Jahresbericht

über den

Schulcursus 1842 – 43

an dem

Königlichen Gymnasium zu Bonn.

Von

Nicol. Jos. Biedermann,

Director des Gymnasiums.

Inhalt:

Bonn,

gedruckt bei Carl Georgi.

Iosephus Zirkel

primae classis discipulis in academiam abituris

S.

Nolite mirari, adolescentes carissimi, quid sit, quod, hac oblata scribendi opportunitate, ad Vos potissimum me convertam. Vos profecto res attingit. Quae enim per hosce menses aestivos subsecivis quidem horis analyticae, quam vocant, geometriae degustatis elementa, ea Vobiscum amplius tractare in animo fuit. Itaque, quum persuasum mihi esset, symbolorum naturam, quae ad lineam rectam spectant, Vos probe cognosse atque ad propositiones demonstrandas quomodo ea adhibenda sint, diligentius et accuratius didicisse, iam exempla aliquot ad circulum pertinentia constitui Vobis proponere. Quod consilium quo melius exsequerer magisque servirem commodis Vestris, eius generis elegi theoremata, quae, adhibita nova geometriae tractandae ratione, minus ad intelligendum essent difficilia, et quorum ex Euclide plenam Vos scientiam hausisse pro certo haberem. Ita autem operae pretium fecisse mihi videbor, si Vos, adolescentes optimi, nonnihil et voluptatis et utilitatis ex huius libelli lectione percepisse cognovero. Quod reliquum est, magnopere Vos adhortor, ut, quanta diligentia animique alacritate hucusque in studia humanitatis incumbere consuestis, tanto etiam in posterum has litteras prosequi amore pergatis. Valete.

---

§. 1.

Priusquam rem ipsam aggrediamur, necesse est repetere punctorum duorum datorum intervalli aequationem, quippe unde circuli aequatio derivetur. Rectum igitur esse, ut facilior fiat deductio, coordinatarum angulum statuamus.

(Fig. 1.) Sint M', M'' data puncta; x', y' et x'', y'' eorum coordinatae. Iam, si littera D denotat intervallum $M'M''$, recta $M'N$ abscissarum axi AX parallela ducta, habemus

$$D^2 = M''N^2 + M'N^2.$$

Est vero

$$\begin{aligned} M'N &= P'P'' \\ &= AP'' - AP' \\ &= x'' - x'; \\ M''N &= P''M'' - P''N \\ &= P''M'' - P'M' \\ &= y'' - y'; \end{aligned}$$

ergo

$$D^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2$$

sive

$$D = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2}. \qquad (1.)$$

Duplex signum, quo denotari potest secundum aequationis latus, ad rationem tantummodo refertur intervalli: scilicet, utrum a primo ad secundum, an a secundo ad primum punctum transeamus. Quod quo clarius eluceat, ponamus, utrumque punctum in altero axium, e. c. abscissarum, esse positum. Ea enim conditione, qua $y' = 0$ et $y'' = 0$, aequatio illa hanc induit formam:

$$D = \sqrt{(x'' - x')^2} = \pm (x'' - x') = \pm P'P''.$$

Atque locum habet superius signum, si lineam P'P'' X versus i. e. a puncto P' usque ad P'', inferius, si eam X' versus i. e. a puncto P'' usque ad P' moveri fingimus.

Quodsi punctorum alterum e. g. punctum (x'', y'') in ipso coordinatarum initio situm esse faciamus, habemus $x'' = 0$, $y'' = 0$;

itaque est $$D = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \qquad (2.)$$

Et profecto trigonum AM'P hancce nobis suppeditat aequationem:

$$AM'^2 = AP'^2 + M'P'^2.$$

§. 2.

(Fig. 2.) Si vero coordinatarum angulum esse obliquum statuerimus, habebimus in triangulo M'M''N, littera φ notante angulum YAX,

$$M'M''^2 = M''N^2 + M'N^2 - 2\, M''N.\, M'N.\, \cos M'NM''.$$

Est vero $M''N = y'' - y'$, $M'N = x'' - x'$,

$$\cos M'NM'' = -\cos M''NO = -\cos \varphi;$$

ergo $$D^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2 + 2\,(y'' - y')\,(x'' - x')\cos\varphi,$$

inde $$D = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2 + 2\,(y'' - y')\,(x'' - x')\cos\varphi} \qquad (3.)$$

Quae quidem aequationis forma quum satis implicita esse videatur, eam nobis necessitatem affert, ut, quotiescunque duorum datorum punctorum intervallum computare velimus, axesque ad arbitrium componere liceat, coordinatarum angulum rectum efficiamus. In priorem tamen haec, quam modo invenimus, aequatio abibit speciem, ubi angulum $\varphi = 90^0$ reddiderimus. Nam, quum $\cos 90^0 = 0$, extemplo sequitur

$$D = \sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2}.$$

§. 3.

(Fig. 3.) Sint $AB = p$, $BC = q$ orthogonales coordinatae centri C; radius $CM = r$, atque $AP = x$, $PM = y$ coordinatae cuiuslibet puncti M in circuitu circuli cuiuspiam sumti. Iam statim perspicimus, formulam (1.) § 1. transire in

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2. \quad (4.)$$

Haec est aequatio, quae secundum circuli naturam ad cuncta circuitus puncta spectat. At vero nonnisi ad ea pertinet, quae ita sunt sita, ut diximus. Nam, alio quovis puncto vel intra vel extra circulum posito, erit

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 \lesseqgtr r^2.$$

Itaque illa ipsa aequatio (4), quum cuncta lineae circularis puncta plane definiat atque exhibeat, aequatio circuli vocatur. Tres, quae in ea nobis sese offerunt, constantes quantitates sunt centri coordinatae (p, q) et radius (r). Sane circulus, datis hisce quantitatibus, quoad situm et magnitudinem prorsus est determinatus. Rursus si statuimus obliquum esse coordinatarum angulum (φ), aequationis forma multo magis fit implicita. Nam, in (3.) §. 2. iustis litteris suppositis, est

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2\,(x-p)\,(y-q)\cos\varphi = r^2.$$

§. 4.

Aequatio (4.)

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

magis minusve simpliciorem speciem habebit, prout variis locis in circuli planitie axes collocaveris.

1. Si coordinatarum axes A'X', A'Y' a puncto A', in circuitu iacente, exordium ducunt, p valorem A'B', q valorem B'C accipit; quumque CA' = r sit,

est $$p^2 + q^2 = r^2.$$

Iam si in aequatione illa multiplicationes indicatas confecerimus et in utroque latere aequales quantitates $p^2 + q^2$ et r^2 suppresserimus, habebimus

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0. \quad (5.)$$

Eiusmodi est ista conditione circuli aequatio. Et profecto, si posuerimus $y = 0$, erit

$$x^2 - 2px = 0$$

sive $$x\,(x - 2p) = 0;$$

ergo aeque $$x = 0, \text{ ac } x = 2p.$$

Inde quum utraque compages

$$y=0,\ x=0,\ y=0 \text{ et } x=2p$$

aequationi (5) satisfaciat, sequitur, circulum transire non solum initium A′ sed etiam alterum abscissarum axis punctum D, cuius quidem abscissa $A'D = 2p = 2\,A'B'$ est.

En nova symbolorum ope confecta demonstratio Euclideae propositionis III, 3:

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

§. 5.

2. Si extremum diametri A″E punctum A″ coordinatarum initium ipsamque diametrum abscissarum axem esse fingimus, est

$$p = A''C = r;\ q = 0.$$

Itaque aequatio

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

mutabitur in hanc

$$(x-r)^2 + y^2 = r^2$$

sive

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0. \tag{6.}$$

Posito $y = 0$,

erit $x\,(x-2r) = 0$;

ergo $x = 0$ et $x = 2r$.

Ex his videre licet, abscissarum axem circuitu circulari tam in uno extremo diametri puncto A″ $(y = 0, x = 0)$ quam in altero $(y = 0, x = 2r)$ secari.

Aequationem $x^2 + y^2 - 2rx = 0$

ita quoque scribere licet

$$y^2 = 2rx - x^2$$

sive

$$y^2 = x\,(2r - x).$$

Iam vero, figuram si intuemur, habemus $MP'' = y$, $A''P'' = x$, $P''E = 2r - x$;

ergo est

$$MP''^2 = A''P''.\ P''E$$

vel

$$A''P'':\ MP'' = MP'':\ P''E.$$

Qua proportione demonstratur illa Euclidis propositio, quae corollario ad L. VI. 6. continetur:

Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἀπὸ σημείου τινὸς τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Ex eadem illa aequatione (6.) haec quoque, quae sequitur, derivatur:

$$x^2 + y^2 = 2rx.$$

Est vero $x = A''P''$, $y = MP''$, $2r = A''E$. Ducta igitur chorda $A''M$, erit

$$x^2 + y^2 = A''P''^2 + MP''^2 = A''M^2;$$

ergo $$A''M^2 = A''E.\ A''P''$$

sive $$A''E : A''M = A''M : A''P''$$

i. e. si priorem propositionem atque constructionem respicimus:

Ἡ εὐθεῖα $A''M$ τῆς διαμέτρου $A''E$ καὶ τοῦ τμήματος προσκειμένου $A''P''$ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

§. 6.

3. Tandem si coordinatae initium deducunt ab ipso centro, in generali ista aequatione (4.)

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

ponendae sunt $p = 0$ et $q = 0$. Quo facto in hanc formam

$$x^2 + y^2 = r^2$$

transibit, quae sane omnium est simplicissima atque ab ipso triangulo $CP''M$ proficiscitur. Scilicet est

$$CP''^2 + P''M^2 = CM^2$$

sive $$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (7.)$$

Si in aequatione

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

solam quantitatem $q = 0$ reddiderimus, centrum quidem in abscissarum axe erit, circuitus autem initium coordinatarum non transibit. E contrario centrum in ordinatarum axe situm erit, quando solam $p = 0$ substituerimus. Cui utrique positioni hae duae respondebunt aequationes

$$y^2 + (x - p)^2 = r^2 \tag{8.}$$
$$x^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{9.}$$

§. 7.

Ex aequatione (7.), quam §. 6. perscripsimus, sequitur

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Illico iam duplex signum, quo secundum latus denotatum est, probat, cuilibet valori abscissae x respondere duos aequales sibi et oppositos valores ordinatae y. (Fig. 4.) Sic ad abscissam AP duae aequales sibi et oppositae ordinatae MP, M'P pertinent. Igitur, quum MM' in AB ad perpendiculum sit directa, si inferiorem circuli partem circa diametrum vertentem cogitaveris, punctum M in M' et simili ratione singula partis BM'C puncta in singula partis BMC puncta incident. Inde deducimus hasce duas propositiones:

alteram, quam ex Euclidis ὅροις (I. 17.) bene novimus:

Διάμετρος δίχα τέμνει τὸν κύκλον;

alteram, quam iam demonstravimus supraque (§. 4.) descripsimus.

§. 8.

Quum $r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$ sit,

aequationem (7.) $x^2 + y^2 = r^2$

in hanc quoque transformare licet

$$y^2 = (r + x)(r - x).$$

Qua ad figuram translata, habemus

$$PM = y,\ CP = r + x;\ BP = r - x,$$

atque $PM^2 = CP.\ BP,$

seu $CP : PM = PM : BP$

Porro ducta chorda CM, erit

$$CM^2 = y^2 + (r + x)^2 = y^2 + x^2 + 2\,rx + r^2.$$

Est vero $x^2 + y^2 = r^2;$

ergo $\quad CM^2 = 2r^2 + 2\,rx$

$= 2\,r\,(r+x)$

$= CB.\ CP.$

sive $\quad CB : CM = CM : CP$

Ex his utrumque theorema, iam supra §. 5. commemoratum, intelligitur.

§. 9.

Si per punctum C ($y = 0$, $x = -r$) et per M punctum, cuius coordinatas per x et y denotare pergimus, rectam scribimus lineam, atque per a tangentem anguli MCX significamus, est secundum aequationem lineae, duo data puncta transeuntis,

$$a = \frac{y}{x+r}.$$

Simili modo, si per idem punctum M et per B ($y = 0$, $x = +r$) punctum rectam ducimus, littera a′ tangentem anguli MBX denotante, est

$$a' = \frac{y}{x-r}.$$

Iam, si a et a′ inter se multiplicatae fuerint, erit

$$aa' = \frac{y^2}{(x+r)\,(x-r)} = \frac{y^2}{x^2 - r^2}.$$

Est vero $\quad y^2 = r^2 - x^2;$

ergo $\quad aa' = \dfrac{r^2 - x^2}{x^2 - r^2} = -1$

sive $\quad aa' + 1 = 0.$

Haec vero est satis nota formula, unde sequitur, rectarum CM et MB alteram alteri ad perpendiculum esse superimpositam. Atque ita ad liquidum est perductum Euclidis illud praeclarum theorema III. 31.:

Ἐν κύκλῳ ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν.

§. 10.

(Fig. 5.) Ponamus, chordam ED esse abscissarum, diametrum, in ea ad perpendiculum erectam, ordinatarum axem. Tunc circulus aequationis, quae §. 6. (9.) adscripta reperitur, ope plane est determinatus. Quae quidem aequatio

$$x^2 + (y - q)^2 = r^2$$

transit in hanc $$x^2 + (y - q)^2 = q^2 + s^2,$$

littera q intervallum AO et s dimidiam chordam i. e. AD designantibus.

Iam si quodpiam arcus EMD punctum M cum punctis E et D rectis coniungimus atque per a tangentem anguli MEX, per a′ tangentem anguli MDX significamus,

est $$a = \frac{y}{x+s} \text{ et } a' = \frac{y}{x-s}.$$

Est vero secundum aequationem, quae significat angulum, duabus rectis formatum,

$$\tan DME = \frac{a' - a}{1 + aa'};$$

erit igitur, substitutis pro a et a′ valoribus $\frac{y}{x+s}$ et $\frac{y}{x-s}$,

$$\tan DME = \frac{y(x+s) - y(x-s)}{x^2 - s^2 + y^2}$$
$$= \frac{2sy}{x^2 - s^2 + y^2}.$$

Ex aequatione autem supra perscripta

$$x^2 + (y - q)^2 = q^2 + s^2$$

est $$x^2 - s^2 + y^2 = 2qy;$$

ergo $$\tan DME = \frac{2sy}{2qy} = \frac{s}{q}.$$

Qui quidem valor constans est quantitas; nimirum nullo pacto variabitur, ubicunque M punctum in circuitu sumserimus. Praeterea quum e triangulo AOD probe intelligatur, esse

$$\tan AOD = \tan {}^1/_2\, EOD = \frac{AD}{AO} = \frac{s}{q},$$

haec duo habemus Euclidea theoremata III, 20. et 21.:

1. Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.
2. Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

§. 11.

Iamiam aggrediamur demonstrare aliquot propositiones, quae ad duas rectas, vel intra vel extra circulum sese secantes, spectant.

(Fig. 6.) Sit igitur A punctum quoddam in planitie circuli ex O centro descripti. Ducamus per punctum A et centrum O rectam AX atque per A perpendicularem AY ad AX; in his quoque lineis sumamus abscissas et ordinatas. Tunc quidem, insuper littera p lineam AO litteraque r radium significantibus, haec erit circuli aequatio (§. 6. (8.)):

$$(x - p)^2 + y^2 = r^2.$$

Rectae autem, quae coordinatarum initium A transit, aequatio hanc habet formam:

$$y = ax.$$

Itaque, si id agimus, ut nanciscamur aequationem, quae punctorum M′ et M″, quibus recta ista obviam venit circulo, abscissas praebeat, hunc quidem valorem in circuli aequationem substituamus necesse est. Quo facto habemus

$$(x - p)^2 + a^2x^2 = r^2$$

sive

$$(1 + a^2)\, x^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0$$

seu

$$x^2 - \frac{2p}{1 + a^2}\, x + \frac{p^2 - r^2}{1 + a^2} = 0.$$

Iam si per x', y'; x'', y'' punctorum, quibus recta AM′ circulum secat, coordinatas significamus, est

$$AM'^2 = x'^2 + y'^2;\ AM''^2 = x''^2 + y''^2.$$

Quum vero duo haec puncta in recta AM′ sita sint, habemus

$$y' = ax'; \; y'' = ax''$$

ergo $\quad AM'^2 = (1 + a^2)\, x'^2; \; AM''^2 = (1 + a^2)\, x''^2$

atque multiplicando $\quad AM'^2 . AM''^2 = (1 + a^2)^2\, x'^2\, x''^2.$

Praeterea quum x' et x'' ambae sint aequationis supra perscriptae

$$x^2 - \frac{2\,p}{1 + a^2}\, x + \frac{p^2 - r^2}{1 + a^2} = 0$$

radices atque in qualibet secundi gradus aequatione productum ex radicibus aequet tertium eius membrum, est

$$x'\, x'' = \frac{p^2 - r^2}{1 + a^2};$$

inde sequitur $\quad AM'^2 . AM''^2 = (p^2 - r^2)^2$

ergo $\quad AM' . AM'' = p^2 - r^2$

ea quidem lege, ut sit $p > r$ i. e. punctum A extra circulum positum sit.

E contrario erit

$$AM' . AM'' = r^2 - p^2,$$

quando $p < r$ i. e. punctum A intra circulum situm est.

Seu unam seu alteram conditionem posueris, rectangulum $AM' . AM''$ quantitatem a non amplius continebit: id quod satis claro est argumento, nequaquam illud variari, qualiscunque fuerit rectae AM' positio. Alia igitur per A ducta recta AN', quae circulum in N' et N'' secat, erit

$$AM' . AM'' = AN' . AN''$$

vel $\quad AM' : AN' = AN'' : AM''$

i. e. si per punctum quoddam vel intra vel extra circulum situm ducuntur duae rectae, quae circuitum persecant, intervalla, inter punctum istud et circuitum in una recta computata, inverso ordine proportionalia sunt intervallis, in altera recta simili modo enumeratis.

Quae quidem propositio duo geometrica theoremata complectitur, quorum alterum his verbis expressum legimus apud Euclidem lib. III, 35:

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Alterum, quod ad rectas extra circulum sese secantes spectat, idcirco non protulit geometra graecus, quia insequente propositione (36.), quae refertur ad tangentem circuli et secantem, ex uno eodemque puncto exteriore ductas, quodammodo continetur. Profecto enim, si duarum illarum secantium alteram AM′ ita circa punctum A circumferri tibi finxeris, ut M′ et M″ puncta in unum incidant:

> *ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.*

§. 12.

Porro anquiramus conditiones, quibus duo circuli sese secent. Quod quo facilius perficiamus, eam quidem rectam, quae (Fig. 7.) centra A et B transit, sumamus abscissarum axem atque orthogonalium coordinatarum initium A centro imponamus. Iam, si punctorum A et B intervallum littera c, radiosque litteris r et r′ denotamus, hisce duabus aequationibus

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(x - c)^2 + y^2 = r'^2$$

locus est. Cuiuslibet puncti, utrique peripheriae communis, coordinatas utrique aequationi satisfacere oportet; itidem coordinatae, quae explent utramque aequationem, ad punctum utrique peripheriae commune pertinent. Solvamus aequationes. Reales, qui esse poterunt incognitarum quantitatum x et y valores, cognoscendi nobis dabunt facultatem, quibus sese punctis duo circuli secent.

Deducta autem secunda aequatione de prima, habebimus

$$2cx - c^2 = r^2 - r'^2;$$

ergo
$$x = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{2c}.$$

Quo valore in primam aequationem introducto, respondentes quantitatis y valores obtinemus, nempe

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{4c^2r^2 - (c^2 + r^2 - r'^2)}.$$

Inde quidem, quod duae tantummodo sunt quaestionis propositae responsiones, assumimus theorema hoc Eucl. III, 10:

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Quum utrumque sectionis punctum M, M′ eandem abscissam AP habeat, ordinatae MP et MP′ vero aequales sibi sint atque oppositae, ea, quam supra fecimus, derivatione, dummodo recte interpreteris, probatum est theorema, quod, quum recentioris geometriae peculiare sit, etiamsi apud Euclidem desideretur, sermone tamen eius proponere liceat his verbis:

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς ἐπιζευχθεῖσαν, καὶ δίχα τέμνει αὐτήν.

Verum tamen conditio, qua circuli se secent, ex eo pendet, ut y quantitatis valor, signo radicis subiectus, realis fiat aut impossibilis. Quam conditionem quo facilius cognoscamus, valori isti aliam induimus formam. Quum enim notum nobis exploratumque sit, duarum quantitatum quadratorum differentiam aequare earundem summam multiplicatam per differentiam, habemus

$$\begin{aligned} 4c^2r^2 - (c^2 + r^2 - r'^2) &= (2cr + c^2 + r^2 - r'^2)\ (2cr + r'^2 - c^2 - r^2) \\ &= [(c+r)^2 - r'^2]\ [r'^2 - (r-c)^2] \\ &= (c + r + r')\ (c + r - r')\ (r + r' - c)\ (c + r' - r). \end{aligned}$$

Itaque est

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(c + r + r')\ (c + r - r')\ (r + r' - c)\ (c + r' - r)}\ .$$

Hac sub forma primus radicandi numeri factor reapse positivus est. Ergo y realis erit ea lege, ut vel ceteri tres factores itidem sint positivi, vel unus eorum positivus, reliqui duo negativi. Secundus vero casus nunquam poterit obtinere. Etenim si posteriorum trium factorum unus est negativus, positivus sit reliquus uterque necesse est. Ponamus e. c. priorem esse negativum, h. e.

$$c + r - r' < 0, \text{ ergo } c + r < r'.$$

Haud dubie, quoniam nunc est

$$c < r' \text{ et } r < r',$$

sequitur $r + r' - c$ pariter ac $c + r' - r$ positivam esse quantitatem.

Quum igitur nullo pacto neque duo, neque multo minus universi res factores una negativi esse possint, colligere licet, nonnisi duos admittendos esse casus. Ergo vel positivi sunt tres isti factores, vel negativus unus, positivi reliqui duo.

Atque priore quidem casu, quo scilicet

$$r + c > r', \; r + r' > c, \; r' + c > r,$$

y fit realis. Itaque circuitus duo sese secabunt, quotiescunque trium quantitatum, nempe radii utriusque r, r′ et centrorum intervalli, una minor fuerit quam ceterarum summa. Quodsi posteriorem accidere casum atque inaequalitatum illarum unam inverso ordine locum habere posueris, y fiet impossibilis: unde sequitur, circulos duos non sese esse secturos, quotiescunque trium quantitatum r,r′,c una alterave maior fuerit quam reliquarum duarum summa.

Attamen evenire potest, ut sit

$$c + r - r' = 0, \text{ vel } r + r' - c = 0, \text{ vel } r' + c - r = 0$$

sive

$$r' - r = c, \text{ sive } r + r' = c, \text{ sive } r - r' = c.$$

Tunc quidem duo y quantitatis valores ad unum, scilicet ad 0, reducuntur atque circuitus unum solum punctum commune habent, quod, quum ordinata eius sit $= 0$, in centrali linea positum esse apparet. Ex his depromimus sequentem propositionem, quae est corollarium Euclid. III, 11. 12.:

Circulus circulum contingit, si centrorum distantia aequalis est vel summae vel differentiae radiorum.

Si singularem statuerimus legem, ut sit $c = 0$, atque circuli commune habeant centrum, valores quantitatum x et y hi erunt:

$$x = \frac{r^2 - r'^2}{0} \text{ et } y = \frac{\sqrt{-(r^2 - r'^2)^2}}{0}$$

i. e. uterque exaequat ∞. Id quod probat, circulos se non posse secare ideoque nullum habere punctum commune.

Praeterea si $r = r'$ fecerimus, erit

$$x = \frac{0}{0} \text{ et } y = \frac{0}{0}.$$

Profecto iam circuli in unum incidentes indefinita gaudent communium punctorum copia.

§. 13.

Reliquum est, ut de linea, quae vocatur circuli tangens, nonnulla dicamus. Ac primum quidem constat, in geometria ita definiri huiusce lineae naturam, ut sit recta, quae unum solum cum circumferentia commune punctum habeat. Qua ex definitione consequitur, ut, si per puncta duo (Fig. 8.), sita in circumferentia, secans M'S ducatur eamque circa punctum M' circumferri tibi fingas, donec M'' punctum in M' incidat, ipsa haec recta tangens fiat. Ergo tangens existimanda est secans, cuius utrumque punctum in unum idemque i. e. contactus punctum incidit.

Iam vero considerata lineae, de qua sermo est, natura, facile puncti cuiuslibet in circumferentia positi tangentem determinandi facultatem nanciscemur. Sit S punctum, in quo secans SM''M' abscissarum axi occurrit. Iam, si per x', y'; x'', y'' punctorum M', M'' coordinatas significamus, habemus

$$\tan \text{MSX} = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Eorundem vero, quum ad circumferentiam pertineant, coordinatae circuli aequationi satisfaciant necesse est. Itaque

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$
$$x''^2 + y''^2 = r^2;$$

unde sequitur $\quad y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2 = 0$

sive $\quad (y' - y'')(y' + y'') + (x' - x'')(x' + x'') = 0;$

ergo $$\frac{y' - y''}{x' - x''} = - \frac{x' + x''}{y' + y''}$$

atque $$\tan MSX = - \frac{x' + x''}{y' + y''}.$$

Nunc quidem, ubi M'' punctum in M' inciderit, ut sit $x'' = x'$ et $y'' = y'$, secans $M'S$ tangentis TM' locum obtinebit. Quodsi igitur in aequatione supra perscripta $x'' = x'$ et $y'' = y'$ fecerimus, habebimus tangentem anguli $M'TX$, ex abscissarum axe et tangente in ipso contingentiae puncto M' constructi. Itaque, a littera huius anguli tangentem significante, erit

$$a = - \frac{x'}{y'}.$$

Quum vero rectae $M'T$ aequatio sit

$$y - y' = a\,(x - x'),$$

pro a valore substituto, habemus

$$y - y' = - \frac{x'}{y'}\,(x - x').$$

Haec est tangentis aequatio, in qua quidem (x', y') punctum contactus denotat. At multo elegantiorem ipsi formam induere poterimus. Abiecto enim denominatore y' atque confecta multiplicatione et translatione, dummodo observare velis, esse $y'^2 + x'^2 = r^2$, in hanc memorabilem abibit speciem:

$$yy' + xx' = r^2.$$

Neque difficile illud est docere, rectam per hanc aequationem datam reapse tangentem circuli esse, quippe quae, excepto M' puncto, tota extra circulum cadat.

Nam si ex duabus aequationibus

$$yy' + xx' = r^2$$
$$y'^2 + x'^2 = r^2,$$

quarum prior tangentem exhibet, posterior tangentis punctum in circuitu iacere ostendit, illam per 2 multiplicamus eamque de hac detrahimus, est

$$y'^2 - 2yy' + x'^2 - 2xx' = - r^2;$$

atque $x^2 + y^2$ utrique lateri addendo accipimus hanc

$$(x - y')^2 + (x - x')^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

Inde, quum prius latus sit summa duorum quadratorum, sequitur, ut, quodcunque in tangente punctum sumseris, quantitas $x^2 + y^2 - r^2$ negativa esse nequeat. Est vero $x^2 + y^2$ quadratum distantiae initii seu centri a quolibet tangentis puncto; haec igitur distantia haud minor radio esse poterit, eumque tunc demum exaequabit, quum $x = x'$ et $y = y'$ posueris. In promtu est, universa tangentis puncta, excepto contingentiae puncto, extra circulum cadere. —

§. 14.

Iam nunc quaeramus aequationem tangentis, quae punctum extra circulum datum transeat. Cuius puncti coordinatas significemus per x'', y'', contingentiae vero puncti adhuc ignoti per x', y'. Tunc quidem tangentis, punctum istud (x, y') transeuntis, haec aequatio erit:

$$yy' + xx' = r^2.$$

Quum autem postuletur, ut tangens pariter transeat punctum (x'', y''), y'' in locum y, x'' in locum x nobis substituendae sunt. Est igitur

$$y''y' + x''x' = r^2.$$

Praeterea, quoniam (x', y') punctum in circumferentia positum est, habemus:

$$y'^2 + x'^2 = r^2.$$

Utraque haec posteriorum aequationum ignotis coordinatis x', y' determinandis nobis inserviet.

Nam ex illa statim sequitur:

$$y' = \frac{r^2 - x''x'}{y''}.$$

Quo valore in posteriorem aequationem pro y' substituto, invenimus

$$x'^2 (x''^2 + y''^2) - 2r^2 x'' x' + r^2 (r^2 - y''^2) = 0;$$

inde
$$x' = \frac{r^2 x'' \pm r y'' \sqrt{x''^2 + y''^2 - r^2}}{x''_2 + y''^2}$$

ergo
$$y' = \frac{r^2 y'' \mp r x'' \sqrt{x''^2 + y''^2 - r^2}}{x''^2 + y''^2}.$$

Bene notandum est, $x''^2 + y''^2$ esse $> r^2$, ea quidem lege, ut datum punctum extra circulum sit positum. Talem igitur ad situm quod attinet, reales sunt quantitatum x' et y' valores, duaeque sunt tangentes. Sin punctum illud ipsi circumferentiae inesse sumseris, qua quidem conditione $x''^2 + y''^2 = r^2$ est, tam x' quam y' quantitatis valores reducentur ad unum, unaque sola tangens erit. Denique si datum punctum interius est, $x''^2 + y''^2$ fit $< r^2$. Iam quantitatum x' et y' valores impossibiles sunt, nullaque exstat linea, quae circulum contingere queat.

§. 15.

Quum constructio, quae vocatur, valorum x' et y' res sit admodum sane contorta et impedita, redeamus ad problematis aequationes

$$y''y' + x''x' = r^2$$
$$y'^2 + x'^2 = r^2.$$

In utraque si deinceps coordinatas x' et y' quasi indeterminatas respexerimus, duorum habebimus aequationem geometricorum locorum, tangentis puncta continentium. Est autem posterior aequatio ipsius dati circuli, prior lineae haud magno negotio construendae. Nanciscemur profecto, si $y' = 0$ et deinde $x' = 0$ posuerimus, initii distantiam a punctis, quibus recta illa axibus obviam venit. Scilicet est

$$AT' = \frac{r^2}{x''};\ AT'' = \frac{r^2}{y''}.$$

Quae formulae $\frac{r^2}{x''}, \frac{r^2}{y''}$ quomodo construantur, supervacaneum est dicere. Puncta T′, T″ igitur determinata sunt, hincque recta T′T″, quae, ubi secat circumferentiam, contactus puncta M′ et M″ nobis subministrat.

At haec construendi ratio, etiamsi sit compendiaria, non tamen tam simplex est, quam illa, cuius ex geometria scientiam tenemus. Periclitemur, si nostra quoque via ad eandem possimus pervenire. Recipiamus iterum

$$y''y' + x''x' = r^2$$

et

$$y'^2 + x'^2 = r^2$$

aequationes, in quibus x' et y' quaesiti contingentiae puncti coordinatas exhibent. Superiore de inferiore detracta, reperimus

$$y'^2 - y''y' + x'^2 - x''x' = 0;$$

ex qua, iustis aucta supplementis, fit

$$\left(y' - \frac{y''}{2}\right)^2 + \left(x' - \frac{x''}{2}\right)^2 = \frac{y''^2}{4} + \frac{x''^2}{4}.$$

Quam quidem formulam cum generali circuli aequatione

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

comparantes, ipsa ea repraesentari circulum animadvertimus, cuius centrum $\frac{x''}{2}$ et $\frac{y''}{2}$ coordinatas habet radiusque $\sqrt{\frac{y''^2}{4} + \frac{x''^2}{4}}$ exaequat. Sit igitur Q datum punctum, ex quo ducere oportet rectam, quae circulum contingat. Iungatur AQ recta atque secetur bifariam in O. Iam quum x'' et y'' sint puncti Q coordinatae, perspicuum est, $\frac{x''}{2}$ et $\frac{y''}{2}$ pariter exhibere puncti O coordinatas, et esse $AO = \sqrt{\frac{y''^2}{4} + \frac{x''^2}{4}}$. Itaque novus hic circulus, cuius circumferentia quaesita continet puncta, centro quidem O, dimidio autem intervallo AQ est describendus. M' et M'', quibus alter alterum secat circuitum, contingentiae sunt puncta $(x'\ y')$, quae erant investiganda. Ad idem igitur pervenimus construendi genus, quod ex elementis satis notum est.

§. 16.

Valor $AT' = \frac{r^2}{x}$, definiens punctum T', quo recta $T'T''$ abscissarum axem secat, materiam praebet observationis minime negligendae. Quum enim ordinatam y'' puncti Q non amplius in se contineat, ideoque puncti T' definitio nequaquam pendeat ex ordinatae y'' valore, ipsum hoc punctum T' pro punctis Q, quotquot eandem abscissam x'' habeant et quae in recta, abscissarum axi ad rectos angulos ducta, sita sint, uno eodemque loco maneat necesse est. Unde colligimus haec duo theoremata recentioris geometriae propria:

1. Si ex quovis puncto rectae cuiuspiam tangentium paria descripseris, binaque congrua contactus puncta rectis coniunxeris, hae quidem rectae uno eodemque puncto se persecabunt.

2. Si per punctum aliquod, in planitie circuli cuiuspiam sumtum, plures rectas duxeris atque in punctis, quibus circumferentiam transeunt, tangentium paria construxeris, harum quidem sectiones in eandem incident rectam.

§. 17.

Hoc loco non alienum est addere, quomodo, quam ingressi sumus, via solvantur elementaria aliquot problemata, ad circulum spectantia. At vetat spatium. Nihilo tamen minus temperare nobis non possumus, quin breviter, antequam disputandi finem faciamus, omissis aliis, methodo nostra demonstremus hanc Euclidis propositionem, quae est lib. III. 19. In contingentiae puncto tangenti cuidam ad rectos angulos recta ducatur. Cuius quidem puncti si x' et y' coordinatae fuerint, illius perpendiculi aequatio hanc induet speciem:

$$y - y' = a' (x - x').$$

Quum vero ex conditione, ut recta sit in tangentem ad perpendiculum demissa, sequatur, esse

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{y'}{x'},$$

habemus

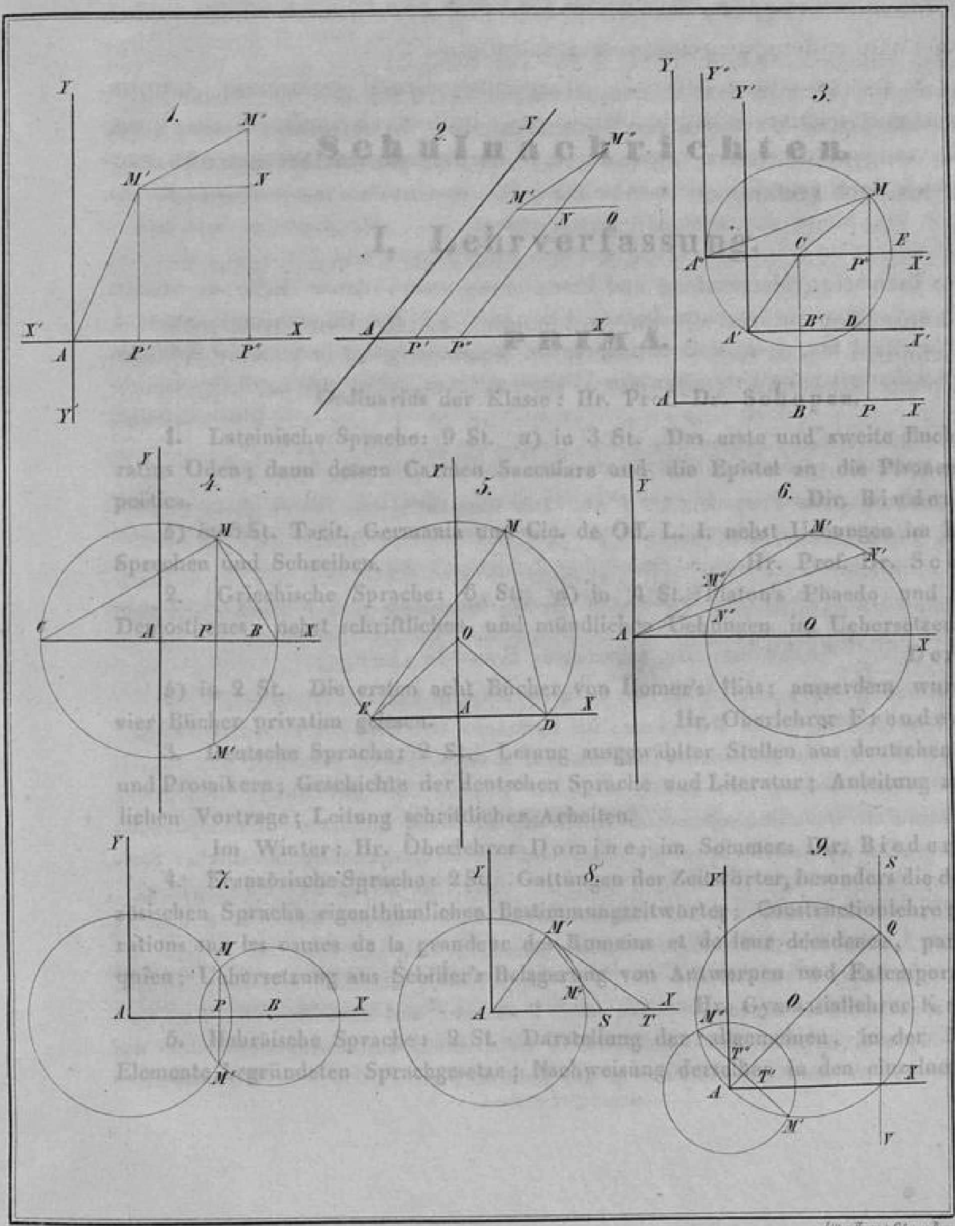
$$y - y' = \frac{y'}{x'} (x - x')$$

sive

$$y = \frac{y'}{x'} x.$$

Ex quo intelligitur, rectam istam transire initium, quod hoc quidem loco est circuli centrum. Itaque:

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



Lith. v. Henry & Cohen in Bonn.

1. Si ex quovis puncto rectae cuiuspiam tangentium paria descripseris, binaque conjungas contactus puncta rectis lineis, hae quidem rectae uno eodemque puncto se persecabunt.

2. Si per punctum aliquod, in planitie circuli cuiuspiam sumtum, plures rectas duxeris atque in punctis, quibus circumferentiam transeunt, tangentium paria construxeris, harum quidem sectiones in eandem incident rectam.

§. 17.

Hoc loco non alienum est addere, quomodo, quam ingressi sumus, via solvantur elementaria aliquot problemata, ad circulum spectantia. At vetat spatium. Nihilo tamen minus temperare nobis non possumus, quin breviter, antequam disputandi finem faciamus, omissis aliis, methodo nostra demonstremus hanc Euclidis propositionem, quae est lib. III. 19. In contingentiae puncto tangenti cuidam ad rectos angulos recta ducitur. Cuius quidem puncti si x' et y' coordinatae fuerint, illius perpendiculi aequatio hanc induet speciem:

$$y - y' = a' (x - x').$$

Quum vero ex conditione, ut recta sit in tangentem perpendicularis demissa, sequatur, esse

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{y'}{x'},$$

habemus

$$y - y' = \frac{y'}{x'} (x - x')$$

sive

$$y = \frac{y'}{x'} x.$$

Ex quo intelligitur, rectam istam transire initium, quod hoc quidem loco est circuli centrum. Itaque:

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

PRIMA.

Ordinarius der Klasse: Hr. Prof. Dr. Schopen.

1. Lateinische Sprache: 9 St. *a*) in 3 St. Das erste und zweite Buch von Horatius Oden; dann dessen Carmen Saeculare und die Epistel an die Pisonen de arte poëtica. Dir. Biedermann.

b) in 6 St. Tacit. Germania und Cic. de Off. L. I. nebst Uebungen im Lateinisch-Sprechen und Schreiben. Hr. Prof. Dr. Schopen.

2. Griechische Sprache: 6 St. *a*) in 4 St. Platon's Phaedo und Plutarch's Demosthenes, nebst schriftlichen und mündlichen Uebungen im Uebersetzen.

Derselbe.

b) in 2 St. Die ersten acht Bücher von Homer's Ilias; ausserdem wurden noch vier Bücher privatim gelesen. Hr. Oberlehrer Freudenberg.

3. Deutsche Sprache: 2 St. Lesung ausgewählter Stellen aus deutschen Dichtern und Prosaikern; Geschichte der deutschen Sprache und Literatur; Anleitung zum mündlichen Vortrage; Leitung schriftlicher Arbeiten.

Im Winter: Hr. Oberlehrer Domine; im Sommer: Dir. Biedermann.

4. Französische Sprache: 2 St. Gattungen der Zeitwörter, besonders die der französischen Sprache eigenthümlichen Bestimmungzeitwörter; Constructionlehre; Considérations sur les causes de la grandeur des Romains et de leur décadence, par Montesquieu; Uebersetzung aus Schiller's Belagerung von Antwerpen und Extemporalien.

Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

5. Hebräische Sprache: 2 St. Darstellung der allgemeinen, in der Natur der Elemente begründeten Sprachgesetze; Nachweisung derselben in den einzelnen Sprach-

erscheinungen, angeknüpft an die nach Gesenius wiederholte Formenlehre und an die Uebersetzung gewählter Capp. aus der Gen. aus I Sam. und einiger Psalmen.

Hr. Religionlehrer Reinkens.

6. Religionlehre: *a*) kath. Conf. 2 St. Der Glaubenslehre dritter Theil: von dem Verhältnisse Gottes zu dem Menschen, bis zur Lehre von den hh. Sacramenten. An die Rechtfertigunglehre wurde eine kurze Darstellung des christlichen Lebens angeschlossen. Hr. Religionlehrer Reinkens.

b) evang. Conf. (mit Secunda combinirt) 2 St. Geschichte der christlichen Kirche von Gregor VII. bis zu dem westphälischen Frieden. Hr. Licentiat Kinkel.

7. Mathematik: 4 St. Die Lehre von den Progressionen und Combinationen; der binomische Lehrsatz; Wiederholung und Erweiterung verschiedener Theile der Mathematik mit fortwährenden Uebungaufgaben. Hr. Oberlehrer Zirkel.

8. Physik: 2 St. Genauere mathematische Begründung des in Secunda durchgenommenen Lehrstoffs; die Lehre von der Wärme mit den dahin gehörigen Experimenten. Derselbe.

9. Geschichte und Geographie: 2 St. Geschichte des Mittelalters.

Hr. Prof. Dr. Schopen.

10. Philosophische Propädeutik: 1 St. Die Hauptlehrsätze der empirischen Psychologie. Dir. Biedermann.

SECUNDA.

Ordinarius: Hr. Oberlehrer Freudenberg.

1. Lateinische Sprache: 10 St. *a*) in 2 St. Virgil. Aen. L. III. und IV.

Im Winter: Hr. Oberl. Domine; im Sommer: Hr. Oberl. Freudenberg.

b) in 8 St. Cicero de amicitia, Livius lib. I, capp. 1—40 statarisch und lib. III cursorisch; Wiederholung der Lehre von den Temporibus und Modis; schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen und Anleitung zu freien Aufsätzen; Extemporalien und Uebungen im Lateinisch-Sprechen; Auswendiglernen ausgewählter klassischer Stellen. Hr. Oberlehrer Freudenberg.

2. Griechische Sprache: 6 St. Homer Odyss. L. I—IV und VI; (V, X und XI wurden von der ersten Abtheilung privatim gelesen); Xenoph. Anab. L. IV und V; Cyropaed. L. I, capp. I—VI; Herodot. L. VI, capp. 1—90, lateinisch übersetzt; Homerische Formenlehre nach Lucas; Syntax nach Buttmann und nach Dillenburger's Beispielsammlung nebst schriftlichen Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen in das Griechische und aus dem Griechischen in das Lateinische. Derselbe.

3. Deutsche Sprache: 2 St. Ausgewählte Stellen aus deutschen Dichtern und Prosaikern, besonders aus dem Lesebuche von Pütz und Remacly; Uebungen im mündlichen Vortrage und schriftliche Arbeiten. Dir. Biedermann.

4. Französische Sprache: 2 St. Wiederholung des in Tertia Vorgenommenen; nähere Entwickelung des Gebrauches der Arten und Zeiten des Zeitworts; sämmtliche Bestimmung- und Fürwörter; I Abtheilung von Voyage du jeune Anacharsis en Grèce, par Barthélémy; schriftliche Uebungaufgaben aus Hirzel's Grammatik.
Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

5. Hebräische Sprache: 2 St. Elementar- und Formenlehre nach Gesenius bis §. 90, mit Ausschlusse der verb. contr. und quiesc.; Analysirübungen nach Maurer.
Hr. Religionlehrer Reinkens.

6. Religionlehre: *a)* kath. Conf. 2 St. Die Früchte des Erlösungwerkes, der Menschheit von dem h. Geiste durch die Kirche zur Aneignung gebracht; dreifache Wirksamkeit der Kirche durch Verkündigung der Lehre, durch Verwaltung der Sacramente (wobei vorzüglich die Eucharistie, und zwar als Opfer und als Sacrament betrachtet, hervorgehoben wurde) und durch Leitung; die letzten Dinge; (in freiem Vortrage). Derselbe.

b) evang. Conf. (Siehe Prima).

7. Mathematik: 4 St. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Gleichungen von dem zweiten Grade; Beendung der Planimetrie; darauf ebene Trigonometrie; daneben stäte Uebungaufgaben. Hr. Oberlehrer Zirkel.

8. Physik: 1 St. Die Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichts der Körper.
Derselbe.

9. Geschichte und Geographie: 3 St. Geschichte des Alterthums.
Hr. Prof. Dr. Schopen.

TERTIA.

Ordinarius: Hr. Gymnasiallehrer Werner.

1. Lateinische Sprache: 10 St. *a)* in 2 St. Ausgewählte Stellen aus lib. III—V aus Ovidius Metamorphosen, verbunden mit Auswendiglernen passender Abschnitte.
Dir. Biedermann.

b) in 8 St. Wiederholung des in Quarta Vorgenommenen; die Lehre von den Arten und Zeiten der Zeitwörter und die Wortbildung nach Zumpt's grösserer Grammatik; mündliche und schriftliche Uebersetzungen und Extemporalien, theils nach Dronke, theils nach Dictaten; Lesung von Nepos Leben des Miltiades und des Atticus und von Caes. bell. gall. L. I, 1—42, III, IV, 16 bis zu Ende, V, 1—38 (privatim lasen die Schüler Caes. bell. gall. I, 42 bis zu Ende, IV, 1—16; V, 38 bis zu Ende); Auswendiglernen passender Stellen des Gelesenen. Hr. Gymnasiallehrer Werner.

2. Griechische Sprache: 6 St. Wiederholung des in Quarta Vorgenommenen nach Quossek's praktischer Anleitung; Fortsetzung und Beendung der Formenlehre nebst der Syntax der Casus und Präpositionen, nach Buttmann's Schulgrammatik; Lesung ausgewählter Abschnitte aus Fr. Jacobs Elementarbuche und Xenoph. Anab. I, 10 und II ganz; mündliche und schriftliche Uebersetzungen in das Griechische nach Günther's Anleitung und Extemporalien zur Befestigung der Formenlehre.

Derselbe.

3. Deutsche Sprache: 2 St. Grammatik nach Heyse; Lesung und Erklärung ausgewählter Musterstücke; schriftliche Arbeiten und Uebungen im mündlichen Vortrage.

Im Winter: Hr. Oberlehrer Domine; im Sommer: Hr. Gymnasiall. Werner.

4. Französische Sprache: 2 St. Sprachgesetze; Formen - und Gebrauchslehre der Artikel, der Haupt-, Eigenschaft- und Zahlwörter; regelmässige Zeitwörter; Uebersetzungen und Leseübungen nach Hirzel's Grammatik.

Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

5. Religionlehre: *a*) kath. Conf. 2 St. Die Glaubenslehre, nach dem Religionhandbuche von Siemers. Hr. Religionlehrer Reinkens.

b) evang. Conf. (mit Quarta combinirt) 2 St. Das Leben Jesu und seine Lehre, auf Grundlage des Marcusevangeliums, mit Vergleichung der übrigen Evangelien; ausgewählte Stücke der Apostelgeschichte; Aufsätze, bezüglich auf Erklärung der genannten Lehrstücke. Hr. Licentiat Kinkel.

6. Mathematik: 3 St. Gleichungen von dem ersten Grade mit einer und mehren unbekannten Grössen; die Lehre von dem Kreise und die Aehnlichkeit der Figuren; daneben entsprechende Aufgaben zur Uebung. Hr. Oberlehrer Zirkel.

7. Geschichte und Geographie: 3 St. Allgemeine Geschichte der mittlern und neuern Zeit, nach dem zweiten und dritten Bande des Lehrbuchs von Pütz.

Im Winter: Hr. Oberlehrer Domine; nach Ostern Hr. Dr. Humpert.

8. Naturbeschreibung: 2 St. Im Winter: Wiederholung der Zoologie; im Sommer: Botanik. In allen Klassen diente Burmeister als Handbuch.

Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

QUARTA.

Ordinarius: Hr. Gymnasiallehrer Kanne.

1. Lateinische Sprache: 10 St. Etymologie und Syntax nebst der Lehre von der Quantität, nach Siberti's Schulgrammatik; Lesung und Erklärung des II Cursus von Jacobs und Döring's lat. Elementarbuche, dann ausgewählter Feldherrn des Cornel. Nepos, verbunden mit Auswendiglernen passender Stellen; mündliche und schriftliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen, nach Dronke's Musterbuche, mehr aber nach Dictaten; Extemporalien. Hr. Gymnasiallehrer Kanne.

2. Griechische Sprache: 6 St. Die Formenlehre, nach Quossek's praktischer Anleitung, bis zu den Verben in $\mu\iota$; mündliche und schriftliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen zur Einübung der einfachsten Regeln der Satzbildung.
Derselbe.

3. Deutsche Sprache: 2 St. Sprachgesetze; Satzverkürzung; Wortfolge; schriftliche Aufsätze und Uebungen im mündlichen Vortrage.
Im Winter: Hr. Oberl. Domine; nach Ostern: Hr. Gymnasiall. Kneisel.

4. Religionlehre: *a*) kathol. Confession: 2 St. Die h. Schrift, die Tradition und das unfehlbare Lehramt in der Kirche, nach Dictaten; Glaubenslehre, nach Ontrup; Fortsetzung der biblischen Geschichte, nach Schumacher.
Hr. Religionlehrer Reinkens.

b) evang. Conf. (Siehe Tertia).

5. Mathematik: 3 St. Buchstabenrechnung; Congruenz der Dreiecke und Gleichheit des Flächenraums geradliniger Figuren; arithmetische und leichte geometrische Uebungaufgaben. Hr. Oberlehrer Zirkel.

6. Geschichte und Geographie: 2 St. Allgemeine Uebersicht der alten Geschichte, nach dem I Theile des Handbuches von Pütz; Entstehung und Theilung des fränkischen Reiches.
Im Winter: Hr. Oberl. Domine; im Sommer: Hr. Gymnasiall. Kneisel.

7. Naturbeschreibung: 2 St. Im Winter: Propädeutik zur Oryktognosie; im Sommer: Botanik. Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

8. Zeichnen: Zeichnen nach krummlinigen Körpern; Anweisung zum Aufnehmen landschaftlicher Ansichten; Zeichnen von Blumen, Gebäuden und Theilen des menschlichen Körpers, besonders des Kopfes. Hr. Dr. Humpert.

QUINTA.

Ordinarius: Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

1. Lateinische Sprache: 10 St. Ergänzung der Formenlehre; die fasslichsten Regeln der Syntax nach Siberti's Schulgrammatik; mündliche und schriftliche Uebersetzungen; Auswendiglernen von Vocabeln, vorzüglich von unregelmässigen Zeitwörtern, von kürzern und längern Sätzen und ganzen Stücken. Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

2. Deutsche Sprache: 4 St. Fortsetzung und Beendung der Lehre von den Redetheilen, angeknüpft an die Lehre von dem Satze; Orthographie, Interpunktionlehre, Wortbildung nach Heyse's Schulgrammatik; schriftliche Uebungen in Beschreibungen, Erzählungen und Briefen nebst Uebungen im mündlichen Vortrage. Hr. Gymnasiallehrer Werner.

3. Religionlehre: *a*) kath. Conf. 2 St. Fortsetzung der bibl. Geschichte nach Schumacher; Lehre von der Erlösung und Heiligung; von der Kirche, von den Sacramenten, nach Ontrup. Hr. Religionlehrer Reinkens.

b) evang. Conf. (mit Sexta combinirt): 2 St. Geschichte des alten Testaments nach der luther. Bibelübersetzung, von dem Anfange des hebräischen Königthums bis zu der Zeit Christi, mit besonderer Hervorhebung des sittlichen Gehaltes dieser Periode und eingelegter Geographie von Palästina; Aufsätze, meist geschichtlichen Inhaltes. Hr. Licentiat Kinkel.

4. Rechnen: 4 St. Die Decimalrechnung; Regel de Tri und Kettenregel. Hr. Oberlehrer Zirkel.

5. Geschichte und Geographie: 3 St. Gedrängte Uebersicht der Erde; Europa, besonders Deutschland und Preussen, nach Cannabich's kleinem Handbuche; Biographieen berühmter Männer. Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

6. Naturbeschreibung: 2 St. Im Winter: Beschreibung der Rückgratthiere; im Sommer: Anfangsgründe der Botanik. Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

7. Zeichnen: 2 St. Zeichnen nach geradlinigen und krummlinigen Körpern; fortgesetzte Uebung im Schattiren. Hr. Dr. Humpert.

8. Kalligraphie: 2 St. Derselbe.

SEXTA.

Ordinarius: Hr. Dr. Humpert.

1. Lateinische Sprache: 10 St. Die Formenlehre nach Siberti's und Meiring's Schulgrammatik; Auswendiglernen von Vocabeln und kleinen Sätzen; mündliche und schriftliche Uebungen; Extemporalien. Hr. Dr. Humpert.

2. Deutsche Sprache: 4 St. Kenntniss der Redetheile und deren Abbiegung; allgemeine Grundsätze der Satzlehre, nach Heyse's kleinerer Grammatik; schriftliche Uebungstücke und Anleitung zum mündlichen Vortrage, nach Hülstett's Handbuche für Sexta. Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

3. Religionlehre: *a)* kathol. Conf. 2 St. Bibl. Geschichte, nach Schumacher; ausgewählte Glaubens- und Sittenlehren, insbesondere Lehre von den Eigenschaften Gottes und Erklärung der zehn Gebote; Einführung in den Empfang des h. Busssacramentes. Hr. Religionlehrer Reinkens.

b) evang. Conf. (Siehe Quinta).

4. Rechnen: 4 St. Die arithmetischen Grundoperationen in ganzen und gebrochenen Zahlen. Hr. Dr. Humpert.

5. Geschichte und Geographie: 3 St. Einleitung; gedrängte Uebersicht der Erde; Europa; besonders Deutschland, nach Cannabich's kleinem Handbuche; Biographieen berühmter Männer. Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.

6. Naturbeschreibung: 2 St. Das Nöthigste und Fasslichste aus der Zoologie; Beschreibung der Säugethiere und der Vögel. Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

7. Zeichnen: 2 St. Zeichnen gerader Linien nach geradlinigen Körpern, ohne und mit Angebung des Schattens. Hr. Dr. Humpert.

8. Kalligraphie: 2 St. Derselbe.

Gesangunterricht.

Von Herrn Gymnasiallehrer Werner wurde die untere Abtheilung (nach Nägeli's Tabellenwerke) von den Elementen bis zum harmonisch-mehrstimmigen Gesange geführt; die obere Abtheilung bildete einen gemischten Chor, welcher in Messen und andern grössern Werken und im Sologesange geübt wurde. Nach Ostern wurden in einer wöchentlichen Stunde Männergesänge eingeübt.

Anmerkungen.

1. Zur Unterstützung und Erleichterung des naturhistorischen Unterrichts hat Herr Garteninspektor Sinning der Schule mit aller Bereitwilligkeit frisch grünende und blühende Pflanzen zugesendet und sie fühlt sich dafür zum innigsten Danke verpflichtet.

2. Zur Förderung des sittlich-religiösen Lebens der Schüler wurden diese dreimal in der Woche zum Gottesdienste in die Kirche geführt und an den Sonn- und Feiertagen wurde mit demselben eine religiöse Anrede verbunden. Je um die sechste Woche war Beicht- und Communiontag angeordnet und die Schule muss hier dankbar die Bereitwilligkeit rühmen, mit welcher die Herrn Priester in unserer Stadt ihr dabei ihre Dienste boten

II. Verordnungen.

der vorgeordneten Behörden.

Unter den im Verlaufe des Schuljahres von den obern Behörden erlassenen, auf Disciplin, Lehrmethode, Lehrgegenstände u. s. w. sich beziehenden Verordnungen finden sich keine, welche für das *Publicum* von besonderem Interesse sind.

III. Chronik des Gymnasiums.

1. Das Schuljahr ist am 3. Oct. v. J. eröffnet worden und endet am 2. Sept. d. J.

2. Durch einen Erlass vom 23. August v. J. war der provisorische katholische Religionlehrer, Herr Wilhelm Reinkens, definitiv als solcher ernannt worden.

3. Im Verlaufe des Schuljahres leistete der Schulamtskandidat, Hr. Wilhelm Moehring aus Magdeburg, an dem hiesigen Gymnasium sein Probejahr und zu diesem Zwecke waren ihm neben den Rechnenstunden in Quinta zwei lateinische Stunden in derselben Klasse und zwei griechische in Tertia zugetheilt worden. Eben so waren dem Schulamts-Candidaten, Herrn Dr. Hilgers, auf sein Ansuchen zwei griechische Stunden in der Quarta zu seiner weitern practischen Fortbildung überwiesen.

4. Am 15. Oct. feierte die Schule mit ihren Zöglingen durch einen kirchlichen

Gottesdienst, verbunden mit gewählten Gesängen und einer angemessenen Anrede das hohe Geburtfest Sr. Majestät, unseres allverehrten Landesherrn.

5. Mittels Erlasses der vorgeordneten Behörde vom 13. Dec. v. J. wurde dem Berichterstatter die Bestallungurkunde des seitherigen Gymnasiallehrers, Herrn Zirkel, zugesendet, nach welcher derselbe an die Stelle des hingeschiedenen Prof. Dr. Liessem zum Oberlehrer, resp. zum ersten Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften war ernannt worden. Dem zufolge wurden ihm sämmtliche mathematischen Stunden in den vier obern Klassen und die naturwissenschaftlichen in Prima und Secunda angewiesen, dagegen seine bisherigen lateinischen und kalligraphischen Stunden dem Schulamts-Candidaten, Herrn Dr. Humpert, neben dem Zeichnen-Unterrichte zugetheilt.

6. Eine dankbare Erwähnung verdient die um Weihnachten v. J. erfolgte Gehaltserhöhung mehrer Collegen.

7. Die im Winter wiederholt eingetretene Kränklichkeit des Herrn Oberlehrers Domine und die immer mehr geschwundene Hoffnung der Wiedergenesung machte es zur Vermeidung öfterer Unterbrechungen des Unterrichts nothwendig, seine Lehrstunden unter die Herrn Collegen zu vertheilen. Daher übernahm der Berichterstatter den deutschen Unterricht in Prima, Hr. Oberlehrer Freudenberg den Virgilius in Secunda, Herr Gymnasiallehrer Werner den deutschen Unterricht und Hr. Dr. Humpert die Geschichte in Tertia, und Hr. Gymnasiallehrer Kneisel das Deutsche und die Geographie in Quarta.

8. Am 15. Juli d. J., des Abends gegen 9 Uhr, starb unser College Domine an der Brustwassersucht. Er war am 30. November 1783 zu Ammensleben im Hannöverischen geboren, trat, nachdem er seine Studien zu Berlin und Göttingen vollendet hatte, 1805 in das Lehramt, wurde 1810 zum Priester geweiht und gegen das Ende des Jahres 1816 als Oberlehrer an dem hiesigen Gymnasium angestellt. Seit dieser Zeit wirkte er an unserer Anstalt mit Pünktlichkeit, Treue und warmem Diensteifer, genoss die Achtung und das Zutrauen seiner Schüler und lebte bei seinem Geradsinne mit seinen Collegen in beständiger Eintracht. Ruhe und Frieden ihm!

9. In Folge eines höhern Erlasses wurde von der Schule am 6. August die tausendjährige Feier des am 11. August 843 von Ludwig dem Deutschen und seinen beiden Brüdern zu Verdun abgeschlossenen Vertrags, durch welchen Deutschland zuerst als eignes, von Frankreich gesondertes Reich auftrat, mit einem kirchlichen Gottesdienste, einer auf den Gegenstand hinweisenden Anrede und mit ausgewählten Gesängen gefeiert.

IV. Statistische Uebersicht.

1. Mit dem Anfange des Schuljahres kehrten in die verschiedenen Klassen 169 Schüler zurück, 58 wurden neu aufgenommen und so bildete sich die Gesammtzahl von 227 Schülern.

2. Von diesen traten, theils durch die Wahl eines andern Berufs, theils durch die Veränderung des Wohnorts der Aeltern veranlasst, 19 aus der Anstalt.

3. Mit dem Schlusse des Schuljahres werden neun Primaner zu der Universität übertreten, und so wird denn der Schule noch die Anzahl von 199 Schülern bleiben. Die Abiturienten sind folgende:

a) Carl Bernd aus Bonn, 19 J. alt, evang. Conf. und 8 J. Schüler der Gymnasien zu Bonn und Schulpforta.

b) Dietrich Brandis aus Bonn, 19 J. alt, evang. Conf. und 7¼ J. Schüler des Gymnasiums.

c) Alfred Hasse aus Bonn, 20¾ J. alt, evang. Conf. und 6 J. Schüler der Gymnasien zu Schulpforta und Bonn.

d) Peter Krupp aus Bonn, 20 J. alt, kath. Conf. und 8 J. Schüler des Gymnasiums.

e) Julius Mayer aus Bonn, 19 J. alt, kath. Conf. und 10 J. Schüler des Gymnasiums.

f) Georg Melchior aus Bielefeld, 18 J. alt, kath. Conf. und 8 J. Schüler der Gymnasien zu Köln und Bonn.

g) Heinrich Simrock aus Bonn, 18 J. alt, kath. Conf. und 8½ J. Schüler des Gymnasiums.

h) Friedrich Strahl aus Bonn, 19 J. alt, kath. Conf. und 9 J. Schüler des Gymnasiums.

i) Carl Vogel aus Bonn, 17¼ J. alt, evang. Conf. und 5 J. Schüler des Gymnasiums.

Dreien von diesen, Brandis, Krupp und Mayer, wurde in Folge der Verordnung vom 16. Dec. 1842, in Rücksicht auf ihren bewiesenen Fleiss, ihre ehrenwerthen Censuren und das günstige Resultat ihrer schriftlichen Prüfungarbeiten, die mündliche Prüfung ganz erlassen, die Prüfung der 6 übrigen Abiturienten wurde nach Massgabe ihrer Leistungen, mit Rücksicht auf die gesetzlichen Bestimmungen, abgekürzt. Krupp wird Philologie, Mayer, Melchior und Simrock werden Rechtswissenschaft, Hasse und Strahl Arzneiwissenschaft und Bernd, Brandis und Vogel Naturwissenschaften studiren.

V. Lehrapparat.

Das für die Erweiterung des Lehrapparats bewilligte jährliche Ratum ist für die Anschaffung zweckdienlicher Lehrmittel auch in diesem Jahr verwendet worden. Dankbar muss hier die Anzahl von Mineralien erwähnt werden, welche von dem Herrn Kaufmann Delimon hierselbst der Schule zum Geschenke gemacht worden ist.

VI. Beneficien.

Das jährliche Ratum aus der Stiftung des Herrn Priesters Minola ist für das eben abgelaufene Schuljahr einem Ober-Secundaner zuerkannt worden. Ueber die Stiftung des Herrn Professors Dr. Breidenstein hierselbst und deren Verwendung hat der Berichterstatter sich bereits in dem Programme des vorigen Schuljahrs rühmend und dankend ausgesprochen. Ausser diesen beiden Quellen stehen der Schule keine weiteren zu Gebote, aus welchen sie wohlgesitteten, fleissigen und talentreichen Schülern eine aufmunternde Unterstützung und Erleichterung ihrer ökonomischen Lage könnte zufliessen lassen.

VII. Oeffentliche Prüfungen.

Freitag den 1. September, Vormittags um $8\frac{1}{2}$ Uhr,

Schulgottesdienst, dann Prüfung der beiden obern Klassen.

1. Latein in Prima. Hr. Prof. Dr. Schopen.
2. Griechisch in Secunda. Hr. Oberlehrer Freudenberg.
3. Mathematik in beiden Klassen. Hr. Oberlehrer Zirkel.

An demselben Tage, Nachmittags um 3 Uhr,

Prüfung der beiden mittlern Klassen.

1. Religionlehre in beiden Klassen. Hr. Religionlehrer Reinkens.
2. Latein in Tertia. Hr. Gymnasiallehrer Werner.
3. Griechisch in Quarta. Hr. Gymnasiallehrer Kanne.

Samstag den 2. September, Vormittags um 9 Uhr,

Prüfung der beiden untern Klassen.

1. Latein in Quinta. Hr. Gymnasiallehrer Mockel.

2. Geschichte und Geographie in beiden Klassen. Hr. Gymnasiallehrer Kneisel.
3. Latein in Sexta. Hr. Dr. Humpert.

An demselben Tage, Nachmittags um 3 Uhr,
feierlicher Schluss des Schuljahrs.

1. Gesang.
2. Declamationen. Vorgetragen wird:

a) von dem Sextaner Albert Noeggerath: Das Turnier der Vögel, von Lichtwer.
b) von dem Quintaner Adolph Harless: Der treue Gefährte, von Anast. Grün.
c) von dem Quartaner Georg Walter: Tell's Tod, von Uhland.
d) Von dem Tertianer Joseph König: Der blinde König, von Uhland.
e) von dem Ober-Secundaner Carl Wolter: Bruchstück aus Schiller's Jungfrau von Orleans (A. I. Sc. 10.)

3. Gesang.
4. Entlassung der Abiturienten.
5. Gesang.
6. Abschiedsreden in lateinischer und deutscher Sprache, von den Abiturienten Peter Krupp und Julius Mayer.
7. Gesang.

Der Anfang des Schuljahrs ist auf den 9. October festgesetzt und die Meldungen zur Aufnahme müssen, unter Vorlegung der Schulzeugnisse, 8 Tage vorher geschehen.