge und ihre Folgen für die Entwickelung Europa's. Französisch.
Hugo Wuthe aus Bolkenhayn: Der Normann von Giesebrecht.
Oscar von Berger aus Hermsdorf: Pompeji und Herculanum von Schiller.
Georg Thiel: Die Verdienste des Scipio Africanus des Jüngeren um sein Vaterland.

Gesang.

Rule Britannia, Englisches Volkslied. — Lobgesang von W. Speier.

Paul Wuthe aus Bolkenhayn: Können die alten Deutschen, wie zuweilen geschieht, für Wilde gehalten und mit den Urvölkern Nordamerikas auf eine Linie gestellt werden?
Sylvius von Goldfus aus Breslau: La mort de Jeanne d'Arc.
Rudolph von Wittenburg aus Schogwitz bei Neisse: Der Riese von Marbach, von G. Schwab.
Rudolph Tardy aus Hussinetz bei Strehlen: Perikles, der Begründer der politischen Macht und Grösse Athens. — Abschiedsworte.

Entlassung der Abiturienten.

Gesang.

Die Prüfung der beiden Vorbereitungsklassen durch die Lehrer Adamy und Tschache findet Mittwochs Nachmittags von 2 Uhr ab auf dem Prüfungssaale statt.

Die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler findet vom 15. bis 20. April in den Vormittagsstunden statt.

Der Unterricht beginnt wieder Dinstag, den 21. April.