Die nachfolgenden Blätter sollen als Beitrag zu Constructions-Aufgaben aus der Stereometrie dienen, woran bekanntlich unsere Uebungsbücher Mangel leiden.

Die Hauptaufgabe, dem Tactionen-Problem des Apollonius nachgebildet:

Eine Kugel zu construiren, welche, jenachdem von Punkten, Ebenen und Kugeln je vier Stücke gegeben sind, durch den Punkt oder die Punkte hindurchgeht und die Ebene oder die Ebenen so wie die Kugel oder die Kugeln berührt,

ward von Descartes an Fermat gestellt und von Letzterem aufgelöset. (Vgl. Camerer, Apoll. de Tact. pag. 5). Die Schrift selbst ist mir nicht bekannt: nur „Fermat's Treatise on Spherical Tangencies by John Lawson. Lond. 1771.“, vier Quartblätter enthaltend, ist mir unlängst zu Gesicht gekommen. Eine neue Behandlung der Aufgabe schien mir um so mehr der Mühe werth, als sie bis dahin wenig beachtet worden und gleichwohl einen für die Einübung epipedometrischer Sätze in der Schule recht passenden Stoff darbietet.

Das gedachte Haupt-Problem umfasst fünfzehn Aufgaben. Wollte man die sämmtlichen Fälle, die möglichst verschiedene Lage der Punkte, den Parallelismus der Ebenen, das Berühren der Kugeln von aussen und von innen, die Determinationen u. a. berücksichtigen, so würde die Arbeit zu einem Buche anwachsen.

Bezeichnet man einen Punkt mit P, eine Ebene mit E, eine Kugel mit K, so erhält man folgende

Uebersicht der Aufgaben:

1. PPPP	4. PPEE	7. PEEE	10. PKKK	13. EEKK
2. PPPE	5. PPEK	8. PEEK	11. EEEE	14. EKKK
3. PPPK	6. PPKK	9. PEKK	12. EEEK	15. KKKK

Aufgabe I. (PPPP)

Eine Kugel zu construiren, die durch vier gegebene Punkte geht.

Fig. 1. Gegeben sind die vier Punkte M, N, P, Q.

Analysis.

Angenommen, die Figur MNPQ sei die verlangte Kugel, so ergiebt eine durch die drei Punkte M, N, P gelegte Ebene in ihrem Durchschnitte mit der Kugeloberfläche selbst den Kreis MNP. Dieser Kreis aber ist der Lage und Grösse nach gegeben, da durch drei gegebene Punkte nur ein einziger Kreis gezeichnet werden kann. Wird nun in dem Mittelpunkte A dieses Kreises auf die Ebene desselben die Normale AB errichtet, so liegt offenbar in AB der Mittelpunkt O der Kugel, und wenn aus dem gegebenen vierten Punkte Q die Gerade QB auf AB perpendikulär gezogen wird, so ist diese sowohl der Lage als der Grösse nach bestimmt. Lege ich ferner durch A die CD parallel der QB, so erhellet, dass dieselbe als Durchmesser des gegebenen Kreises MNP gegeben ist, und dass demnach auch die Punkte C und D gegeben sind. Da endlich die Punkte C, D, Q in der Oberfläche der Kugel liegen, so ist $OQ = OC = OD$; es liegen aber auch diese Linien OQ, OC, OD in derselben Ebene, da QB und CD einander parallel sind und AOB auf der einen wie auf der andern senkrecht steht. Mithin ist der Punkt O, als Mittelpunkt des durch C, D, Q gehenden Kreises, gegeben.

Construction.

Ich lege durch die Punkte M, N, P den Kreis MNP; errichte in dem Mittelpunkte A auf der Ebene desselben die Normale AB; fälle aus Q auf AB das Perpendikel QB, ziehe durch A parallel mit QB die CD, welche die Peripherie des Kreises MNP in C und D schneidet; verbinde D mit Q, halbire DQ in F und errichte in F auf DQ das Perpendikel FO, welches die AB in O schneidet. Zeichne ich nun aus O mit dem Radius OC den Halbkreis GCH und drehe denselben um den festliegenden Durchmesser GH, so lange bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt die Peripherie des bewegten Halbkreises die Oberfläche der verlangten Kugel.

Beweis.

Eine Kugel ist der auf die angegebene Weise construirte Körper (vermöge der Definition e. K.) Es bleibt demnach übrig zu zeigen, dass die Oberfläche derselben durch die Punkte M, N, P, Q geht. Werden noch die Hülfslinien gezogen, wie die Figur zeigt, so ist

$$\triangle OAM \cong \triangle OAP \cong \triangle OAN \cong \triangle OAD;$$
$$\text{daher } OM = OP = ON = OD;$$
$$\text{es ist aber auch } \triangle OFD \cong \triangle OFQ,$$
$$\text{also } OD = OQ;$$
$$\text{folglich } OM = OP = ON = OQ.$$

Mithin liegen die Punkte M, N, P, Q in der Oberfläche der verzeichneten Kugel.

Aufgabe II. (PPPE)

Eine Kugel zu construiren, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.

Fig. 2. Gegeben sind die drei Punkte M, N, P und die Ebene E.

Analysis.

Es sei MNPX die verlangte Kugel: ihre Oberfläche gehe durch die Punkte M, N, P und berühre die Ebene E. Lege ich durch M, N, P eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur MNP mit der Kugel ein Kreis. Es werde in dem Mittelpunkte B auf die Ebene desselben das Perpendikel BC errichtet, so geht dieses durch der Kugel Mittelpunkt O und trifft bei seiner Verlängerung die gegebene Ebene E in einem Punkte C, der also gegeben ist. Denke ich mir ferner aus dem Mittelpunkte B des gegebenen Kreises MNP auf die gegebene Ebene E die Gerade BD senkrecht gezogen, so ist ebenso diese BD wie BC und DC sowohl der Lage als der Grösse nach gegeben, somit auch die Dreiecksebene BCD bekannt. Letztere bildet mit der Kugel den grössten Kreis FGX und mit der gegebenen Kreisebene MNP den Durchschnitt FBG, der also gleichfalls gegeben ist. Demnach kenne ich auch die Lage der beiden Punkte F und G. Ziehe ich weiter OF, OG und die OA parallel der BD, welche die DC in A schneidet, so liegen diese Linien sämmtlich in derselben Ebene, nämlich in der Dreiecksebene BCD, und da BD ein Perpendikel auf der Ebene E, also auch auf der durch D in E gehenden DC ist, so steht auch die Parallele OA auf DC perpendiculär. Weil nun O, der Mittelpunkt der Kugel, zugleich das Centrum des Kreises FGX ist, und OA normal auf DC steht, so ist A der Berührungspunkt nicht nur der Ebene und der Kugel, sondern auch der DC und des Kreises FGX; somit OA = OF = OG. Diese drei Linien aber liegen mit DC in der nämlichen Ebene. Daher ist die vorliegende Aufgabe auf die planimetrische zurückgeführt: Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte F, G geht und eine gegebene gerade Linie CD berührt. Dieses Kreises Mittelpunkt O und Radius OF sind zugleich Mittelpunkt und Radius der verlangten Kugel.

Construction.

Ich zeichne einen Kreis, der durch die drei gegebenen Punkte M, N, P geht; errichte in dem Mittelpunkte B auf der Ebene desselben die Senkrechte BC, welche die Ebene E in dem Punkte C trifft, fälle aus B auf E das Loth BD, ziehe CD und lege durch DBC eine Ebene, welche mit der Kreisebene MNP den Durchschnitt FBG bildet. Construire ich nun einen Kreis, der durch die Punkte F und G geht und die Gerade DC berührt, — sein Mittelpunkt sei O, der Berührungspunkt A — und drehe ich den Halbkreis JFAH um den durch B und O gehenden Durchmesser JH herum, so lange bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so wird der auf diese Weise beschriebene Körper den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

Beweis.

Zuvörderst ist der construirte Körper eine Kugel. Sodann ist nach der Construction

$$OF = OA = OG,$$

als Radien des Kreises AFGX;

$$\text{ferner } \underline{\triangle OBM \cong \triangle OBN \cong \triangle OBP \cong \triangle OBF},$$

woraus folgt, dass

$$OM = ON = OP = OF \text{ ist.}$$

Mithin gehören die Punkte M, N, P der Kugeloberfläche an.

Nach der Construction ist ferner BD senkrecht auf der Ebene E, somit auf der in E durch D gezogenen Geraden CD, auf welcher gleichfalls OA normal steht. Daher ist auch OA, da sie mit BD in einerlei Ebene liegt, der BD parallel und steht auf der Ebene E senkrecht. Folglich ist E eine Berührungsebene der construirten Kugel, weil sie in dem Endpunkte des Radius auf demselben perpendiculär steht.

Aufgabe III. (PPPK)

Eine Kugel zu construiren, die durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Kugel berührt.

Fig. 3. Gegeben sind die drei Punkte M, N, P und die Kugel K.

Analysis.

Ich stelle mir vor, dass die Figur MNPX den Forderungen der Aufgabe genüge, dass nämlich MNPX eine Kugel sei, deren Oberfläche durch die Punkte M, N, P gehe und die Oberfläche der Kugel K berühre, so wird eine durch die Punkte M, N, P gelegte Ebene die Kugel in dem Kreise MNP durchschneiden, und das in dem Mittelpunkte A dieses Kreises auf dessen Ebene errichtete Perpendikel AC durch den Mittelpunkt O der Kugel gehen. Wird nun aus dem Mittelpunkte B der gegebenen Kugel K auf AC das Loth BC gezogen und durch BCA eine Ebene gelegt, welche mit der Kreisebene MNP den Durchschnitt DAF bildet, so ist die DF sowohl der Grösse als der Lage nach gegeben, mithin die Lage der Punkte D und F bekannt. Wenn ich mir ferner das Kugelcentrum O mit F, D und dem Centrum B der gegebenen Kugel K durch gerade Linien verbunden denke, so fallen diese Linien OF, OD, OB offenbar in dieselbe gegebene Ebene BCA. Diese Ebene bildet, wenn sie hinlänglich erweitert gedacht wird, indem sie durch beide Kugelmittelpunkte O, B geht, bei ihrem Durchschnitt mit der gesuchten Kugel den grössten Kreis DFX und mit der gegebenen den grössten Kreis GLZ. Da aber beide Kugeln einander berühren sollen, so muss ihr Berührungspunkt in der Geraden liegen, welche die Centren mit einander verbindet, d. i. in BO. Ist nun BG der Radius der gegebenen Kugel, so ist G der Berührungspunkt beider und OG der Radius der gesuchten, also = OD = OF. Es liegen aber auch die Kreise DFX und GLZ in derselben Ebene; daher ist auch G zugleich der Berührungspunkt beider Kreise, und somit ist die Aufgabe auf diejenige der Planimetrie reducirt: Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte D, F geht und einen gegebenen Kreis GLZ berührt. Mittelpunkt und Radius dieses Kreises sind zugleich Mittelpunkt und Radius der verlangten Kugel.

Construction.

In dem Mittelpunkte A des durch die drei gegebenen Punkte M, N, P beschriebenen Kreises errichte ich auf der Ebene desselben das Perpendikel AC; fälle aus B, dem Mittelpunkte der gegebenen Kugel K, auf AC die Lothrechte BC, und lege durch BCA eine Ebene, welche die Kreisebene

MNP in der Geraden DAF durchschneidet und mit der Kugel K, da sie durch deren Mittelpunht B geht, als Durchschnitt den grössten Kreis GLZ formirt. Hierauf zeichne ich einen Kreis DFX, der durch die Punkte D und F geht und den gegebenen Kreis GLZ berührt. Sein Mittelpunkt, der offenbar in dem Perpendikel AC liegt, heisse O und der Berührungspunkt beider Kreise G. Construire ich nun mit den Daten O, als festliegendem Mittelpunkt, und dem Radius OG = OD = OF eine Kugel, so wird diese die verlangten Eigenschaften an sich tragen.

Beweis.

Wie in dem Beweise der vorigen Aufgabe dargethan worden, ist

$$OM = ON = OP = OD.$$

Mithin geht die Oberfläche der construirten Kugel durch die Punkte M, N, P. Ziehe ich ferner in dem Kreise GLZ den Radius BG, so ist, da die Kreise GLZ und DFX einander (hier von aussen) berühren,

$$BG + GO = BO.$$

Daher berührt auch die Kugel DMNPFX die gegebene Kugel K (von aussen), weil die Summe der Kugelradien der Centrallinie gleich ist.

Aufgabe IV. (PPEE)

Eine Kugel zu construiren, die durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Ebenen berührt.

Fig. 4. Gegeben sind die beiden Punkte M und N und die beiden Ebenen E und E'.

Analysis.

Gesetzt, es sei MNXZ die verlangte Kugel: sie gehe durch M und N und berühre E und E'. Verbinde ich M mit N durch eine gerade Linie und halbire dieselbe in dem Punkte A, so ist A gegeben. Errichte ich ferner in A auf der Geraden MN die Ebene BCDF normal, so ist diese ebenfalls der Lage nach gegeben, und es befindet sich in ihr der Mittelpunkt O der gesuchten Kugel. Nun soll aber die Kugel die beiden Ebenen

E und E′ berühren; daher liegt der Kugelmittelpunkt auch in der Ebene GHDF, welche den Raumwinkel der Ebenen E und E′ halbirt, also gegeben ist. Folglich liegt O in der Geraden FD, in welcher die Ebene GHDF die Ebene BCDF durchschneidet. Wenn ich mir nun aus M oder N auf diese der Lage nach gegebene Gerade DF das Perpendikel NK gezogen und in dessen Verlängerung KL der NK gleich gemacht denke, so ist der Punkt L gegeben und es erhellet leicht, dass derselbe ebensowohl in der Oberfläche der Kugel liegen muss wie der Punkt N selbst. Demnach kommt es darauf an: Eine Kugel zu bilden, die durch drei gegebene Punkte M, N, L geht und eine gegebene Ebene E′ (oder E) berührt: das Problem, dessen Lösung bereits oben bei Aufg. II. gegeben worden ist.

Construction.

Diese wird genau so ausgeführt, wie in der Analysis angedeutet ist.

Beweis.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass die construirte Kugel, welche die Ebene E′ berührt, auch die E tangirt. Zu dem Ende verbinde ich den Mittelpunkt O mit dem Berührungspunkte R der Kugel und der Ebene E durch eine Gerade, welche natürlich auf E′ senkrecht steht; fälle aus O auf den gemeinsamen Durchschnitt GH das Perpendikel RS und ziehe SO. Dann ist nach einem bekannten Satze auch SO normal auf GH und $<$RSO der Neigungswinkel der Ebenen E′ und HF. Lege ich ferner durch diesen Winkel eine Ebene, welche die E in der Geraden SV durchschneidet, so ist OSV der Neigungswinkel der Ebenen E und HF. Da nun gleiche Raumwinkel gleiche Neigungswinkel haben, so ist $<$OSV $=$ $<$OSR, und wenn ich OV normal auf SV ziehe, $\triangle$OSV$\cong$$\triangle$OSR. Hieraus folgt, dass OV $=$ OR ist. Daher ist V ein Punkt der Kugelfläche, und es berührt die Ebene E die Kugel, weil sie in dem Endpunkte des Kugelradius auf demselben senkrecht steht.

Die Auflösung der Vten Aufgabe so wie der Mehrzahl der noch folgenden wird ungemein erleichtert durch die Anwendung einiger Hülfssätze, die ich, da sie in den Lehrbüchern vermisst werden, nebst ihren Beweisen hier vorausschicke.

Hülfssatz I.

Zieht man von einem Punkte ausserhalb einer Kugel zwei Secanten an dieselbe, so sind die Rechtecke, gebildet aus einer jeden und dem ihr zugehörigen äussern Abschnitte, einander gleich.

Fig. 5. Aus dem Punkte P, ausserhalb der Kugel K, seien an dieselbe die Secanten PDF und PHG gezogen, so wird behauptet, dass

$$PF.\ PD = PG.\ PH \text{ sei.}$$

Beweis.

Ich denke mir durch die einander schneidenden Geraden PG und PF eine Ebene gelegt, so bildet diese mit der Kugel K als Durchschnitt einen Kreis, in dessen Peripherie offenbar die vier Punkte D, F, G, H liegen, da sie sowohl jener Ebene als der Kugeloberfläche angehören. Folglich ist, nach dem bekannten planimetrischen Satze,

$$PF.\ PD = PG.\ PH.$$

Anderer Beweis.

Fig. 6. Stelle ich mir durch die Gerade PDF und den Mittelpunkt O der Kugel, so wie auch durch PHG und O Ebenen gelegt vor, so entstehen die grössten Kreise FDAXC und AHGC. Ziehe ich nun aus P durch O die Gerade PAOC, welche offenbar den gemeinsamen Durchschnitt beider Kreisebenen bildet, so ist sowohl

$$PF.\ PD = PC.\ PA,$$

$$\text{als auch } PG.\ PH = PC.\ PA;$$

$$\text{folglich } PF.\ PD = PG.\ PH.$$

Zusatz.

Der Satz gilt auch für zwei in dem Punkte P sich schneidende Kugelsehnen FD und HG.

Hülfssatz II.

Fig. 7. Wird die Centrale OQ zweier Kugeln K, K′ so in P getheilt oder dergestalt über Q hinaus bis P verlängert, dass sich die Entfernungen OP und QP wie die Kugelradien zu einander verhalten, und durch P eine Gerade gezogen, welche beide Kugeln durchschneidet, so ist, wenn die dem Punkte P zunächst liegenden Durchschnittspunkte mit den Kugeln durch A, A′, A″, A‴ die entfernter liegenden durch B, B′, B″, B‴ bezeichnet werden, stets

$$PA''.\ PB''' = PA.\ PB',$$

$$\text{so wie } PB''.\ PA''' = PB.\ PA'.$$

Beweis.

Denke ich mir durch die Schenkel des Winkels P eine Ebene gelegt, so werden (wie im vor. Hülfss.) als Durchschnitte mit den Kugeln die Kreise AA″B″ und A′A‴B‴ erzeugt. Wenn ich nun noch die Radien OA‴, QA″ und die Geraden A′A‴, A′A″ ziehe, so ist nach der Voraussetzung

$$OP : QP = OA''' : QA'',$$

$$\text{mithin } OA''' \mathrel{\underline{\perp}} QA'',$$

$$\text{daher } < o = < o', \text{ also auch } < x = < x'$$

$$\text{und } A'A''' \mathrel{\underline{\perp}} AA''.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$PA' : PA''' = PA : PA'';$$

$$\text{es ist aber } PA' : PA''' = PB''' : PB'; \text{ (Sec. Satz)}$$

$$\text{daher auch } PA : PA'' = PB''' : PB';$$

$$\text{folglich } PA''.\ PB''' = PA.\ PB'.$$

Eben so ist

$$PA : PA'' = PB'' : PB,$$

$$\text{auch ist } PA : PA'' = PA' : PA''';$$

$$\text{daher } PB'' : PB = PA' : PA''';$$

$$\text{folglich } PB''.\ PA''' = PB.\ PA'.$$

Auf dieselbe Art wird der Beweis geführt, wenn der Punkt P zwischen O und Q liegt.

Zusatz.

Legt man durch den Punkt P eine andere Kugelsecante $Paba'b'$, so lässt sich bei ähnlicher Hülfsconstruction zeigen, dass

$$Pa.\ Pb' = PA.\ PB'$$
$$\text{und } Pb.\ Pa' = PB.\ PA'.$$

Hieraus folgt dann auch, dass

$$Pa.\ Pb' = PA''.\ PB'''$$
$$\text{und } Pb.\ Pa' = PB''.PA''.$$

Hülfssatz III.

Fig. 8. Die Centrale OQ zweier Kugeln K, K' sei bis P verlängert, so dass sich verhalte

$$OP : QP = \text{Rad. } OB : \text{Rad. } QC;$$

auch sei aus P in einer beliebigen Ebene die Gerade PDF gezogen, und in dieser seien die Punkte D und F so bestimmt, dass

$$PF.\ PD = PA.\ PC,$$

so wird eine Kugel JDF, welche durch die Punkte D und F geht und eine der Kugeln z. B. K' berührt, auch zugleich die andere K berühren.

Beweis.

Wird durch P und durch J, den Berührungspunkt der Kugeln K' und JDF die Gerade PJ gezogen, welche die Kugeloberfläche JDF in M schneidet, so ist

$$PM.\ PJ = PF.\ PD; \text{ (Hülfss. I.)}$$

aber nach der Annahme ist

$$PF.\ PD = PA.\ PC,$$

und hinwiederum, wenn ich M' den Durchschnittspunkt der verlängerten PJ mit der Oberfläche der Kugel K nenne,

$$PA.\ PC = PM'.\ PJ; \text{ (Hülfss. II.)}$$

$$\text{daher } PM.\ PJ = PM'.\ PJ,$$

$$\text{also } PM' = PM.$$

Mithin liegt der Punkt M auch in der Oberfläche der Kugel K und ist demnach den Oberflächen JDF und K gemein. Ich werde nun darthun, dass M der Berührungspunkt beider Kugeln ist. Wird nämlich aus P in einer beliebigen Ebene eine Gerade PX gezogen, welche die Kugelfläche JDF in dem zunächst liegenden Punkte N und in dem entfernt liegenden Z, die K' in dem zunächst liegenden R und die K in dem entfernteren X durchschneidet, so ist

$$\begin{aligned} PN.\ PZ &= PF.\ PD \text{ (Hülfss. I.)},\\ &= PA.\ PC \text{ (Annahme)},\\ &= PX.\ PR. \text{ (Hülfss. II.)} \end{aligned}$$

Es ist aber PR grösser als PN, da die Kugel K' die Kugel NJDF in J berührt, also jede Gerade aus P mit Ausnahme der PJM die Oberfläche JDF durchschneiden muss, ehe sie die K' trifft; folglich ist PX kleiner als PZ. Daher liegt der Punkt X der Kugelfläche K innerhalb der Kugel JDF. Dasselbe lässt sich auf gleiche Weise von allen Punkten der Kugelfläche K zeigen, ausser von M. Mithin berührt die Kugel JDF auch die Kugel K.

Der Beweis wird auf ähnliche Weise für alle möglichen Fälle des Berührens von aussen oder innen geführt.

Hülfssatz IV.

Fig. 9. Zieht man durch den Mittelpunkt O der Kugel K auf die ausserhalb derselben liegende Ebene E das Perpendikel ABC, welches die Kugelfläche in A und B und die E in C schneidet, und aus A zwei beliebige Geraden ADF, AD'F', welche der K in D, D' und der E in F, F' begegnen, so ist

$$AF.\ AD = AC.\ AB = AF'.\ AD'.$$

Beweis.

Denn lege ich durch die Schenkel des Winkels CAF eine Ebene, welche mit der Kugel K den Kreis ADB und mit der Ebene E den Durchschnitt FC bildet, so steht AC senkrecht auf dieser durch C in E gehenden FC, d. i. $\angle BCF = R$. Wird nun noch BD gezogen, so ist auch

$$\angle ADB = R = \angle BDF,$$

$$\text{also } \angle BCF + \angle BDF = 2R.$$

Daher geht durch die vier Punkte B, D, F, C ein Kreis und es ist

$$AF.\ AD = AC.\ AB.$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass

$$AF'.\ AD' = AC.\ AB.$$

Hülfssatz V.

Fig. 10. Wird durch den Mittelpunkt O der Kugel K auf die Ebene E die Senkrechte AOBC und in einer beliebigen Ebene eine Gerade ADF gezogen, auch letztere in den Punkten D und F dergestalt getheilt, dass

$$AF.\ AD = AC.\ AB \text{ ist},$$

so wird eine durch die Punkte D, F gehende und die Ebene E berührende Kugel K′ zugleich die Kugel K berühren.

Beweis.

Verbinde ich A mit dem Berührungspunkte G der E und der K′ durch eine Gerade, welche die Kugelfläche K in J schneidet, so ist

$$AG.\ AJ = AC.\ AB \text{ (Hülfss. IV.)}$$
$$= AF.\ AD \text{ (Vorauss.).}$$

Mithin liegt (was leicht aus Hülfss. I. folgt) J auch in der Oberfläche der Kugel K′. Ziehe ich ferner durch A eine Gerade, welche die Kugelfläche K in P, die K′ in M und R, die E in S schneidet, so ist

$$SA.\ PA = AC.\ AB \text{ (Hülfss. IV.),}$$
$$= AF.\ AD \text{ (Vorauss.),}$$
$$= AR.\ AM \text{ (Hülfss. I.).}$$

Es ist aber AS grösser als AR, weil die K' die E in G berührt; daher ist AM grösser als AP, und somit liegt der Punkt M ausserhalb der Kugel K. Folglich haben beide Kugeln K und K' nur den Punkt J gemein, d. i., sie berühren einander in J.

Aufgabe V. (PPEK)

Eine Kugel zu construiren, welche durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene so wie eine gegebene Kugel berührt.

Fig. 10. Gegeben sind die Punkte F, R, die Ebene E und die Kugel K.

Analysis.

Denke ich mir durch den Mittelpunkt O der Kugel K auf die Ebene E das Perpendikel AOBC gezogen, welches gegeben ist, auch A mit F durch die Gerade AF verbunden und in derselben den Punkt D so bestimmt, dass

$$AF.\ AD = AC.\ AB,$$

wodurch also der Punkt D gegeben ist, so reducirt sich die vorliegende Aufgabe, mit Rücksicht auf den Hülfssatz V., auf die Aufgabe III. Es kommt nämlich nunmehr darauf an: Eine Kugel zu construiren, welche durch die drei gegebenen Punkte F, D, R geht und die gegebene Ebene E berührt.

Aufgabe VI. (PPKK)

Eine Kugel zu construiren, welche durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Kugeln berührt.

Fig. 8. Gegeben sind die beiden Punkte F, Z und die beiden Kugeln K, K'.

Analysis.

Ich stelle mir vor, in der Centralen OQ der beiden Kugeln K, K' sei der Punkt P so bestimmt, dass

$$OP : QP = \text{Rad. } OA : \text{Rad. } QC,$$

wodurch P gegeben ist. Ferner sei PF gezogen und darin D so angenommen, dass

$$PF.\ PD = PA.\ PC;$$

alsdann ist auch der Punkt D bekannt. Construire ich nunmehr eine Kugel (Aufg. III.), welche durch die drei gegebenen Punkte F, Z, D geht und die Kugel K′ berührt, so wird diese die verlangte sein. Denn sie berührt (nach Hülfss. III.) auch die Kugel K.

Aufgabe VII. (PEEE)

Eine Kugel zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Ebenen berührt.

Fig. 11. Gegeben sind der Punkt P und die drei Ebenen E, E′, E″.

Analysis.

Soll die gesuchte Kugel die Ebenen E und E′ berühren, so liegt der Mittelpunkt O in der Ebene BD, welche den Raumwinkel der E und E′ halbirt. Nun sollen aber auch zugleich die Ebenen E′ und E″ Berührungsebenen der Kugel werden; daher fällt O zugleich in die Halbirungsebene HD des Raumwinkels der E′ und E″. Mithin befindet sich O in der Geraden DC, in welcher beide halbirende Ebenen einander schneiden. Da nun diese DC der Lage nach gegeben ist, so werde aus dem gegebenen Punkte P auf dieselbe das Perpendikel PM gefällt, welches also sowohl der Lage als der Grösse nach gegeben ist, und PM um MR = PM verlängert, wodurch sich gleichfalls der Punkt M bestimmt, und es erhellet, dass derselbe ebenso in der Kugelfläche liegt, wie der Punkt M. Wenn ich mir ferner durch M auf die OM eine perpendiculäre Ebene gelegt vorstelle (diese geht offenbar durch die PR), so bildet sie als Durchschnitt mit der gesuchten Kugel den Kreis PSM, in dessen Umfange nothwendig die Punkte P und R liegen, insofern sie zugleich der Ebene und der Kugelfläche angehören. Zuletzt kann ich in der Peripherie dieses der Lage und Grösse nach gegebenen Kreises noch einen dritten Punkt S willkürlich annehmen. Construire ich nun eine Kugel (nach Aufg. II.), welche durch die drei gegebenen Punkte P, R, S geht und eine der Ebenen berührt, so wird diese die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Construction und Beweis ergeben sich von selbst. (Vgl. Augf. IV.)

Aufgabe VIII. (PEEK)

Eine Kugel zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Ebenen so wie eine gegebene Kugel berührt.

Fig. 10. Gegeben sind der Punkt F, die beiden Ebenen E, E′ und die Kugel K.

Analysis.

Wird durch den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel K die Gerade AOBC normal auf die Ebene E, auch durch A und F die Gerade AF gezogen und in dieser der Punkt D so bestimmt, dass

$$AF.\ AD = AC.\ AB,$$

so ist auf der Stelle die Aufgabe auf die IVte reducirt. Es handelt sich nämlich darum: Eine Kugel zu construiren, welche durch die beiden gegebenen Punkte F, D geht und die beiden gegebenen Ebenen E, E′ berührt. Die auf solche Weise erhaltene Kugel berührt zugleich die gegebene Kugel K nach dem Hülfss. V.

Aufgabe IX. (PEKK)

Eine Kugel zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Ebene so wie zwei gegebene Kugeln berührt.

Fig. 10. Gegeben sind der Punkt F, die Ebene E und die beiden Kugeln K, K″.

Analysis.

Wenn ich mir hier, wie in der Analysis der vor. Aufg., den Punkt D als so liegend vorstelle, dass

$$AF.\ AD = AC.\ AB,$$

so kehrt die vorstehende Aufgabe auf die Vte zurück. Denn es sind gegeben die beiden Punkte F, D, die Ebene E und die Kugel K″. Bilde ich demnach eine Kugel K′, welche durch F und D geht und die E so wie die K″ berührt, so wird dieselbe auch nach dem Hülfssatz V. die Kugel K berühren.

Aufgabe X. (PKKK)

Eine Kugel zu construiren, welche durch einen gegebenen Punkt geht und drei gegebene Kugeln berührt.

Fig. 8. Gegeben sind der Punkt F und die drei Kugeln K, K′, K″.

Analysis.

Gesetzt, in der Centralen OQ der beiden Kugeln K, K′ werde der Punkt P so angenommen, dass

$$OP : QP = \text{Rad. } OA : \text{Rad. } QC,$$

und in der gegebenen Geraden PF der Punkt D der Art bestimmt, dass

$$PF.\ PD = PA.\ PC,$$

so ist der Punkt D ein gegebener. Daher wird eine in der Weise, wie die Auflösung der VIten Aufgabe angiebt, gebildete Kugel: die nämlich durch die beiden gegebenen Punkte F und D geht und die beiden gegebenen Kugeln K′, K″ berührt, auch nach Hülfssatz III. die gegebene Kugel K berühren.

Aufgabe XI. (EEEE)

Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Ebenen berührt.

Fig. 12. Gegeben sind die vier Ebenen E, E′, E″, E‴.

Analysis.

Soll die gesuchte Kugel die beiden Ebenen E und E' berühren, so liegt ihr Mittelpunkt O in der Ebene ε, welche den Raumwinkel der E und E' halbirt. Eben so liegt O in der den Raumwinkel der E' und E'' halbirenden Ebene ε'. Daher befindet sich O in der Geraden AB, welche den Durchschnitt der Halbirungsebenen ε und ε' bildet. Da aber die verlangte Kugel zugleich noch die Ebene E''' tangiren soll, so liegt O auch in der Ebene ε'', welche den Raumwinkel der E'' und E''' halbirt. Diese ε'' schneidet jene Gerade AB in dem Punkte O, der also gegeben ist und den Mittelpunkt für diejenige Kugel bildet, welche sämmtlichen vier Forderungen der Aufgabe Genüge leistet. (Vgl. Aufg. IV.)

Aufgabe XII. (EEEK)

Eine Kugel zu construiren, welche drei gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt.

Fig. 13. Gegeben sind die drei Ebenen E, E', E'' und die Kugel K.

Analysis.

Angenommen, die Kugel K', deren Mittelpunkt O, sei die verlangte: sie berühre die Ebenen E, E', E'' bezüglich in den Punkten A, B, C und die Kugel K, deren Mittelpunkt Q, in D. Werden nun die Radien OD, OA, OB, OC gezogen, so geht ersterer durch Q und letztere sind bezüglich auf den Ebenen E, E', E'' perpendiculär. Es sei ferner Oa = Ob = Oc = OQ gemacht, wodurch Aa = Bb = Cc = DQ wird, und durch a, b, c die Ebene $\varepsilon \mathrel{\ddagger}$ E, $\varepsilon' \mathrel{\ddagger}$ E', $\varepsilon'' \mathrel{\ddagger}$ E'' gelegt, so dass nun auch Oa, Ob, Oc bezüglich auf ε, ε', ε'' normal stehen, so ist jede dieser drei Ebenen ε, ε', ε'' der Lage nach gegeben, da ihre Entfernung von den Ebenen E, E', E'' bekannt, nämlich = DQ ist. Denke ich mir demnach (nach Aufg. VII.) eine Kugel construirt, welche durch den gegebenen Punkt Q geht und die drei gegebenen Ebenen ε, ε', ε'' berührt, so ist deren Mittelpunkt O und ihr um den Radius DQ der gegebenen Kugel K vergrösserter Radius zugleich der Mittelpunkt und der Radius der verlangten Kugel K'.

Aufgabe XIII. (EEKK)

Eine Kugel zu construiren, welche zwei gegebene Ebenen und zwei gegebene Kugeln berührt.

Fig. 14. Gegeben sind die beiden Ebenen E, E′ und die beiden Kugeln K, K′.

Analysis.

Es sei die Kugel K″, deren Mittelpunkt O, die verlangte: sie berühre die E in A, die E′ in B, die K, deren Mittelpunkt Q, in D und die K′, deren Mittelpunkt R, in C. Stelle ich mir nun die Geraden OQD, OA, OB, ORC gezogen und aus dem Punkte O mit dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte Q der gegebenen kleinern Kugel K als Radius eine concentrische Kugel construirt vor, welche die OC in F schneidet, so wird dieselbe, wenn Aa = Bb = DQ gemacht und $\varepsilon \# E$, $\varepsilon' \# E'$ gelegt wird, wodurch die Lage der ε und ε' gegeben ist, auch die Ebenen ε und ε' in a und b berühren. Da aber auch RF = RC — FC = RC — DQ ist, so berührt jene Kugel auch eine aus dem gegebenen Punkte R als Mittelpunkt mit der Differenz der beiden gegebenen Radien der K und K′ als Radius construirte Kugel k. Daher reducirt sich die Aufgabe auf die VIIIte: Eine Kugel zu construiren, welche durch den gegebenen Punkt Q geht und die beiden gegebenen Ebenen ε, ε' so wie die gegebene Kugel k berührt. Der Mittelpunkt O und der um den gegebenen Radius QD vergrösserte Radius derselben bilden die Data für die zu construirende Kugel selbst.

Aufgabe XIV. (EKKK)

Eine Kugel zu construiren, welche eine gegebene Ebene und drei gegebene Kugeln berührt.

Fig. 15. Gegeben sind die Ebene E und die drei Kugeln K, K′, K″.

Analysis.

Verfahre ich hier, was die Ebene E und die Kugeln K und K′ angeht, auf dieselbe Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe, und denke ich mir dasjenige, was die Kugel K′ betrifft, in gleicher Art auf die Kugel K″ angewendet, so ersehe ich, dass es darauf ankommt: Eine Kugel zu construiren, welche durch den gegebenen Punkt Q geht, die gegebene Ebene ε so wie die beiden gegebenen Kugeln k′ und k″ berührt. Und das ist die IXte Aufgabe.

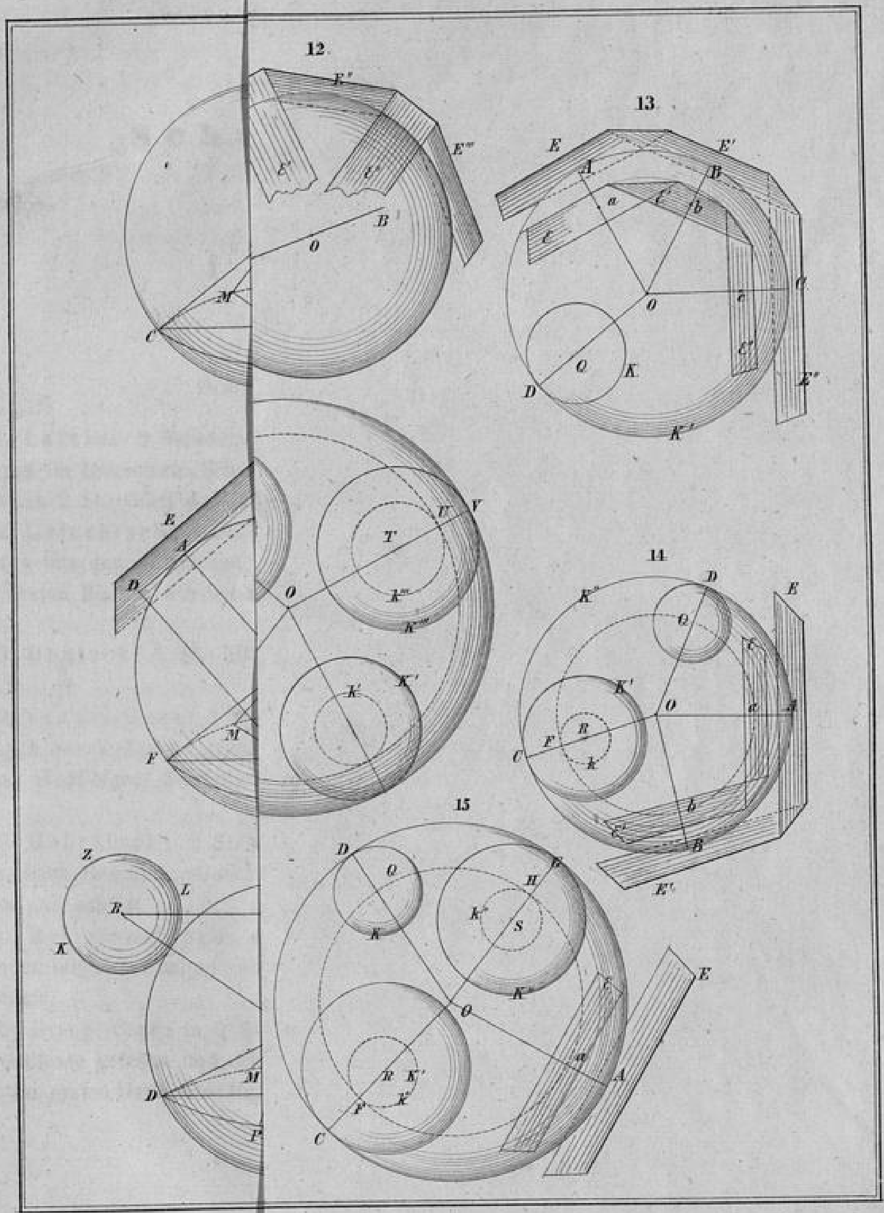
Aufgabe XV. (KKKK)

Eine Kugel zu construiren, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Fig. 16. Gegeben sind die vier Kugeln K, K′, K″, K‴.

Analysis.

Berücksichtigt man noch die vierte gegebene Kugel K‴, so führt eine gleiche Betrachtung wie bei der vorletzten und letzten Analysis die Umformung der vorstehenden Aufgabe in die Xte herbei, nämlich: Eine Kugel zu beschreiben, welche durch den gegebenen Punkt Q geht und die drei gegebenen Kugeln k′, k″, k‴ berührt.


12
13
14
15