XV. Programm

des

städtischen Realgymnasiums

zu Borna,

mit welchem zugleich

zu der Entlassung der Abiturienten am 22. März

und

zu den öffentlichen Prüfungen am 21. und 23. März 1888

ergebenst einladet

Professor Dr. Klotzsch,

Rektor.

Inhalt: 1. Über die Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Von Dr. Domsch.
2. Schulnachrichten. Vom Rektor.

1888. Programm Nr. 519.

BORNA.
Druck von Robert Noske.
1888.

Über die Darstellung des Imaginären in der Geometrie.

Von Dr. Domsch.

Einleitende Betrachtungen.

1. Funktionentheoretischer Ausgangspunkt.

Die erste Darstellung imaginärer Grössen durch räumliche Gebilde tritt uns entgegen in der Gaussischen Ebene der komplexen Zahlen. Den Inbegriff der reellen Zahlen denkt man sich auf einer geraden nach beiden Seiten unbegrenzten Linie ausgebreitet, wobei man nur den psychologischen Vorgang, welcher die Zahlen entstehen lässt, zur Anschauung bringt; ein derartiges Bild ist ja die Grundlage aller arithmetischen Betrachtungen. Um dieses Bild auch auf die imaginären Zahlen ausdehnen zu können, ist ein Heraustreten aus der erwähnten geraden Linie erforderlich; die rein imaginären Zahlen ergeben als Bild eine ganz analoge gerade Linie, der Nullpunkt ist beiden gemeinsam. Wir erhalten also als Achsenkreuz zunächst 2 sich schneidende Gerade, die man zur Vereinfachung gegeneinander rechtwinklig annimmt.

Indem man nun das Additionszeichen in derjenigen erweiterten Bedeutung auffasst, dass es auch auf die rechtwinklige Zusammenfügung zweier geraden Linien ausgedehnt wird, erhält man zu jeder komplexen Zahl der Form $a + ib$ einen Punkt der Ebene. Die Gesamtheit der Punkte der Ebene deckt sich mit der Gesamtheit der komplexen Zahlen, wenn man noch die eine Annahme macht, dass das unendlich Weite der Ebene durch einen einzigen Punkt repräsentiert sei, also abweichend wie in der projektiven Geometrie, wo man die unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden gelegen sein lässt.

Diese Annahme verliert ihre Willkürlichkeit, wenn man nicht die Punkte einer Ebene, sondern die einer Kugel als Repräsentanten des komplexen Zahlensystems wählt, und, vielleicht Polarcoordinaten r und φ einführend, zu Kurven $r =$ konst. die Breitenkreise, zu Kurven $\varphi =$ konst. die Längenkreise der Kugel wählt. Die Bedeckung der Ebene mit den komplexen Zahlengrössen erscheint dann, wenn man den oberen Endpunkt des senkrechten Durchmessers der Kugel als Unendlichkeitspunkt, den untern Endpunkt dieser Linie als Nullpunkt wählt, als die stereographische Projektion der Kugelbedeckung mit dem Projektionscentrum im Unendlichkeitspunkt. Die unendlich weiten Punkte der Ebene sind das Bild des einen Punkts der Kugel, des Projektionscentrums.

Die Rechnungen, ausgedehnt auf komplexe Zahlen, die 4 Spezies, das Potenzieren, Wurzelziehen und Logarithmieren finden dann ihr Gegenbild in geometrischen Konstruktionen in der Ebene oder auf der Kugel der komplexen Zahlen.

Es baut sich im weiteren auf diese Darstellung die geometrische Abbildung der Funktionen einer komplexen Variabeln durch die Riemannschen Flächen.

Ist vorgelegt eine algebraische Funktion

$$w = f(z)$$

oder noch allgemeiner eine algebraische Gleichung

$$F\overset{m\;n}{(w\,z)} = o$$

in z vom Grade n in w vom Grade m mit komplexen Koeffizienten, so wird durch die algebraische

Gleichung eine Abbildung der $m$fach überdeckten zEbene auf die $n$fach überdeckte wEbene vermittelt; die verschiedenen Blätter der beiden Riemannschen Flächen hängen dann in den Verzweigungspunkten zusammen.

Durch Betrachtung dieser Riemannschen Flächen kann man rückwärts Schlüsse machen auf die Natur ganzer Klassen von algebraischen Funktionen, die sämtlich dieselben geometrischen Abbildungen besitzen, die im Geschlecht übereinstimmen.* Die Betrachtung wird in der Theorie der Abelschen Funktionen ausgedehnt auf die Integrale solcher algebraischen Funktionen und deren Abbildung auf Riemannsche Flächen.

Bei der ganzen Betrachtungsweise dient die Geometrie wesentlich nur als Hilfsmittel für die Funktionentheorie. Die imaginären Elemente treten infolge dessen nicht geometrisch zwingend auf, sondern sind funktionentheoretisch gegeben und werden dann geometrisch interpretiert.

2. Geometrischer Ausgangspunkt.

Aber auch in der Geometrie sah man sich genötigt, imaginäre Elemente aufzunehmen und diese durch reelle darzustellen. Man musste in der Geometrie von imaginären Gebilden sprechen, um den geometrischen Sätzen dieselbe Allgemeingültigkeit zu verleihen wie den entsprechenden Sätzen der Algebra.

So betrachtet man im binären Gebiet zunächst neben den reellen Punkten der Geraden als Träger, neben den reellen Strahlen eines Strahlbüschels oder den reellen Ebenen eines Ebenenbüschels noch unendlich viele imaginäre Elemente.** Eine homogene Gleichung $n$ten Grades zwischen 2 Variabeln x_1 und x_2 stellt dann immer nElemente des binären Gebiets dar, sofern die Koeffizienten nicht verschwinden. Lässt man die Koeffizienten zunächst noch reell, so sind die imaginären Elemente paarweis konjugiert — von der Form

$$\frac{x_1}{x_2} = a \pm ib.$$

Haben wir eine Gleichung 2ten Grades mit reellen Koeffizienten

$$a_{11}\, x_1{}^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2{}^2 = o$$

also entweder ein reelles oder konjugiert imaginäres Punktpaar, je nachdem die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \triangle < o \text{ oder } > o \text{ ist,***}$$

so definiert bekanntlich

$$a_{11}\, x_1\, y_1 + a_{12}\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1) + a_{22}\, x_2\, y_2 = o$$

immer eine reelle Involution.

Spricht man demnach von konjugiert imaginären Punkten, so denkt man sich dieselben repräsentiert durch die zugehörige reelle Involution.

Schneidet man z. B. einen reellen Kegelschnitt mit einem Strahlbüschel seiner Ebene, so entstehen die Punktepaare einer Involution. Je nachdem das Centrum des Büschels ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegt, besteht das dadurch dargestellte Punktpaar — die Doppelelemente der Involution — aus 2 reellen oder 2 konjugiert imaginären Punkten.

Lässt man einen Kegelschnitt Träger der Punktreihe sein, so werden den reellen Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades reelle Punkte des Kegelschnitts entsprechen, die konjugiert imaginären Wurzelpaare dagegen werden durch ebenso viele reelle Punkte des Kegelschnittinnern dargestellt, die Träger einer Involution $\triangle > o$ sind.

---

* Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, § 6 u. f.

** Man vergleiche für das Folgende: v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage; Klein, Vorlesungen über projektive Geometrie.

*** Für $\triangle = o$ wird die Involution exceptionell.

Im ternären Gebiet stellt $x_1 : x_2 : x_3$ die Punkte einer Ebene, $u_1 : u_2 : u_3$ die Geraden derselben dar. Dass eine Gerade durch einen Punkt geht, resp. ein Punkt auf einer Geraden liegt, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = o.$$

Nun können sowohl die x als die u komplexe Werte annehmen, aber wir nehmen an, noch nicht beide gleichzeitig, die jedesmaligen Koeffizienten sollen noch reell sein.

Dann gilt zunächst, dass konjugiert komplexe Punkte eine reelle Verbindungslinie, konjugiert komplexe Gerade einen reellen Durchschnittspunkt besitzen.

Wir stellen demnach konjugiert komplexe Punkte dar durch die Involution ($\triangle > o$) auf der reellen Geraden, welche jene verbindet, eine Involution, die durch 2 ihrer Punktpaare hinreichend bezeichnet wird.

2 konjugiert komplexe gerade Linien sind gegeben durch einen reellen Punkt und eine Involution ($\triangle > o$) zwischen den Strahlen des durch den Punkt bestimmten Büschels, die durch 2 Strahlenpaare hinreichend bestimmt wird.

Eine Kurve $n$ter Ordnung wird dann von einer jeden Geraden der Ebene in n reellen oder paarweis konjugiert imaginären Punkten geschnitten. Eine Kurve nennen wir reell, wenn die Koeffizienten ihrer Gleichung reell sind, sie kann dann immer noch allein aus imaginären Punkten bestehen.

So unterscheidet man die Kegelschnitte in solche der ersten und solche der zweiten Art, je nachdem sie aus reellen und imaginären oder nur aus imaginären Punkten bestehen. Bei einem Kegelschnitt der 2ten Art, bei welchem man von keinem Punkt einer Geraden, die ihn in konjugiert komplexen Punkten schneidet, reelle Tangenten an denselben ziehen kann, ist das Polarensystem trotzdem reell; zu reellen Punkten der Ebene gehören reelle Polaren. Durch das Polarensystem ist alsdann der Kegelschnitt hinreichend charakterisiert, durch dasselbe wird er dargestellt.

Betrachten wir bei den Kegelschnitten der ersten Art die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden, so sind diese wiederum entweder reell (Fall der Hyperbel), zusammenfallend (Parabel) oder konjugiert imaginär (Ellipse). Ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen schneiden die unendlich ferne Gerade in denselben Punkten. Also schneiden die Kreise der Ebene jene Gerade auch in denselben festen, konjugiert imaginären Punkten, in den beiden Kreispunkten, die bei homogener Schreibweise, wenn $x_3 = o$ die unendlich ferne Gerade darstellt, repräsentiert werden durch die Gleichungen

$$x_3 = o$$
$$x_1^2 + x_2^2 = o \text{ oder } x + iy = o,\ x - iy = o.$$

Die Kreispunkte sind demnach die Durchschnittspunkte der unendlich fernen Geraden mit den 2 imaginären Geraden, die auch bei der Definition des Winkels zweier Strahlen eine Rolle spielen. Wir können ja bekanntlich den Winkel zweier Geraden definieren als den durch $2i$ dividierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden Geraden mit den imaginären Verbindungslinien einschliessen, die sich von ihrem Durchschnittspunkt aus nach den Kreispunkten hinerstrecken.

Gehen wir zum quaternären Gebiet, zum Raum über, so stehen hier den konjugiert imaginären Punkten die konjugiert imaginären Ebenen gegenüber, die eine reelle Durchschnittsgerade besitzen und auf derselben als Axe eine Involution des hindurchgehenden Ebenenbüschels bestimmen.

Die imaginären Geraden zerfallen hier in 2 Arten. Zwei konjugiert imaginäre Gerade können sich nämlich schneiden, also einen reellen Punkt und damit auch eine reelle Ebene gemein haben; dann gehören sie einem reellen Strahlbüschel an und sind dargestellt durch eine Involution desselben. Diese mögen imaginäre Gerade der ersten Art heissen.*

* Man nennt sie auch punktiert imaginäre Gerade.

Im allgemeinen aber werden sich die konjugiert imaginären Geraden nicht schneiden, sondern eine windschiefe Lage gegeneinander haben. Dann können wir sie ansehen, als die Direktricen einer Kongruenz erster Ordnung und Klasse.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine reelle Transversale der konjugiert imaginären Geraden, in jeder Ebene liegt eine solche.

Jede dieser Transversalen ist Träger einer Punktinvolution mit den Schnittpunkten als Doppelelementen und einer Ebeneninvolution mit den imaginären Ebenen durch die Transversale und die gegebenen imaginären Geraden als Doppelelementen. Solche imaginäre Gerade wollen wir von der 2ten Art nennen.

Betrachten wir z. B. die Flächen 2ter Ordnung, so treten uns die verschiedenen Arten der Geraden entgegen.

Die Flächen 2ter Ordnung enthalten 2 Scharen gerader Linien, die Geraden derselben Schar sind windschief, 2 Gerade verschiedener Scharen schneiden sich immer.

Ist die Gleichung der Fläche von der Form

$$\text{I.)}\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = o,$$

so sind dadurch reelle Flächen ohne reelle Punkte dargestellt. (Wir nennen die Flächen reell, weil die Koeffizienten ihrer Gleichung reell sind.) Alle Gerade sind dann imaginär von der 2ten Art.

Wenn die Gleichung die Form hat

$$\text{II.)}\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c_2} - 1 = o,$$

so erhalten wir Ellipsoide und 2schalige Hyperboloide. In diesem Falle sind alle Gerade imaginär von der ersten Art.

Die Flächen, deren Gleichung die Form hat.

$$\text{III.)}\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = o$$

sind die geradlinigen Flächen 2ter Ordnung im eigentlichen Sinne. Sie enthalten reelle Gerade und imaginäre Gerade 2ter Art, aber keine solchen der ersten Art.

Geometrische Deutung der Gleichungen zwischen 2 komplexen Variabeln.

Wir wollen nun die Bedingung fallen lassen, dass die Koeffizienten der vorgelegten Gleichungen reell seien, und für das ternäre Gebiet — die Ebene zunächst — untersuchen, welche geometrische Bedeutung bei vollständig beliebigen Koeffizienten die Gleichungen zwischen 3 homogenen, respektive 2 nicht homogenen Veränderlichen annehmen. Wir folgen hierbei den Anregungen, die Herr Lie in einer Note „Über die Repräsentation des Imaginären in der Geometrie", Crellesches Journal Bd. 70, p. 346 gab, sowie den Ausführungen desselben Verfassers in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Kristiania, 1869, und glauben, dass die Darlegung und weitere Ausführung der Lieschen Gedanken auch für ein weiteres Publikum nicht ohne Interesse ist, zumal da die Berichte der genannten Gesellschaft nur einem kleinen Kreise von Fachgenossen zugänglich sein dürften.

1. Kapitel.

Imaginäre Punkte und imaginäre Gerade.

Die Ebene als Träger der imaginären Punkte und Geraden wird jetzt ∞^4 Punkte und ∞^4 Gerade enthalten, also vierdimensional angenommen werden müssen. Die Koordinaten eines Punktes

$$x_1 : x_2 : x_3$$

und einer Geraden

$$u_1 : u_2 : u_3$$

enthalten 4 willkürliche Grössen, es ist z. B.

$$1.)\quad \frac{x_1}{x_2} = X = x + i\,y, \quad \frac{x_2}{x_3} = Z = z + ip.$$

Herr Lie lässt nun den imaginären Punkt $(X\,Z)$ repräsentiert werden durch den Raumpunkt $(x\,y\,z)$, indem er diesem Raumpunkt noch das Gewicht p zuerteilt, so dass derselbe Raumpunkt das Bild von ∞^1 imaginären Punkten der Ebene ist, die sich untereinander durch den Wert von p unterscheiden.

Wenn $p = o$ und $y = o$, erhalten wir die reellen Punkte der gegebenen Ebene, die wir als $z\,x$ Ebene annehmen, in Übereinstimmung mit der Bezeichnung in den Gleichungen 1.). Ist p allein gleich Null, so wollen wir den Punkt einen **Nullpunkt** nennen; er wird dann repräsentiert durch einen Raumpunkt an sich.

Haben wir nun eine homogene Gleichung

$$F\,(x_1\,x_2\,x_3) = o$$

mit komplexen Koeffizienten zwischen den x_i, so definiert jedes Wertsystem $(x_1\,x_2\,x_3)$, welches der Gleichung genügt, einen Raumpunkt mit einem bestimmten Gewicht. Die Gesamtheit derselben stellt dann die imaginäre Kurve dar, die der gegebenen Gleichung entspricht; sie wird, wie wir sehen werden, versinnlicht durch eine Fläche im Raume.

Wir wollen dies zunächst an dem Beispiel der imaginären Geraden erläutern.

Setzen wir in der allgemeinen Gleichung der Geraden

$$2.)\quad u_1\,x_1 + u_3\,x_2 + u_2\,x_3 = o$$

$$\frac{x_1}{x_3} = X, \quad \frac{x_2}{x_3} = Z, \quad \frac{u_3}{u_1} = -A, \quad \frac{u_2}{u_1} = -B,$$

so nimmt 2.) die Form an

$$3.)\quad B\,Z = X - A.$$

Ist

$$A = a_1 + i\,a_2 \qquad B = b_1 + i\,b_2,$$

so löst sich die Gleichung 3.) in die 2 reellen Gleichungen auf

$$4.)\left\{\begin{array}{l} b_1\,z - b_2\,p = x - a_1 \\ b_2\,z + b_1\,p = y - a_2 \end{array}\right.$$

oder, indem wir das eine Mal p, das andere Mal z eliminieren,

$$5.)\left\{\begin{array}{ll} (b_1^2 + b_2^2)\,z = b_1\,(x - a_1) + b_2\,(y - a_2) & U = o \\ (b_1^2 + b_2^2)\,p = b_1\,(y - a_2) - b_2\,(x - a_1) & V = o \end{array}\right.$$

Die **Gleichung** $U = o$ stellt uns **eine Ebene dar, den Ort der Imaginär-Punkte der gegebenen Imaginär-Geraden** 3.), $V = o$ **eine Schar Vertikalebenen, die** $U = o$ **vertikal schneiden und so auf** $U = o$ **eine Streifung erzeugen.**

Die Punkte eines Streifens haben dasselbe p; ausgezeichnet ist der Streifen mit $p = o$; wir nennen denselben den **Nullstreifen** oder **die Nullgerade der gestreiften Ebene**; er ist dargestellt durch die Gleichungen

$$6.)\left\{\begin{array}{l} b_1\,z = x - a_1 \\ b_2\,z = y - a_2 \end{array}\right.$$

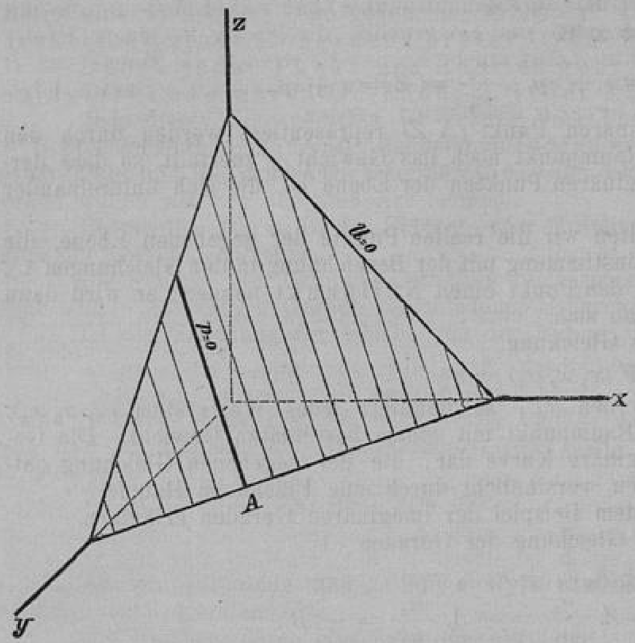
Die Gleichung der speziellen Geraden

$$Z = c \text{ (wo } c \text{ reell ist)}$$

stellt die Punkte einer Horizontalebene $z = c$ dar, die **sämtlich Nullpunkte** sind.

In der Gleichung 3.) der imaginären geraden Linie ist A die komplexe Grösse, die sich für X ergiebt, wenn man $Z = o$ setzt, sie wird also dargestellt durch die Strecke vom Koordinatenanfang zum Schnittpunkt mit der Nullgeraden, ein Punkt, der eben durch A bezeichnet wird $(x = a_1,\ y = a_2)$ (siehe Fig. 1).

Fig. 1.



Für $Z = 1$ wird $B = X - A$.

Es bezeichnet also B nach Grösse und Richtung die Projektion einer Strecke der Nullgeraden, die von den Ebenen $z = o$ und $z = 1$ begrenzt wird, auf die xy Ebene.

Eine abkürzende Bezeichnung wollen wir an dieser Stelle noch einführen, mit Herrn Lie nämlich statt imaginärer Geraden, imaginärer Kurve, imaginärer Punkte kurz schreiben J-Gerade, J-Kurve, J-Punkte.

Lassen wir in der Gleichung 3.) X und Z konstant sein, also A und B veränderlich, so stellt uns die Gleichung 3.) die J-Geraden dar, die durch den J-Punkt (XZ) gehen.

Legen wir das Ebenenbündel durch den Punkt $(x\,y\,z)$, so werden wir in jeder Ebene eine bestimmte Streifung erhalten, also auch eine bestimmte Nullgerade, die nur dann durch den Raumpunkt $(x\,y\,z)$ selbst geht, wenn der gegebene Punkt ein Nullpunkt war.

Diese ∞^2 Nullgeraden bilden eine Linienkongruenz, die definiert ist durch

$$p = \text{konst.}$$

oder nach 5.)

$$7.)\quad \frac{b_1\,(y - a_2) - b_2\,(x - a_1)}{\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}} = \text{konst.}$$

In dieser Gleichung bezeichnet aber der erste Faktor nichts anderes als die Entfernung e des gegebenen Punktes von einer der Nullgeraden, der 2te Faktor, wenn wir uns der Bedeutung von B erinnern, die Tangente des Neigungswinkels α der betreffenden Nullgeraden gegen die $x\,y$ Ebene.

Die Gleichung unserer Linienkongruenz ist also

$$8.)\quad e\;tg\;\alpha = \text{konst.}$$

Für Punkte, die in einem Horizontalkreise um $(x\,y\,z)$ liegen, ist also die Neigung der Kongruenzgeraden dieselbe. Für $\alpha = 90^0$ wird $e = o$, für $\alpha = o^0$ wird $e = \infty$. Es folgt hieraus, dass die Geraden sich zu einschaligen Hyperboloiden zusammenordnen, welche die Horizontalebene durch den Punkt $(x\,y\,z)$ in Kreisen schneiden. Die Senkrechte durch den Punkt $(x\,y\,z)$, die Achse der Kongruenz, ist umgeben von immer flacher werdenden Hyperboloiden. Die Erzeugenden dieser Flächen stehen rechts oder links herum, je nachdem $tg\alpha$ positiv oder negativ ist, jenachdem die Horizontalprojektion der Nullgeraden eine positive oder negative Rotation um die zAxe bestimmt.

Die Kreispunkte der Horizontalebene sind sämtlichen Hyperboloiden gemein; durch dieselben gehen also unendlich viele Geraden der Kongruenz. Dann müssen die Direktricen durch diese Kreispunkte hindurchgehen, die Direktricen der Kongruenz sind Minimallinien, konjugiert imaginäre Gerade der 2ten Art, die die Axe in 2 Punkten schneiden, die vom Centrum $(x\,y\,z)$ um $\pm\,p\,i$ entfernt sind.*

---

* cf. Plücker, Neue Geometrie des Raumes p. 70.

Ist A die komplexe Koordinate des Schnittpunkts einer der Geraden der Kongruenz mit der Ebene $z = o$, so ist die Koordinate des Schnittpunkts mit $z = 1$ $A + B$, die mit $z = m$ $A + m B$. Greifen wir die Geraden der Kongruenz, die $z = o$ in einem Kreise schneiden, heraus, liegen also die Punkte A auf einem Kreise, so werden die Werte von B einander gleich; denn der Neigungswinkel α ist ja für solche Punkte konstant. Daraus folgt, dass alle Horizontalebenen in Kreisen geschnitten werden.

Unter der Kongruenz P verstehen wir demnach mit Herrn Lie die Kongruenz der Nullgeraden von denjenigen J-Geraden, die durch den J-Punkt P oder $(X Z)$ gehen.

Wir definieren den J-Punkt P durch diese Kongruenz von reellen Geraden, deren Centrum $(x y z)$, deren Konstante $p i$, und deren Direktricen die erwähnten Minimallinien sind.

Damit stellen wir jeden J-Punkt der vierfach ausgedehnten Ebene dar durch ein Minimalgeradenpaar, durch dasjenige nämlich, welches die zum J-Punkt gehörige Kongruenz bestimmt. Jede der Minimalgeraden geht durch einen der horizontalen Kreispunkte. Den vierfach unendlich vielen Punkten $(x y z p)$ stehen gegenüber die vierfach unendlich vielen Paare von horizontalen Minimalgeraden.

Greifen wir irgend ein solches Minimalgeradenpaar heraus, so erhalten wir den zugehörigen Punkt, indem wir die senkrecht nach oben gerichtete Transversale ermitteln; dieselbe ist eindeutig bestimmt, da durch jeden Punkt ein Strahl der durch die beiden Minimalgeraden gegebenen Kongruenz geht, also auch durch den senkrecht nach oben gelegenen Unendlichkeitspunkt. Auf dieser Transversale ist durch die Schnittpunkte mit dem Minimallinienpaar eine Involution bestimmt; ermitteln wir den zum Unendlichkeitspunkt konjugierten Punkt, so erhalten wir den Raumpunkt $(x y z)$, die Grösse von $p i$ ist uns in der Strecke der senkrechten Transversalen zwischen den Minimallinien gegeben. Schneiden sich die Minimallinien im speziellen Falle, so wird $p = o$, wir erhalten einen Nullpunkt.

Noch eines Umstandes wollen wir hierbei Erwähnung thun. Gehen wir noch einmal von dem J-Punkt $(x y z p)$ aus, errichten also im Raumpunkt $(x y z)$ auf der Horizontalebene die Senkrechte als Axe der Kongruenz und tragen auf derselben nach beiden Seiten $p i$, resp. $-p i$ ab, so können wir jeden dieser Endpunkte mit den horizontalen Kreispunkten verbinden, erhalten also in diesen 2 Paaren von Minimalgeraden auch 2 Paar Direktricen und damit 2 Kongruenzen.

Wir haben aber auch 2 J-Punkte $(x y z p)$ und $(x y z - p)$ dargestellt, und es bedarf, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, nur der Übereinkunft, die wir von vorn herein zu treffen haben, in welcher Weise wir die Kreispunkte den Axenendpunkten zuordnen wollen. Die Kongruenz $(x y z - p)$ unterscheidet sich von der Kongruenz $(x y z + p)$ nur durch den Neigungswinkel ihrer Geraden; es ist jetzt $tg\ \alpha$ negativ, wir haben, wenn $p = + c$ ein rechts gewundenes Strahlensystem darstellte, in $p = - c$ ein links gewundenes Strahlensystem. Der Übergang zwischen beiden Arten von Kongruenzen wird vermittelt durch $p = o$; dann schneiden sich die Minimalgeraden in einem reellen Punkte, die Kongruenz degeneriert zu einem Strahlenbündel.

Betrachten wir ein beliebiges der Hyperboloide mit kreisförmigem Horizontalschnitt, deren Erzeugende der Kongruenz $(x y z p)$ angehören, so gilt dies natürlich nur von der einen Erzeugendenschar. Die 2te Schar von Erzeugenden gehört zu der konjugierten* Kongruenz oder dem konjugierten J-Punkt $(x y z - p)$.

Der Satz, dass 2 Punkte P_1 und P_2 eine Gerade gemein haben, erscheint jetzt in der Fassung, dass 2 Nullgeraden-Kongruenzen P_1 und P_2 eine Gerade gemein haben, abgesehen von der horizontalen unendlich fernen Geraden, die allen Kongruenzen gemeinschaftlich ist.

* konjugiert im Plückerschen Sinne, a. a. O. p. 77.

Unter der Nullgeraden der J-Geraden $(P_1\, P_2)$ verstehen wir also die gemeinschaftliche Gerade der 2 Kongruenzen P_1 und P_2.

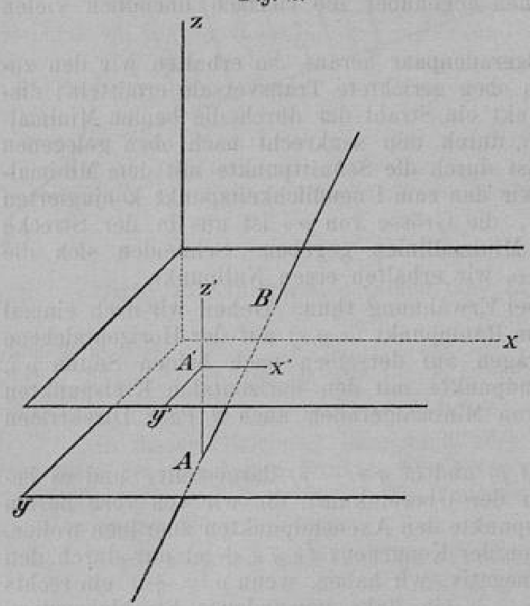
Sind die J-Punkte Nullpunkte, so geht die gemeinschaftliche Gerade durch den Ort dieser Punkte.

Sind die beiden J-Punkte nur durch das Zeichen von p unterschieden, so ist die gemeinsame Gerade der beiden Kongruenzen die gemeinschaftliche Axe.

Umgekehrt gilt für unsere vierdimensionale Ebene auch noch der Satz, dass 2 Gerade sich in einem Punkte schneiden, die Nullgeraden 2er J-Geraden bestimmen eine Kongruenz P_1, als einen J-Punkt.

Repräsentieren wir eine beliebige J-Gerade durch die zugehörige Projektion in den 3-dimensionalen Raum, durch die Nullgerade, so wird letztere bestimmt durch die Werte der Grössen A und B der Gleichung 3.). A und B sind aber die komplexen Koordinaten der Durchstosspunkte mit den Ebenen $z = o$ und $z = 1$, letzterer Durchschnitt allerdings bezogen auf ein mit A bewegliches Koordinatensystem, der Anfangspunkt A' variiert mit A (siehe Fig. 2).

Fig. 2.



Würden wir jedoch statt B einführen $A + B = C$, so würde das Koordinatensystem in $z = 1$ fest und analog dem in $z = o$.

Die Gesamtheit der Nullgeraden der 4-dimensionalen Ebene deckt sich mit der Gesamtheit der Geraden des dreidimensionalen Raumes. Wir können demnach auch eine beliebige Raumgerade durch die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit 2 parallelen Ebenen bestimmen. Die Grössen A und B oder die darin enthaltenen 4 reellen $a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ sind dann als die Koordinaten der Geraden im Raume anzusehen.

Und in der That stimmen bei unseren Festsetzungen die Grössen $a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ überein mit den Plückerschen Strahlenkoordinaten einer Geraden im Raume, sie sind bei ihm bezeichnet mit $\varrho\, \sigma\, r$ und s.* Diese Übereinstimmung ergiebt sich ohne weiteres aus der Form der Gleichungen 6.) p. 7.

Es wird im Folgenden also gleichgültig sein, ob wir von der Nullgeraden der gestreiften Ebene oder der Raumgeraden sprechen, beide sind im wesentlichen identische Begriffe und werden durch dieselben Grössen dargestellt.

Betrachten wir neben der Raumgeraden $(a_1 + i\, a_2,\ b_1 + i\, b_2)$ die Gerade mit den konjugierten Koordinaten $(a_1 - i\, a_2,\ b_1 - i\, b_2)$ so findet sich, dass für solche 2 Gerade die Bedingung des Schneidens erfüllt ist, sie haben einen reellen Punkt gemein. Als Nullgeraden von J-Geraden aufgefasst bestimmen sie also einen Nullpunkt, und wir sehen, es gilt auch jetzt noch der Satz:

Konjugiert imaginäre J-Gerade schneiden sich in einem reellen Punkte.

Solche konjugiert imaginäre Gerade liegen jeweils symmetrisch in Bezug auf die $x\,z$ Ebene; also fällt ihr Schnittpunkt in dieselbe hinein. Die $x\,z$ Ebene war aber diejenige, deren J-Geraden wir betrachten. Die reellen Punkte der angenommenen Ebene sind also die reellen Durchschnittspunkte der darin enthaltenen konjugierten J-Geraden.

* Plücker, a. a. O. p. 1.

Ebenso ergiebt sich durch eine einfache Betrachtung, dass die gemeinschaftlichen Geraden konjugierter Kongruenzen $(x\,y\,z\,p)$ und $(x - y\;z - p)$ die $x\,z$ Ebene erfüllen.

Die Verbindungsgeraden konjugierter J-Punkte der angenommenen Ebene sind reelle Gerade derselben.

2. Kapitel.

Imaginäre Kurven.

Ist vorgelegt eine Gleichung $n$ten Grades zwischen X und Z:

$$1.)\; F_n\,(X\,Z) = o$$

oder nach Scheidung der reellen und imaginären Bestandteile

$$2.)\; F_n'\,(x\,y\,z\,p) = o, \qquad F_n''\,(x\,y\,z\,p) = o$$

so ergiebt die Elimination von p, resp. von z

$$3.)\; U = f_n'^2\,(x\,y\,z) = o, \qquad V = f_n''^2\,(x\,y\,p) = o.$$

$U = o$, eine Fläche vom Grade n^2, enthält die Punkte der Imaginärekurve; auf ihr erhalten wir eine Streifung durch die Schar der vertikalen Cylinder $V = o$. Setzen wir in 2.) $p = o$, so erhalten wir den Nullstreifen der Imaginär-Kurve, derselbe ist der Schnitt 2er Flächen $n$ter Ordnung, also vom Grade n^2.

Da der Satz, dass eine Gleichung $n$ten Grades n Wurzeln besitzt, in voller Allgemeinheit, auch für komplexe Koeffizienten gilt, so werden, wenn wir die Gleichung 1.) mit einer linearen Gleichung zwischen X und Z kombinieren, n Wertsystem $(X\,Z)$ die gemeinsamen Lösungen bilden. Daher der Satz:

Eine J-Kurve $n$ten Grades wird von einer beliebigen J-Geraden in n J-Punkten geschnitten.

Eine horizontale Ebene — eine J-Gerade, die nur aus Nullpunkten besteht — wird also den Nullstreifen der J-Kurve in n Punkten schneiden.

Betrachten wir die zu der Gleichung 1.) gehörige Riemannsche Fläche, so werden wir, wenn der Grad sowohl in X als in Z bis n ansteigt, die Gaussische Ebene X und Z mit je n Blättern zu überdecken haben. Die Anzahl der Verzweigungspunkte w beider Riemannschen Flächen ergiebt sich aus der Gleichung

$$4.)\; w = n\,(n - 1) - 2\,d - 2\,r$$

wo d die Anzahl der simultanen Lösungen von

$$5.)\; F\,(X\,Z) = o, \qquad \frac{\partial F}{\partial X} = o, \qquad \frac{\partial F}{\partial Z} = o$$

und r die Anzahl der Lösungen von

$$6.)\; \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Z}\right)^2 = o \;*$$

bedeutet.

Ziehen wir eine imaginäre Kurve $n$ter Klasse in Betracht, so wird diese durch eine Relation $n$ten Grades zwischen A und B dargestellt sein:

$$F_n\,(A\,B) = o$$

Diese Gleichung zerfällt wiederum in 2 vom $n$ten Grade zwischen den reellen Grössen a_1, a_2, b_1, b_2. Die imaginäre Kurve wird also dargestellt durch eine Kongruenz von Raumgeraden. Die Brennflächen derselben sind 2 nach den horizontalen Kreispunkten gerichtete Kegel. Je 2 benachbarte Gerade bestimmen eine lineare Kongruenz, also auch einen Imaginär-Punkt. So können wir sagen, dass die Geraden der Linienkongruenz die Imaginärkurve umhüllen.

---

* Riemann, a. a. O. § 6 u. § 7.

Die sich schneidenden benachbarten Geraden der Kongruenz bestimmen die Nullpunkte der J-Kurve, den Nullstreifen der J-Kurve als Ordnungskurve aufgefasst. Dieser Nullstreifen ist der reelle Schnitt der beiden Brennflächen, jener oben erwähnten imaginären Kegel.

Wie vorhin jede J-Gerade mit der Ordnungskurve $F_n(XZ) = o$ n J-Punkte gemein hatte, so gehen jetzt durch jeden J-Punkt n Gerade der Kongruenz $F_n(AB) = o$.

3. Kapitel.

Doppelverhältnisse.

Das Doppelverhältnis von 4 Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 einer Geraden der Ebene mit den Koordinaten bez. $x_1 z_1$, $x_2 z_2$, $x_3 z_3$, $x_4 z_4$, ist dasselbe wie das der Projektionen auf eine der Axen. Durch

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}$$

ist das Doppelverhältnis der 4 Punkte bestimmt.

Analog definieren wir mit Herrn Lie das Doppelverhältnis von 4 J-Punkten $(P_1 P_2 P_2 P_2)$ derselben J-Geraden durch

$$1.) \quad \frac{X_1 - X_3}{X_1 - X_4} \cdot \frac{X_2 - X_4}{X_2 - X_3},$$

das Doppelverhältnis der Projektionen auf $Z = o$. Das Doppelverhältnis ist reell, wenn die 4 Projektionspunkte in $Z = o$ auf einem Kreise liegen, wenn also in dem durch die 4 Punkte $X_1 X_2 X_3 X_4$ dargestellten Viereck die Summe 2er gegenüberliegender Winkel 2 Rechte beträgt.

In analoger Weise können wir das Doppelverhältnis von 4 Geraden der Ebene $l_1 l_2 l_3 l_4$, die durch einen Punkt gehen, bestimmen durch das der 4 Schnittpunkte mit einer der Axen, z. B. mit der x-Axe.

Das Doppelverhältnis von 4 J-Geraden $L_1 L_2 L_3 L_4$, die durch einen J-Punkt P gehen, also einer Kongruenz angehören, definieren wir demnach durch das Doppelverhältnis der 4 Schnittpunkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit $Z = o$, also durch

$$2.) \quad \frac{A_1 - A_3}{A_1 - A_4} \cdot \frac{A_2 - A_4}{A_2 - A_3}.$$

Das Doppelverhältnis ist reell, wenn die 4 Punkte in einem Kreise liegen, wenn also die 4 Geraden $L_1 L_2 L_3 L_4$ Erzeugende eines Hyperboloids mit horizontalem Kreisschnitt sind.

4 beliebige Erzeugende derselben Schar eines solchen Hyperboloids bestimmen stets ein reelles Doppelverhältnis. Sind die Doppelverhältnisse 1.) und 2.) von je 4 komplexen Punkten resp. von je 4 komplexen Geraden reell, so sind sie identisch mit den Doppelverhältnissen der synthetischen Geometrie.

Bezeichnen $L_1 L_2 L_3 L_4$ 4 beliebige J-Gerade, $l_1 l_2 l_3 l_4$ die entsprechenden Nullgeraden und λ eine Nullgerade, die die 4 gegebenen in 4 Punkten schneidet, so definiert das Doppelverhältnis dieser 4 Punkte das Doppelverhältnis der 4 gegebenen Geraden.

3. Kapitel.

Übertragung von plangeometrischen Sätzen auf den Raum.

Wir sind nun in den Stand gesetzt, die Sätze der ebenen Geometrie zu übertragen auf die räumliche Geometrie, zunächst wenigstens soweit die geometrischen Sätze durch algebraische Gleichungen ausgedrückt werden können.

Die Sätze der Algebra behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die darin vorkommenden Grössen nicht mehr reell sind, sondern komplexe Werte annehmen. Also werden geometrische Sätze, die algebraisches Äquivalent besitzen — Gleichungen zwischen reellen Zahlengrössen —, auch die Geltung von anderen geometrischen Sätzen nach sich ziehen, die das geometrische Äquivalent der auf das komplexe Gebiet erweiterten algebraischen Grössenbeziehungen sind. Nur die geometrischen Sätze bedürfen nach der Übertragung noch der besonderen Verifikation, die nicht algebraisch ausgedrückt werden können.

Zunächst lassen sich die Sätze der elementaren ebenen Geometrie unschwer in solche, die sich auf den Raum beziehen, übertragen.

3 Gerade der Ebene $l_1\, l_2\, l_3$, die nicht durch denselben Punkt gehen, schneiden sich in 3 Punkten $P_1\, P_2\, P_3$, bilden ein Dreieck. Die Geraden der Ebene verwandeln sich bei der Ausdehnung der Grössen auf das komplexe Gebiet in solche des Raumes. Wir erhalten die 3 Raumgeraden $L_1\, L_2\, L_3$; je 2 von ihnen sind jeweils Gerade einundderselben Kongruenz, $L_1\, L_2$ mag der Kongruenz P_3, $L_2\, L_3$ der Kongruenz P_1, $L_3\, L_1$ der Kongruenz P_2 angehören; jede Gerade wird also von 2 Direktricenpaaren — Minimalgeraden durch die horizontalen Kreispunkte — geschnitten, wir haben den 3 Eckpunkten des ebenen Dreiecks entsprechend 3 solche Direktricenpaare. Die Geraden $L_1\, L_2\, L_3$ bestimmen ausserdem ein Hyperboloid. Das Analogon zu einem Dreieck in der Ebene ist also ein Geradentripel eines Hyperboloids, von denen je 2 durch dieselben horizontalen Minimalgeraden geschnitten werden. Es liegt nahe, den Winkel 2er solcher Geraden zu definieren durch das Doppelverhältnis, welches sie auf den jedesmaligen gemeinschaftlichen Direktricen bestimmen, wobei als Grundpunkte der Schnittpunkt mit der Axe der Kongruenz des gemeinsamen Punkts P und der Unendlichkeitspunkt auftreten. Wir können dann in solch einem Dreieck auf dem Hyperboloid von Winkelhalbierungslinien reden; eine solche muss je mit der Gegenseite im Dreieck in einer Kongruenz liegen, ist also vollständig bestimmt.

Die 3 Winkelhalbierungslinien im Raumdreieck müssen sich dann wie in der Ebene in einem Punkt schneiden, d. h. derselben Kongruenz angehören. Dies sei ein Beispiel, wie sich die Sätze der elementaren Geometrie verallgemeinern lassen.

Der Satz des Pappus, dass 4 Punkte dasselbe Doppelverhältnis besitzen, wie 4 Strahlen, die man von irgend einem Punkt aus nach den 4 gegebenen Punkten zieht, behält natürlich seine Gültigkeit. Wenden wir ihn an auf 4 Erzeugende eines Hyperboloids mit kreisförmigem Horizontalschnitt, die Nullgeraden also von 4 J-Geraden durch denselben J-Punkt, die ein reelles Doppelverhältnis bestimmen, so werden diese von jeder Erzeugenden der andern Art, den Nullgeraden der J-Geraden durch den konjugierten J-Punkt P' in konstantem Doppelverhältnis geschnitten, — ein bekannter Satz aus der Theorie von den Linienflächen 2ten Grades.

Ein J-Kegelschnitt wird dargestellt durch eine gestreifte Fläche $U = o$, im allgemeinen vom vierten Grade. Jede Gerade des Raumes gehört 2 Kongruenzen des J-Kegelschnitts an, wie sie n Kongruenzen einer J-Kurve vom $n$ten Grade angehört. In jeder Kongruenz P finden sich 2 Gerade, die Nullgerade von J-Tangenten des J-Kegelschnitts sind.

Sei die Gleichung eines J-Kegelschnitts gegeben in der homogenen Form:

$$1.)\ \sum_{i=1,2,3}\ \sum_{k=1,2,3} A_{ik}\, X_i\, X_k = o$$

wo

$$A_{ik} = a'_{ik} + i\, a''_{ik}\,, \quad X_i = x'_i + i\, x''_i\,.$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandteile zerfällt 1. in die 2 Gleichungen

$$2.)\ \begin{cases} \Sigma\,\Sigma\, a'_{ik}\,(x'_i\, x'_k - x''_i\, x''_k) - a''_{ik}\,(x''_i\, x'_k + x'_i\, x''_k) = o \\ \Sigma\,\Sigma\, a''_{ik}\,(x'_i\, x'_k - x''_i\, x''_k) + a'_{ik}\,(x''_i\, x'_k + x'_i\, x''_k) = o \end{cases}$$

Um nun den Nullstreifen des J-Kegelschnitts zu erhalten, setzen wir in 2.) x_2'', unser früheres p, gleich Null; dann erhalten wir die Gleichungen 2er Flächen 2ten Grades, deren Schnittkurven den Nullstreifen darstellt.

Setzen wir

$$x'_1 = x_1\,,\quad x''_1 = x_2\,,\quad x'_2 = x_3\quad x''_2 = o\quad x'_3 = x_4\quad x''_3 = o;$$

dann sind die Flächen 2ten Grades repräsentiert durch

$$3.)\begin{cases} a'_{11}\,x_1^{\,2} - 2a''_{11}\,x_1\,x_2 + 2a'_{12}\,x_1\,x_3 + 2a'_{13}\,x_1\,x_4 - a'_{11}\,x_2^{\,2} - 2a''_{12}\,x_2\,x_3 \\ \qquad - 2a''_{13}\,x_2\,x_4 + a'_{22}\,x_3^{\,2} + 2a'_{23}\,x_3\,x_4 + a'_{33}\,x_4^{\,2} = o \\ a''_{11}\,x_1^{\,2} + 2a'_{11}\,x_1\,x_2 + 2a''_{12}\,x_1\,x_3 + 2a''_{13}\,x_1\,x_4 - a''_{11}\,x_2^{\,2} + 2a'_{12}\,x_2\,x_3 \\ \qquad + 2a'_{13}\,x_2\,x_4 + a''_{22}\,x_3^{\,2} + 2a''_{23}\,x_3\,x_4 + a''_{33}\,x_4^{\,2} = o. \end{cases}$$

Der Nullstreifen ist also eine Raumkurve 4ter Ordnung vom Geschlecht 1.

Die Raumkurve erhält einen Doppelpunkt, wenn die beiden Flächen, die sie bestimmen, sich berühren. Tritt dieser Fall zweimal ein, so zerfällt die Kurve 4ter Ordnung, entweder in eine Raumkurve 3ter Ordnung und eine Gerade oder in 2 Kegelschnitte. Wenn die Berührungspunkte auf einer Erzeugenden der Flächen liegen, so findet das erstere statt. Wenn die Berührungspunkte nicht derselben Erzeugenden angehören, zerfällt die Kurve in 2 Kegelschnitte.

Nennen wir die Koeffizienten in 3.) kurz

$$aik \text{ und } bik, \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

so stellt

$$\sum_{ik = 1, 2, 3, 4} (aik + \lambda\, bik)\, xi\, xk = o$$

das Flächenbüschel 2ten Grades dar, das durch den Nullstreifen bestimmt wird. Wenn man dann die Determinante aus den Koeffizienten gleich Null setzt

$$4.)\ |\, aik + \lambda\, bik \,| = o,$$

so ist diese Gleichung vom 4ten Grade in λ, giebt also 4 Werte, denen die 4 Kegel entsprechen, die dem Büschel angehören. Hat die Gleichung 4.) 2 Doppelwurzeln λ, so ist dies ein Kriterium für das Zerfallen der Raumkurve 4ter Ordnung.

Schreibt man die Gleichung 4.) ausführlich hin, so erkennt man ohne Schwierigkeit, dass sie erfüllt wird für $\lambda = +i$ und $\lambda = -i$; denn dann werden die ersten beiden Horizontal- resp. Vertikalreihen bis auf einen Faktor einander gleich. Für jedes mögliche Flächenbüschel kennen wir demnach immer 2 der darin enthaltenen Kegel. Setzen wir $\lambda = \pm i$ in die Gleichung des Flächenbüschels ein, so erhalten wir als Gleichungen dieser Kegel:

$$5.)\begin{cases} A_{11}\,(x_1 + i\,x_2)^{\,2} + 2\,A_{12}\,x_3\,(x_1 + i\,x_2) + 2\,A_{13}\,x_4\,(x_1 + i\,x_2) \\ \qquad + A_{22}\,x_3^{\,2} \pm 2\,A_{23}\,x_3\,x_4 + A_{33}\,x_4^{\,2} = o \\ \overline{A}_{11}\,(x_1 - i\,x_2)^{\,2} + 2\,\overline{A}_{12}\,x_3\,(x_1 - i\,x_2) + 2\,\overline{A}_{13}\,x_4\,(x_1 - i\,x_2) \\ \qquad + \overline{A}_{22}\,x_3^{\,2} + 2\,\overline{A}_{23}\,x_3\,x_4 + \overline{A}_{33}\,x_4^{\,2} = o, \end{cases}$$

wo für $a'ik + i\,a''ik$ rückwärts Aik gesetzt ist und $\overline{Aik}$ konjugiert imaginär mit Aik ist.

Setzen wir in 5.) $x_3 = o$, so erhalten wir als Schnitt mit der horizontalen Koordinatenebene:

$$6.)\begin{cases} x_1 + i\,x_2 = o \qquad 2\,A_{13}\,x_4 + A_{11}\,(x_1 + i\,x_2) = o \\ x_1 - i\,x_2 = o \qquad 2\,\overline{A}_{13}\,x_4 + \overline{A}_{11}\,(x_1 - i\,x_3) = o \end{cases}$$

also je 2 Erzeugende der Kegel, die Spitze derselben muss daher in der Ebene $x_4 = o$ enthalten sein, und zwar liegt sie in den Kreispunkten. $x_1 \pm i\,x_2 = o$ stellen bekanntlich Minimalgerade dar, und wenn die Gleichungen 6.) der beiden Erzeugenden jedes Kegels gemeinsam gelten, ist auch $x_4 = o$; also liegen die Spitzen beider Kegel in den horizontalen Kreispunkten. Diese Minimallinienkegel stellen uns die Brennflächen der Kongruenz der J-Tangenten des gegebenen J-Kegelschnitts dar, als deren reelle Durchschnittskurve der Nullstreifen erscheint.

Wird im speciellen Falle

$$A_{11} = o \qquad \overline{A}_{11} = o$$

also einzeln $a'_{11} = o \quad a''_{11} = o,$

so verwandeln sich die Gleichungen 6.) in

$$6^1.)\quad \begin{array}{ll} x_1 + i\,x_2 = o & x_4 = o \\ x_1 - i\,x_2 = o & x_4 = o, \end{array}$$

dann ist also die unendlich ferne horizontale Gerade gemeinschaftliche Erzeugende beider Kegel, unser Nullstreifen, die Raumkurve 4ter Ordnung, zerfällt in die unendlich ferne Gerade $x_3 = o$ $x_4 = o$ und eine Raumkurve 3ter Ordnung, die durch die horizontalen Kreispunkte hindurchgeht. Wie man sich direkt überzeugen kann, reduziert sich in diesem Falle die Gleichung 4.) auf eine quadratische mit den Wurzeln $\lambda = \pm i$, Werte, die die Doppelwurzeln der Gleichung 4ten Grades darstellen.

Wir haben demnach den Satz:

Fehlt in der Gleichung eines J-Kegelschnitts von der Form:

$$\sum_{i=1,2,3} \sum_{k=1,2,3} A_{ik}\, X_i\, X_{ik} = o$$

das Glied mit X_1^2, so ist der Nullstreifen desselben eine Raumkurve 3ter Ordnung, die durch die horizontalen Kreispunkte geht.

Eine Ebene $Z = c$ hat als J-Gerade aufgefasst nur einen unendlich weitgelegenen Punkt. An den eben erhaltenen schliesst sich darum der weitere Satz: Alle J-Kegelschnitte, deren Nullkurve eine Raumkurve 3ter Ordnung ist, die durch die horizontalen Kreispunkte geht*, haben einen gemeinschaftlichen J-Punkt.

Ein Zerfallen der allgemeinen Form des Nullstreifens in 2 Kegelschnitte tritt ein, wie Herr Lie zeigt, wenn der J-Kegelschnitt horizontale J-Tangenten besitzt, die entweder reell, also Nullebenen, oder konjugiert imaginär sind. Sind die horizontalen J-Tangenten Nullebenen, so besteht der Nullstreifen aus 2 Kegelschnitten, haben dagegen die beiden horizontalen J-Tangenten dieselbe Lage, aber entgegengesetztes Gewicht, so ist der Nullstreifen von einem einzigen Kegelschnitt gebildet. Die übrigen J-Tangenten ordnen sich in beiden Fällen zu Hyperboloiden zusammen.

Diese Hyperboloide berühren sich sämtlich in den beiden Punkten O und O' der 2 horizontalen J-Tangenten E und E', die die beiden Berührungspunkte des J-Kegelschnitts darstellen. Die Gerade $(O\ O')$ ist ein gemeinschaftlicher Durchmesser aller Hyperboloide, ihr Halbierungspunkt ist das gemeinschaftliche Centrum. Je 2 Hyperboloide der Schar haben demnach je 2 Erzeugendenpaare $l_1\, l_2$ und $l_1'\, l_2'$ gemein — l_1 und l_1', l_2 und l_2' sind jeweils Erzeugende derselben Art —, ein Paar, $l_1\, l_2$, in E, das andere Paar, $l_1'\, l_2'$ in E'; hierbei ist l_1 parallel zu l_2', l_2 parallel zu l_1', diese Linien müssen sich ja auf der unendlich fernen horizontalen Geraden nochmals schneiden. Gemeinsame Punkte der Hyperboloide und also auch gemeinsame Null-Punkte von J-Tangenten können nur in den Ebenen E und E' vorkommen.

Eine beliebig vorgegebene J-Tangente des J-Kegelschnitts bestimmt dann immer ein Hyperboloid, erzeugt von J-Tangenten. Eine solche liegt entweder in einer der Horizontalebenen E oder E', geht also durch O, resp. O', und bestimmt dann eine zugehörige J-Tangente in der andern Horizontalebene mit entgegengesetzter Amplitude. Durch projektive Beziehung ihrer Punktreihen konstruieren sie dann ein Hyperboloid, erzeugt von Nullgeraden von J-Tangenten, die sämtlich die gegebene J-Tangente in Nullpunkten schneiden.

Im allgemeinen wird aber die vorgegebene J-Tangente beide Ebenen E und E' in Punkten P und P' schneiden. $O\ P$ und $O'\ P'$ sind dann die 2 Erzeugenden des zu konstruierenden Hyperboloids, die von der gegebenen J-Tangente in Nullpunkten geschnitten werden. Die übrigen Erzeugenden derselben Schar erhält man, wenn man durch O' eine Parallele zu $O\ P$, durch O eine Parallele zu $O'\ P'$ legt. Diese letzteren sind Erzeugende der 2ten Art und bestimmen dann, indem man ihre Punkte projektivisch aufeinander bezieht, das Hyperboloid.

Herr Lie führt im Anschluss hieran ohne Beweis einen allgemeinen Satz an über J-Kegelschnitte, deren Nullstreifen von 2 Kegelschnitten gebildet wird. Es sei U eine

* Eine solche Raumkurve 3ter Ordnung wollen wir kurz mit C_3' bezeichnen.

beliebige Linienfläche 2ten Grades gebildet von den J-Tangenten eines J-Kegelschnitts k. Es sei P ein beliebiger J-Punkt desselben J-Kegelschnitts. Die Geraden der Kongruenz P, welche die Fläche U berühren, bilden 2 Hyperboloide mit kreisförmigem Horizontalschnitt.

Den J-Punkt P des J-Kegelschnitts können wir zunächst ersetzen durch die 2 benachbarten J-Tangenten L und L', die die Kongruenz P bestimmen. Alsdann haben wir die Linienfläche zu untersuchen, die gebildet wird von den ∞^1 gemeinschaftlichen Geraden der Kongruenz $(L\,L')$ mit den ∞^1 Kongruenzen, gebildet von je 2 benachbarten Erzeugenden $(G\,G')$ von U. Sie wird allgemein eine Linienfläche 4ten Grades sein müssen, da sie der Schnitt einer linearen Kongruenz ist mit einem Komplex 2ten Grades — dem Inbegriff der Tangenten von U. Die Linienfläche wird also das gegebene Hyperboloid U in einer Kurve 4ter Ordnung berühren.

Wir wollen annehmen, dass L das gegebene Hyperboloid U in 2 reellen Punkten treffe, die alsdann nach dem Vorhergehenden in den Ebenen E und E' liegen. Die Kongruenz $(L\,L')$ hat dann mit einer beliebigen der Kongruenzen benachbarter Erzeugenden $(G\,G')$ im allgemeinen 2 Gerade gemein, Erzeugende der in Rede stehenden Linienfläche. Mit variierenden $(G\,G')$ beschreiben diese Geraden in ihrem Berührungspunkte auf U die Kurve 4ter Ordnung, jede einen Zweig derselben. Im speziellen Falle erhalten wir aber nur eine gemeinschaftliche Gerade von $(L\,L')$ und $(G\,G')$, wenn nämlich je 2 der 4 Geraden sich schneiden. L und L' schneiden sich nicht, ebenso wenig G und G', wohl aber L und G für 2 Werte der letzteren. Unsere Kurve 4ter Ordnung bekommt infolgedessen 2 Doppelpunkte, die überdies nicht auf derselben Erzeugenden liegen; sie zerfällt also in 2 Kegelschnitte.

Je 4 Erzeugende von U bestimmen ein reelles Doppelverhältnis, sie schneiden ja die 2 Horizontalebenen E und E' in Punkten einer Geraden. Dann ist ihr Doppelverhältnis identisch mit dem der 2 Punktquadrupel auf den 2 Kegelschnitten, die den Berührungsschnitt bilden. Also haben auch je 4 Erzeugende jeder der Teile der zu untersuchenden Linienfläche ein reelles Doppelverhältnis. Die Gesamtschar der Erzeugenden wird von Horizontalebenen in Kreisen geschnitten. Die Linienfläche 4ten Grades zerfällt, wie zu beweisen war, in 2 Hyperboloide mit kreisförmigem Horizontalschnitt.

Einen Kegelschnitt der Ebene können wir uns entstanden denken, indem wir 2 Strahlenbüschel projektiv auf einander beziehen. Ebenso müssen 2 J-Geradenbüschel, die eindeutig aufeinander bezogen sind, einen J-Kegelschnitt bestimmen. Untersuchen wir den Nullstreifen eines solchen. Nehmen wir also 2 J-Punkte mit ihren Kongruenzen und beziehen die Nullgeraden auf einander, so werden die sich schneidenden Nullgeraden den Nullstreifen des J-Kegelschnitts in ihren Treffpunkten konstruieren. Eine beliebige Ebene des Raumes wird von sämtlichen Geraden der einen wie der andern Kongruenz geschnitten. Wir erhalten also zwischen den Punkten der Ebene ebenfalls eine projektive Beziehung, eine Kollineation allgemeiner Natur. Bei einer solchen bleiben aber 3 und nur 3 Punkte der Ebene fest, entsprechen sich selbst. Also nur in 3 Punkten der Ebene schneiden sich entsprechende Gerade der 2 Kongruenzen; die Ebene hat mit der gesuchten Kurve jeweils 3 Punkte gemein, wie auch ihre Lage sein mag; es muss also eine Raumkurve 3ter Ordnung sein. Wir sehen also, dass wir durch die projektive Beziehung zweier Kongruenzen nicht zu den allgemeinsten J-Kegelschnitten gelangen, sondern nur zu denen, die wir rationale J-Kegelschnitte nennen wollen, deren Nullstreifen eine rationale Kurve, eine C'_3 ist.

Die in Rede stehenden Raumkurven 3. Ordnung gehören zu den Kurven, die wir Reellkurven* nennen wollen. Eine Reellkurve kommt zustande, wenn man 3 Punkte einer J-Kurve festhält, etwa $P_1\,P_2\,P_3$, und einen 4. Punkt P_4 der Bedingung unterwirft, dass das Doppelverhältnis $(P_1\,P_2\,P_3\,P_4)$ reell sei; alsdann beschreibt P_4 eine Reellkurve auf der gestreiften Fläche der vorliegenden J-Kurve. Dann bilden offenbar auch 4 beliebige Punkte der Reellkurve unter sich ein reelles Doppelverhältnis; denn sind $X_1\,X_2\,X_3$ die

* Bei H. Lie heissen sie S-Kurven.

X-Koordinaten der 3 gegebenen festen Punkte, X_1' die X-Koordinate eines ersten beliebigen Punktes P_1' der Reellkurve, so gilt

$$1.)\quad \frac{X_1 - X_3}{X_1 - X_1'} \cdot \frac{X_2 - X_1'}{X_2 - X_3} = \text{reell.}$$

Ebenso erhalten wir für einen 2ten beliebigen Punkt P_2' der Reellkurve

$$2.)\quad \frac{X_1 - X_3}{X_1 - X_2'} \cdot \frac{X_2 - X_2'}{X_2 - X_3} = \text{reell.}$$

Aus 1.) und 2.) folgt

$$3.)\quad \frac{X_1 - X_1'}{X_1 - X_2'} \cdot \frac{X_2 - X_2'}{X_2 - X_1'} = \text{reell.}$$

Damit haben wir X_3 eliminiert. Wenn wir nun $P_1\ P_2\ P_1'$ als feste Punkte annehmen, so zeigt 3.), dass jeder beliebige Punkt der Reellkurve mit denselben ein reelles Doppelverhältnis bildet, z. B. P_3'. So können wir X_2 eliminieren und finden $(P_1\ P_1'\ P_2'\ P_3')$ reell, und damit auch, wenn wir schliesslich noch in derselben Weise P_1 durch P_4' ersetzen, $(P_1'\ P_2'\ P_3'\ P_4') =$ reell.

Nach der gegebenen Definition kann eine Reellkurve nur auf der gestreiften Fläche einer J-Geraden oder eines J-Kegelschnitts vorkommen. Wenn man dann einen beliebigen J-Punkt der J-Geraden oder des J-Kegelschnitts mit den Punkten der Reellkurve verbindet, so bilden diese Linien jeweils ein Hyperboloid mit kreisförmigem Horizontalschnitt. Projiziert man also von einem beliebigen J-Punkt P der J-Kurve die Reellkurve auf die Ebene $z = o$, so ist die Projektion in jedem Falle ein Kreis, und offenbar gilt auch die Umkehrung, wenn eine beliebige Projektion einer Kurve der gestreiften Fläche einer J-Kurve von einem Punkt der letzteren auf eine Ebene $z = c$ ein Kreis ist, so muss die Kurve eine Reellkurve sein. Bei unserer Raumkurve 3ter Ordnung ist dies nun der Fall, sie wird von jedem ihrer Punkte als Kreis in die $x\,y$-Ebene projiziert, ist also eine Reellkurve.

Wenn der Nullstreifen des J-Kegelschnitts aus 2 oder im besonderen Falle aus nur einem Kegelschnitt besteht, so ist natürlich jeder derselben eine Reellkurve. Legt man durch einen beliebigen Punkt des J-Kegelschnitts das Hyperboloid, welches je einen der Kegelschnitte enthält, so ist ein solches von der bekannten Art mit kreisförmigem Horizontalschnitt, und auch das Umgekehrte gilt, jeder J-Punkt, der einen Kegelschnitt k als Kreis auf die $x\,y$-Ebene projiziert, gehört dem J-Kegelschnitt an, dessen Nullstreifen der gegebene Kegelschnitt ist. Die 4 Strahlen von dem J-Punkt nach 4 beliebigen Punkten des Nullstreifens des J-Kegelschnitts bestimmen in diesem Falle ein reelles Doppelverhältnis, das dann gleich dem der 4 Punkte auf dem Kegelschnitt ist. So muss notwendig der gegebene Punkt selbst auf dem J-Kegelschnitt liegen.

Aus diesem Satze ergiebt sich die einfache Folgerung:

Alle Kegelschnitte, welche auf einem Hyperboloid mit horizontalem Kreisschnitt gelegen sind, können angesehen werden als die Nullstreifen von J-Kegelschnitten, die 2 gemeinschaftliche J-Punkte besitzen, die nämlich durch die beiden Erzeugendensysteme bestimmt sind.

Von beiden Punkten aus projizieren sich ja alle J-Kegelschnitte in denselben Kreis der $x\,y$-Ebene. Sind die Kegelschnitte entstanden durch den Schnitt des Hyperboloids mit einem Ebenenbüschel, so haben die Kegelschnitte noch die beiden Punkte auf der Axe des Büschels gemein, in welchen das Hyperboloid von derselben geschnitten wird, im ganzen also 4 Punkte.

Den J-Kegelschnitt können wir uns auch dargestellt denken durch die Kongruenz seiner J-Tangenten; wir betrachten ihn dann als Klassenkurve.

Im Besonderen stellen z. B. die beiden Erzeugendenscharen einer beliebigen Linienfläche 2ten Grades J-Tangenten eines J-Kegelschnitts dar. Greifen wir 2 Erzeugende derselben Schar heraus, so werden diese von den Erzeugenden der andern Schar in projektiv auf einander bezogenen Punktreihen geschnitten. Die Verbindungslinien projektiv auf einander bezogener Punktreihen umhüllen aber in der Ebene einen Kegelschnitt. So umhüllen also auch die Erzeugenden der 2ten Schar des Hyperboloids einen J-Kegelschnitt.

Wir lernten auf dem J-Kegelschnitt Reellkurven kennen, dadurch ausgezeichnet, dass das Doppelverhältnis 4 beliebiger seiner Punkte reell war. In analoger Weise können wir nun auch Linienflächen, erzeugt von Nullstreifen von J-Tangenten einer J-Kurve, betrachten, von derselben Eigenschaft, dass das Doppelverhältnis von 4 beliebigen Erzeugenden reell ist. Wir wollen dann eine solche Linienfläche eine R e e l l f l ä c h e * nennen. Es findet sich, dass die Reellfläche eines J-Kegelschnitts im allgemeinen eine Linienfläche 4ten Grades ist, die als Doppelkurve eine Raumkurve C_3' besitzt.

Wenn man von einem Punkt der Doppelkurve aus die Linienfläche einer Centralprojektion in die $x\,y$-Ebene unterwirft, so ist die Projektion eine Kurve 2ter Klasse; denn jeder Projektionsstrahl schneidet nur noch 2 Erzeugende der Linienfläche ausser denen durch das Projektionscentrum; also gehen durch jeden Punkt der Ebene 2 Erzeugende der Projektionskurve. Wenn man von einem Punkte des Nullstreifens aus die Centralprojektion ausführt, so erhalten wir eine Kurve, die durch die horizontalen Kreispunkte geht, was sofort einleuchtet, wenn wir uns erinnern, dass der Nullstreifen den Durchschnitt der Kreispunktkegel darstellt, der Brennflächen der gegebenen Kongruenz.

Wenn wir also von einem der Durchschnittspunkte der Doppelkurve und des Nullstreifens aus projizieren, so wird die Projektion der Linienfläche ein Kreis.

Indem wir also aus der Schar der ∞^2 J-Tangenten eines J-Kegelschnitts als J-Kurve 2ter Klasse eine einfach unendliche Schar auswählen, deren Nullgerade eine Reellfläche bilden, erhalten wir durch geeignete Projektion eine reelle Kurve 2ter Klasse. Wir setzen durch solch eine Reellfläche allgemein die J-Klassenkurve in direkte Beziehung zu den reellen ebenen Kurven derselben Klasse.

Betrachten wir zur Verifikation des Gesagten die Reellfläche, die von den Tangenten eines rationalen Nullstreifens selbst, einer Kurve C_3' gebildet wird, so ist dies offenbar vom 4ten Grade; denn der Rang einer Raumkurve 3ter Ordnung ist 4, d. h. eine beliebig vorgegebene Gerade trifft 4 Tangenten derselben; die Doppelkurve ist der Nullstreifen selbst. Von einem Punkt des Nullstreifen aus projiziert sich die Kurve C_3' als Kreis in die $x\,y$-Ebene, die Developpabele der Tangenten, unsere Reellfläche, in die Tangenten dieses Kreises.

Die Sätze der ebenen Geometrie, die sich auf Kegelschnitte beziehen, verwandeln sich durch den Übergang zur vierdimensionalen Ebene der J-Punkte und J-Geraden in Sätze der räumlichen Geometrie, die sich auf die Nullstreifen der J-Kegelschnitte beziehen, also auf Raumkurven 4ter Ordnung, Raumkurven 3ter Ordnung und Kegelschnitte. So können wir den Pascalschen Satz, sowie den zu ihm dualistisch gehörenden Satz des Brianchon z. B. vermöge unserer Übertragung auf den Raum ausdehnen. Die 6 Punkte des J-Kegelschnitts nehmen wir auf dem Nullstreifen an; die 3 Paare von Verbindungsgeraden bestimmen 3 Kongruenzen, also 3 J-Punkte und diese müssen in einer J-Gerade liegen, d. h. eine Gerade gemein haben, und also demselben linearen Büschel von Kongruenzen angehören. In entsprechender Weise erhalten wir eine Erweiterung des Brianchonschen Satzes. Betrachten wir im besonderen einen in ein Punktpaar zerfallenden J-Kegelschnitt und nehmen zu einem solchen J-Punktpaar ein Paar konjugierter Punkte $(x\,y\,z+p)$ und $(x\,y\,z-p)$, so liegen die hindurchgehenden Nullgeraden jeweils auf einem Hyperboloid mit kreisförmigem Horizontalschnitt, es sind die beiden Erzeugendenscharen. Wählen wir nun 3 Erzeugende der einen und 3 Erzeugende der andern Art aus, so gruppieren sich diese zu 3 der Fläche aufgeschriebenen Sechsecken, der Brianchonsche Satz wird zu dem P l ü c k e r s c h e n über die D i a g o n a l e n v o n S e c h s e c k e n, d i e L i n i e n f l ä c h e n 2 t e n G r a d e s a u f g e s c h r i e b e n s i n d.**

---

* Herr Lie spricht in diesem Falle von einem Reell-Ensemble von J-Tangenten.

** Plücker, a. a. O. p. 120.

5. Kapitel.

Allgemeine Kollineation.

Unterwerfen wir die Imaginärpunkte unserer vierfach ausgedehnten Ebene einer allgemeinen linearen Transformation, gegeben durch die Formeln:

$$1.)\quad \left\{ \begin{aligned} X' &= \frac{A_{11}\, X + A_{12}\, Z + A_{13}}{A_{31}\, X + A_{32}\, Z + A_{33}} \\ Z' &= \frac{A_{21}\, X + A_{22}\, Z + A_{23}}{A_{31}\, X + A_{32}\, Z + A_{33}} \end{aligned} \right.$$

so gehen Punkte einer J-Geraden wieder in die einer J-Geraden über, die Ordnung einer J-Kurve ändert sich durch die Kollineation nicht. Die Beziehung ist eine wechselseitige; aus 1.) ergeben sich auch X und Z als lineare Funktionen von X' und Z', die beiden Ebenen $X\,Z$ und $X'\,Z'$ sind der Art auf einander bezogen, dass jedem J-Punkt der einen Ebene ein und nur ein J-Punkt der andern Ebene entspricht.

Betrachten wir nun die Nullpunkte der einen Ebene $X\,Z$, d. h. die reellen Punkte des Raumes $x\,y\,z$, so werden diesen im allgemeinen keine Nullpunkte des Raumes $x'\,y'\,z'$ entsprechen, wir erhalten vielmehr für p' aus den Gleichungen 1.) wenn $A_{ik} = a_{ik}' + i\, a_{ik}''$ gesetzt wird,

$$2.)\quad p' = \frac{(a_{31}'\, x - a_{31}''\, y + a_{32}'\, z + a_{33}') \,.\, (a_{21}''\, x + a_{21}'\, y + a_{22}''\, z + a_{23}'') - (a_{21}'\, x - a_{21}''\, y + a_{22}'\, z + a_{33}'') \,.\, (a_{31}''\, x + a_{31}'\, y + a_{32}''\, z + a_{33}'')}{(a_{31}'\, x - a_{31}''\, y + a_{32}'\, z + a_{33}')^2 + (a_{31}''\, x + a_{31}'\, y + a_{32}''\, z + a_{33}'')^2}$$

Soll auch $p' = o$ werden, so müssen die Nullpunkte des ersten Raumes $x\,y\,z$ auf einen einschaligen Hyperboloid liegen, wie die Gleichung 2.) lehrt. Die Koeffizienten von x^2 und y^2 werden einander gleich, und die Glieder mit $x\,y$ heben sich weg; also erhalten wir als Schnitte mit Ebenen $z = c$ Kreise, das Hyperboloid hat kreisförmige Horizontalschnitte.

Sollen umgekehrt den Nullpunkten des Raumes $x'\,y'\,z'$ Nullpunkte des Raumes $x\,y\,z$ entsprechen, so müssen in gleicher Weise die Punkte $x'\,y'\,z'$ auf einem Hyperboloid derselben Art liegen. Die einander entsprechenden Nullpunkte in beiden Räumen liegen also auf 2 einschaligen Hyperboloiden mit kreisförmigem Horizontalschnitt.

Haben wir eine Kollineation mit koincidenten Trägern, führen wir also die J-Punkte unserer 4-dimensionalen Ebene in sich selbst über, so werden dabei die Nullpunkte, die das Hyperboloid konstruieren, in sich selbst übergeführt. Bei einer allgemeinen Kollineation der Ebene von der Form 1.) giebt es 3 und nur 3 J-Punkte, die fest bleiben. Diese 3 J-Punkte oder die durch sie dargestellten 3 Kongruenzen bestimmen die Schar der Nullgeraden, die das in Rede stehende Hyperboloid erzeugen. Die Kongruenzen 2er beliebiger der 3 J-Punkte haben nämlich eine Nullgerade gemein, die Geraden der 3ten Kongruenz, welche diese Gerade schneiden, bilden die Erzeugenden des Hyperboloids. Wählen wir die 3 J-Punkte willkürlich, so ist damit die Kollineation bestimmt, nicht aber, wenn wir das Hyperboloid willkürlich wählen; dann sind noch sechfach unendlich viele Kollineationen möglich, die das Hyperboloid in sich überführen.

Ebenso können wir bei verschiedenen Trägern 3 beliebig vorgegebene J-Punkte der einen Ebene in 3 beliebige der andern Ebene überführen und damit 1 beliebiges Hyperboloid des einen Raumes in ein solches des 2ten Raumes, deren beiderseitige Nullpunkte einander entsprechen.

Betrachten wir jetzt die 2 Nullpunktshyperboloide $U = o$ und $U' = o$ etwas näher.

Wenn der Nullpunkt P auf $U = o$ sich auf einer Nullgeraden, einer Erzeugenden bewegt, so muss der entsprechende Punkt P' auf U' dasselbe thun. Der einen Erzeugendenschar auf $U = o$ entspricht eine Erzeugendenschar von $U' = o$. Die Punkte eines horizontalen Kreises auf $U = o$ liegen nun auf einer J-Geraden $z = c$, die nur aus Nullpunkten besteht; also entsprechen auch ihnen entweder die Punkte einer Nullgeraden auf $U' = o$, die Punkte einer Erzeugenden 2ter Art, oder im besonderen Falle wieder die Punkte eines horizontalen Kreises; dann wäre aber die Kollineation eine spezielle, die Unendlichkeitspunkte entsprächen einander.

Der Schar der horizontalen Kreise auf $U = o$ entspricht also im allgemeinen die 2te Erzeugendenschar auf $U' = o$.

Dann gilt auch umgekehrt: der 2ten Erzeugendenschar auf $U = o$ entspricht die Schar der horizontalen Kreise auf $U' = o$.

Der Schnitt von $U = o$ mit einer Tangentialebene verwandelt sich also auf $U' = o$ in eine Kurve 3ter Ordnung, die in einen Kreis und eine Gerade zerfallen ist. Ist nun auf $U = o$ der Schnitt mit einer Ebene von allgemeiner Lage gegeben, also ein Kegelschnitt, so bestimmt ein beliebiger Punkt P desselben mit 4 festen Punkten $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ ein konstantes reelles Doppelverhältnis

$$P\,(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = c$$

dann ist auch

$$P'\,(P_2'\ P_2'\ P_3'\ P_4') = c.$$

Also projiziert P' die Punkte der dem Kegelschnitt entsprechenden Kurve auf $U' = o$ in einen Kreis der Horizontalebene, die Kurve ist von der 3ten Ordnung und geht durch die horizontalen Kreispunkte, da ihre Horizontalprojektionen dies sämtlich thun.

Die Kegelschnitte auf $U = o$ verwandeln sich in Raumkurven C_3' auf $U' = o$.

Betrachten wir in einer beliebigen Ebene, die $U = o$ in einem Kegelschnitt schneidet, eine Gerade l als Nullgerade einer J-Geraden L, so hat diese mit dem Kegelschnitt 2 Nullpunkte gemein, denen 2 auf der Raumkurve C_3' gelegene Nullpunkte entsprechen. Die J-Gerade L verwandelt sich also in eine J-Gerade L', deren Nullgerade eine Sekante der Raumkurve C_3' ist.

Wir haben mit Herrn Lie den Satz gewonnen: Bei unserer Kollineation verwandelt sich die Geradengeometrie der Ebene in eine Geometrie der Raumkurven 3ter Ordnung.

Insbesondere werden aus Dreiecken und Polygonen, die dem Kegelschnitt eingeschrieben sind, Dreiecke und Polygone, die aus Sekanten der Raumkurve 3ter Ordnung gebildet werden.

Die Geraden eines Büschels der Ebene verwandeln sich bei der Kollineation in die Erzeugenden eines Hyperboloids mit horizontalem Kreisschnitt; im allgemeinen verwandelt sich, wie Herr Lie zeigt, eine Kurve der $n$ten Klasse der Ebene in eine Linienfläche $2n$ter Ordnung, welche die Raumkurve C_3' $n$fach enthält.

Projizieren wir von einem Punkt der $n$fachen Linie C_3' die Linienfläche $2n$ter Ordnung wiederum in eine Ebene, so ist die Projektion eine Kurve $n$ter Klasse wie die, von der wir ausgingen, wir haben ja nur eine 2malige Kollineation ausgeführt.

Die Raumkurve C_3' kann man als Nullstreifen eines J-Kegelschnitts auffassen. Legen wir durch dieselbe eines der Hyperboloide mit kreisförmigem Horizontalschnitt des durch sie bestimmten Büschels, so wird sie von den Erzeugenden der einen Schar, die durch den J-Punkt P_1 gehen mögen, in je einem Punkt, von den Erzeugenden der 2ten Schar, dem konjugierten J-Punkt P_2 zugehörig, sodann in je 2 Punkten geschnitten. Denkt man sich nun alle ∞^1 Hyperboloide mit kreisförmigem Horizontalschnitt konstruiert, welche die Raumkurve C_3' enthalten, so gehören alle J-Punkte P_1 dem J-Kegelschnitt an, dessen Nullstreifen C_3' ist. Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man durch eine geeignete Kollineation die Raumkurve C_3' auf $U' = o$ in einem Kegelschnitt C_2 auf $U = o$ verwandelt.

Dabei verwandelt sich das Erzeugendensystem, das C_3' einfach schneidet, in das eine Erzeugendensystem von $U = o$, und der Punkt, zu welchem dieses gehört, liegt dann, wie wir früher sahen (p. 17), auf dem J-Kegelschnitt, dessen Nullstreifen C_2 ist. Also liegt auch der Pnnkt P_1 auf dem J-Kegelschnitt C_3'.

6. Kapitel.

Allgemeine Korrelation.

Beziehen wir die J-Punkte und J-Geraden der vierfach ausgedehnten Ebene eindeutig aufeinander durch die Gleichungen:

$$1.)\quad X = \frac{X_{11}\,A + X_{12}\,B + X_{13}}{X_{31}\,A + X_{32}\,B + X_{33}}, \qquad Z = \frac{X_{21}\,A + X_{22}\,B + X_{3}}{X_{31}\,A + X_{22}\,B + X_{23}},$$

Gleichungen, aus denen sich auch umgekehrt A und B als lineare Funktionen von X und Z ergeben, so entspricht jedem J-Punkt (XZ) eine J-Gerade (AB) und jeder J-Geraden (AB) rückwärts ein J-Punkt (XZ). Bewegt sich der Punkt (XZ) auf einer J-Geraden L, betrachten wir also die ∞^2 Kongruenzen, die sämtlich dic Nullgerade l der entsprechenden J-Gerade L enthalten, so dreht sich die entsprechende J-Gerade (AB) um einen festen J-Punkt, so beschreibt die Nullgerade der J-Gerade (AB) die Kongruenz des festen J-Punkts. Vier J-Gerade, die einer Kongruenz P angehören, konstituieren ein bestimmtes Doppelverhältnis. Die 4 durch die Korrelation entsprechenden Kongruenzen bestimmen auf der Nullgeraden der J-Geraden L, die dem J-Punkt P entspricht, 4 Involutionen, also ebenfalls ein Doppelverhältnis von gleichem Werte. Fordern wir, dass die Gleichungen 1.) $p = o$ ergeben, so zeigt sich in analoger Weise, wie bei den Gleichungen 1.) des vorigen Kapitels, dass a_1, a_2, b_1, b_2, einer Gleichung 2ten Grades genügen müssen. Diese Grössen können wir aber, wie wir im ersten Kapitel (p. 10) sahen, als die Koordinaten einer Geraden des Raumes betrachten; also erhalten wir bei unserer Forderung ein E n t s p r e c h e n d e r N u l l p u n k t e d e s R a u m e s und der G e r a d e n e i n e s L i n i e n k o m p l e x e s 2 t e n G r a d e s.

Wenn ausserdem zwischen a_1, a_2, b_1, b_2 eine lineare Relation stattfindet, so ist der Punkt $x\,y\,z$ auf eine L i n i e n f l ä c h e 2 t e n G r a d e s m i t k r e i s f ö r m i g e m H o r i z o n t a l s c h n i t t beschränkt, wie sich aus Betrachtungen ähnlich denen auf p. 19 angestellten ergiebt. D e n P u n k t e n d i e s e s H y p e r b o l o i d s e n t s p r e c h e n s o d i e G e r a d e n e i n e r K o n g r u e n z d e r 2 t e n O r d n u n g u n d K l a s s e.

In homogener Schreibweise ist uns eine allgemeine Korrelation dargestellt durch eine bilineare Gleichung der Form

$$2.)\quad \sum_{i=1,2,3}\ \sum_{k=1,2,3} A_{ik}\,X_i\,Y_k = o$$

wo $X_1 : X_2 : X_3$ und $Y_1 : Y_2 : Y_3$ die Koordinaten 2er J-Punkte bedeuten.

Wenn $A_{ik} = A_{ki}$, so erhalten wir die s y m m e t r i s c h e K o r r e l a t i o n, die sich deckt mit der P o l a r e n v e r w a n d t s c h a f t, bezogen auf den J-Kegelschnitt.

$$3.)\quad \sum_{i=1,2,3}\ \sum_{k=1,2,3} A_{ik}\,X_i\,X_k = o$$

Ist uns also ein J-Kegelschnitt durch eine Gleichung der Form 3.) und damit sein Nullstreifen, im allgemeinen eine Raumkurve 4ter Ordnung gegeben, so bilden die Polaren aller Nullpunkte des Raumes in Bezug auf ihn einen Linienkomplex 2ten Grades.

Herr Lie führt im Einzelnen an, wie bei den verschiedenen Arten der Nullstreifen für einen beliebigen Nullpunkt die Polare konstruiert werden kann.

Ist der Nullstreifen eine Raumkurve 4ter Ordnung, so wissen wir, dass durch jeden Punkt des Raumes 2 Sekanten derselben gehen, also auch durch den gegebenen Nullpunkt. Suchen wir auf beiden Sekanten die vierten harmonischen Punkte zu dem gegebenen Nullpunkt und den jedesmaligen 2 Schnittpunkten mit der Kurve, so ist die Verbindungslinie jener 4ten harmonischen Punkte die gesuchte Polare.

Wenn der Nullstreifen eine Raumkurve 3ter Ordnung ist, die die horizontalen Kreispunkte enthält, so existiert nur eine Sekante durch einen beliebigen Raumpunkt nach derselben; auf ihr erhält man wie vorher einen Punkt der Polare. Die Horizontalebene durch den gegebenen Nullpunkt des Raumes stellt aber auch eine Nullgerade dar, welche die Raumkurve im Unendlichen und Endlichen in je einem Punkte trifft (cf. p. 15). Dann liegt der 4te harmonische Punkt gleich weit vom endlichen Schnittpunkt mit C_3' entfernt, wie der gegebene Nullpunkt.

Wenn der Nullstreifen aus 2 Kegelschnitten sich zusammensetzt, so gilt noch die erste Konstruktion. Auch für den Fall, dass derselbe nur aus einem reellen Kegelschnitt besteht, giebt Herr Lie die Konstruktion der Polare an. Sie beruht darauf, dass die Polare eines beliebigen Nullpunkts in Bezug auf einen J-Kegelschnitt, dessen Nullstreifen von einem oder 2 Kegelschnitten gebildet wird, immer den zum horizontalen Durchmesser konjugierten Durchmesser schneidet. Jede Horizontalebene stellt ja eine Nullgerade dar und hat als solche ihren Pol auf dem zum horizontalen konjugierten Durchmesser. Die Polare eines Punktes der Horizontalebene geht dann durch diesen Pol der Horizontalebene als Nullgerade aufgefasst. Umgekehrt ist der Pol einer beliebigen J-Gerade L, welche diesen Durchmesser schneidet, ein Nullpunkt, und durch diesen Umstand sind wir dann in den Stand gesetzt, zu einer beliebig vorgegebenen Nullgeraden den zugehörigen Pol zu konstruieren, wenn der J-Kegelschnitt durch eine Linienfläche 2ten Grades dargestellt ist.

Die Sätze der ebenen Geometrie über Kegelschnitte, die durch 4 gegebene Punkte gehen, resp. von 4 gegebenen Geraden berührt werden, können wir nun auch auf J-Kegelschnitte erweitern und auf diese Weise analoge Sätze der Raumgeometrie ableiten.

Nehmen wir als Beispiel den Satz, dass die Polaren eines Punktes in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel, — das durch 4 Punkte bestimmt ist — ein Geradenbüschel bilden.

Die Nullstreifen der J-Kegelschnitte seien rational, also Raumkurven C_3'. Auf diesen wählen wir die festen Punkte, der gemeinsame unendlich ferne Punkt sei der eine, ausserdem 3 Nullpunkte im Endlichen. Dann bilden die Polaren eines beliebigen Nullpunktes in Bezug auf die Raumkurve C_3' eine Kongruenz, sie gehen durch einen J-Punkt P.

Liegen die Nullstreifen C_3' auf einem Hyperboloid mit kreisförmigem Horizontalschnitt, dann gehen dieselben schon an und für sich durch einen 2ten festen J-Punkt, wie wir sahen (p. 20), den Punkt P nämlich, der zu dem Erzeugendensystem gehört, welches die Kurve C_3' einfach schneidet, ausserdem lege man 2 Punkte der Kurven C_3' fest. Bestimmt man dann die Polaren des durch die 2te Erzeugendenschar gegebenen Punktes P', so beschreiben diese, wenn die Raumkurve C_3' variiert, ein Hyperboloid mit kreisförmigem Horizontalschnitt; denn das Doppelverhältnis von 4 Erzeugenden des Hyperboloids ist reell. Es ist dasselbe, welches die 4 Tangenten an die 4 entsprechenden Kurven C_3' in einem der festen Punkte bilden, nach dem Satze: die Polaren eines Punktes in Bezug auf 4 Kegelschnitte eines Büschels haben ein Doppelverhältnis, das von der Lage des Punktes unabhängig ist. Die Tangenten bilden aber in der Tangentialebene des festen Punktes an das Hyperboloid ein Büschel reeller Geraden mit reellem Doppelverhältnis.

Ist das Büschel der J-Kegelschnitte gegeben durch die Schnitte eines Ebenenbüschels mit einem Hyperboloid von kreisförmigem Horizontalschnitt, so haben die J-Kegelschnitte 4 feste J-Punkte gemein. Die Polare eines beliebigen Nullpunktes beschreibt in diesem Falle ebenfalls ein Hyperboloid von der gleichen Eigenschaft wie das gegebene, aus demselben Grunde wie in dem eben betrachteten Falle.

Erinnern wir uns, dass Linienflächen 2ten Grades, die 4 Erzeugende gemein haben, J-Kegelschnitte darstellen, die 4 feste J-Gerade berühren (p. 17), so ist uns in einem solchen Büschel von Flächen 2ten Grades eine J-Kegelschnittschar gegeben, für welche neue Sätze gelten, die denen, das J-Kegelschnittbüschel betreffend, dualistisch gegenüber stehen.

7. Kapitel.

Der Linienkomplex der Polaren.

Wir fanden, dass die Polaren aller Nullpunkte des Raumes in Bezug auf einen J-Kegelschnitt einen Linienkomplex 2ten Grades bilden. Diesen Linienkomplex 2ten Grades wollen wir jetzt des weiteren untersuchen und wollen dabei bemerken, dass das Folgende nicht bloss für die Polarenverwandtschaft gilt, sondern auch für den allgemeinen Fall der Korrelation.

Wir können die Nullpunkte des Raumes zu jedesmaligen Gruppen von ∞^2 zusammenfassen, die in Horizontalebenen gelegen sind, also eine J-Gerade vollständig erfüllen. Diese horizontalen J-Geraden haben einen J-Punkt im unendlich Weiten gemein. Den ∞^1 Horizontalebenen entsprechen dann ∞^1 J-Punkte, die auf einer J-Geraden L gelegen sind, der Polaren des horizontal unendlich weit entfernten Punktes. Die ∞^1 Kongruenzen dieser J-Punkte konstruieren unsern Komplex 2ten Grades. Da je 4 Horizontalebenen ein reelles Doppelverhältnis besitzen, müssen auch je 4 der entsprechenden J-Punkte auf der J-Geraden L ein reelles Doppelverhältnis bilden, d. h. ihre Gesamtheit bildet eine Reellkurve auf der J-Geraden, einen Kegelschnitt.

Wir sehen, unser Linienkomplex kann definiert werden als erzeugt von ∞^1 Kongruenzen, die zu den J-Punkten eines Kegelschnitts gehören. 2 Punkte des Kegelschnitts, Q_1 und Q_2 werden Nullpunkte sein, die Durchschnittspunkte mit der Nullgeraden der J-Geraden L; sämtliche Geraden der Strahlenbündel mit Q_1 und Q_2 als Träger gehören so dem Komplex an. Die Polare von Q_1 ist die horizontale Nullebene durch Q_2, die Polare von Q_2 ist die Horizontalebene durch Q_1.

Auch in anderer Weise können wir zu diesen Fundamentalpunkten Q_1 und Q_2 gelangen. Betrachten wir die ∞^2 Kongruenzen, die zu der J-Geraden L gehören, so bestimmen diese auf deren Nullgeraden l ∞^2 Punktpaare, die Schnittpunktpaare der Direktricen. Von diesen ∞^2 Punktpaaren haben wir nun ∞^1 so auszuwählen, dass je 4 ein reelles Doppelverhältnis besitzen, d. h. wir haben die Punktpaare einer Involution auf der Nullgeraden zu betrachten. Die Doppelpunkte der Involution sind dann solche Punkte, in denen sich je 2 zusammengehörige Direktricen schneiden, es sind also Nullpunkte, die Punkte Q_1 und Q_2.

Legt man durch die beiden Kreispunkte K_1 und K_2 die konjugiert imaginären Ebenen durch l, so kann man sich unsern Komplex auch erzeugt denken, indem man die Strahlenbüschel der Minimalgeraden dieser Ebenen projektivisch verknüpft und die Kongruenzen zusammenfasst, die zu den ∞^1 Minimalgeradenpaaren gehören.

Wir sehen dann, dass alle Minimallinien durch K_1 und K_2 dem Komplex angehören, eine jede solche schneidet ja ein zusammengehöriges Minimallinienpaar, da es alle Minimallinien des einen Büschels schneidet.

Das Tetraeder, welches durch die Punkte Q_1 Q_2 und K_1 K_2 gebildet wird, ist so von fundamentaler Bedeutung für den Komplex. Jede der Kanten desselben ist eine Doppellinie des Komplexes; denn jede durch eine der Kanten gelegte Ebene ist eine singuläre Ebene — die Komplexkurve artet in 2 Strahlenbüschel aus — und jeder Punkt der Kante ist ein singulärer Punkt — der Komplexkegel degeneriert zu einem Ebenenpaar. Der Komplex ist demnach sehr spezieller Natur, seine Singularitätenfläche wird gebildet von dem Tetraeder $(Q_1\,Q_2\,K_1\,K_2)$, es ist ein Tetraedralkomplex.

Den ∞^1 Nullpunkten einer beliebigen Raumgeraden entsprechen als Polaren ∞^1 J-Geraden, die zur Kongruenz eines J-Punkts gehören. Da 4 beliebige Nullpunkte auf der Raumgeraden ein reelles Doppelverhältnis besitzen, so sind die ∞^1 Polaren die Erzeugenden eines Hyperboloids mit kreisförmigem Horizontalschnitt, das, wie leicht zu sehen, auch die Punkte Q_1 und Q_2 enthalten muss, da die Raumgerade mit den 2 Horizontalebenen durch Q_1 und Q_2 2 Punkte gemein hat und diesen als Polaren Gerade beziehentlich durch Q_2 und Q_1 entsprechen.

Wir können so mit Herrn Lie den Satz aussprechen: Den Nullpunkten einer beliebigen Raumgeraden entsprechen als Polaren die Erzeugenden eines Hyperboloids, das die Punkte Q_1 Q_2 und die horizontalen Kreispunkte K_1 und K_2 enthält.

Den Nullpunkten einer beliebigen Geraden des Komplexes entsprechen die Erzeugenden eines dem Tetraeder umschriebenen Kegels, dessen Spitze der Pol der Komplexgeraden ist. Wenn der Scheitel des Komplexkegels beliebig in einer der Horizontalebenen durch Q_1 oder Q_2, also auf der Singularitätenfläche gelegen ist, so zerfällt der Kegel in diese Horizontalebene und eine Ebene, die resp. durch Q_2 oder Q_1 geht.

Nehmen wir eine beliebige Komplexgerade, welche die horizontalen Tetraederebenen in P_1 und P_2 schneidet, so ergiebt sich nach dem zuletzt angeführten Satze, dass alle Geraden der Kongruenz, deren Direktricen Q_1 P_1 und Q_2 P_2 sind, dem Komplex angehören.

Alle Geraden, welche eine beliebige Horizontalgerade durch den Punkt Q_1 schneiden, werden auch eine Horizontalgerade durch den Punkt Q_2 treffen.

Wir können unsern Komplex also auch in folgender Weise konstruieren: Wir betrachten die Strahlenbüschel in den beiden horizontalen Tetraederebenen und verknüpfen deren Strahlen durch eine lineare Relation dergestalt, dass die Kreispunkte fest bleiben, dass also zusammengehörige Strahlen immer denselben Winkel einschliessen. Dann beschreibt die variabele Kongruenz, deren Direktricen diese Strahlenpaare sind, unsern Komplex 2ten Grades.

Durch unsere Korrelation ist ein wechselseitiges Entsprechen zwischen 2 Räumen R_1 und R_2 gegeben. Den Punkten des einen Raumes R_1 entsprechen im andern Raume R_2 die Geraden eines Linienkomplexes 2ten Grades, und zwar eines Tetraedralkomplexes, und ebenso den Punkten von R_2 in R_1 die Linien eines solchen Komplexes. Eine ähnliche wechselseitige Beziehung zwischen 2 Räumen gab Herr Lie in der Abhandlung: „Über Komplexe, insbesondere Linien und Kugelkomplexe“ im 5ten Band der Math. Annalen. Es werden daselbst die Punkte des einen Raumes R_1 übergeführt in die Linien eines speziellen Komplexes vom 2ten Grade im Raume R_2, in die Gesamtheit nämlich der Geraden, die einen Kegelschnitt schneiden — es ist in dem betreffenden Falle der Kugelkreis. Umgekehrt verwandeln sich dann die Punkte des Raumes R_2 in die Geraden eines linearen Komplexes in R_1.

Es entsteht nun die Frage, sind dies die einzigen Fälle, wo ein solches wechselseitiges Entsprechen von Punktraum und Linienkomplex 2ten Grades stattfindet, oder ist es sogar möglich, dass die Linienkomplexe von höherem Grade sein können? Wenn die Frage aber verneint werden müsste, kann man wenigstens in beiden Räumen 2 allgemeine Linienkomplexe 2ten Grades jeweils den Punkten derselben wechselseitig entsprechen lassen?

Es sind dies aber Fragen, die über das hier gesteckte Ziel hinausführen würden und darum einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben mögen.

Fünfzehnter Jahresbericht
über
das städtische Realgymnasium zu Borna.

I.
Personalbestand der Schule
im Schuljahr 1887/88.

A. Die Realgymnasial-Kommission.

Bürgermeister Ritter etc. **Heinrich**, Vorsitzender.
Königl. Bezirksarzt Dr. med. **Neumann**.
Superintendent **Spranger**.
Rektor Prof. Dr. **Klotzsch**.

B. Das Lehrer-Kollegium.

Professor Dr. Theodor Bernhard Albert **Klotzsch**, Rektor.
Günther Friedrich Karl **Schmidt**, I. Oberlehrer.
Friedrich Albert **Wienhold**, II. Oberlehrer.
Gustav Albin **Vater**, III. Oberlehrer.
Friedrich **Ploss**, IV. Oberlehrer.
Franz Balduin **Schöne**, V. Oberlehrer.
Ernst Gustav **Teichmann**, VI. Oberlehrer.
Dr. Wilhelm Karl Adolf **Wenck**, VII. Oberlehrer.
Hermann Alexander **Liebe**, VIII. Oberlehrer.
Heinrich Gustav Adolf **Klitzsch**, IX. Oberlehrer.
Dr. Paul Richard **Domsch**, ständiger Realgymnasiallehrer.
Heinrich Ernst **Schmerler**, ständiger Realgymnasiallehrer.
Johann Heinrich **Bullmer**, ständiger Realgymnasiallehrer.
Dr. Ludwig Hilmar Martin **Hoppe**, Vikar.
Cand. theol. Georg Daniel **Liebster**, Probelehrer.
Dr. Christian Ephraim Reinhold **Besser**, Probelehrer.

C. Kassierer.

Stadtkassenassistent Lehmann.

D. Schüler-Verzeichnis.

Die mit * Bezeichneten haben die Schule im Laufe des Jahres verlassen.

Klassen-Sitz.	Namen der Schüler.	Geburtsort.	Stand (und Wohnort) des Vaters.
	Ober-Prima.		
1	Heinrich Arthur Wirthgen.	Chemnitz.	Oberpostsekr. (Reichenbach i. V.).
2	Wilhelm Max Krause.	Leipzig.	Stadtwachtmeister (Borna).
3	Karl Otto Max Thalmann.	Erlau.	Gutsbesitzer (Otterwisch). †
4	*Hermann Friedrich Karl Windel.	Brakwede.	Fabrikdirektor (Liegnitz).
5	*Herm. Friedr. Johannes Agricola.	Gotha.	Reichsgerichtsrat (Leipzig).
6	*Friedrich Hermann Hartmann.	Eilenburg.	Kaufmann. †
	Unter-Prima.		
1	Julius Ernst Seifert.	Gössnitz.	Stadtgutsbesitzer. †
2	Hermann Arthur Paul.	Wernesgrün.	Produktenhändler (Borna).
3	Oswin Alfred Schützhold.	Göltzschen.	Gutsbesitzer.
4	Victor Albert Phaland.	Berlin.	Königl. Kommerzienrat.
5	Leopold Peter Horst Hoffmann.	Leipzig.	Hofrestaurateur. †
6	*Siegfried Erich Seyferth.	Langensalza.	Dr. med. und Sanitätsrat.
7	*Oskar Robert Pendorf.	Caaschwitz.	Ziegeleibesitzer.
	Ober-Sekunda.		
1	Franz Hermann Arthur Pauling.	Borna.	Kaufmann.
2	Gotthelf Friedrich Rose.	Frohburg.	Rentier.
3	Walther Leo Reichel.	Blauenthal.	Hammerwerksbesitzer.
4	Hans Rudolf Müller.	Rochlitz.	Obersteuerkontroleur (Cölln a.E.).
5	Ernst Albin Arnold.	Panitzsch.	Gutsbesitzer.
6	Robert Georg Hans Bonte.	Hettstedt.	Apotheker. †
7	Arthur Louis Friedrich Schirmer.	Langendorf.	Gutsbesitzer.
8	Friedrich Bernhard Rost.	Borna.	Rentier.
9	Paul List.	Leipzig.	Kommerzienrat. †
10	Louis Hermann Dobernecker.	Kahla.	Bezirkstierarzt.
11	Wilhelm Otto Herbst.	Dederstedt.	Rittersasse. †
12	*Friedrich Meichsner.	Chemnitz.	Bahnhofsinspektor (Borna).
	Unter-Sekunda.		
1	Karl Louis Heinrich Dennhardt.	Colditz.	Cigarrenfabrikant.
2	Friedrich Ludwig Bruno Oehme.	Borna.	Baumeister.
3	Georg Paul Ettig.	Borna.	Viktualienhändler.
4	Rudolf Richard Heinker.	Blumroda.	Gutsbesitzer. †
5	Alfred Paul Pfau.	Bergisdorf.	Gutsbesitzer.
6	Johannes Bernhard Polster.	Borna.	Schuhmachermeister.
7	Walther Max Heinrich Sachsse.	Bautzen.	Oberstlieut. u. Bezirks-Kommand. (Borna).
8	Richard Ernst Krätzschmar.	Borna.	Klempnermeister.
9	Arno Arthur Moritz.	Brösen.	Gutsbesitzer.
10	Richard Otto Schöpel.	Frohburg.	Färbereibesitzer.
11	Felix Otto Zieger.	Leipzig.	Rentier.
12	Paul Emil Steinbach.	Altenburg.	Kaufmann.

Klassen-Sitz.	Namen der Schüler.	Geburtsort.	Stand (und Wohnort) des Vaters.
13	Max Otto Grun.	Wurzen.	Fabrikant.
14	Paul Karl Leidenroth.	Leipzig.	Ziegeleibesitzer. †
15	Georg Paul Naumann.	Borna.	Baumeister.
16	Max Arno Rudolf Liebe.	Borna.	Fabrikant.
17	Friedrich Wilhelm Karl Telle.	Borna.	Ingenieur. †
18	*Heinrich Kurt Rebentisch.	Taucha.	Stadtgutsbesitzer.
	Ober-Tertia.		
1	Willi Clemens Ziegenhorn.	Borna.	Pflegevater: Rentier.
2	Eugen Richard Wangemann.	Leipzig.	Zimmermeister.
3	Ernst Traugott Seydel.	Trachenau.	Pfarrer (Zöpen).
4	Feodor Alexis Hermann.	Lobstädt.	Tierarzt.
5	Heinrich Walther Schröter.	Borna.	Fabrikbesitzer u. Stadtrat.
6	Friedrich Adolf Kiessling.	Zschopau.	Seminaroberlehrer (Borna).
7	Paul Max Blumstengel.	Trages.	Gutsbesitzer.
8	Robert Wilhelm Hoese.	Weischwitz.	Kohlenwerksbesitzer (Gnandorf).
9	Richard Paul Weber.	Göhren.	Restaurateur.
10	Kurt Franz Graupner.	Zschopau.	Stiefv.: Hausverw. d. Bez.-Anst. (Taucha).
11	Friedrich Theodor Otto Oehme.	Borna.	Holzhändler.
12	Johannes Walther Wangemann.	Leipzig.	Zimmermeister.
13	Ernst Bruno Thomas.	Oschatz.	Oberrossarzt (Borna).
14	Johann Georg Benndorf.	Neumarkt-Geithain.	Stadtgutsbesitzer.
15	*Johann Friedrich Kirchner.	Borna.	Weichenwärter.
	Unter-Tertia.		
1	Wilhelm Alfred Wangemann.	Borna.	Maurermeister.
2	Johann Hugo Fischer.	Borna.	Ökonom.
3	Moritz Hugo Harry Pauling.	Borna.	Kaufmann.
4	Albin Alfred Handwerk.	Borna.	Kaufmann. †
5	Wilhelm Theodor Anton Adam.	Darmstadt.	Musikdirektor (Cönnern). †
6	Felix Fritz Thilo.	Thierbach.	Rittergutsbesitzer. †
7	Fritz Emilius.	Cönnern.	Gutsbesitzer. †
8	Hermann Hugo Hoese.	Zangenberg.	Kohlenwerksbesitzer (Gnandorf).
9	Paul Theodor Kurt Lauterborn.	Borna.	Buchhalter.
10	Nic. Innocenz Reinhard v. Einsiedel.	Dresden.	Rittergutsbesitzer (Syhra).
11	Arno Ständte.	Hartmannsdorf.	Gutsbesitzer. †
12	Franz Oskar Weisske.	Walditz.	Gutsbesitzer.
13	Moritz Oskar Krobitzsch.	Mölbis.	Gutsbesitzer.
14	Johannes Fritz Hessel.	Dresden.	Kaufmann.
15	Theodor Emil Lehmann.	Stöhna.	Gutsbesitzer. †
16	Otto Karl Kohnert.	Halle a. S.	Ökonom. †
	Quarta.		
1	Albin Otto Arthur Quaas.	Brösen.	Rentier (Groitzsch).
2	Eugen Egon Schelzel.	Thierbach.	Kirchschullehrer.
3	Max Emil Heinig.	Breitenborn.	Rentier (Borna).
4	Julius Kurt Schwarzburger.	Zöpen.	Mühlenbesitzer.
5	Georg Horst Rudolf Hans Telle.	Langburkersdorf.	Ingenieur. †
6	Emil Robert Hugo Hofmann.	Klein-Kmehlen.	Ökonomie-Inspektor (Thierbach).

Klassen-Sitz.	Namen der Schüler.	Geburtsort.	Stand (und Wohnort) des Vaters.
7	Ewald Louis Emil Schmalz.	Oschatz.	Major (Borna).
8	Georg Arno Ettig.	Borna.	Viktualienhändler.
9	Georg Max Sebastian.	Groitzsch.	Baumeister.
10	Adolf Gustav Struve.	Gössnitz.	Kaufmann.
11	Theodor Karl Voland.	Kamenz.	Lotterie-Kollekteur (Borna).
12	Theodor Adolf Heinrich Hoese.	Thonberg.	Kohlenwerksbesitzer (Gnandorf).
13	Max Hugo Voigt.	Gnandorf.	Gutsbesitzer.
14	Ernst Reinhold Knorr.	Eula.	Gasthofsbesitzer.
15	Albert Wilhelm Kiessling.	Zschopau.	Seminaroberlehrer (Borna).
16	Karl Heinrich Kirchner.	Borna.	Weichenwärter.
17	Horst Eduard Kretzschmar.	Bodenbach.	Archidiakonus (Borna).
18	Rudolf Leberecht Friedlich Dennhardt.	Borna.	Rentier. †
19	Konrad Emil Haan.	Beiersdorf.	Pfarrer (Mölbis).
20	Ernst William Rudolf Kempe.	Dresden.	Standesamts-Sekretär. †
21	*Hermann Oskar Müller.	Brösen.	Gutsbesitzer.
	Quinta.		
1	Arno Claussnitzer.	Dresden.	Amtsgerichtsrendant (Borna).
2	Ernst Otto Scheibner.	Borna.	Bäckermeister.
3	Heinrich Arthur Guido Pauling.	Borna.	Kaufmann.
4	Franz Albert Max Weinicke.	Hohenstein.	Oberamtsrichter (Borna).
5	Hermann Adolf Hans Meyer.	Borna.	Oberstabsarzt u. Dr. med. (Borna).
6	Friedrich Otto Hunger.	Rötha.	Gasthofsbesitzer (Borna).
7	Gottlob Ferdinand Gödel.	Borna.	Apotheker.
8	Ernst Alfred Walther Ackermann.	Chemnitz.	Pfarrer (Eula).
9	Julius Albin Pretsch.	Dittmannsdorf.	Gutsbesitzer.
10	Friedrich Wilhelm Götze.	Groitzsch.	Fabrikbesitzer.
11	Friedrich Bernhard Weissbrenner.	Borna.	Fleischermeister.
12	Julius Hermann Reif.	Dahlen.	Mühlengutsbesitzer.
13	Alfred Kurt Burkhardt.	Borna.	Seifenfabrikant.
14	Arthur Wilhelm Heinrich Sachsse.	Chemnitz.	Oberstlieut. u. Bezirks-Kommand. (Borna).
15	Richard Max Herfurth.	Dittmannsdorf.	Gutsbesitzer.
16	Max Emil Nitzchke.	Narsdorf.	Pflegev.: Rentier (Borna).
17	Hermann Robert Reinhold Schäfer.	Trotha.	Ziegelmeister (Borna).
18	Albert Paul Max Haussmann.	Dresden.	Königl. Strassenmeister (Borna).
19	Georg Woldemar Rentzsch.	Auerbach.	Protokollant b. d. Königl. Amtshauptmannschaft (Borna).
	Sexta.		
1	Max Friedrich Geissler.	Reichenbach i. V.	Superintendent (Borna). †
2	Kurt Georg Zschau.	Steinigtwolmsdorf.	Steueraufseher (Borna).
3	Arthur Voigt.	Borna.	Kaufmann.
4	Heinrich Albert Ernst Pfau.	Bergisdorf.	Gutsbesitzer.
5	Walther Heyl.	Borna.	Pianofortefabrikant.
6	Georg Friedrich.	Borna.	Fabrikant.
7	Kurt Schäffner.	Bodenbach.	Eisenbahn-Assistent (Borna).
8	Albert Karl Felix von Schlegell.	Borna.	Postsekretär.
9	Rudolf Louis Richard Schirmer.	Langendorf.	Gutsbesitzer.

Klassen-Sitz.	Namen der Schüler.	Geburtsort.	Stand (und Wohnort) des Vaters.
10	Karl Alfred Reiche.	Borna.	Kaufmann.
11	Johannes Bernhard Schäcker.	Reinsdorf.	Kirchschullehrr u. Kantor (Regis).
12	Guido Alexander Klingner.	Borna.	Bürgerschullehrer.
13	Johannes Rudolf Teucher.	Borna.	Bürgerschullehrer.
14	Paul Felix Kipping.	Borna.	Kaufmann. †
15	Arnold Oswald Ehemann.	Grosszössen.	Baumeister (Lobstädt).
16	Johann Gottfried Wilke.	Borna.	Drechslermeister. †
17	Karl Fritz Weidmüller.	Hartmannsdorf b. Burgstädt.	Fabrikbesitzer (Borna).
18	*Hermann Arno Müller.	Dresden.	Steueraufseher (Borna).
19	*Alfred Eduard Schubert.	Grimma.	Expedient b. d. Kgl. Amtshauptmannschaft (Borna).

II.

Frequenz.

Der Bestand der Schüler am Schlusse des vorigen Jahres war 127.
Im Laufe des gegenwärtigen Jahres wurden aufgenommen 44.
171 Schüler.

Davon gingen ab
zu Ostern 1887 . . . 38.
im Laufe dieses Jahres 11.
im ganzen 49 Schüler.

Gegenwärtiger Schülerbestand 122.

Die Gesamtzahl der unterrichteten Schüler betrug in diesem Jahre 133.

Verzeichnis der abgegangenen Schüler.

A. Zu Ostern 1887.

Aus **Oberprima** mit dem Reifezeugnis: Karl Franz Hermann Schilling; Jean George Albert Bonte; Arno Hanss; Karl Arthur Windisch; Paul Oskar Neumeister; Christoph Hugo Max Engelhardt.

Aus **Unterprima:** Hugo Richard Liebers.

Aus **Obersekunda:** Karl Otto Naumann; Emil Robert Klingner; Friedrich Wilhelm Max Lindner; Walther Otto Wolff.

Aus **Untersekunda** 1) mit dem Befähigungszeugnis für den einjährig-freiwilligen Militärdienst: Heinrich Richard Bissing; Alfred William Scheumann; Friedrich Wilhelm Rudolf Heppner; Oskar Paul Bartholick; Wilhelm Otto Joseph; Johann Friedrich Julius Mühlig; Joseph Friedrich Siegismund Lutz; Paul Arthur Flemming; Wilhelm Georg Oskar Schade; Albert Otto Knäusel; Paul Karl Julius Enke; August Louis Paul Troitzsch; Johannes Bernhard Bräutigam; Gustav Otto Schilling; 2) ohne Befähigungszeugnis: Egon von Herrenburger.

Aus **Obertertia:** Karl Heinrich Otto Pfau; Heinrich Ernst Armin Pfau.
Aus **Untertertia:** Karl Fritz Baum; Julius Albert Leidl; Walther Emil Müller;
Aus **Quarta:** Adam William Edmund Köhler; Karl August Max Böhnisch; Julius Franz Morenz; Ernst Julius Kufs; Hermann Ernst Schramm; Kurt Dehling.
Aus **Quinta:** Christoph Dietrich Karl Hans Rudolf von Bose.

B. Im Laufe des Jahres.

Aus **Oberprima** mit dem Reifezeugnis: Hermann Friedrich Karl Windel; Hermann Friedrich Johannes Agricola.
Aus **Unterprima:** Siegfried Erich Seyferth; Oskar Robert Pendorf.
Aus **Obersekunda:** Friedrich Meichsner.
Aus **Untersekunda** mit dem Befähigungszeugnis für den einjährig-freiwilligen Militärdienst: Heinrich Kurt Rebentisch.
Aus **Obertertia:** Johann Friedrich Kirchner.
Aus **Quarta:** Hermann Oskar Müller.
Aus **Sexta:** Hermann Arno Müller; Alfred Edmund Schubert.
Entlassen wurde der Oberprimaner Friedrich Hermann Hartmann.

III.

Lehrverfassung.

Übersicht über den von Ostern 1887 bis Ostern 1888 erteilten Unterricht.

Oberprima.

Ordinarius: der Rektor.

Religion. 2 St. Kirchengeschichte der neueren Zeit (1 St.). — Zusammenhängende Darstellung der christlichen Glaubens- und Sittenlehren im Anschluss an die Conf. Aug. (1 St.). Im Sommerhalbjahr Dr. Hoppe, im Winterhalbjahr Oberl. Vater.

Deutsch. 3 St. Lektüre: Ausgewählte lyrische Dichtungen Schillers, Lessings Laokoon und die Hamburgische Dramaturgie mit Auswahl. — Litteraturgeschichte: Die 2. Blüteperiode unserer Poesie, insbesondere das Leben und die Werke Lessings, Schillers und Goethes. — Besprechung der schriftlichen Arbeiten und freien Vorträge. Oberl. Schmidt.

Lateinisch. 5 St. Lektüre: Terenz, Ad. Akt 4 und 5. Liv. I, 1—29 und 24 Oden des Horaz, darunter 3 auswendig gelernt. Ausserdem wurden aus Nepos „Pausanias“ u. „Agesilaus“ extemporiert. — Grammatik: Die Concordanz der Satzglieder und die Casuslehre. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Oberl. Ploss.

Französisch. 4 St. a) Lektüre: Guizot, Histoire de la Révolution d'Angleterre, Ausg. von Graeser, Bch. 1 u. z. T. Bch. 2; Molière, L'Avare, Akt 1—4; Lanfrey, Histoire de Napoléon I., die ersten Abschnitte der Ausgabe von Ramsler. b) Grammatik: Wiederholung und Vertiefung der Wort- und Satzlehre, hauptsächlich im Anschluss an die schriftlichen Arbeiten. c) Schriftliche Arbeiten: Alle 14 Tage abwechselnd ein Exercitium (Extemporale) und ein kurzer Aufsatz, bestehend in der freien Wiedergabe eines vorgetragenen Stoffes; überdies grössere Aufsätze. Rektor Klotzsch. — d) Litteraturgeschichte: Wiederholung der Litteraturgeschichte des 17. Jahrhunderts, sodann das Wichtigste aus dem 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts. Oberl. Teichmann.

Englisch. 3 St. Lektüre: Childe Harold's Pilgrimage nach der gekürzten Ausgabe von Velhagen und Klasing, Shakespeare's Midsummer Night's Dream und einige kürzere Stücke aus Herrigs Classical Authors. Wiederholung und Vertiefung der Grammatik. Das Wichtigste aus der Litteraturgeschichte von Shakespeare bis Ende des 18. Jahrhunderts. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit im Anschluss an das Behandelte. Oberl. Teichmann.

Geschichte. 2 St. Neuere und neueste Geschichte mit besonderer Rücksicht auf Kultur und Kunst. Oberl. Schmidt.

Algebra. 2 St. Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln. Gleichungen 3. und 4. Grades. Binomischer Satz. Moivre'scher Satz. Einfache unendliche Reihen. Oberl. Schöne.

Geometrie. 3 St. Analytische Geometrie. Oberl. Liebe.

Physik. 3 St. Lehre von der Wellenbewegung, vom Lichte und vom Schall. Elemente der Astronomie. Oberl. Schöne.

Chemie. 2 St. Systematische Behandlung der schweren Metalle mit Rücksicht auf Mineralogie und technische Anwendungen. Oberl. Klitzsch.

Darstellende Geometrie. 2 St. Bestimmung der Schlagschatten von Punkten, Linien, Flächen. Schlagschatten und Beleuchtung von Prisma, Cylinder, Pyramide, Kegel, Kugel. Figuren in perspektivischer Lage. Oberl. Liebe.

Unterprima.

Ordinarius: Oberlehrer Schmidt.

Religion. 2 St. Kirchengeschichte des Mittelalters. Lektüre des 1. Kor.-Briefs (1 St.) Christliche Glaubenslehre I. Teil (Lehre von Gott, vom Menschen, von Christi Person und Werk) (1 St.). Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Oberl. Vater.

Deutsch. 3 St. Lektüre: Der Parzival von Wolfram von Eschenbach im Auszuge für den Schulgebrauch von Polack, ausgewählte Oden und einzelne Abschnitte aus dem Messias von Klopstock. Ausserdem wurden privatim gelesen Schillers Räuber, Fiesco, Kabale und Liebe, Don Carlos, Wallenstein und die Braut von Messina. — Litteraturgeschichte: Kurzer Überblick über die Zeit vom Anfang des 14. Jahrhunderts bis zum Beginn der 2. Blüteperiode, Klopstock und Schiller bis zum Jahre 1794. — Besprechung der schriftlichen Arbeiten und der freien Vorträge. Oberl. Schmidt.

Lateinisch. 5 St. Lektüre: Aus Ovids Metamorphosen die Abschnitte: Boreas u. Orithyia, Cephalus u. Procris, Die Myrmidonen; die vier Zeitalter ex tempore. Ferner Ciceros Rede „pro rege Dejotaro", Cicero „de divinatione" I und II, 1—2; endlich Virgils Äneide I, 1—222, I, 305—417 und I, 494—612. — Wiederholung des Wichtigsten aus der Metrik und Prosodik. — Grammatik: Die syntaktische Verwendung der Participien, des Gerundiums und Supinums, die Konstruktionen des acc. c. inf. und nom. c. inf. — Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit, meist aus dem Ostermann'schen Übungsbuch für Tertia. Oberl. Ploss.

Französisch. 4 St. Lektüre von Voltaire, Siècle de Louis XIV. Im Anschluss daran Vertiefung der grammatischen Kenntnisse, die vorgeschriebenen 14täglichen schriftlichen Arbeiten und kleine freie Vorträge. Das Wesentlichste aus der Litteraturgeschichte bis Corneille (3 St.). Oberl. Teichmann. — Lektüre von Molière, le Bourgeois Gentilhomme u. les Précieuses Ridicules (1 St.). Rektor Klotzsch.

Englisch. 3 St. Lektüre: Macaulay, Lord Clive, Kap. IV bis Schluss; Byron, The Prisoner of Chillon; Dance, The Bengal Tiger; Dickens, A Christmas Carol. Wiederholung des grammatischen Stoffes bei Besprechung der schriftlichen Arbeiten (freie Aufsätze und andere Übungen). Synonyma und Idiomatisches. Schmerler.

Geschichte. 2 St. Ausgang des Mittelalters und Geschichte der neueren Zeit bis zum westfälischen Frieden mit besonderer Rücksicht auf Kultur und Kunst. Oberl. Schmidt.
Algebra. 2 St. Quadratische Systeme. Progressionen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Kombinatorik. Oberl. Schöne.
Geometrie. 3 St. Stereometrie. Oberl. Liebe.
Physik 3. St. Die Lehre von der Wärme beendet. Mechanik der festen Körper. Oberl. Schöne.
Chemie. 2 St. Systematische Behandlung der Nichtmetalle und leichten Metalle mit Rücksicht auf Mineralogie und Industrie. Oberl. Klitzsch.
Darstellende Geometrie. 2 St. Orthogonale Projektion von Punkten, Geraden, Flächen, Körpern (rep.). Ebene Schnitte und Netze von Prisma, Cylinder, Pyramide, Kegel, Kugel. Einfache Fälle von Durchdringungen. Oberl. Liebe.

Obersekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Schöne.

Religion. 2 St. Alte Kirchengeschichte (1 St.) — Ausführliche Besprechung des Lebens Jesu im Anschluss an die Evangelien (1 St.). Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Oberl. Vater.
Deutsch. 3 St. Lektüre: Nibelungenlied und Gudrun, einzelne Abschnitte aus den höfischen Epikern und eine Anzahl von Liedern und Sprüchen Walthers von der Vogelweide. Privatim wurden gelesen Lessings Minna von Barnhelm, Schillers Tell, die Jungfrau von Orleans und Maria Stuart. — Geschichte der deutschen Nationallitteratur von den ersten Anfängen bis zum Ausgang des 13. Jahrhunderts. — Besprechung der schriftlichen Arbeiten und freien Vorträge. Oberl. Schmidt.
Lateinisch. 5 St. Lektüre: prosaische (2 Stunden) Sallust, bell. Jugurthinum, 1—74, 85; Cicero in Catilinam I, II; metrische (2 Stunden) Ovid, Metamorph. Pyramus u. Thisbe, Ino u. Athamas, Perseus, Gründung von Croton, Pythagoras; Streit um die Waffen des Achill. Grammatik: aus Osterm. f. Tertia XII—XVIII Konjunktiv abhängig von Konjunktionen, in Relativsätzen, in indirekten Fragesätzen, Imperativ, Infinitiv, oratio obliqua; daneben gründliche Repetition der Casuslehre. Alle 14 Tage ein Skriptum oder Extemporale zur Befestigung des grammatischen Pensum. Oberl. Dr. Wenck.
Französisch. 4 St. Lektüre von Chateaubriand, Itinéraire und Thiers, Expédition en Egypte. Syntax und Formenlehre wiederholt. Wöchentliche schriftliche Übungen im Anschluss daran, dazu öfter eine freie Wiedergabe von vorerzählten Stücken (3 St.). Oberl. Teichmann. — Lektüre von Scribe, le Verre d'Eau (1 St.). Rektor Klotzsch.
Englisch. 3 St. Lektüre: Macaulay, Warren Hastings und Sheridan, The Rivals. Grammatik: Wiederholung der Wort- und Satzlehre, die Konjunktionen, das Gerundium und Participium. Die schriftlichen Arbeiten bestanden meist in der freien Wiedergabe des Gelesenen oder eines im englischen Original vorgelesenen Stoffes. Schmerler.
Geographie. 2 St. Amerika und Australien. Wiederholung des Gesamtgebietes der Geographie. Oberl. Wienhold.
Geschichte. 2 St. Geschichte des Mittelalters bis zum Ende des 13. Jahrhunderts mit Rücksicht auf Kultur und Kunst. Oberl. Schmidt.
Algebra. 2 St. Theorie der quadratischen Gleichungen. Quadratische Systeme. Logarithmen. Imaginäre und komplexe Zahlen. Oberl. Schöne.
Geometrie. 3 St. Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben. Trigonometrie. Oberl. Liebe.
Physik. 2 St. Die Lehre vom Lichte und von der Wärme in wesentlich experimenteller Behandlung. Oberl. Schöne.

Chemie. 2 St. Einleitung in das Verständnis chemischer Prozesse. Besprechung einiger wichtigen Elemente. Experimentelle Demonstration chemischer Vorgänge und Nachweis der bei der Vereinigung von Elementen stattfindenden räumlichen und gewichtlichen Gesetzmässigkeiten. Oberl. Klitzsch.

Darstellende Geometrie. 2 St. Orthogonale Projektion von Punkten, Geraden, ebenen Flächen, von Prismen, Cylindern, Pyramiden, Kegeln in verschiedenen Lagen gegen die Projektionsebenen. Oberl. Liebe.

Untersekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Teichmann.

Religion. 2 St. Reformationsgeschichte und Abschnitte aus der neueren Kirchengeschichte (1 St.). — Biblische Geschichte A. Ts. Erklärung der Bergpredigt. Bibellektüre (1 St.). Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Cand. Liebster.

Deutsch. 3 St. Übersicht der deutschen Litteratur von Luther bis Goethe (im Anschluss an den eingeführten Leitfaden und das Lesebuch). Lektüre und Besprechung von Goethes Hermann und Dorothea, Schillers Tell und Lessings Minna von Barnhelm. Das Wichtigste aus Prosodie und Metrik. Deklamation. Aufsätze. Dispositionsübungen. Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Oberl. Vater.

Lateinisch. 5 St. Lektüre, prosaische (2 Stunden) Caesar bell. gall. Lib. V, VI, 1—30; metrische (2 Stunden) Ovid, Metam. Phaëthon, Heliaden, Schöpfung, 3 Weltalter, Lycaon, Wasserflut, Deucalion, Niobe; das Wichtigste aus Prosodie und Metrik; einzelnes wurde memoriert. Grammatik (1 Stunde) Schluss der Casuslehre und Beendigung des Osterm. f. Quarta; die wichtigsten Konjunktionen unter Zugrundelegung des Osterm. f. Tertia; die wöchentlich abwechselnden Exercitien und Extemporalien meist im Anschluss an die Caesarlektüre und aus Osterm. f. Tertia. III. Abteilung. Oberl. Dr. Wenck.

Französisch. 4 St. Lektüre der sämtlichen Stücke der vierten Abteilung des Lesebuchs von Klotzsch. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit im Anschluss an den Inhalt der Lektüre. In der Grammatik wurden die Formenlehre und die Satzlehre wiederholt, erweitert und vertieft. Rektor Klotzsch.

Englisch. 3 St. Formenlehre und Syntax (besonders das Zeitwort, Hilfszeitwort, Umstandswort u. s. w.). Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Lektüre einiger schwerer Stücke aus dem eingeführten Lesebuche; im Winterhalbjahre: Marryat, The three Cutters. Oberl. Teichmann.

Geographie. 2 St. Asien und Afrika. Dr. Domsch.

Geschichte. 2 St. Griechische und römische Geschichte mit Berücksichtigung der Kultur und Kunst. Oberl. Schmidt.

Algebra. 2 St. Übungen im Auflösen linearer, besonders auch litteraler Gleichungen mit einer Unbekannten, lineare Systeme von Gleichungen. Potenz- und Wurzellehre. Quadratische Gleichungen. Dr. Domsch.

Geometrie. 2 St. Die Ähnlichkeitslehre und deren Anwendungen. Cyclometrie. Oberl. Schöne.

Naturbeschreibung. 2 St. Mineralogie. Besprechung der wichtigsten Mineralien mit Einflechtung geologischer Betrachtungen. Oberl. Klitzsch.

Physik. 2 St. Experimentelle Behandlung der Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität Oberl. Klitzsch.

Darstellende Geometrie. 1 St. Geradlinige und Kreisfiguren, Kegelschnitte, planimetrische Konstruktionen. Oberl. Schöne.

Obertertia.

Ordinarius: Realgymnasiallehrer Schmerler.

Religion. 2 St. a) Wiederholung der Biblischen Geschichte des Alten Testaments; aus dem Neuen Testamente Lukas Kap. 1—4, Matthäus Kap. 5—7 und einige ausgewählte Gleichnisse (1 Stunde). b) Wiederholung des vierten, fünften und zweiten Hauptstückes (1 Stunde). Oberlehrer Wienhold.

Deutsch. 3 St. Grössere Lesestücke, sowie „Zriny" und „Wilhelm Tell" wurden gelesen, besprochen und nach ihrem Hauptinhalte vorgetragen. Übersicht der Arten der Prosa und Poesie nach dem Lesebuche; eingehende Besprechung der Balladen und Vaterlandslieder. Wiederholung und Ergänzung des grammatischen Stoffes; die Grundzüge der Wortbildungslehre und der Metrik. Besprechung der 11 Aufsätze. Schmerler.

Lateinisch. 6 St. Lektüre (3 Stunden): Cornelius Nepos, vitae des Cimon, Lysander, Alcibiades, Thrasybulus, Conon; ferner Caesar, bell. gall. lib. I. Grammatik (2 Stunden): Repetition des Nominativ und Accusativ; ferner Dativ, Genitiv, Ablativ, die wichtigsten Konjunktionen, verbum infinitum unter Zugrundelegung des Ostermann für Quarta. Die wöchentlich abwechselnden Extemporalien und Exercitien meist aus Ostermann für Quarta unter Benutzung des Autors, zuletzt auch aus Osterm. f. Tertia. Oberl. Dr. Wenck.

Französisch. 4 St. Lektüre: Klotzsch, französ. Lesebuch, Abteil. III bis Seite 263. Daran anschliessend die Wiederholung und Erweiterung der Wortlehre (Einübung der starken Verba) und Syntax, sowie mündliche und 25 schriftliche Übungen. Schmerler.

Englisch. 3 St. Formenlehre erweitert. Syntax. Schriftliche Übungen allwöchentlich. Lektüre nach Wershoven u. Becker: mehrere der geographischen, geschichtlichen und biographischen Stücke und einige Gedichte. Oberl. Teichmann.

Geographie. 2 St. Die ausserdeutschen Länder Europas. Kurzer Abriss der mathematischen Geographie. Oberl. Wienhold.

Geschichte. 2 St. Neuere Geschichte im Anschluss an Müllers Abriss der Geschichte. Oberl. Schmidt.

Algebra. 2 St. Einfache und zusammengesetzte Reduktionen. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten. Übungen im Auflösen linearer Gleichungen. Proportionen. Dr. Domsch.

Geometrie. 2 St. Kreissätze, Flächenmessung. Einleitung in die Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren. Oberl. Schöne.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik. Repetition der hauptsächlichsten Familien des Pflanzenreiches. Besprechung einiger Sporenpflanzen, Anatomie und Physiologie der Pflanzen. — Im Winter: Mineralogie. Eingehende Betrachtung der Krystallographie. Oberl. Klitzsch.

Physik. 2 St. Allgemeine Einführung in die Naturlehre. Die einfachsten und wichtigsten Erscheinungen aus den Gebieten des Gleichgewichts und der Bewegung, des Drucks in Flüssigkeiten und Gasen und des Schalles in experimenteller Behandlung. Oberl. Klitzsch.

Untertertia.

Ordinarius: Oberlehrer Wienhold.

Religion. 2 St. a) Überblick über die vier Evangelien und die Apostelgeschichte (1 Stunde). b) Wiederholung des ersten, zweiten, vierten und fünften Hauptstückes (1 Stunde). Oberl. Wienhold.

Deutsch. 3 St. Lesen und Besprechen poetischer und prosaischer Stücke mit besonderer Rücksicht auf die Disposition. Deklamieren grösserer Gedichte. Wort- und Satzlehre wiederholt, spezielle Behandlung der Nebensätze. Wortbildungslehre. Übungen im Disponieren leichter Themata. Oberl. Wienhold.

Lateinisch. 6 St. Lektüre: Aus Nepos: Praefatio, Epaminondas, Pelopidas, Alcibiades, Lysander, Thrasybulus, Conon, Agesilaus, Dion, Iphicrates, Chabrias, Thimotheus, Phocion, Timoleon. — Grammatik: Die Konkordanz der Satzglieder, die Lehre vom Nominativ, die Participialkonstruktionen, der Infinitiv u. acc. c. inf. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit, meist im Anschluss an die Lektüre. Oberl. Ploss.

Französisch. 4 St. Lektüre der sämtlichen Stücke der dritten Abteilung des Lesebuchs von Klotzsch. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit, bestehend in freier zusammenfassender Wiedererzählung der gelesenen Stücke. In der Grammatik, die vorwiegend im Anschluss an die Zurückgabe der schriftlichen Arbeiten behandelt wurde, fand eine gründliche Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre und der wichtigsten Abschnitte der Satzlehre statt. Rektor Klotzsch.

Englisch. 3 St. Lektüre der leichteren Stücke aus dem eingeführten Lesebuche. Im Anschluss daran das Wichtigste aus der Formenlehre nebst den schriftlichen Übungen. Leichte Gedichte gelernt. Oberl. Teichmann.

Geographie. 2 St. Deutsches Reich in physischer und politischer Beziehung, speziell Königreich Sachsen. Oberl. Wienhold.

Geschichte. 2 St. Geschichte des Mittelalters mit besonderer Rücksicht auf Deutschland. Oberl. Schmidt.

Rechnen. 2 St. Zusammengesetzte Regel de tri. Prozentrechnung mit Anwendungen auf die verschiedenen Aufgaben des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Kettenrechnung. Dr. Domsch.

Algebra. 2 St. Die 4 Species in allgemeinen Zahlengrössen. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten. Dr. Domsch.

Geometrie. 2 St. Die Kongruenzsätze und Anwendung derselben auf Vier- und Vielecke u. s. w. Flächenvergleichung bis zum pythagoräischen Lehrsatz. Oberl. Schöne.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik. Bestimmen von Pflanzen, Erweiterung der Kenntnis der wichtigsten Familien des Pflanzenreiches. — Im Winter: Bau und Leben des Menschen. Vergleichende Rückblicke auf den Tierkörper. Oberl. Klitzsch.

Quarta.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Wenck.

Religion. 3 St. a) Ausführliche Behandlung der Apostelgeschichte, hierauf Überblick über die Geschichte des Alten Testaments (1 Stunde). b) Erklärung des dritten, vierten und fünften Hauptstückes, Wiederholung des zweiten. Einprägung von Bibelsprüchen und Kirchenliedern (2 Stunden). Oberl. Wienhold.

Deutsch. 3 St. Lesen, Besprechen und Wiedererzählen prosaischer Stücke. Vortrag der gelernten 8 Gedichte (poetische Erzählungen). Wiederholung der Lehre vom einfachen Satz; eingehende Behandlung des zusammengesetzten Satzes. 12 schriftliche Arbeiten (Wiedergabe und Nachbildung behandelter Lesestücke). Schmerler.

Lateinisch. 6 St. Gründliche Wiederholung der unregelmässigen Formenlehre durch nochmaliges mündliches und schriftliches Durcharbeiten des Ostermann für Quinta; aus Ostermann für Quarta die Kongruenzlehre, Nominativ, Accusativ, Dativ, sowie der Gebrauch des Verbum infinitum im Rahmen des Lehrbuchs. Gelesen wurden aus Lhomond, viri illustres die Abschnitte IX—XXX (die letzten kursorisch). Wöchentlich abwechselnde Extemporalien und Exercitien. Oberl. Dr. Wenck.

Französisch. 6 St. Lektüre der meisten poetischen und prosaischen Stücke aus der 2. Abteilung des Lesebuchs von Klotzsch. Auswendiglernen einiger derselben. Fortsetzung der Formenlehre; die gebräuchlichen unregelmässigen Zeitwörter. Einiges aus der Syntax. Wöchentliche schriftliche Übungen (5 St.). Oberl. Teichmann. —

Eine Stunde wöchentlich wurde im Sommerhalbjahr zu Sprechübungen, im Winterhalbjahr zur Lektüre der beiden ersten Kapitel von Galland, Histoire d'Aladdin verwendet. Rektor Klotzsch.

Geographie. 2 St. Die aussereuropäischen Erdteile. Kartenzeichnen. Dr. Domsch.

Geschichte. 2 St. Die griechische und römische Geschichte bis Augustus (inclus.). Lehrbuch: Kurzer Abriss der Geschichte von Wilhelm Müller. Oberl. Dr. Wenck.

Rechnen. 3 St. Dezimalbrüche. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri. Gesellschaftsrechnung. Prozentrechnung. Dr. Domsch.

Geometrie. 2 St. Entwickelung der elementaren planimetrischen und stereometrischen Anschauungen. Einleitung in die Planimetrie bis zu den Kongruenzsätzen. Oberl. Schöne.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik. Übungen im Bestimmen der Pflanzen. Natürliche Klassen. Vergleichende Übersicht über die Pflanzenorgane. — Im Winter: Zoologie. Reptilien, Amphibien und Fische. Vertreter der wirbellosen Tiere. Oberl. Klitzsch.

Quinta.

Ordinarius: Oberlehrer Vater.

Religion. 3 St. a) Biblische Geschichte des Neuen Testaments (2 St.). b) Erklären des zweiten Hauptstückes; Einprägen von Bibelsprüchen und Kirchenliedern (1 St.). Im Sommersemester Oberl. Wienhold, im Wintersemester Cand. Liebster.

Deutsch. 4 St. Ausgewählte Lesestücke wurden besprochen und nacherzählt, 12 Gedichte erklärt und vorgetragen, Wiederholung und Vertiefung der Formenlehre; Behandlung des einfachen und zusammengesetzten Satzes. Übungen in der Rechtschreibung und Zeichensetzung. 26 Arbeiten und Diktate. Schmerler.

Lateinisch. 8 St. Wiederholung und Ergänzung der regelmässigen Formenlehre. Die unregelmässige Deklination und Konjugation. Die wichtigsten Präpositionen und Konjunktionen. Adverbia. Mündliche und schriftliche Übersetzungen aus Ostermann für Quinta mit besonderer Berücksichtigung der zusammenhängenden Erzählungen und Fabeln. Einige syntaktische Regeln, Wöchentliche Klassenpensa. Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Oberl. Vater.

Französisch. 4 St. Im Anschluss an Klotzsch, französ. Lesebuch, Stücke 1—32, wurde nach der analytischen Methode geübt: 1) die Formenlehre des Substantivum, Adjektivum, der Artikel und des abgeleiteten Adverbium, sowie einiges vom schwachen Verbum; 2) die Bildung des einfachen Satzes. Fortlaufende Lese- und Sprechübungen, Vortrag der gelernten Gedichte, 28 schriftliche Übungen. Schmerler.

Geographie. 2 St. Die ausserdeutschen Länder Europas. Erweiterung der geographischen Grundbegriffe. Oberl. Wienhold.

Geschichte. 1 St. Sagen, Bilder und Biographien aus der Geschichte des Mittelalters. Oberl. Schmidt.

Rechnen. 4 St. Bruchrechnung. Weiterer Ausbau des Dezimalsystems (Dezimalbrüche). Dr. Domsch.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik. Erweiterung der in Sexta gewonnenen morphologischen Kenntnisse. Beschreibung und Vergleichung von verschiedenen Arten derselben Gattung. — Im Winter: Zoologie. Erweiterung des Sextapensums. Ausführlichere Darstellung der wichtigsten Formen der Säugetiere und Vögel. Oberl. Klitzsch.

Sexta.

Ordinarius: Oberlehrer Ploss.

Religion. 3 St. a) Biblische Geschichte des Alten Testaments (2 St.). b) Erklärung des ersten Hauptstückes. Einprägen von Bibelsprüchen und Kirchenliedern (1 St.) Oberl. Wienhold.

Deutsch. 4 St. Lesen und Wiedererzählen prosaischer und poetischer Stücke. Wortlehre und Formenlehre. Lehre vom einfachen und erweiterten Satz. Einübung der Orthographie und Interpunktion. Deklamieren. Wöchentlich abwechselnd Aufsätze und Diktate. — Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Cand. Liebster.

Lateinisch. 8 St. Lektüre: Einige Fabeln und zwei Abschnitte aus dem Neuen Testament. — Grammatik: Nach Ostermanns Übungsbuch für Sexta die Deklinationen, die Komparation, „esse“ und seine composita, die erste Konjugation und die Zahlwörter. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Oberl. Ploss.

Geographie. 2 St. Entwickelung der geographischen Grundbegriffe an der Hand der Orts- und Heimatskunde. Ausführliche Darstellung des Königreichs Sachsen, übersichtliche Darstellung von Deutschland. Oberl. Klitzsch.

Geschichte. 1 St. Bilder aus der griechischen und römischen Geschichte (nach Spiess und Berlet). — Im S.-Halbjahr Dr. Hoppe, im W.-Halbjahr Cand. Liebster.

Rechnen. 5 St. Lesen und Schreiben von Zahlen. Die vier Species in unbenannten und benannten Zahlen. Das Dezimalsystem in Münzen, Maassen und Gewichten, Zeitrechnung. Resolutionen und Reduktionen. Dr. Domsch.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik. Ausbildung der botanischen Grundbegriffe durch Anschauung und Beschreibung bekannter Pflanzen. — Im Winter: Zoologie. Besprechung einiger Vertreter aus dem Reiche der Säugetiere. Oberl. Klitzsch.

Künste und Fertigkeiten.

1. Zeichnen.

Untersekunda. 2 St. Fortsetzung des Zeichnens nach Gipsabgüssen und nach ornamentalen Vorlagen. Oberl. Liebe.

Obertertia. 2 St. Zeichnen nach leichten Gipsmodellen. Oberl. Liebe.

Untertertia. 2 St. Zeichnen von Vollkörpern unter Berücksichtigung perspektivischer Gesetze. Einführung in die Beleuchtungsgesetze. Oberl. Liebe.

Quarta. 2 St. Kopieren der Vorlagen von Herdtle. Oberl. Liebe.

Quinta. 2 St. Der Kreis. Die Spirale. Kopieren von Vorlagen aus Schmidts und Herdtles Vorlagewerken. Bullmer.

Sexta. 2 St. Die gerade Linie. Teilen derselben. Das Quadrat. Geradlinige Ornamente. Kreis. Verwandlung des Quadrates und Kreises zu einfachen Ornamenten. Bullmer.

2. Turnen.

Sexta und Quinta. 2 St. comb. Die einfachen Gang- und Zugarten, Drehungen, Stellungen, Armübungen; Marsch- und Laufübungen. Leichte Übungen im Hang und Stütz. Springen. Spiele.

Quarta und Untertertia. 2 St. comb. Reihen und Schwenken. Schrittstellungen ohne und mit Drehungen. Auslage und Ausfall. Die Übungen der 1. Turnstufe an den Geräten. Springen. Spiele.

Obertertia und Untersekunda. 2 St. comb. Ordnungs- und Freiübungen mit belasteten Armen. Schwierige Übungen der 1. Turnstufe und die leichteren der 2. Springen. Spiele.

Obersekunda — Oberprima. 2 St. comb. Folgen und Gruppen von Hantel-, Stab- und Keulenübungen. Schwierige Übungen an allen Geräten. Stabspringen. Gerwerfen, Steinstossen. Bullmer.

Die Durchschnittsleistungen im Turnen
sind für das Schuljahr 1887/88 folgende:

Klasse.	Turn-Schüler.	Hang- Wippen.	Stütz- Wippen.	Weit- Springen. cm.†	Hoch- Springen. cm.†	Reck-Höhe. cm.	Felg-aufschwung. (Ristgr.)	Schwung-Kippe.	Riesensprung. (Pferd.)	Hantelstemmen (50 Pfd.)	Hangeln (*Klettern am Tau).
Ia	2	10 ×	10 ×	450	125	220	100 %	50 %	100 %	22 ×	100 %
Ib	3	12 ×	14,5 ×	400	125	210	100 %	100 %	0 %	19,5 ×	100 %
IIa	9	10 ×	8 ×	450	125	200	100 %	62,5 %	100 %	17,1 ×	87,5 %
IIb	13	7 ×	4,6 ×	368	110	190	85 %	46,1 %	61,6 %	9 ×	54,6 %
IIIa	13	7,8 ×	4,7 ×	380	112	180	77 %	30,7 %	54,6 %	9,5 ×	*)100 %
IIIb	12	5 ×	2 ×	358	108	170	90 %	—	—	—	*)100 %
IV	19	5 ×	1,9 ×	342	98	160	89,5 %	—	—	—	*)100 %
V	19	4,2 ×	—	328	97	140	94,7 %	11 %	—	—	*)100 %
VI	17	4,6 ×	—	293	82	120	94,1 %	—	—	—	*)100 %

† Nach Abzug der Höhe des Sprungbrettes.

3. Gesang.

Quinta und Sexta. 2 St. (1 comb.). Gehör- und Treffübungen. 25 Choräle. Volks-, Turn- und Wanderlieder. (Brähmig bis No. 46.)

Quarta. 1 St. Sing- und Treffübungen. Die 40 vorgeschriebenen Choräle. Turn- und Wanderlieder.

Quarta — Oberprima. 1 St. Chorgesang. 4stimmige Choräle; die liturg. Gottesdienstordnung; geistliche und weltliche Lieder; Motetten. Bullmer.

4. Schreiben.

Sexta. 2 St. Das kleine und grosse Alphabet der deutschen und lateinischen Schrift. Ziffern. Wörter.

Quinta. 1 St. Buchstaben und Wörter in deutscher und lateinischer Schrift. Die Rundschrift. Bullmer.

5. Stenographie.

Untertertia. 1 St. Laut- und Wortbildungslehre. Schönschreibübungen.

Obertertia. 1 St. Der 1. Teil des Lehrgangs von Zuckertort bis 540. Wiederholung des in IIIb behandelten Stoffes. Übertragung kleinerer Lesestücke. Schnellschreibübungen.

Untersekunda. 1 St. Einführung in die Satzkürzung (Zuckertort, II. Teil). Praktische Übungen durch Nachschreiben von Diktaten. Bullmer.

Zusammenstellung

der Themata zu den deutschen und fremdsprachlichen Aufsätzen.

A. Deutsch.

Oberprima: Welches sind die unterscheidenden Merkmale der neueren Zeit im Gegensatz zum Mittelalter? — Warum ist es für den Menschen nicht gut, die Zukunft vorher zu wissen? — Schillers Spaziergang. (Klassenarbeit.) — Der Ackerbau, der Anfang aller Kultur. (Prüfungsarbeit.) — Welche logischen Operationen vollzieht Lessing in seiner ersten Abhandlung über die Fabel? — Wissen ist Macht. — Welche Umstände rufen in Goethes „Egmont" die erbitterte Stimmung der Niederländer gegen die spanische Herrschaft hervor? — Nicht die Gewalt der Arme, noch die Tüchtigkeit der Waffen, sondern die Kraft des Gemütes ist es, welche Siege erkämpft.

Unterprima: Gehen hat wohl so viel ausgerichtet, wie Laufen. — Welche Kämpfe muss Parzival bestehen, bevor er in den dauernden Besitz des Grales gelangt? — Worin gleichen sich Gebirge und Meer? — Was haben die sächsischen Kaiser für Deutschland gethan? (Klassenarbeit.) — Durch welche Umstände wird in Schillers Drama „Maria Stuart" die Hinrichtung der Heldin verzögert, durch welche beschleunigt und herbeigeführt? — Was hat die Menschheit durch Schiffahrt und Seehandel gewonnen? — Es ist schwerer zu erhalten als zu erringen. — Klopstocks Messiade und ihre Bedeutung für die deutsche Litteratur. (Examenarbeit.)

Obersekunda: Die Vorfabel in Lessings „Minna von Barnhelm" in Form einer zusammenhängenden Erzählung. — Vergleichung des älteren und neueren Hildebrandsliedes. — Gutta cavat lapidem non vi sed saepe cadendo. (Chrie.) — Was erfahren wir im 1. Akte des Schillerschen Dramas „Maria Stuart" über das Vorleben der Heldin? — Der Kampf der Höflinge für und wider die Hinrichtung der Maria. (Nach Schillers „Maria Stuart" II, 3.) — Es kann der Frömmste nicht in Frieden bleiben, wenn es dem bösen Nachbar nicht gefällt. — Welchen Einfluss hat der letzte Auftritt des 1. Aufzuges in Schillers „Maria Stuart" auf unser Urteil über Paulet? — Durch welche Ursachen die Kreuzzüge hervorgerufen worden sind. (Examenarbeit.)

Untersekunda: 1. Ein Spaziergang am Ostertage. 2. Was erzählt und was lehrt uns Hans Sachs in seinem Gedichte „Die ungleichen Kinder Evä"? 3. Luther in Borna (Brief des Geleitsmanns Michael von der Strassen an einen Leipziger Freund). 4. Der Rhein, Deutschlands Strom, nicht Deutschlands Grenze. 5. Vater und Sohn in Goethes „Hermann und Dorothea". (Examenarbeit.) 6. Ein guter Freund, ein edles Kleinod. 7. Not entwickelt Kraft. 8. Meine Weihnachtsferien. (Ein Brief.) 9. Die Macht der Gewohnheit. (Chrie.) 10. Vorfabel zu Schillers Tell. (Examenarbeit.)

Obertertia: 1. Das Leben der alten Deutschen. 2. Der Gastfreund in Korinth teilt dem Bruder des Ibykus den Tod des Sängers mit. 3. Inhaltsangabe des „Tauchers". 4. Die Kapelle auf Rhodus. 5. Die Entdeckung Amerikas. 6. Die Vorboten des Winters. 7. Eine Nacht in der Wildnis der neuen Welt. (Nach Chateaubriand.) 8. Die Elbe. 9. Der Schwur auf dem Rütli. 10. Empfehlung eines gelesenen Buches. (Brief.) 11. Der alte Hofschulze. (Ein Charakterbild.)

B. Französisch.

Oberprima: Caractère de Pierre le Grand. — Les grands écrivains du siècle de Louis XIV. — Sur l'étude des langues modernes. — La chute du duc de Buckingham. — L'exposition du Bourgeois Gentilhomme par Molière. — La reine Marie Stuart. — Aperçu général sur le XVIII^{e} siècle. — Le dernier jour de l'année. — Un portrait d'Harpagon. — La vie de Benjamin Franklin.

Unterprima: Le Cardinal Mazarin. — Commencement du gouvernement de Louis XIV. — La Paix de Westphalie. — Un temps de honte redressé par un temps des plus glorieux pour l'Allemagne. — Des passages célèbres du Rhin. — Vie de Voltaire. — Le prince Eugène. — Des Batailles mémorables de la guerre pour la Succession en Espagne. — Les généraux les plus célèbres sous Louis XIV.

C. Englisch.

Oberprima: The military Career of King Albert. (Vortrag.) — Lord Byron. — The Rhine from Mayence to Cologne. — Reflexions on seeing Lake Leman and its environs. — Admonitions of the anniversary of the Battle of Sedan. — Thomas Moore and his Lalla Rookh. — The twelve Months (a Christmas Tale). — Shakespeare's Midsummer Night's Dream (Sources and idea).

Unterprima: The British Empire in India. — Queen Elizabeth and Mary Stuart. — The Tragical Death of Lord Clive. — Lord Byron. — Byron's Fable 'The Prisoner of Chillon' and its Deviation from the Historical Fact. — Contents of the Farce 'The Bengal Tiger'. — Charles Dickens. — Character of Scrooge. — Henry I of Germany. — English Customs. — The Theatre of Shakespeare. — Scrooge's Change of Life.

IV.

Chronik.

Als Nachtrag zu dem vorigen (14.) Jahresbericht ist hier zuerst zu erwähnen, dass bei dem Aktus, mit welchem das Schuljahr 1886/87 geschlossen wurde, auf Vorschlag des Lehrerkollegiums neun Schüler **Bücherprämien** erhielten, nämlich der Obersekundaner Seifert, der Untersekundaner Rose, die Obertertianer Polster, Schöpel und Moritz, der Quartaner Handwerk, der Quintaner Telle, die Sextaner Claussnitzer und Scheibner. **Belobigungszeugnisse** empfingen ebenfalls neun Schüler: die Untersekundaner Pauling, Joseph und Schade, die Untertertianer Baum und Paul Pfau, die Quartaner Wangemann und Morenz, die Quintaner Heinig und Hofmann.

Das 15. Schuljahr begann am 18. April. Am genannten Tage fanden die Aufnahmeprüfungen der angemeldeten Schüler statt, und am folgenden Tage nahm in allen Klassen der regelmässige Unterricht seinen Anfang.

Der 23. April, der Geburtstag Seiner Majestät des Königs Albert, wurde durch einen öffentlichen Festaktus gefeiert. Der Choralgesang „Lobe den Herren, den mächtigen König der Ehren", und ein vom Oberlehrer Wienhold gesprochenes Gebet leiteten die Feier ein. Die Festrede hielt Dr. Domsch. Derselbe gedachte zuerst der hohen Bedeutung des Tages, sodann zu dem Thema seines Festvortrages „Das Leben Friedrichs des Grossen in Rheinsberg, dargestellt aus seinem Briefwechsel" übergehend, zeichnete er ein Bild von dem der Musik, Philosophie und Kunst gewidmeten Leben des grossen Königs. Hieran schlossen sich patriotische Vorträge von Schülern der unteren Klassen, ein Primaner feierte in französischer Sprache den König Albert als Feldherrn. Der Gesang der Sachsenhymne schloss die Feier, welche Eltern der Zöglinge, wie Gönner und Freunde der Anstalt mit ihrem Besuche beehrten.

Als Vertreter des städtischen Realgymnasiums beteiligte sich der Berichterstatter an der am 27. April in der hiesigen Bürgerschule stattfindenden Feier, welche der Verabschiedung des in den Ruhestand tretenden Direktors Paak und der Einweisung des neuen Direktors Uhlmann galt. Ebenso überbrachte dem hiesigen Königlichen Lehrerseminar, das am 1. Mai das Fest seines fünfundzwanzigjährigen Bestehens feierte, der Rektor die wärmsten Glückwünsche des Realgymnasiums, nachdem derselbe bereits am 18. April den neuen Seminardirektor Biel bei seiner Einweisung schriftlich begrüsst hatte.

Am 26. Mai wurde unserer Schule die Ehre des Besuchs Seiner Excellenz des Herrn Kultusminister von Gerber zu teil. Hochderselbe kam am späten Nachmittag des genannten Tages in unserer Stadt an und wurde gegen 5 Uhr im Eingange der Schule von den Mitgliedern der Realgymnasialkommission ehrfurchtsvollst begrüsst. Seine Excellenz besichtigte in Begleitung der Kommission die Räumlichkeiten unseres neuen Schulgebäudes und sprach schliesslich seine hohe Zufriedenheit mit der Einrichtung des Hauses aus.

Da die Realgymnasiallehrer Dr. Domsch und Schmerler auch in diesem Jahre wieder zu militärischen Übungen einberufen worden waren, letzterer auf die Zeit vom 30. Mai bis zum 26. Juli und ersterer vom 30. Juni bis zum 25. August, so war es nicht möglich, dass die übrigen Lehrer allein die doppelte Vertretung übernahmen. Auf Verwendung des Rektors genehmigte deshalb die Kollaturbehörde in dankenswerter Weise, dass von Pfingsten bis Michaelis ein Stellvertreter angestellt würde. Mit Zustimmung des Königlichen Ministeriums des Kultus und öffentlichen Unterrichts wurde der Kandidat des höheren Schulamts Dr. phil. Reinhold Besser auf die Dauer von 3 Monaten als Vikar angenommen und am 9. Juni in die Schule eingeführt. Von diesem Tage an bis zum Schluss des Sommerhalbjahrs hat Dr. Besser hier gewirkt, und die Schule bleibt ihm für die Treue und Bereitwilligkeit, mit welcher er ihr seine Kräfte gewidmet hat, aufrichtig dankbar. — Über seinen Lebensgang hat Dr. Besser folgende Mitteilungen gegeben:

„Ich, Christian Ephraim Reinhold Besser, bin geboren in Dresden am 25. Dezember 1864 als Sohn des Realgymnasialoberlehrers Prof. Karl Ernst Besser. Im Elternhause erhielt ich meine erste Bildung und kam dann zu Ostern 1874 auf die damalige Annenrealschule (I. O., jetzt Annenrealgymnasium) zu Dresden-Altstadt, die ich zu Ostern 1882 mit dem Reifezeugnis verliess. Ich bezog nun die Universität Leipzig, studierte hier hauptsächlich neuere Sprachen und Germanistik, erwarb mir im Frühjahr 1886 daselbst die philosophische Doktorwürde, ging dann behufs praktischer Erlernung der französischen Sprache nach Paris, kehrte zu Beginn des folgenden Wintersemesters wieder nach Leipzig zurück und machte dort mein Staatsexamen. Das Hohe Königl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts hatte darauf die Güte, mir zu Pfingsten 1887 ein dreimonatliches Vikariat am Realgymnasium zu Borna zu übertragen, wobei mir die Zeit vom 1. Juli bis Ende September als erstes Viertel meines Probejahres angerechnet werden soll.“ —

Den üblichen Sommerausflug unternahmen die sämtlichen Lehrer mit den Schülern am 4. Juli. Die oberen und mittleren Klassen, in drei Abteilungen eingeteilt, durchwanderten in verschiedenen Richtungen das Muldenthal von Rochlitz bis Penig, während die Quintaner und Sextaner Leipzig (Rosenthal, zoologischen Garten etc.) besuchten. Der von herrlichem Wetter begünstigte Tag verlief in erwünschter Weise.

Zur Feier des Sedantages wurde ein Aktus veranstaltet, bei welchem Oberlehrer Schmidt den Festvortrag hielt. Er legte Ursache und Entstehung des Krieges von 1870/71 dar, schilderte Kampf und Sieg bei Sedan und die unter Gottes Allmachtshand vollführten Heldenthaten der deutschen Armee als ein Gottesgericht über den deutschen Erbfeind, forderte zum demütigen Danke auf gegen Gott für die durch jene ruhmreichen Kämpfe begründete Wiederaufrichtung des deutschen Kaiserreiches, pries den ruhmgekrönten Heldenkaiser, die treuen Mithelfer und die tapfere Armee und entflammte die Herzen der jugendlichen Zuhörer, in Zukunft, wenn der alte Feind uns von neuem zu schaden sucht, ebenfalls mannhaft einzustehen für des deutschen Reiches Ehre und Herrlichkeit. Patriotische Gesänge eröffneten und beschlossen die Feier.

Mit Genehmigung des Königlichen Kultusministeriums wurde vor Michaelis eine ausserordentliche Reifeprüfung mit den beiden Oberprimanern Karl Windel und Hermann Agricola abgehalten. Die schriftlichen Arbeiten*), welche die Prüflinge

*) Es waren folgende Aufgaben gestellt worden:
1., für den deutschen Aufsatz das Thema: „Wodurch ist in Schillers Wallenstein das Schwanken und der Entschluss des Helden begründet?“

in den Tagen vom 6. bis zum 13. September gefertigt hatten, waren befriedigend ausgefallen, so dass beide zur mündlichen Prüfung zugelassen werden konnten. Letztere fand unter dem Vorsitz des Herrn Geheimen Schulrats Dr. Vogel als Königl. Kommissar am 19. September statt. Beide Schüler haben die Prüfung bestanden. Es erhielt

Namen der Abiturienten	Geburtsort	Alter	Censur für die wissenschaftlichen Leistungen	Censur für das sittliche Verhalten	Künftiger Beruf
Karl Windel	Brackwede b. Bielefeld	20 Jahre	IIIa	IIa	Offizierscarriere.
Hermann Agricola	Gotha	21 Jahre	III	I	desgleichen.

Die schriftliche Michaelisprüfung fand in allen Klassen nach den gesetzlichen Bestimmungen am 10., 12. und 13. September statt, und am 23. September wurde der Unterricht im Sommerhalbjahr feierlich geschlossen. Bei dem hierzu veranstalteten Aktus verabschiedeten wir uns zugleich von dem bisherigen Vikar Dr. Hoppe, welcher ein Jahr lang mit treuester Hingabe an seinen Beruf segensreich in unserer Schule gewirkt hatte. Wir werden seiner fort und fort dankbar und in Liebe gedenken. — So wehmütig uns der Abschied von dem verdienstvollen Lehrer berührte, so war doch die Veranlassung zu seinem Weggang eine für unsere Schule sehr erfreuliche. Denn der seit Michaelis 1886 wegen schwerer Krankheit beurlaubte Oberlehrer Vater, zu dessen Stellvertretung Dr. Hoppe hierher berufen worden war, hatte durch Gottes Gnade seine Gesundheit endlich wieder erlangt. Am 3. Oktober, beim Beginn des Wintersemesters, konnte

---

2., für das lateinische Exercitium ein deutsches Diktat;

3., für den französischen Aufsatz das Thema: „État et dispositions de l'Angleterre après l'assassinat du duc de Buckingham;"

4., für das englische Exercitium die Übersetzung eines Abschnittes aus Schillers Jungfrau von Orleans;

5., für die physikalische Arbeit: a) Eine materielle Gerade von der Länge l ist um ihren Endpunkt drehbar. Sie trägt in der Mitte eine Masse m, ferner gleiche Massen m in drei Abständen, $\frac{1}{4}\,l$ vom oberen und unteren Ende. Wie gross ist die reduzierte Pendellänge und die Schwingungsdauer der Vorrichtung? Die Masse der Längeneinheit der Geraden $= d$. — b) Von einem 50 m hohen Standpunkte aus wird ein Körper horizontal geworfen und erreicht eine grösste Wurfweite von 300 m; wie gross ist die Geschwindigkeit am Schluss der dritten Sekunde? Welchen Winkel bildet dieselbe mit der Horizontalebene? Wo ist der Körper nach 3″?

6., für die Elementarmathematik: a) Es sind die Seiten und der Flächeninhalt eines Dreiecks aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und der zugehörigen Mittellinie zu berechnen. — b) Wie gross ist $\sqrt[4]{\frac{4}{1+3i}}$? c) Wie lautet das allgemeine Glied in den Entwickelungen von $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-3}$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-6}$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-5}$, und wie lassen sich die Entwickelungen durch das allgemeine Glied darstellen?

7., für die analytische Geometrie: a) im ersten Quadranten eine Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$ einen Punkt zu bestimmen, für welchen sich die Subtangente zur Subnormale wie $a : b$ verhält. Wie lautet die Gleichung der in diesem Punkte konstruierten Tangente, und welche Entfernung hat der Mittelpunkt der Ellipse von dieser Tangente? — b) Von einem Dreieck sind zwei Seiten gegeben, während die dritte im Verhältnis $m : n$ geteilt ist; man bestimme den geometrischen Ort des Teilpunktes. — c) Zwei Parabeln entsprechen den Gleichungen $y^2 = 4m_1\,x$ und $y^2 = 4m_2\,(x-a)$. Wie lauten die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten, und wie gross sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

er mit voller Kraft seine Berufsthätigkeit aufs neue beginnen, und seitdem hat er auch sein Amt im ganzen Umfange selbst wieder verwaltet.

Am 3. Oktober führte der Berichterstatter den Kandidaten der Theologie Liebster in die Schule ein, welchen das Königl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts mittelst Verordnung vom 26. August 1887 zur Erstehung des Probejahres unserem Realgymnasium zugewiesen hatte. Über seinen bisherigen Lebensgang berichtet Cand. Liebster Folgendes:

„Georg Daniel Liebster wurde am 5. April 1863 zu Leipzig geboren, wo sein Vater als Rechtsanwalt thätig ist. Den Elementarunterricht empfing er in der Teichmannschen Privatschule und besuchte von Ostern 1874 an das Nikolaigymnasium in seiner Vaterstadt, auf welchem er sich zu Ostern 1883 das Reifezeugnis erwarb. Sodann wendete er sich dem Studium der Theologie zu, dem er im ersten Semester zu Tübingen, im dritten zu Marburg und in den übrigen zu Leipzig oblag. Nach bestandener Kandidatenprüfung, Ostern 1887, begab er sich für ein halbes Jahr auf Reisen. Zu Michaelis desselben Jahres wurde er vom Königl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts dem Realgymnasium zu Borna als Probelehrer zugewiesen.“

Die schriftlichen Arbeiten für die Osterreifeprüfung wurden von den Oberprimanern an den Tagen vom 6. bis 13. Februar gefertigt. Es waren folgende Aufgaben gestellt:

1. Für den deutschen Aufsatz das Thema „Wodurch weiss Schiller in seiner *Maria Stuart* unsere innigste Teilnahme für die Heldin des Stückes zu erwecken?“
2. Für den französischen Aufsatz das Thema *„Le traité de Presbourg“*.
3. u. 4. Für die lateinische und englische Arbeit deutsche Übersetzungsstücke.
5. Für die analytische Geometrie: a) An eine Parabel mit dem Parameter p seien zwei Tangenten gelegt, welche mit der Parabelachse die Winkel α_1 und α_2 bilden. Welche Winkel schliesst die vom Brennpunkte nach dem Schnittpunkte beider Tangenten gezogene Gerade mit den nach den Berührungspunkten gehenden Brennstrahlen ein? b) Es ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte der Höhen der Dreiecke anzugeben, welche in der Grundlinie und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. c) Wie lauten die Gleichungen der von dem Koordinatenanfange aus an die Kurve $16x^2 + 25y^2 - 224x - 200y + 784 = 0$ gelegten Tangenten, und welches ist die Gleichung der Berührungssehne?
6. Für die Elementarmathematik: a) Ein bares Anlehen von 120000 Gulden, das mit $4\frac{1}{2}\,\%$ zu verzinsen ist, soll in 20 Jahren getilgt werden dadurch, dass Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe abgezahlt wird. Wie gross würde das Anlehen sein, wenn man nur $3\frac{1}{2}\,\%$ zu zahlen hätte und die Tilgung durch dieselbe Abschlagszahlung in derselben Zeit geschehen soll? b) Von einem äusseren Punkt sei an eine Kugel mit dem Radius r eine Kegelfläche gelegt. Wo liegt der Punkt, wenn die Gesamtoberfläche des entstandenen Körpers gleich F ist?
7. Für die Physik: a) Die Länge des Sekundenpendels am Äquator ist gleich 0,99356 m. Wie gross ist am Äquator die wirklich stattfindende Beschleunigung unter der Annahme, dass die Erde ruht? Wie gross würde die Länge des Sekundenpendels sein, wenn man den Einfluss des im Zenith stehenden Mondes berücksichtigt und die Masse des Mondes $\frac{1}{81}$ der Erdmasse ist? b) Von einem in der Horizontalebene liegenden Punkt O wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v unter den Elevationswinkel α geworfen. Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Depressionswinkel muss von einem $h\,m$ hochliegenden Punkte M, dessen horizontale Entfernung von $O = a$ ist, ein zweiter Körper geworfen werden, damit er den ersten im Endpunkte der von ihm beschriebenen Parabelbahn treffe?

Die mündliche Reifeprüfung fand unter dem Vorsitz des zum Königlichen Kommissar ernannten Herrn Universitätsprofessor Dr. Masius am 1. März statt. Alle drei Oberprimaner haben die Prüfung bestanden. Es erhielt:

Namen der Abiturienten	Geburtsort	Alter	Censur für die wissenschaftlichen Leistungen	Censur für das sittliche Verhalten	Berufswahl
Arthur Wirthgen	Chemnitz	22 Jahre	IIa	I	Studium der Pharmazie
Max Krause	Leipzig	$17^1/_2$ Jahre	Ib	I	Studium der Philologie
Otto Thalmann	Erlau	19 Jahre	II	I	Studium der Forstwissenschaften.

Die schriftlichen Arbeiten für das Osterexamen wurden in den Klassen Unterprima bis Sexta zum Teil in der zweiten, zum Teil in der dritten Märzwoche gefertigt.

Die Abendmahlsfeier fand in diesem Jahre am 18. Oktober und am 24. Februar statt. Die vorbereitende Andacht leitete am Abend des 17. Oktober Oberlehrer Wienhold, an dem des 23. Februar Oberlehrer Vater. Am ersten Kommuniontage hielt Herr Diakonus Jentsch, am zweiten Herr Archidiakonus Kretzschmar die Beichtrede. — Den Konfirmandenunterricht erteilte in diesem Jahre unseren Katechumenen Herr Superintendent Spranger. — Den drei Herren Geistlichen bleibt unsere Schule für die bewiesene Güte zum aufrichtigsten Danke verpflichtet.

Zum Schluss liegt es dem Berichterstatter ob, noch mitzuteilen, dass in dem zu Ende gehenden Schuljahr, und zwar am 1. März, der vormalige Oberlehrer an unserem Realgymnasium Herr Philipp Bitsch von seinem langen schweren Leiden durch den Tod erlöst worden ist. Nach seiner Emeritierung war er im September 1885 nach Bensheim a. d. Bergstrasse übergesiedelt; er hatte gehofft, dass sein körperliches Befinden sich dort eher bessern würde, als hier; allein seine Hoffnung erfüllte sich nicht. Sein Leiden trat allmählich immer heftiger auf und verursachte ihm unsägliche Qualen. — Nun hat er endlich ausgerungen. Er ruhe im Frieden! Unsere Schule wird seiner allezeit in Hochachtung und Verehrung gedenken. — Auch aus dem Kreis unserer ehemaligen Schüler sind in dem vergangenen Jahre vier aus dem Leben geschieden:

1. Wilhelm Reinhold Eitel, geboren zu Görnitz am 14. Januar 1861, von Ostern 1873 bis Ostern 1876 unser Schüler, starb als Kaufmann am 20. August 1887 in Greiz.
2. Bruno Richard Schmidt, geboren zu Schlunzig am 13. November 1869, von Ostern 1881 bis Ostern 1884 unser Schüler, starb im Hause seiner Eltern am 1. Oktober 1887.
3. Karl Max Grauel, geboren in Borna am 15. April 1861, von Ostern 1873 bis dahin 1875 unser Schüler; starb als Lehrer im Hause seines betagten Vaters in Borna am 3. November 1887.
4. Erich Wilhelm Weinschenk, geboren zu Wachau bei Leipzig am 1. Juni 1869, von Ostern bis Michaelis 1881 unser Schüler, starb im elterlichen Hause am 1. Weihnachtsfeiertag 1887.

Wir bewahren den früh Entschlafenen ein liebevolles Andenken.

V.
Sammlungen und Lehrapparate.

I. Die Lehrerbibliothek.

An Geschenken erhielten wir:

A. Von dem Königl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts 49 Inaugural-Dissertationen.

B. Von den Verfassern: 1) Carl Freiherr von Keller, Albrecht der Beherzte; 2) Otto Perthes, Atlaseinheit in den einzelnen Klassen.

Angekauft wurden folgende Werke: Philippson, Geschichte der neueren Zeit. 2. Teil. Könnecke, Bilderatlas zur Geschichte der deutschen Nationalliteratur. Ratzels Völkerkunde. Lf. 1. Blümner, Leben und Sitten der Griechen. Abt. 1. Ermisch, Neues Archiv für sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. 8. Rowel, Briefe aus der Hölle. Bardt, Die Episteln des Horatius. Deutsch. Breymann-Moeller, Französisches Übungsbuch, zur Einübung der Satzlehre. Kühn, Der französische Anfangsunterricht. Derselbe, Französisches Lesebuch. Unterstufe. Derselbe, Übungen zum französischen Lesebuch. Wilke, Stoffe zu Gehör- und Sprachübungen für den Anfangsunterricht im Englischen. Leimbach u. Hesse, Evangelische Andachten für alle Tage des Jahres. Drewes, Humanismus und Reformation. Frick, Lehrproben und Lehrgänge. (Forts.) Klinghardt, Das höhere Schulwesen Schwedens. Küchenmeister, Der Mangel an Ärzten. Vogt, Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. Dittes, Pädagogischer Jahresbericht von 1885 und 1886. Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens, XV. Jahrg. Gymnasium, V. Jahrg. Pädagogisches Archiv, XXVIII. Jahrg. Hoffmann, Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. (Forts.) Hallier, Flora von Deutschland, Bdd. 27—29. Sumpf, Schulphysik. Joule, Mechanisches Äquivalent der Wärme. Gretschel-Bornemann, Jahrbuch der Erfindungen. (Forts.) Tchihatchef, Klein-Asien. Andree, Handatlas. Supplement. (Schluss.) Schultz, Medidationen.

II. Die Schülerbibliothek.

Gast, Lessings Emilia Galotti. Henning, Die Jungfrau von Orleans. Hoffmann, Deutscher Jugendfreund. 42. Bd. Kern, Schillers Wallensteins Tod. G. Hiltl, Unser Fritz. Schmidt, Der siebenjährige Krieg. Wägner, Deutsche Heldensagen. Wiedemann, Nazi. Zeuske, Aus grossen Tagen.

III. Der physikalische und chemische Lehrapparat.

Angekauft wurden: Ein Eudiometer, ein Nicolsches Prisma, mehrere Porzellanschalen und Pulverflaschen, ein Quecksilberkasten.

An Geschenken erhielten wir:

1) von Herrn Dr. med. Ziegenhorn eine Anzahl Orthopteren;
2) vom Untertertianer Wangemann einen Mäusebussard;
3) vom Untersekundaner Sachsse ein Stück Chalcedon.

IV. Die Sammlung von Lehrmitteln für den Gesangunterricht.

Vier Sätze Stimmen zu „Kaiserlied" von Ehrlich; 1 Ex. Brähmig, Kleine praktische Gesangsschule.

Geschenkt wurden von dem Verleger 1) Ossian von Vogel, 100 geistliche und weltliche Gesänge für Männerchor; 2) Brähmig, Kleine Gesangschule (3 Ex.).

V. Lehrmittel für den Turnunterricht.

Der Untersekundaner Zieger schenkte
18 Tafeln Abbildungen aus Puritz, Merkbüchlein für Vorturner.

Allen Denen, welche im verflossenen Jahre durch Geschenke zur Vermehrung unserer Bibliothek und unserer übrigen Sammlungen beigetragen haben, spricht der Berichterstatter im Namen der Schule den ehrerbietigsten und herzlichsten Dank aus.

VI.

Nachrichten und Bestimmungen

über Aufnahme, Abgang etc.

1. Die regelmässige Aufnahme neuer Schüler in das Realgymnasium erfolgt zu Ostern. Die Aufzunehmenden sind bei der Anmeldung dem Rektor in der Regel persönlich vorzustellen.

Bei der Anmeldung sind beizubringen

das Taufzeugnis,
der Impfschein (bez. Schein der Wiederimpfung),
ein Zeugnis über die bisher genossene Bildung (Abgangszeugnis)
und bei Konfirmierten das Konfirmationszeugnis.

Der Aufnahme geht eine Prüfung durch das Lehrerkollegium voraus. Zur Aufnahme in die unterste Klasse genügt das erfüllte neunte Lebensjahr. Es wird mithin im allgemeinen diejenige Elementarbildung vorausgesetzt, wie sie nach dreijährigem Besuch einer guten Volksschule erreicht sein wird. Die Vorkenntnisse, welche zur Aufnahme in höhere Klassen erfordert werden, sind aus der Lehrverfassung des letzten Jahres erkenntlich. Bei der Prüfung zur Aufnahme in die Obersekunda oder Prima ist überdies festzustellen, ob der Aufzunehmende die für diese Klassen nach der Lehrordnung vorausgesetzten Kenntnisse in Naturbeschreibung, was die Prima betrifft, in Naturbeschreibung und Geographie besitzt. Von dieser Ergänzungsprüfung sind nur solche Recipienten befreit, die bereits ein inländisches Realgymnasium besucht haben und an demselben nach Obersekunda, beziehentlich Prima versetzt worden sind. Schüler, welche anderwärts auf höheren Lehranstalten vorgebildet sind, werden übrigens nur in die Klasse aufgenommen, auf welche ihre Schulzeugnisse lauten.

2. Die Schüler des Realgymnasiums sind der Beaufsichtigung auch ausserhalb der Anstalt unterworfen. Die näheren Bestimmungen darüber sind aus der Schulordnung ersichtlich. Auswärtige Schüler müssen unter Aufsicht und Leitung gewissenhafter Personen stehen, deren Wahl der Rektor zu genehmigen hat. Wenn ein Schüler seine Pension bez. Wohnung zu wechseln beabsichtigt, so hat er es rechtzeitig dem Rektor zu melden und dessen Genehmigung einzuholen.

3. Die Schüler haben eine bestimmte Tagesordnung zu beobachten; es müssen täglich gewisse Stunden der Arbeit, andere der Erholung gewidmet werden. Im allgemeinen wird das Mass der häuslichen Arbeiten so zugeteilt, dass die Schüler der untersten Klassen täglich in $1-1\frac{1}{2}$ Stunden, die der übrigen Klassen in $2-2\frac{1}{2}$ Stunden dasselbe wohl zu bewältigen vermögen. Natürlich wird bei jedem Schüler die nötige Sammlung und der erforderliche Fleiss vorausgesetzt.

Dringend zu empfehlen ist es übrigens, dass die Eltern der Schüler, bez. diejenigen, welchen die Pflege und Beaufsichtigung der Schüler ausserhalb der Schule obliegt, für eine feste Bestimmung der Freizeit und der häuslichen Arbeitszeit ihrer Söhne und Pflegebefohlenen sorgen und dieselben auf diese Weise an Ordnung und Pünktlichkeit gewöhnen.

Um die wünschenswerte und notwendige Ordnung nach dieser Richtung hin durchzuführen, übernimmt jeder Lehrer unseres Realgymnasiums die persönliche Überwachung einer bestimmten Anzahl von Schülern, dergestalt, dass jeder Schüler der besonderen Beaufsichtigung und dem besonderen Schutz eines Lehrers unterstellt ist. Der betreffende Lehrer besucht die Schüler von Zeit zu Zeit in ihrer Wohnung, namentlich auch um sich mit den Eltern oder deren Stellvertretern über die Schüler zu bereden und ihnen mit Rath und That beizustehen. Am Anfange des Schuljahres wird den Schülern bekannt gemacht, unter wessen Aufsicht der einzelne gestellt ist. Die Wahl des die Aufsicht besorgenden Lehrers wird durch die Konferenz festgestellt, doch sollen dabei Wünsche der Eltern oder Vormünder, soweit es möglich ist, Berücksichtigung finden.

Für die Schüler der untersten Klassen sind im Realgymnasium selbst besondere Arbeitsstunden eingerichtet, in welchen sie unter Aufsicht und Leitung eines Lehrers die **schriftlichen** Schularbeiten anfertigen.

4. Vom Schulbesuche sollen die Schüler nur in besonderen Fällen, z. B. aus Gesundheitsrücksichten oder bei besonderen Ereignissen in der Familie, auf Wunsch der Eltern oder Angehörigen und unter Beschränkung auf die kürzeste Frist von dem Rektor beurlaubt werden. Schulversäumnisse zum Zwecke der Teilnahme an alltäglichen Vergnügungen und Lustbarkeiten sind durchaus unzulässig. — Alle durch Krankheit eines Schülers verursachten Schulversäumnisse sind durch die Eltern bez. deren Stellvertreter dem Rektor **unverweilt** zur Anzeige zu bringen. Kein Schüler darf die Genehmigung zu einer Beurlaubung nachträglich einholen wollen.

5. Der Abgang eines Schülers wird in der Regel nur nach Beendigung des vollständigen Kursus des Realgymnasiums erwartet.

Der Unterrichtskursus schliesst mit der Reifeprüfung ab.

Soll ein Schüler früher die Schule verlassen, so darf dies gewöhnlich doch nur zu Ostern geschehen; zu anderer Zeit ist der Abgang eines Schülers nur gestattet, wenn dringende Gründe vorliegen. Die Abmeldung eines Schülers ist vom Vater desselben bez. von dessen Stellvertreter schriftlich bei dem Rektor zu bewirken. Erfolgt sie nach Beginn des Quartals, so ist für dasselbe das Schulgeld voll zu entrichten. Diejenigen Schüler, welche den Kursus der Oberprima absolviert haben, werden zur Reifeprüfung zugelassen.

Wer nach bestandener Reifeprüfung die Anstalt verlässt, erhält durch das in dieser Prüfung erworbene Zeugnis

Berechtigung

a. *zum Besuche der Universität, um daselbst Mathematik, Naturwissenschaften, Pädagogik in Verbindung mit den modernen Sprachen, Cameral- und Finanz-Wissenschaften, Chemie etc. zu studieren; — Abiturienten des Realgymnasiums, welche das Reifezeugnis des Gymnasiums noch erwerben wollen, um sich dem Studium der Medizin oder der Jurisprudenz zuwenden zu können, haben sich nur in der lateinischen und griechischen Sprache und in der alten Geschichte der Reifeprüfung am Gymnasium zu unterwerfen;*

b. *zur Aufnahme in das Königl. Polytechnikum, in die Berg- und Forstakademie;*

c. *zum Eintritt in die höhere Postlaufbahn;*

d. *zum Eintritt als Civilaspirant für die höheren Stellen der Telegraphenverwaltung;*

e. *zum Besuche der Königl. Tierarzneischule;*

f. *zum einjährig-freiwilligen Militärdienst;*
(den Nachweis der wissenschaftlichen Befähigung zum einjährigen Freiwilligendienst können auch diejenigen Schüler des Realgymnasiums führen, die der Sekunda mindestens ein Jahr angehört, an allen Unterrichtsgegenständen teilgenommen, sich das Pensum der Sekunda gut angeeignet und sich gut betragen haben;)

g. *das Maturitätszeugnis befreit von der Porteépée-Fähnrichs-Prüfung.*

Anmerkung. Das Zeugnis der Reife für die Prima berechtigt 1) zur Markscheider- und Feldmesserlaufbahn; 2) zur Approbation als Zahnarzt; 3) zur Zulassung zum Militärmagazindienst. — Das Zeugnis der Reife für die Obersekunda berechtigt 1) zur Zulassung zur Apothekerprüfung; 2) zur Laufbahn als Militär- und Marinezahlmeister; 3) zur Anstellung als Postgehülfe; 4) zur Aufnahme in die technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz; 5) zur Zulassung zur Prüfung als Zeichenlehrer.

6. Das Schulgeld, welches vierteljährlich vorauszubezahlen ist, beträgt jährlich
a. für Schüler, deren Eltern Bornasche Einwohner sind, 90 Mark,
b. für Schüler, deren Eltern oder sonst erziehungspflichtige Ernährer ausserhalb des Bornaschen Stadtbezirks ihren wesentlichen Wohnsitz haben, 120 Mark.

Die Aufnahmegebühr beträgt 6 Mark und ist sofort nach erfolgter Aufnahme zu entrichten. Der vierteljährliche Beitrag für die Schülerbibliothek — 75 Pf. — ist mit dem Schulgeld zusammen vorauszubezahlen.

Die Abgangsgebühr ist auf 9 Mark festgesetzt. Dieselbe ist nur von denjenigen Schülern zu entrichten, welche die Schule verlassen, nachdem ihnen das Befähigungszeugnis für den einjährigen Militärdienst oder das Maturitätszeugnis zuerkannt worden ist. Die betreffenden Zeugnisse sollen aber, einer Bestimmung der städtischen Schulbehörde zufolge, erst dann den Abgehenden ausgehändigt werden, wenn die Abgangsgebühr bezahlt ist.

Alle Zahlungen für die Schule sind an die Stadtkasse in Borna abzuführen.

VII.

Verzeichnis

der an dem Realgymnasium zu Borna eingeführten Lehrbücher

auf das Schuljahr 1888/89.

Religion.

VI	bis	IIIa	Der religiöse Memorierstoff (Luthers kleiner Katechismus).
VI	„	IV	Kurtz, Biblische Geschichte.
IIIb	„	Ia	Die Bibel.
IIb	„	Ia	Hagenbach, Leitfaden zum christlichen Religionsunterricht.
VI	„	Ia	Das Landesgesangbuch.

Deutsch.

VI	„	V	Buschmann, Deutsches Lesebuch für die untern und mittlern Klassen, 1. Abt.
IV	„	IIIa	Buschmann, Deutsches Lesebuch für die untern und mittlern Klassen, 2. Abt.
IIb	„	Ia	Buschmann, Deutsches Lesebuch für die obern Klassen. *(NB. Für die erste Abt. dieses Lesebuchs die Ausgabe in neuhochdeutscher Übertragung.)*
VI	„	IIIa	Regeln und Wörterverzeichnis der deutschen Rechtschreibung.
IIb	„	Ia	Kluge, Leitfaden zur Geschichte der deutschen Litteratur.

Lateinisch.

VI	„	IIIb	Perthes, Lateinische Formenlehre.		
IIIa	„	Ia	Ellendt-Seifert, Lateinische Grammatik.		
VI			Ostermann, Übungsbuch	für Sexta,	mit Wörterverzeichnis.
V			Dasselbe	für Quinta	desgleichen.
IV			Dasselbe	für Quinta u. Quarta	desgleichen.
IIIb	„	IIIa	Dasselbe	für Quarta u. Tertia	desgleichen.
IIb	„	Ib	Ostermann, Übungsbuch für Tertia.		
V	„	IV	Lhomond, Urbis Romae Viri Illustres. Ed. Holzer (Neff, Stuttgart.)		
IIIb			Cornelius Nepos (Textausgabe).		
IIIa	„	IIa	Caesar, bellum gallicum. (Textausgabe genügt.)		
IIa			Sallustius, bellum Jugurthinum. (Textausgabe.)		
Ib			Cicero, Orationes in Catilinam. (Teubnersche Textausgabe.)		
Ia			Livius, ab urbe condita libri XXI—XXII. (Teubnersche Textausgabe.)		
IIb	„	IIa	Ovids Metamorphosen. (Textausgabe genügt.)		
Ib	„	Ia	Vergils Aeneis.		
Ia			Horatii carmina (Oden). (Textausgabe genügt.)		
IIIb	„	Ia	Lateinisches Wörterbuch (Georges, Heinichen, Kreussler).		

Französisch.

V	bis	Ia	Klotzsch, Französische Formenlehre.
IIa	„	Ia	Lücking, Franz. Grammatik für den Schulgebrauch.
V	„	IIb	Klotzsch, Franz. Lesebuch.
IIa			Duruy, Siècle de Louis XIV. Herausg. von Hartmann. (Friedberg & Mode.)
			Scribe, Le Verre d'Eau. (Weidmann.)
Ib			Bossuet, Oraisons funèbres. (Weidmannsche Ausg.)
			Molière, Le Bourgeois gentilhomme. (Velh. u. Klas.)
Ia			Lanfrey, Histoire de Napoléon I. (Weidm. Ausg.)
Ib	„	Ia	Breitinger, Grundzüge der franz. Litteraturgeschichte.
IIa	„	Ia	Französisches Wörterbuch. (Sachs kl. Ausg., Thibaut, Schmidt.)

Englisch.

IIIb	„	Ia	Vietor, Englische Schulgrammatik. Formenlehre.
IIa	„	Ia	Gesenius, Syntax.
IIIb	„	IIb	Wershoven und Becker, Englisches Lesebuch.
IIa			Macaulay, History of England. I. Bd. (Weidm. Ausg.)
Ib			Goldsmith, Poems. (Weidm. Ausg.)
			Dickens, Sketches. (Weidm. Ausg.)
Ia			Shakespeare, The merchant of Venice. (Teubnersche Ausg.)
			Herrig, Class. Authors.
Ib	„	Ia	Laing, English Litterature. Ed. Collins. (London.)
IIa	„	Ia	Englisches Wörterbuch (Thieme, James u. a.).

Geographie.

VI	„	IIa	Liechtenstern und Lange, Schulatlas. (45 Karten.)
VI	„	IIa	Seydlitz, Schulgeographie.

Geschichte.

VI			Spiess und Berlet, Weltgeschichte in Biographien. 1. Kursus.
IV	„	IIIa	Müller, Kurzer Abriss der Geschichte.
IIb	„	Ia	Dietsch, Grundriss der allgem. Geschichte. (IIb erste Abteilung, IIa erste und zweite Abteilung, Ib und Ia alle drei Abteilungen).
IV	„	Ia	Ein Geschichtsatlas (z. B. Putzger).

Naturbeschreibung.

VI	„	IIIb	Altum und Landois, Lehrbuch der Zoologie.
IV	„	IIIa	Wünsche, Excursionsflora für Sachsen.
IIIa	„	IIb	Hochstetter und Bisching, Mineralogie.

Physik.

IIIa	„	Ia	Jochmann, Experimentalphysik.

Chemie.

IIa	„	Ib	Lorscheid, Lehrbuch der anorganischen Chemie.
Ia			Lorscheid, Lehrbuch der organischen Chemie.

Mathematik.

VI	„ IIIb	Schellen, Aufg. f. d. Rechnen. I. Teil.		
IIIb	„ Ib	Bardey, Method. geordnete Aufgabensammlung.		
IIIb	„ IIb	Focke und Krass, Lehrbuch der Geometrie.	I. Teil (Planimetrie).	
IIa		Dasselbe.	II. Teil (Trigonometrie.)	
Ib		Dasselbe.	II. und III. Teil.	
Ia		Mink, Leitfaden der analytischen Geometrie.		
IIa	„ Ia	Schlömilch, Fünfstellige Logarithmen.		

Ausserdem brauchen die Schüler der IV bis Ia ein gutes Reisszeug.

Gesang.

VI	„ IV	Brähmig, Kleine praktische Gesangschule.
IIIb	„ Ia	Ballien, Vierstimmige Chorlieder.

Stenographie.

IIIb		Zuckertort, Praktischer Lehrgang.	I. Teil.
IIIa	„ IIb	Dasselbe	II. Teil.

Für den Zeichenunterricht brauchen die Schüler von VI bis IIIa 1 Reissbrett,
„ IIb „ Ia 2 Reissbretter.

Für den Turnunterricht brauchen die Schüler aller Klassen ein Paar gute Turnschuhe.

Die für die Lektüre und die sonst noch notwendigen Bücher werden von den einzelnen Lehrern nach Erfordernis angegeben werden.

Veraltete Ausgaben und beschriebene Exemplare sind unzulässig.

VIII.

Ordnung der öffentlichen Prüfungen.

Donnerstag, den 22. März,

vormittags

von 8—9 Uhr	von 9—10 Uhr	von 10—11 Uhr
Quinta.	**Sexta.**	**Untertertia.**
Religion — Liebster.	Lateinisch — Ploss.	Französisch — Klotzsch.
Französisch — Schmerler.	Zoologie — Klitzsch.	Geometrie — Schöne.

von 11—12 Uhr

für alle Klassen

Turnprüfung — Bullmer.

nachmittags

von 2—3 Uhr	von 3—4 Uhr	von 4—5 Uhr
Quarta.	**Obertertia.**	**Untersekunda.**
Geographie — Wienhold.	Deutsch — Schmerler.	Lateinisch — Dr. Wenck.
Lateinisch — Dr. Wenck.	Algebra — Dr. Domsch.	Mineralogie — Klitzsch.

Freitag, den 23. März,
vormittags

von 8—9 Uhr	von 9—$^1/_2$11 Uhr
Unterprima.	**Obersekunda.**
Religion — Vater.	Geometrie — Liebe.
Algebra — Schöne.	Geographie — Wienhold.
Geschichte — Schmidt.	Französisch — Teichmann.

Während der Prüfungstage liegen die Examenarbeiten und die Zeichnungen im Lehrzimmer für Gesang (Nr. 18, II. Stockwerk) aus.

Zum Besuch dieser Prüfungen werden die Mitglieder der Kommission für das Realgymnasium, die Behörden, die Angehörigen der Schüler und alle Freunde unserer Schule im Namen des Lehrerkollegiums ehrerbietigst und ergebenst eingeladen durch

Prof. Dr. Klotzsch, Rektor.

Der Unterricht im neuen Schuljahr beginnt Dienstag, den 10. April, vormittags 7 Uhr. An dem vorhergehenden Tage finden die Aufnahmeprüfungen der neu eintretenden Schüler statt. Die Lektionspläne für das neue Schuljahr werden am Montag, den 9. April, nachmittags 5 Uhr in allen Klassen diktiert werden.

In betreff der Arbeitszeit und der Freizeit wird an dieser Stelle noch einmal auf die Bestimmung auf Seite 46 Nr. 3 besonders aufmerksam gemacht.