50

stereometrische Aufgaben

aus der

Optik für Ober-Prima

von

M. Switalski,
Oberlehrer.

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums in Braunsberg 1892.

Heyne's Buchdruckerei (R. Siltmann), Braunsberg.

Vorbemerkung.

Die berechtigte Forderung der neuesten Zeit, den Unterricht in der Mathematik mit dem in der Physik aufs engste zu verbinden, gab dem Verfasser die Veranlassung zur Herausgabe der vorliegenden **stereometrisch-physikalischen Aufgaben.** Die kleine Schrift hat den Zweck, den Nachweis zu liefern, dass selbst ein beschränktes Gebiet der Physik eine Fülle von interessanten Aufgaben bietet, durch welche ununterbrochen die räumliche Anschauung geübt wird und die wichtigsten Abschnitte der Mathematik wiederholt zur Anwendung herangezogen werden.

Die mitgeteilten Aufgaben sind durchweg neu und führen in der Regel zu ganz einfachen Endergebnissen.

Bei den Aufgaben über die Brechung des Lichts sind nur **einfache** Strahlen vorausgesetzt.

Hinsichtlich der Lösung der Aufgaben 25, 26, 27 verweist der Verfasser auf die elementaren Lösungsmethoden, welche er in seiner Programmabhandlung: „Stereometrische Aufgaben über Maxima und Minima für elementare Lösung in Oberprima. Rastenburg 1889“ veröffentlicht hat.

Im übrigen sind Aufgaben, welche auf kubische Gleichungen führen, mit Absicht unberücksichtigt gelassen.

I.

Lichtstärke.

Aufg. 1. In der Entfernung a von einer Ebene befindet sich ein leuchtender Punkt L. Welche Punkte P der Ebene werden von den Lichtstrahlen $n\sqrt{n} = 3\sqrt{3}$ mal schwächer erleuchtet als der Fusspunkt des von L auf die Ebene gefällten Lotes? Wie gross ist der Körper, welcher von den Strahlen LP umhüllt wird?

Aufl. Ist der Winkel zwischen den Strahlen LP und dem von L auf die Ebene gefällten Lote $= \varphi$, so ist:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Die Lichtstrahlen bilden daher den Mantel eines Kegels, bei welchem:

$$\text{der Inhalt} = \frac{\pi}{3} a^3 (n-1) = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$\text{die Mantelfl.} = a^2\pi\sqrt{n(n-1)} = a^2\pi\sqrt{6}.$$

Aufg. 2. Eine Lichtquelle L befindet sich im Mittelpunkte der Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel $2\alpha = 120^0$ hat. Welche Punkte P des Kegelmantels werden am stärksten erleuchtet? Wie gross ist der Raum, welcher von den Lichtstrahlen LP und dem Kegelmantel eingeschlossen wird?

Aufl. Am stärksten werden offenbar die Fusspunkte der von L auf den Mantel gefällten Lote erleuchtet. Ist demnach r der Radius der Grundfläche des Kegels, so begrenzen die Lichtstrahlen LP und der Kegelmantel nach der Spitze des Kegels zu einen Körper, dessen

$$\text{Inh.} = \frac{\pi}{3} r^3 \cos^4\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \frac{r^3\pi}{48\sqrt{3}}.$$

$$\text{Oberfl.} = r^2\pi\sqrt{2}.\cos^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos(\alpha - 45^0)$$

$$= \frac{r^2\pi(1+\sqrt{3}).}{8\sqrt{3}}.$$

Aufg. 3. Im Mittelpunkte der Endfläche eines Kreiscylinders vom Radius r steht eine Lichtquelle L. Welche Punkte P der Mantelfläche des Cylinders werden von den Lichtstrahlen $n\sqrt{n} = 2\sqrt{2}$ mal schwächer erleuchtet als die Peripheriepunkte der Cylinderbasis? Wie gross ist der Raum, welcher von der Endfläche des Cylinders, von den Lichtstrahlen LP und dem Cylindermantel begrenzt wird?

Aufl. Bilden die Lichtstrahlen LP mit der Cylinderachse den Winkel φ, so ist:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und es ist bei dem von den Strahlen LP begrenzten Cylinderteile:

$$\text{der Inhalt} = \frac{2}{3} r^3 \pi \sqrt{n-1} = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

$$\text{die Oberfl.} = r^2\pi\,(1 + \sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}) = r^2\pi\,(3 + \sqrt{2}).$$

Aufg. 4. In dem einen Endpunkte des Durchmessers einer Hohlkugel vom Radius r befindet sich eine Lichtquelle L. Welche Punkte P der Oberfläche der Kugel werden $n = \sqrt{2}$ mal so stark erleuchtet als der der Lichtquelle L diametral gegenüberliegende Punkt der Kugeloberfläche? In welche Teile wird die Kugel von der Gesamtheit der Strahlen LP zerlegt?

Aufl. Bilden die Strahlen mit dem durch L gehenden Durchmesser den Winkel φ, so ist:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daher ist bei dem kleineren durch die Strahlen LP von der Kugel abgegrenzten Teile

$$\text{der Inh.} = \frac{1}{3} r^3\pi \quad \text{und die Oberfl.} = 2\,r^2\pi\,(1 + \sqrt{2}).$$

Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\cos\varphi = \frac{1}{n}$$

$$\text{Inh.} = \frac{4\,r^3\pi}{3.\,n^4} \qquad \text{Oberfl.} = \frac{4\,r^2\pi}{n^2}\left\{n + \sqrt{n^2 - 1}\right\}.$$

Aufg. 5. In den Endpunkten des einen Durchmessers einer Hohlkugel vom Radius r sind zwei Lichtquellen L und M aufgestellt, deren Leuchtkräfte bezüglich der Leuchtkraft von λ und $\lambda n = \lambda\sqrt{2}$ Normalkerzen gleichkommen. Welche Stellen P der Kugeloberfläche werden von den beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Welchen Raum umhüllen die Strahlen LP und MP?

Aufl. Bilden die Lichtstrahlen MP der stärkeren Lichtquelle M mit LM den Winkel φ, so bilden die Strahlen LP mit LM den Winkel $(90^0 - \varphi)$, und es ist:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}.$$

Die Lichtstrahlen LP und MP begrenzen also einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{16}{27} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{4\pi r^2 \sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)}.$$

Anm. a. Nimmt man: $n = \sqrt{3}$, so ist:

$$\text{der Inh.} = \frac{1}{2} r^2 \pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi \sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

b. Ist ferner: $n = 2\sqrt{2}$, so ist:

$$\text{der Inh.} = \frac{64}{243} r^3 \pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{8}{27} r^2 \pi \sqrt{2}\ \left(1 + 2\sqrt{2}\right).$$

c. Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergiebt:

$$\text{der Inh.} = \frac{4}{3} r^3 \pi . \frac{2 n^2}{\left(n^2+1\right)^2}.$$

$$\text{die Oberfläche} = 4 r^2 \pi . \frac{n(n+1)}{\left(n^2+1\right)^{3/2}}.$$

Aufg. 6. Auf der Axe eines Kreiscylinders vom Radius r befinden sich im gegenseitigen Abstande r von einander zwei Lichtquellen, deren Leuchtkräfte λ und $\mu = 2\lambda\sqrt{2}$ Normalkerzen betragen. Welche Punkte P des Cylindermantels werden von den beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Wie gross ist der Raum, welcher von den nach den Punkten P gehenden Strahlen umhüllt wird?

Aufl. Bildet die Verbindungslinie der beiden Lichtquellen mit den Strahlen des schwächeren Lichts den Winkel φ und mit denen des stärkeren Lichts den Winkel ψ, so ist:

$$1)\ \sin\varphi = \sqrt{2}.\ \sin\psi.$$

$$2)\ \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi = 1.$$

Nach Aussonderung von φ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$1 - \sin^2 2\psi = 4.\left(1 - \sin 2\psi\right)^2.$$

Daraus folgt:

$$\text{I)}\ \sin 2\psi = 1; \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\varphi = 1.$$

$$\text{II)}\ \sin 2\psi = \frac{3}{5}; \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

In beiden Fällen ist der Inhalt des von den Lichtstrahlen umhüllten Raumes:

$$= \frac{r^3\pi}{3};$$

dagegen ist die Oberfläche dieses Raumes im ersteren Falle $= r^2\pi\,(1 + \sqrt{2})$

und im anderen Falle $= r^2\pi.\ \sqrt{5}\,(1 + \sqrt{2})$.

Aufg. 7. Die Leuchtkräfte zweier Lichtquellen L und M verhalten sich zu einander wie 3 zu $2\sqrt{2}$. Senkrecht zu der Verbindungslinie LM derselben ist in einem Abstande a von der schwächeren Lichtquelle M und einem Abstande $a\sqrt{3}$ von der stärkeren Lichtquelle L ein Schirm aufgestellt. Welche Punkte P des Schirmes werden von beiden Lichtquellen gleich stark erleuchtet? Welcher Raum wird von der Gesamtheit der Strahlen LP und MP umhüllt?

Aufl. Sind die Winkel, welche LM mit LP und MP bildet, bezüglich ψ und φ, so ist:

$$\cos\psi = \sqrt{2}.\ \cos\varphi$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{3}.\ \operatorname{tang}\psi.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varphi = 60^\circ \qquad \psi = 45^\circ$$

Der von den Strahlen LP und MP umhüllte Raum ist demnach $= a^2\pi\,(\sqrt{3} - 1)$

und seine Oberfläche ist $= \dfrac{a^2\pi\,\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Aufg. 8. In einer Entfernung a von einem Schirme befindet sich eine Lichtquelle L, deren Leuchtkraft derjenigen von λ Normalkerzen gleichkommt. Auf der Verlängerung des von dieser Lichtquelle auf den Schirm gefällten Lotes befindet sich in einer Entfernung 3a vom Schirme eine zweite Lichtquelle M, deren Leuchtkraft $\lambda\sqrt{3}$ Normalkerzen beträgt. Welche Stellen P des Schirmes werden von den Lichtquellen L und M gleich stark erleuchtet? Welcher Raum wird von der Gesamtheit der nach P gehenden Lichtstrahlen eingeschlossen?

Aufl. Bildet die Linie LM mit den Strahlen LP den Winkel φ und mit den Strahlen MP den Winkel ψ, so ist:

$$\cos\psi = \sqrt{3}.\ \cos\varphi.$$
$$\operatorname{tang}\varphi = 3.\ \operatorname{tang}\psi.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\sin\psi = \frac{1}{2}. \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\psi = 30^0 \qquad \varphi = 60^0.$$

Die Lichtstrahlen LP und MP umschliessen daher einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = 4a^3\pi.$$
$$\text{Oberfl.} = 2a^2\pi\sqrt{3}.\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

II.

Spiegelung des Lichtes.

Aufg. 9. Im Mittelpunkte der Basis eines geraden Hohlkegels, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel $\alpha = 30^0$ hat, befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen durchschneiden nach der Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig? Wie gross ist der von diesen Strahlen eingeschlossene Raum?

Aufl. Die Strahlen, welche nach der Spiegelung an dem Mantel des Kegels die Kegelhöhe rechtwinkelig treffen, umschliessen einen geraden Kegel, dessen:

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3\pi}{8}. \qquad \text{Oberfläche} = \frac{r^2\pi\sqrt{3}}{2.(\sqrt{3} - 1)^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergiebt:

$$\text{Inhalt} = \frac{\pi}{6} r^3 \sin 2\alpha \cos\alpha. \qquad \text{Oberfl.} = 2r^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Aufg. 10. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r ist durch eine Kugel K vom Radius $\frac{r}{2}$, welche um den Mittelpunkt M der Kegelbasis beschrieben ist, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Kegelteil begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels wieder zu M zurückkehren?

Aufl. Von den Lichtstrahlen, die nach zwei Spiegelungen an dem Kegelmantel wieder nach M gelangen, wird ein — durch ein Kugelsegment — ausgehöhlter Kegelstumpf umschlossen, dessen:

$$\text{Inhalt} = \frac{r^2\pi}{6(1+\sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{8}\left(9 - 2\sqrt{3}\right).$$

Aufg. 11. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r ist durch diejenige Kugel K ausgehöhlt, welche den Kegelmantel längs der Peripherie der Grundfläche tangiert. Im Mittelpunkte der Kugel K befindet sich ein leuchtender Punkt L. Welchen Kegelteil umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Reflexion an der Mantelfläche des Kegels wieder zur Lichtquelle L gelangen?

Aufl. Der Kegelteil, welcher von den zur Kegelhöhe senkrechten Lichtstrahlen eingeschlossen wird, ist ein Kegelstumpf, welcher durch ein Kugelsegment ausgehöhlt ist. Die Endfläche des Stumpfes berührt die Kugel K. Von den Strahlen wird daher ein Kegelraum umschlossen, dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{8r^3\pi}{27\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3} - 5\right). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{2}{3}r^2\pi\left(5 - 2\sqrt{3}\right).$$

Aufg. 12. Auf eine Kugel vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte L. Welche Strahlen bilden nach der Spiegelung an der Kegeloberfläche mit dem nach L gerichteten Kugelradius einen rechten Winkel? Wie gross ist der Kugelraum K, welcher von den nach den Reflexionspunkten der Lichtstrahlen gezogenen Radien begrenzt wird?

Aufl. Der Kugelteil K ist ein Kugelausschnitt, dessen Achsenschnitt ein Kreisquadrant ist. Es ist demnach

$$\text{der Inhalt} = \frac{r^3\pi\sqrt{2}}{3(1+\sqrt{2})}. \qquad \text{und die Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{2}\left(4 - \sqrt{2}\right).$$

Aufg. 13. Die — eine Halbkugel vom Radius r begrenzende — Kreisfläche wird von den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes senkrecht getroffen. Welchen Kugelteil umschliessen diejenigen Strahlen, welche nach n Spiegelungen an der Kugeloberfläche wieder zu dem unendlich entfernten Lichtpunkte zurückkehren? Zu berücksichtigen sind nur die Fälle:

$$2 \leqq n \leqq 4.$$

Aufl. a. Ist $n = 2$, d. h. kehren die Lichtstrahlen schon nach der zweiten Spiegelung an der Kugeloberfläche zu ihrem Ausgangspunkt zurück, so umhüllen dieselben innerhalb der Halbkugel einen geraden Cylinder, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{r^3 \pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Oberfl.} = 2 r^2 \pi.$$

b. Sind diejenigen Strahlen den einfallenden parallel, welche nach der $n = 3^{\text{ten}}$ Spiegelung an der Kugeloberfläche aus der Halbkugel austreten, so umschliessen dieselben innerhalb der Halbkugel einen aus einem Cylinder und einem Kegel zusammengesetzten Körper, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{1}{2} r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \sqrt{3} \left\{ 4 + \sqrt{3} \right\}.$$

c. Werden endlich die Lichtstrahlen an der Kugeloberfläche $n = 4$mal zurückgeworfen, ehe sie zu ihrem Ausgangsorte zurückkehren, so umhüllen dieselben innerhalb der Halbkugel einen aus einem Cylinder und einem Kegelstumpf zusammengesetzten Körper, dessen:

$$\text{Inh.} = \frac{r^3 \pi . \left(7 + 4\sqrt{2}\right)}{12. \sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi . r^2}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ 1 + 2\sqrt{2} \right\}.$$

Aufg. 14. In dem einen Endpunkte des Durchmessers einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen kehren nach zwei Reflexionen an der Kugeloberfläche wieder zu dem leuchtenden Punkte zurück? Welchen Raum umhüllen dieselben auf ihrem Wege?

Aufl. Kehren die Lichtstrahlen schon nach der zweiten Spiegelung zum leuchtenden Punkte zurück, so beschreiben dieselben einen gleichseitigen Kegel, dessen

$$\text{Inh.} = \frac{3}{8} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{9}{4} r^2 \pi.$$

Allgemein: Erleiden die Lichtstrahlen an der Oberfläche der Kugel 2n Reflexionen, ehe dieselben ihren Ausgangsort erreichen, so beschreiben dieselben einen Rotationskörper, welcher durch Umdrehung eines regulären $(2n + 1)$=Ecks um die Verbindungslinie einer Polygonecke mit der Mitte der dieser Ecke gegenüberliegenden Polygonseite entsteht. Wird $\frac{360^0}{2n + 1} = 2\gamma$ gesetzt, so ist des Rotationskörpers

$$\text{Inh.} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cos\gamma \cos^4 \frac{\gamma}{2}. \qquad \text{Oberfl.} = 4 r^2 \pi \cos^4 \frac{\gamma}{2}.$$

Aufg. 15. Ein leuchtender Punkt befindet sich in dem einen Endpunkte des Durchmessers einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius r. Welche Lichtstrahlen kehren nach fünfmaliger Spiegelung an der Kugeloberfläche wieder zur Lichtquelle zurück? Wie gross ist der körperliche Inhalt und die Oberfläche des von diesen Strahlen umschlossenen Raumes?

Aufl. Kehren die Strahlen nach der fünften Reflexion an der Kugeloberfläche zu ihrem Ausgangsorte zurück, so begrenzen dieselben einen Körper, welcher bei der Rotation eines regulären Sechsecks um den grössten Durchmesser entsteht. Es ist daher des Körpers

$$\text{Inh.} = r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = 2 r^2 \pi \sqrt{3}.$$

Allgemein: Werden die Lichtstrahlen $(2n-1)$ mal an der Kugeloberfläche zurückgeworfen, ehe dieselben zur Lichtquelle zurückkehren, so umhüllen dieselben einen Rotationskörper, welcher durch Umdrehung eines regulären 2n=Ecks um den grössten Durchmesser entsteht. Setzt man zur Abkürzung $\frac{180^0}{n} = \gamma$, so ist der

$$\text{Inhalt des Körpers} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cos^2 \gamma.$$

$$\text{und die Oberfl.} = 4 r^2 \pi \cos\gamma.$$

Aufg. 16. Die Höhe h eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, ist über die Spitze des Kegels verlängert. Auf dieser Verlängerung der Höhe befindet sich in einem Abstande h von der Kegelspitze ein leuchtender Punkt L. An welchen Stellen P der spiegelnden Mantelfläche des Kegels werden die Lichtstrahlen so zurückgeworfen, dass dieselben mit der Kegelhöhe rechte Winkel bilden? Wie gross ist der Kegelraum zwischen der Basis des Kegels und der Gesamtheit der Punkte P?

Aufl. Senkrecht zu der Körperhöhe stehen nach der Spiegelung diejenigen Lichtstrahlen, deren Reflexionswinkel $\alpha = 60^0$. Die Reflexionspunkte P liegen daher auf einem Kreise und zerlegen den Kegel in zwei Teile, deren Mantelflächen im Verhältnis von 1 zu 3, deren Inhalte im Verhältnis von 1 zu 7 zu einander stehen.

Aufg. 17. Über der Spitze eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, befindet sich auf der Verlängerung der Kegelhöhe h in dem Abstande 2h von der Spitze des Kegels ein leuchtender Punkt L. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen LP, welche nach der Spiegelung an der Mantelfläche des Kegels von dem Fusspunkte der Kegelhöhe zu kommen scheinen?

Aufl. Ist α der Reflexionswinkel der Strahlen LP, so ist:

$$\sin(\alpha + 30^0) = 2.\sin(\alpha - 30^0),$$

also: $\alpha = 60^0$. Die Reflexionspunkte P sind daher die Peripheriepunkte der Kegelbasis. Es ist mithin bei dem von den Strahlen LP eingehüllten Raume:

der Inh. $= 3\pi h^3$. die Oberfl. $= 9h^2\pi$.

Aufg. 18. Im Mittelpunkte der Basis eines hohlen regulären Tetraeders mit der Kante a befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen schneiden nach der Reflexion an den Seitenflächen des Tetraeders die Tetraederhöhe senkrecht? Wie gross ist das Volumen desjenigen Polyeders, welches jene Lichtstrahlen zu Seitenkanten hat?

Aufl. Das Polyeder ist eine dreiseitige Pyramide mit regulärer Basis, und es ist die Seitenkante desselben $= \frac{a}{6}\sqrt{3}$ und der Radius des um seine Basis beschriebenen Kreises $= \frac{7a}{18\sqrt{3}}$. Daher ist das Volumen des Körpers:

$$V = \frac{7^2.a^3}{2^2.3^7.\sqrt{2}}.$$

Aufg. 19. Ein leuchtender Punkt befindet sich im Mittelpunkte der Basis einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten a. Welche Lichtstrahlen schneiden nach der Reflexion an den Seitenflächen der Pyramide die Pyramidenhöhe senkrecht? Wie gross ist der körperliche Inhalt desjenigen Polyeders, welches jene Strahlen zu Seitenkanten hat?

Aufl. Diejenigen Strahlen, welche nach der Spiegelung an den Seitenflächen der Pyramide die Körperhöhe senkrecht treffen, bilden die Kanten einer geraden Pyramide mit regulärer Basis, und es ist die Seitenkante der Pyramide $= \frac{a}{2}$ und der Radius des um die Basis beschriebenen Kreises $= \frac{a}{6}$. Daher ist das Volumen des Körpers:

$$V = \frac{a^3}{3 \cdot \sqrt[4]{2}}.$$

Aufg. 20. Innerhalb eines hohlen regulären Tetraeders mit den Kanten a befindet sich in der Mitte der Tetraederhöhe ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen treffen nach der Reflexion an den Seitenflächen des Tetraeders die Tetraederbasis senkrecht? Wie gross ist das Volumen desjenigen innerhalb des Tetraeders liegenden Polyeders, dessen Seitenkanten jene Lichtstrahlen sind?

Aufl. Das Polyeder besteht aus einem dreiseitigen Prisma und einer dreiseitigen Pyramide, und es ist der Radius des um die gemeinsame Basis der beiden Körperteile beschriebenen Kreises $= \frac{4a}{9\sqrt{3}}$, die Seitenkante der Pyramide $\frac{a}{\sqrt{6}}$ und die Höhe des Prismas $= \frac{2a}{9\sqrt{6}}$. Daher ist das Volumen des von den Lichtstrahlen als Seitenkanten begrenzten Körpers

$$V = \frac{13 . (a\sqrt{2})^3}{3^7}.$$

Aufg. 21. In der Mitte der Höhe einer geraden vierseitigen Pyramide mit lauter gleichen Kanten a befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen treffen nach der Spiegelung an den Seitenflächen der Pyramide die vierseitige Pyramidenbasis senkrecht? Wie gross ist der Inhalt desjenigen innerhalb der Pyramide fallenden Polyeders, dessen Seitenkanten jene zur Basis senkrecht stehenden Strahlen sind?

Aufl. Diejenigen Strahlen, welche nach der Reflexion an den Seiten der Pyramide die Körperbasis senkrecht treffen, bilden die Kanten eines Polyeders, welches aus einem vierseitigen Prisma und einer vierseitigen Pyramide besteht; der Radius des um die gemeinsame Basis der beiden Körperteile beschriebenen Kreises ist $= \frac{a}{3}$, die Seitenkante der Pyramide $= \frac{a}{2\sqrt{2}}$ und die Höhe des Prismas $= \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Daher ist das Volumen des ganzen Körpers:

$$V = \frac{7a^3}{3^4 \sqrt{2}}.$$

Aufg. 22. Ein leuchtender Punkt bildet den Scheitel der einen Ecke eines regulären Oktaeders von der Kante a. Welche Strahlen durchschneiden nach der Spiegelung an den Seitenflächen des Oktaeders die durch die leuchtende Ecke gehende Körperdiagonale senkrecht? Wie gross ist der körperliche Inhalt desjenigen Polyeders, welches jene Lichtstrahlen zu Seitenkanten hat?

Aufl. Die Lichtstrahlen, welche nach der Reflexion an der Oktaederseite die Körperdiagonale senkrecht treffen, bilden die Kanten einer geraden dreiseitigen Pyramide von der Höhe $\frac{2}{3}a\sqrt{2}$ und der Seitenkante a; der Radius des um die gleichseitige Basis dieser Pyramide beschriebenen Kreises beträgt $\frac{a}{3}$ und der Inhalt der Pyramide ist:

$$V = \frac{4 . a^3 \sqrt{2}}{3^4}.$$

Aufg. 23. Im Scheitel der einen Ecke eines regulären Hexaeders befindet sich ein leuchtender Punkt. Welche Lichtstrahlen treffen nach der Reflexion an den Würfelseiten die durch den leuchtenden Punkt gehende Körperdiagonale senkrecht? Wie gross ist das Polyeder, dessen Seitenkanten jene nach der Reflexion an den Hexaederseiten die Würfeldiagonale senkrecht durchschneidenden Strahlen sind?

Aufl. Diejenigen Lichtstrahlen durchschneiden nach der Spiegelung an den Seiten des Würfels die Körperdiagonale senkrecht, welche die der leuchtenden Ecke gegen überliegenden Würfelseiten in den Mittelpunkten treffen. Diese Strahlen bilden die Kanten einer geraden dreiseitigen Pyramide, bei welcher:

$$\text{die Seitenkante} = a\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\text{die Höhe} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

und der Radius des um die gleichseitige Basis beschriebenen Kreises $= \frac{a}{\sqrt{6}}$ ist.

Der Inhalt der Pyramide beträgt:

$$\frac{a^3}{12}.$$

Aufg. 24. Die stumpfere Spitze eines geraden Doppelkegels, an welcher der Achsenschnitt einen Winkel von $2\alpha = 120^0$ ergiebt, ist der Sitz eines leuchtenden Punktes. Welchen Raum umschliessen diejenigen Lichtstrahlen, welche nach der Reflexion an der Mantelfläche des Kegels die Kegelachse senkrecht durchschneiden?

Aufl. Diejenigen Strahlen, welche nach der Spiegelung an dem Mantel des Doppelkegels die Körperachse senkrecht treffen, umhüllen einen geraden Kegel. Ist a die Seite des stumpferen Teils des Doppelkegels, so ist

$$\text{das Vol. des Lichtkegels} = \frac{2\pi a^3 \cos\alpha \cos^2 2\alpha}{3\sin^2\alpha} = \frac{a^2\pi}{9}.$$

$$\text{und die Oberfl. desselben} = 2\pi a^2 \cos(180^0 - 2\alpha) = a^2\pi.$$

Aufg. 25. Von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte fallen Lichtstrahlen senkrecht zur Basis eines geraden Kegels, dessen Achsenschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck ist. Welche der von der Kegelhöhe gleich weit entfernten Strahlen umhüllen bei ihrer Reflexion an der spiegelnden Mantelfläche des Kegels einen Kegelteil

a) vom grössten Volumen?

b) von der grössten krummen Oberfläche?

Aufl. Umhüllt wird von den Strahlen ein Cylinder. Ist x der Abstand der Strahlen von der Kegelachse, so ist

$$\text{a) das Cyl.-Vol} = x^2\pi(r - x).$$

$$\text{b) der Cylinder-Mantel} = 2x\pi(r - x).$$

Am grössten, nämlich: $\frac{4}{27} r^3\pi$, ist daher das Vol., wenn: $x = \frac{2}{3} r$.

Der Mantel wird dagegen am grössten, wenn $x = \frac{r}{2}$; er ist dann $= \frac{r^2\pi}{2}$.

Aufg. 26. Senkrecht zur Basis eines gleichseitigen Kegels vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte. Welche von den Strahlen, die sich nach der Reflexion am Kegelmantel in demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Kegelteil

a) vom grössten Volumen?
b) von der grössten krummen Oberfläche?

Aufl. In demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen sich nach der Spiegelung am Kegelmantel diejenigen die Kegelbasis treffenden Strahlen, welche von der Kegelhöhe denselben Abstand haben. Ist dieser Abstand = x, so ist bei dem von den Strahlen umhüllten Kegelteile, der aus einem Cylinder und einem Vollkegel besteht,

$$\text{a) das Vol.} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left\{9rx^2 - 8x^3\right\}.$$

$$\text{b) die krumme Oberfläche} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left\{3rx - 2x^2\right\}.$$

Beide Ausdrücke werden am grössten, wenn: $x = \frac{3}{4}r$, und es ist:

$$\text{a) das Vol.} = \frac{9\pi r^3}{16\sqrt{3}}. \qquad \text{b) der krumme Oberflächenteil} = \frac{9r^2\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Aufg. 27. Die Basis eines Kegels vom Radius r, dessen Achsenschnitt den Winkel $\alpha = 120^0$ hat, wird von den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes senkrecht getroffen. Welche von den sich in einem Punkte der Kegelhöhe vereinigenden Strahlen werden an der spiegelnden Mantelfläche des Kegels so zurückgeworfen, dass sie vom Kegel einen Teil vom grössten Volumen begrenzen?

Aufl. Alle Strahlen, welche sich in demselben Punkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Cylinder, welcher an der einen Endfläche durch einen Kegel ausgehöhlt ist. Ist x der Abstand der einfallenden Strahlen von der Kegelhöhe, so ist das Volumen des von den Strahlen umhüllten Körpers

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(3rx^2 - 4x^3\right).$$

Den grössten Wert: $\frac{r^3\pi}{12\sqrt{3}}$ erreicht dieses Volumen, wenn: $x = \frac{r}{2}$; die reflectirten Lichtstrahlen sammeln sich im Fusspunkte der Kegelhöhe. Der krumme Oberflächenteil des von den Strahlen begrenzten Körpers beträgt:

$$\frac{r^2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Aufg. 28. Innerhalb einer Hohlkugel vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt in der Entfernung $a = \frac{r}{3}\sqrt{5}$ vom Mittelpunkte der Kugel. Welchen Raum begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach zweimaliger Reflexion an der Oberfläche der Kugel wieder zum Lichtpunkte zurückkehren?

Aufl. Ist α der Reflexionswinkel, so ist zunächst:

$$\frac{r}{a} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

Da $a = \frac{r}{3}\sqrt{5}$, so ergiebt die Lösung dieser Gleichung: $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Diejenigen Strahlen, welche nach zwei Spiegelungen an der Kugeloberfläche zum Lichtpunkte zurückkehren, umhüllen daher einen Kegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{32 r^3 \pi}{45.\sqrt{5}}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{32}{15} r^2 \pi.$$

Aufg. 29. Ein leuchtender Punkt hat vom Mittelpunkte einer Hohlkugel vom Radius r den Abstand $a = \frac{2}{3}r$. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dreimaliger Reflexion an der Oberfläche der Kugel wieder zum leuchtenden Punkte zurückkehren?

Aufl. Ist β der Reflexionswinkel, so ist:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta}.$$

Daraus folgt:

$$\cos 2\beta = \frac{r - a}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Die Strahlen, welche nach dreimaliger Spiegelung an der Kugeloberfläche zum Lichtpunkte zurückkehren, begrenzen demnach einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{25}{48} \cdot r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{25 . r^2 \pi}{4\sqrt{6}}.$$

Anm.: a) Nimmt man $a = \frac{r}{2}$, so umhüllen die nach der dritten Spiegelung an der Kugeloberfläche der Kugel wieder zum Lichtpunkte zurückkehrenden Strahlen einen einfachen geraden Kegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $r\sqrt{3}$ ist.

b) Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\text{Vol.} = \frac{\pi . r^2 (a + r)^2 (3a - r)}{12a^2}.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{r . \pi}{2a^2} \cdot (a + r)^2 \cdot \sqrt{a(3a - r)}.$$

Aufg. 30. Vor einer Kugel mit dem Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt L in einem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Kegelmittelpunkte M. Welche Strahlen LP gehen nach der Reflexion an der Kugeloberfläche parallel der auf LM senkrecht stehenden Tangentialebene der Kugel? Wie gross ist der Kugelteil K, welcher von der Gesamtheit der Strahlen MP begrenzt wird?

Aufl. Ist x der Einfallswinkel der Lichtstrahlen LP beim Auftreffen auf die Kugeloberfläche, so ist:

$$\sin x + \sqrt{3} . \cos 2x = 0.$$

Daher: $x = 60^0$. Der Kugelteil K ist demnach ein Kugelsektor, dessen Achsenschnitt ein Kreissextant ist. Mithin ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{3(2 + \sqrt{3})} \qquad \text{und die Oberfl.} \ \frac{r^2 \pi}{2} \left(5 - 2\sqrt{3}\right).$$

Aufg. 31. Auf eine Kugel vom Radius r fallen Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte L, welcher von dem Kugelmittelpunkte M den Abstand $LM = \frac{r}{\sqrt{3} - 1}$ hat. Welche Strahlen LP scheinen nach der Spiegelung an der Kugeloberfläche von dem Punkte zu kommen, in welchem LM die Kugel schneidet? Wie gross ist der Raum, welcher zwischen der Kugel und der Gesamtheit der Strahlen LP liegt?

Aufl. LM treffe die Kugel im Punkte O. Ist α der Reflexionswinkel der Strahlen, welche von O zu kommen scheinen, so ist:

$$\sin 3\alpha + (\sqrt{3} - 1) . \sin\alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\alpha = 75^0$$

Der dem leuchtenden Punkte zugekehrte Teil der Kugeloberfläche und die Strahlen LP begrenzen daher einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{4.(5+3\sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{4}\left\{8+\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 32. Ein hohler Kugelsector, dessen Achsenschnitt ein Kreisquadrant ist, gehört einer Kugel vom Radius r an. In der Entfernung $\frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Mittlpunkte M der Kugel befindet sich innerhalb des Sectors ein leuchtender Punkt L auf demjenigen Radius, welcher den Kugelmittelpunkt mit der Mitte der Calotte verbindet. Welche Strahlen treffen nach der Reflexion an der Calotte und an dem Kegelmantel des Sectors den durch L gehenden Radius senkrecht? a) Wie gross ist der Raum zwischen der Calotte und jenen von L ausgehenden Strahlen? b) Welchen Raum umhüllen die Strahlen auf ihrem Wege bis zur Rückkehr zum leuchtenden Punkte L?

Aufl. Wird die Calotte unter dem Winkel ξ von den Strahlen getroffen, welche in ihrem weitern Verlaufe den Radius ML senkrecht treffen, so ist:

$$\sin 2\xi = \sqrt{3}.\ \sin\xi,$$

also: $\xi = 30^0$. Es ist daher:

a) zwischen der Calotte und den von L ausgehenden Strahlen ein Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3.\pi}{12\sqrt{3}}.\left\{8\sqrt{3}-13\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2.\pi.}{2\sqrt{3}}(4\sqrt{3}-5).$$

b) die Strahlen selbst umhüllen auf ihrem Wege einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3.\pi}{24\sqrt{3}}.\left\{8-3\sqrt{3}\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2.\pi}{4.\sqrt{3}}\left\{8-\sqrt{3}\right\}.$$

III.

Brechung des Lichtes.

Aufg. 33. Auf den Mantel eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Kegels vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{2}$ fallen parallel der Kegelachse Lichtstrahlen, welche von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte herkommen. Welchen Kegelteil umschliessen diejenigen Strahlen, welche die Kegelbasis im Fusspunkte der Höhe des Kegels treffen?

Aufl. Diejenigen Strahlen, welche sich im Fusspunkte der Kegelhöhe vereinigen, umhüllen einen Doppelkegel, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{18(2 + \sqrt{3})}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{3\sqrt{2}}.$$

Anm.: Ist der Kegel gleichseitig und der Brechungsexponent $n = \sqrt{3}$, so ist:

$$\text{Vol.}\ \frac{r^3 \pi}{8\sqrt{3}}. \qquad \text{Oberfl.} = r^2 \pi.$$

Aufg. 34. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ ist durch eine Kugel K ausgehöhlt, welche den Kegelmantel längs der Peripherie der Kegelbasis tangiert. Im Mittelpunkte der Kugel K ist ein leuchtender Punkt aufgestellt. Welchen Raum des Kegelrestes begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch den Kegel parallel der Kegelhöhe laufen?

Aufl. Aus einem Vollkegel und einem durch einen Kugelabschnitt ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht der von den Lichtstrahlen begrenzte Kegelteil, und es ist dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{8r^3\pi}{27\sqrt{3}} \cdot \left\{3\sqrt{3} - 4\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{2r^2\pi}{9}\left\{17 - 6\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 35. Ein gleichseitiger Kegel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ ist durch eine Kugel vom Radius $\frac{r}{2}$, welche um den Mittelpunkt M der Kegelbasis beschrieben ist, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Raum des ausgehöhlten Kegels umhüllen diejenigen den Kegelmantel treffenden Lichtstrahlen, welche sich in der Kegelspitze vereinigen?

Aufl. In der Spitze des Kegels vereinigen sich diejenigen Strahlen, deren Brechungswinkel beim Austritt aus dem Kegel $= 90^0$ ist. Diese Strahlen umhüllen einen Kegelteil, welcher aus einem Vollkegel und einem durch ein Kugelsegment ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht, und es ist dessen

$$\text{Inhalt} = \frac{r^3\pi}{24}\left\{3\sqrt{3} - 2\right\}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{8}\left\{11 - 2\sqrt{3}\right\}.$$

Aufg. 36. Auf der Verlängerung der Achse eines gleichseitigen Kegels vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ befindet sich ein leuchtender Punkt in einer Entfernung $a = \frac{r}{3\sqrt{3}}$ vom Mittelpunkte der Kegelbasis. Welchen Raum umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch den Kegel parallel zur Achse des Kegels gehen?

Aufl. Parallel zur Achse des Kegels treten aus der Mantelfläche diejenigen Strahlen aus, welche auf die Kegelbasis unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ einfallen. Der von diesen Strahlen eingeschlossene Kegelteil besteht aus einem Kegel und einem Kegelstumpfe. Das Gesamtvolumen dieses Körpers ist

$$= \frac{5 . \pi . r^3 \sqrt{3}}{27}, \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{5}{3} r^2 \pi.$$

Aufg. 37. Unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ fallen auf eine Vollkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{\frac{3}{2}}$ Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte. In welchem Punkte der optischen Achse vereinigen sich diese Strahlen nach dem Durchgange durch die Kugel? Welchen Kugelteil umhüllen dieselben auf ihrem Wege bis zum Vereinigungspunkte?

Aufl. Der Vereinigungspunkt der unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ einfallenden Strahlen hat vom Kugelmittelpunkte den Abstand $r\sqrt{3}$. Die Strahlen begrenzen einen Körper, welcher aus zwei Kugelsegmenten und einem Kegelstumpfe besteht, und es ist des Körpers

$$\text{Vol.} = \frac{r^3 \pi}{6} (7 - \sqrt{3}). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{2} \left\{ 6 - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6} \right\}.$$

Aufg. 38. Von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte fallen Lichtstrahlen auf eine Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{2}$. Welchen Kugelraum begrenzen diejenigen in die Kugel eindringenden Strahlen, welche nach einmaliger Reflexion an der Kugeloberfläche im Innern der Kugel in das erste Medium so heraustreten, dass sie wieder zur leuchtenden Quelle zurückkehren?

Aufl. Bedeutet α den Einfalls- und β den Brechungswinkel, so ist $\alpha = 2\beta$. Sieht man von dem Werte $\alpha = o$ ab, so besteht der von den gebrochenen Lichtstrahlen umschlossene Kugelteil aus einem Kugelabschnitte und einem Kegel, und es ist:

$$\text{das Vol.} = r^3 \pi. \qquad \text{die Oberfl.} = r^2 \pi \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{2}).$$

Anm. Die allgemeine Lösung ergiebt:

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{12} \cdot (16 - n^4). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \sqrt{4 - n^2} \left(n^2 + 2 \cdot \sqrt{4 - n^2}\right).$$

Aufg. 39. Vor einer Kugel mit dem Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ist ein leuchtender Punkt aufgestellt. Welchen Kugelteil begrenzen diejenigen Strahlen, welche die Kugel unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ treffen und im Innern der Kugel an der Oberfläche derselben vor dem Austritt in das erste Medium zweimal reflektiert werden? Welchen Abstand hat der leuchtende Punkt vom Kugelmittelpunkte?

Aufl. Der von den Lichtstrahlen begrenzte Teil der Kugel besteht aus einem Kugelsegment und einem quadratischen Cylinder, da der Brechungswinkel $\beta = 45^0$. Es ist daher:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{12} \left\{8 + \sqrt{2}\right\} \qquad \text{und die Oberfl.} = r^2\pi\,(4 - \sqrt{2}).$$

Der leuchtende Punkt hat vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand $a = \dfrac{r\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 1}$.

Aufg. 40. Vor einer Kugel vom Radius r, deren Brechungsexponent $n = \sqrt{3}$ ist, befindet sich in einem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Mittelpunkte der Kugel ein leuchtender Punkt. Welchen Kugelteil umhüllen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch die Kugel die optische Achse wieder in dem Abstande $a = r\sqrt{3}$ vom Kugelmittelpunkte treffen?

Aufl. Ist α der Einfalls- und β der Brechungswinkel, so ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sqrt{3} \cdot \sin\beta.$$

Daher ist: $\alpha = 60^0$ und $\beta = 30^0$. Der von den Strahlen umhüllte Kugelteil besteht aus zwei Kugelsegmenten und einem Kreiscylinder, und es ist dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{6} \left\{8 - 3\sqrt{3}\right\} \qquad \text{Oberfl.} = r^2\pi\,(4 - \sqrt{3}).$$

Aufg. 41. Eine Vollkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $\sqrt{3}$ ist den Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes ausgesetzt. Bei welchen von den die Kugel treffenden Lichtstrahlen steht der reflectierte Teil auf dem gebrochenen senkrecht? Welchen Kugelteil begrenzen die in die Kugel eindringenden Strahlen?

Aufl. Ist α der Einfallswinkel, so ist: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Die gebrochenen Strahlen treffen also die optische Achse gerade in dem Punkte, in welchem dieselbe auf der der Lichtquelle entgegengesetzten Seite die Kugeloberfläche durchschneidet, und begrenzen einen Kugelteil, dessen

$$\text{Vol.} = \frac{7}{12} r^3 \pi. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{5}{2} r^2 \pi.$$

Aufg. 42. Auf eine Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ fallen von einem leuchtenden Punkte, welcher vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ hat, Lichtstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 90^0$. Wo treffen sich diese Strahlen nach ihrem Austritt aus der Kugel? Welchen Kugelteil umhüllen dieselben auf ihrem Wege durch die Kugel?

Aufl. Nach dem Austritt aus der Kugel sind die Strahlen einander parallel. Von der Kugel begrenzen dieselben einen Kugelteil, welcher aus einer Halbkugel, einem Kugelsegment und einem Kegelstumpfe besteht, und es ist dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{12}(16 - \sqrt{3}). \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{2}(11 - 2\sqrt{3}).$$

Aufg. 43. Lichtstrahlen eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes treffen senkrecht die Kreisfläche, welche eine Halbkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ begrenzt. Welche Strahlen werden bei der Brechung und Reflexion vollständig polarisiert? Wie gross ist der Raum, welcher von der Gesamtheit der zurückgeworfenen und der gebrochenen Strahlen eingeschlossen wird?

Aufl. Bei der Brechung werden diejenigen Strahlen vollständig polarisiert, bei welchen der reflectierte Teil auf dem gebrochenen senkrecht steht. Die reflectierten und die gebrochenen Strahlen umhüllen einen Doppelkegel, dessen

$$\text{Vol.} = \frac{r^3\pi}{6\sqrt{3}}. \qquad \text{Oberfl.} = \frac{r^2\pi}{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)}.$$

Aufg. 44. Eine Kugel vom Radius r und dem Brechnungsexponenten $n = \sqrt{3}$ ist durch die Oberfläche einer zweiten, ebenso grossen Kugel, deren Mittelpunkt M auf der Oberfläche der ersteren Kugel liegt, ausgehöhlt. In M befindet sich ein leuchtender Punkt. Welchen Teil des linsenförmigen Kugelrestes begrenzen diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch die Linse der optischen Achse parallel gehen?

Aufl. Von den Strahlen, welche nach dem Austritt aus der Linse der Centrale der beiden Kugelflächen parallel gehen, wird ein Körperteil umhüllt, welcher aus einem Kugelsegment und einem an der kleinern Endfläche ausgehöhlten Kegelstumpfe besteht, und es ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3\pi}{12}\left\{4\sqrt{3} - 1\right\}. \qquad \text{die Oberfl.} = r^2\pi(4 - \sqrt{3}).$$

Aufg. 45. Der Lichtbrechungsexponent einer Halbkugel vom Radius r ist $\sqrt{3}$. Senkrecht über dem Mittelpunkte M der diese Halbkugel begrenzenden Kreisfläche befindet sich ein leuchtender Punkt L in einem Abstande $LM = \frac{r}{3}$ von dem Mittelpunkte M. Welchen Kugelteil umhüllen nach dem Eintritt in die Kugel diejenigen Strahlen, welche beim Verlassen der Lichtquelle mit LM den Winkel $\alpha = 60^0$ einschliessen?

Aufl. An dem krummen Oberflächenteile der Halbkugel werden die in die Kugel eingetretenen Strahlen teils gespiegelt, teils gebrochen. a) Der reflectierte Teil kehrt nach einer nochmaligen Reflexion an der Kugeloberfläche schliesslich zur Lichtquelle zurück. b) Der gebrochene Teil verlässt die Halbkugel parallel der Linie LM. Es ist daher:

$$\text{a) das Vol.} = \frac{19}{72}r^3\pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{23}{12}r^2\pi.$$

$$\text{b) das Vol.} = \frac{17}{36}r^3\pi. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{13}{6}r^2\pi.$$

Aufg. 46. Vor einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ befindet sich in einem Abstande $a = nr = 2r$ vom Mittelpunkte der Kugel ein leuchtender Punkt. Welche Strahlen treten so in die Kugel ein, dass sie nach einer einmaligen Reflexion an der Kugeloberfläche in das ursprüngliche Medium so austreten, dass sie wieder zum Lichtpunkte zurückkehren? Welchen Raum umhüllen dieselben auf ihrem Wege durch die Kugel?

Aufl. Ist α der Einfalls- und β der Brechungswinkel, so ist:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin(\alpha - 2\beta)}{\sin\alpha}.$$

Da: $a = nr$, so ist: $\alpha = 3\beta$ und $\cos 2\beta = \frac{n-1}{2}$.

Daher umhüllen die nach einmaliger Spiegelung im Innern der Kugel wieder zur Lichtquelle zurückkehrenden Strahlen einen Raum, dessen:

$$\text{Vol.} = \frac{\pi r^3}{12} \cdot (3 - n)\ (5 + n) = \frac{7}{12} r^3 \pi.$$

$$\text{Oberfl.} = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \sqrt{3 - n}. \left\{(n + 1) + 2.\sqrt{3 - n}\right\} = \frac{5}{2} r^2 \pi.$$

Aufg. 47. Innerhalb einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten

1) $n = \sqrt{2}.$ 2) $n = \sqrt{3}.$

befindet sich im Abstande

1) $a = \frac{r}{\sqrt{3}}.$ 2) $a = \frac{r}{2}.$

vom Mittelpunkte M ein leuchtender Punkt P. In welche Teile wird die Kugel durch diejenigen Strahlen zerlegt, welche nach dem Austritt aus der Kugel von dem Endpunkte des Radius MP zu kommen scheinen?

Aufl. Ist β der Einfalls- und α der Brechungswinkel, so ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$\sin\alpha = n \sin\beta$$

$$\text{und} \quad \frac{r}{a} = \frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\sin\beta}$$

für α die Gleichung:

$$\sin^2\alpha = \frac{(r + a)^2 - 4a^2 n^2}{4a(r - an^2)}.$$

Hieraus folgt für die besonderen Fälle:

1) Die aus dei Kugel austretenden Strahlen halbieren die Kugeloberfläche. Der körperliche Inhalt des kleineren Kugelteils beträgt:

$$\frac{r^3 \pi}{3\sqrt{3}} \cdot \left\{2\sqrt{3} - 1\right\}.$$

2) Nach der Brechung scheinen diejenigen Strahlen aus dem Endpunkte des Radius MP zu kommen, welche vor der Brechung senkrecht auf MP standen. Bei dem kleineren Kugelteile ist:

$$\text{die Calotte} = r^2 \pi.$$

$$\text{das Vol.} = \frac{5}{24} r^3 \pi.$$

Aufg. 48. Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes vom Radius r befindet sich ein leuchtender Punkt P. In welche Teile wird dieser Raum durch diejenigen Strahlen zerlegt, welche nach ihrem Austritt aus der Kugel in ein optisch dichteres Medium vom Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ auf dem durch P gehenden Kugeldurchmesser senkrecht stehen?

Aufl. Bilden die Strahlen mit dem Einfallslot den Winkel α, so führt das Brechungsgesetz zu der Gleichung:

$$\sin\alpha + \sqrt{3} . \cos 2\alpha = 0,$$

woraus:

$$\alpha = 60^0$$

folgt. Bei dem kleineren der beiden Teile, in welche die Kugel durch die der Aufgabe genügenden Strahlen zerlegt wird, ist demnach:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{12}. \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{(\sqrt{3} - 1)^2}.$$

Aufg. 49. Ein leuchtender Punkt P befindet sich innerhalb einer Hohlkugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = \sqrt{3}$ in einer Entfernung $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Kugelmittelpunkte M. In welche Teile zerlegen die Kugel diejenigen Strahlen, welche nach ihrem Austritt in die optisch dünnere Umgebung der Kugel auf MP senkrecht stehen?

Aufl. Ist β der Einfallswinkel der Strahlen, welche nach ihrer Brechung auf MP senkrecht stehen, so führt die Figur und die Berücksichtigung des Brechungsgesetzes zu der Gleichung:

$$1 + \sin\beta = 6\sin^2\beta,$$

welcher der Wert: $\beta = 30^0$ genügt. Es ist daher bei dem kleineren Kugelteile, welcher von den erwähnten Lichtstrahlen begrenzt wird,

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{36}(24 - 13\sqrt{3}). \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{r^2 \pi}{6}(12 - 5\sqrt{3}).$$

Aufg. 50. Innerhalb einer Kugel vom Radius r und dem Brechungsexponenten $n = 2$ befindet sich in einer Entfernung $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$ vom Kugelmittelpunkte M ein leuchtender Punkt P. Welchen Kugelraum umschliessen diejenigen Strahlen, welche nach dem Austritt aus der Kugel parallel mit PM gehen?

Aufl. Ist α der Winkel, welchen die Strahlen nach ihrem Austritt aus der Kugel in das die Kugel umgebende optisch dünnere Medium mit dem Einfallslot bilden, so führt die Figur und die Berücksichtigung des Brechungsgesetzes von Snellius zu der Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 n^2 - a^2 - r^2}{2ar},$$

wenn man den Fall $\alpha = 0$ unberücksichtigt lässt. Die parallel zu PM aus der Kugel austretenden Strahlen umhüllen demnach einen Kugelteil, bei welchem:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{3.\sqrt{3}}(1 + 2\sqrt{3}). \qquad \text{die Oberfl.} = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3}).$$

Anm.: Ist $n = 1 + \sqrt{3}$ und $a = \frac{r\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$, so ist:

$$\text{das Vol.} = \frac{r^3 \pi}{6\sqrt{2}}\left\{\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\right\}.$$

$$\text{die Oberfl.} = r^2 \pi.\left\{3 - \sqrt{2}\right\}.$$