Von den Logarithmen.

Logarithmen sind gewisse durch mühsame Berechnung ausfindig gemachte, und in Tabellen gebrachte Zahlen, mittelst welcher die Multiplication der gewöhnlichen oder gemeinen Zahlen in eine bloße Addition, und die Division dieser gemeinen Zahlen in eine bloße Subtraction verwandelt wird.

Da nun die Addition und Subtraction weit leichter und das Gedächtniß weniger angreifende Rechnungsarten als die Multiplication und Division sind, so leisten also Logarithmen eben da die mehrsten Dienste, wo durch eine oftmalige und weitläuftige Multiplication und Division der Zahlen viele Vorfälle zu berechnen mühsam werden.

Diese Lehre hat in der Mathematik einen ausgebreiteten Nutzen, und in der Arithmetik ist sie auch deswegen nützlich, weil man dadurch im Stande gesetzt wird, bey einigen Rechnungsarten weit kürzer rechnen zu können.

Die Logarithmen selbst sind schon längst durch den Schottischen Baron Johann Nepper, erfunden, und nach ihm von dem Professor Brigge zu Oxfort für die gemeine Zahlen ausgerechnet und in Tafeln gebracht. — Die Natur der Logarithmen beruhet auf die Verbindung einer geometrischen und einer arithmetischen Progression.

Ist

Ist eine Zahl aus einer arithmetrischen Progression die sich von 0 anfängt und deren Glieder sich auf eine geometrische Progression beziehen, wovon das erste Glied 1 ist, z. B. Es sey

die geometrische 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
die arithmetische 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

so ist 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 2 der Logarithmus von 4 u. s. w.

Die Zahlen nun, welche anzeigen, wie oft der Exponent mit sich selbst multiplicirt werden muß, um dieses oder jenes Glied einer geometrischen Progression zu finden, nennt man Verhältniß-Zahlen oder mit einem fremden Namen Logarithmen.

Unsere jetzt gebräuchlichen Logarithmen sind nicht, wie bey obiger Progression, nach dem Verhältnisse von 1 : 2, sondern nach dem Verhältnisse nach dem Briggischen oder gemeinen System von 1 : 10 wofür eine geometrische Progression, die sich von 1 anfängt, und deren Exponent 10 ist, berechnet worden, als:

geometisch 1, 10, 100, 1000, 10000 ꝛc.
arithmetisch 0, 1, 2, 3, 4.

Hier ist der Logarithmus von 10 gleich 1, von 100, 2 u. s. w. Für Zahlen, die zwischen 10 und 100 oder 100 und 1000 fallen, sind die zugehörigen Logarithmen ganze Zahlen, mit einem daranhängenden Decimalbruch. Die ganze Zahl, welche bey der Logarithmen vor dem Punkte stehet, heißt die Charakteristik oder Kennziffer des Logarithmus. Z. B. Bey den Logarithmus 2.9898946 ist 2 die Charakteristik, und 9898946 der Decimalbruch. Die Absolutzahl eines Logarithmus ist diejenige Zahl, fur die einem logarithmischen System ein gewisser Log. berechnet worden ist, zu welchem also diese Zahl gehört. So ist z. B. nach dem Briggischen System der Log. 2 Absolutzahl 100, der Log. 3 Absolutzahl 1000, des Log. 1,69897000 Absolutzahl 50 u. s. w.

Wie man durch Hülfe der Logarithmen multiplicirt.

Es werden die Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden, in den Tabellen unter den Absolutzahlen aufgesucht, und deren dabey stehenden Logarithmen zusammen addirt, so dann des herausgekommenen Log. Absolutzahl aufgesucht, welche das verlangte Product ist. Wollte man nun mittelst der Wolfischen Tabellen, z. B. die Zahl 35 mit 234 multipliciren, so sucht man die Zahlen in den Tafeln auf, und addirt die dazu gehörigen Logarithmen, nämlich:

N°.	35 =	Log.	1,5440680
=	234 =	=	2,3692159 +

Aus der erhaltenen Antwort 3,9132839

und besonders deren Kennziffer 3, läßt sich gleich ersehen, daß die dazu gehörigen gemeine Zahl, 4 Ziffern enthalten müssen, und also unter 1000fachen Zahlen zu suchen wäre, allwo man solche auch ganz genau, unter den nach ihrer zunehmenden Größe, geordneten Logarithmen, bey der Zahl 8190 findet, und diese Zahl ist folglich das Product der beyden Factoren 234 und 35.

Division durch die Hülfe der Logarithmen.

So wie nun hier die Multiplication der gemeinen Zahlen, mittelst solcher Tafeln, in eine bloße Addition

ver-

verwandelt wird, eben so wird durch dieselben Tafeln die Division in eine Subtraction vollbracht, und das Verfahren ist folgendes: zuerst suche man den Logarithmen zum Dividendus, und des Divisors: letztere ziehe man vom erstern ab, so gibt der Rest den Logarithmum, welcher den Quotienten anzeigt. Z. B. Es sey die Zahl 186 durch 6 zu dividiren, so stehet die Rechnung also:

Log. von 186 = 2,2695129
= = 6 = 0,7781512

Die logarithmische Antw. 1,4913617

weiset also, wie vorhin in den Tafeln, auf den Quotienten 31.

Den Logarithmus für eine Zahl, die größer ist, als eine in den Tabellen, zu finden.

Der Gebrauch der Logarithmen würde von allgemeinem Nutzen seyn, wenn die dazu gehörigen Tafeln für alle Fälle gleich brauchbar wären; weil aber die mehrsten Tafeln die gemeinen Zahlen mit ihren Logarithmen nicht über 10000, und den größern nur bis 100000 berechnet sind, gleichwohl öfters Zahlen zu multipliciren und zu dividiren vorkommen, welche an sich oder in Ansehung der dazu gehörigen Antwort über 10000 oder 100000 gehen, so muß man, um den Logarithmen solcher Zahlen, welche die Tafeln nicht enthalten, zu finden, folgendermaßen verfahren.

Soll der Logarithmus zu einer gegebenen ganzen Zahl, welche nicht mehr als 8 Ziffern hat, gesucht werden, so suche man:

a) Den Logarithmen der 4 ersten Ziffern, so von der bekannt gegebenen Zahl in der Tafel enthalten sind.

b) Man subtrahire diesen gefundenen Logarithmen von dem in der Tafel nächstfolgenden, und bemerke die Differenz.

c) Man multiplicirt diese Differenz mit denen noch übrigen in der Tafel nicht gefundenen Ziffern, und schneidet von dem Producte zur Rechten so viele Ziffern ab, als bey der gegebenen Zahl in der Tafel nicht gefunden worden.

d) Endlich addirt man den übrigen Theil des Productes zu den in der Tafel gefundenen Logarithmen, und erhebt dabey die Kennziffer zu derjenigen Stelle, dazu sie gehört, so ist die gefundene Summe der begehrte Logarithme. Z. B.

Was gehöret für ein Logarithme zu der Zahl 297869?

Von 297869, findet man zu den ersten 4 Ziffern 2978, in der Tafel der Log.	3,4739247
Diesen subtrahirt man von den nächstfolgenden, der Tafel zu 2979, oder Log.	3,4740705
Die Differenz also	1458
Diese Differenz 1458 multiplicirt mit der von der gegebenen Zahl 297869 nicht in der Tafel gefundenen Ziffern .	69 ×
gibt zum Product	100602

Und

Und von diesem Producte, zwey Ziffern als so viel in der Tafel nicht gefunden worden, allhier also die 02 rechter Hand abgeschnitten, bleibt . . . 1006

Die zu den erst gefundenen Log. 2978 addirt werden 3,4739247

3,4740253

Dabey wird die zu einer 100000 fachen Zahl gehörigen Kennziffer 5 statt 3 genommen, also noch 2 dazu . . 2

gibt zu 297869, den Log. . . . . . 5,4740253.

Wenn die gegebene Zahl aus 9 oder aus mehr Ziffern bestehet, so sucht man nach den vorigen Regeln zu den ersten 8 Ziffern oder gemeiniglich zu den ersten 7 gegebenen Ziffern den Logarithmus, und setzet demselben die gehörigen Kennziffer vor um den gesuchten Logarithmus zu erhalten. Z. B.

Log. 232894271359 = 11,3671588.

Den Logarithmus eines ächten Bruchs zu finden.

Man suche nach den gegebenen Regeln den Logarithmus vom Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, und subtrahire den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers, so zeigt die Differenz den Logarithmen des gegebenen Bruchs an, z. B. Es sey der $\frac{5}{7}$ gegeben, so ist $\frac{5}{7}$ = Log. 5 — Log. 7 = 0,6989700 — 0,8450980 = — 0,1461280.

Den Logarithmus eines Decimal-Bruchs zu finden.

Man addire die Anzahl der Decimalstellen, betrachte den Decimalbruch als eine ganze Zahl und suche davon den Logarithmus. Diesen subtrahire man von der Summe der Decimalstellen und nehme ihn negativ. Z. B. Der gegebene Decimalbruch sey 0,1387.

Anzahl der Decimalstellen = 4
Logarithmus von 1387 . = 3,1420765

der gesuchte Log. . . . = 0,8579235

Auch kann man den gegebenen gemeinen Bruch in einem Decimalbruch verwandeln, so hat man nur einen Logarithmen in der Tafel zu suchen nöthig.

Den Logarithmen einer ganzen Zahl mit einem Bruch zu finden.

Man verwandelt diese Zahl in einen unächten Bruch, sucht den Logarithmus des Zählers und Nenners desselben, und subtrahirt den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers, so gibt die Differenz den Logarithmus des unächten Bruchs. Z. B. Die Zahl sey $125\frac{3}{4}$ ist $\frac{503}{4}$.

Der Logarithmus von 503 ist = 2,7015680
" " " 4 " = 0,6020600

der Log. von $125\frac{3}{4}$ = 2,0995080

Die zu jedem Logarithmen, der nicht in den Tafeln genau anzutreffen ist, seine gehörige Zahl zu finden.

Ist die Mantisse (die Reihe Decimalbrüche, welche hinter die Kennziffer des Logarithmen gehört) eines gegebenen

gebenen Logarithmen völlig genau in den Tafeln enthalten; so nehme man die daneben befindliche Zahl; entspricht solche auch der Kennziffer des gegebenen Logarithmen, so ist sie völlig die gesuchte Zahl. Ist letzteres nicht der Fall, so hänge man an die gefundene Zahl so viele Nullen, daß die Zahl so viele Ziffern bekömmt, als die Kennziffer verlangt. — Es sey der Logarithme 3,8786367 gegeben; man findet neben dieser Mantisse die Ziffern 7562, und dies ist die gesuchte Zahl. Wäre der gegebene Logarithme = 5,8786367 gewesen; so wäre die ihm entsprechende Zahl = 756200; denn 5,8786367 = 2 + 3,8786367 = Log. 100 + Log. 7562 = Log. (100 + 7562). Ist aber ein Logarithme gegeben, dessen Mantisse nicht genau in den Tafeln zu finden ist, so muß solche zwischen ein Paar zunächst folgenden folgen. Es sey der Logarithme 6,7543861 gegeben; seine Mantisse fällt zwischen 7543483 und 7544248, deren die Ziffern 5680 und 5681 zukommen. Also würde der gegebene Logarithme unter der Kennziffer 3 auch zwischen diese beyden Zahlen fallen, und folglich unter der Kennziffer 6 zwischen 5680000 und 5681000. Da sich nun der Unterschied der Zahlen, beynahe wie die Differenzen ihrer Logarithmen verhalten; so ist

$$6{,}7544248 - 6{,}7543483 :$$
$$6{,}7543861 - 6{,}7543483 = 1000 : x$$
$$\text{das ist } 765 : 378 = 1000 : x;$$

gibt $x = 494$ und daher $6{,}7543861 = \text{Log. } 5680494$.

In den meisten Tafeln hat man die Kennziffer des Logarithmen weggelassen, weil es leicht ist, sie zu ernennen, und nur seine Mantisse angegeben, daher man beym Gebrauche nicht vergessen muß, zu dem aus den Tafeln genommenen Logarithmen die Kennziffer hinzufügen. Wenn man daher zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl aus den Tafeln sucht, so ist nur nöthig, seine Mantisse zu nehmen, die dazu gehörige Zahl zu suchen, und ihren Werth der Kennziffer gemäß beyzufügen, und eben so, wenn man den Logarithmen einer gegebenen Zahl sucht, hat man nur seine Mantisse nöthig, und kann die Kennziffer nach dem bekannten Gesetze hinzufügen.

Vom Ausziehen der Quadrat- und Cubik-Wurzel durch die Logarithmen.

Weil eine Quadratzahl nichts anders ist, als ein Product, das aus zwey gleichen Factoren bestehet, so muß der Logarithmus einer Quadratzahl noch einmal so groß seyn, als der Logarithmus der Wurzel, und der Logarithmus der Wurzel halb so groß, als der Logarithmus der Quadratzahl. Und da eine Cubikzahl entstehet, wenn man eine Quadratzahl in die Wurzel multiplicirt, so muß der Logarithmus einer Cubikzahl dreymal so groß als der Logarithmus der Cubikwurzel, und der Logarithmus einer Cubikwurzel der dritte Theil von dem Logarithmo der Cubikzahl seyn.

Soll daher die Zahl 16 zur Quadratzahl erhoben werden, so suche man den Logarithmus von dieser Zahl, welcher nach dem Briggischen System 1,2041200 ist. Das Zweyfache davon, nämlich 2,4082400 als den Logarithmus des Quadrats, suche man unter den Logarithmen, so muß die dazu gehörige Zahl, nämlich 256, die verlangte Quadratzahl seyn. Verlangt man aber

die

die Quadratwurzel aus 16, so halbiere man den Logarithmnm 1,2041200, und suche den halben Logarithmum 0,6020600 in der Tabelle, so wird die Zahl 4, wovon 0,6020600 der Logarithmus ist, die Quadratwurzel von 16 seyen, welches aus so vorgestellt werden kann:

$$\text{l. } \sqrt[2]{16} = \frac{\text{log. } 16}{2}. \quad \text{Nun ist}$$

$$\text{l. von } 16 = 1{,}2041200$$

$$2)\overline{\qquad\qquad}$$

$$0{,}6020600 \text{ Quotient.}$$

Soll aber z. B. aus 27 die Cubikwurzel gesucht werden, so nehme man den dritten Theil von dem Logarithmo dieser Zahl, d. i. 1,4313638 und suche dieses Drittel, d. i. 0,4771213 unter den Logarithmen, so muß die dazu gehörige Zahl 3 die Cubikwurzel von 27 seyn.

Oder Log. $\sqrt[3]{27} = \frac{1}{3}$ Log. 27, das ist man suchet den Log. von 27 und dividirt ihn durch 3.

$$\text{Log. von } 27 = 1{,}4313638$$

$$3)\overline{\qquad\qquad}$$

$$0{,}4771213 \text{ Quotient.}$$

Umgewendet würde man die Zahl 3 zur Cubikzahl erheben, wenn man den Logarithmum 0,4771213 dreymal nähme, und diese dreyfache Zahl d. i. 1,4313638 unter den Logarithmen aufsuche.

Von dem Gebrauch der Logarithmen in der Arithmetik.

Die Logarithmen sind anwendbar:

a) Bey der Multiplication und Division mit ganzen Zahlen wie auch mit Brüchen.

b) Bey der Regel de Tri,

c) Bey einer jeden Rechnungsart, welcher durch die Ketten-Rechnung aufgelöset werden kann.

α.

Man soll die Zahl 319 mit 76 multipliciren, so ist:
von 319 der Log. = 2,5037907
= 76 = = = 1,8808136

Log. 4,3846043

welche in den Tafeln auf die gemeine Zahl 24244, als das Product von 76 mal 319 anzeigt.

Man soll 76 in 24244 dividiren, so ist:
von 24244 der Log. = 4,3846043
= 76 = = = 1,8808136

Log. 2,5037907

welche in den Tafeln auf die gemeine Zahl 319, als der Quotient von 76 in 24244 weiset.

$\frac{3}{4}$ soll mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden

$\frac{3}{4}$ = negativ. Log. 12194
$\frac{2}{3}$ = = = 17609 +

Negativ. Log. 30103 = $\frac{1}{2}$.

16 × $\frac{5}{6}$ 16 = Log. 1,20412
$\frac{5}{6}$ = = 7918 negativ.

Log. 1,22494 = $13\frac{1}{3}$.

19 × $14\frac{1}{4}$ 19 = Log. 1,27875
$14\frac{1}{4}$ = = 1,15381

Log. 2,43256 = $270\frac{3}{4}$.

$25\frac{2}{3}$

$25\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$ $\quad 25\frac{2}{3}$ = Log. 1,40937
$\frac{5}{8}$ = " 20412 negativ.
Log. 1,20525 = $16\frac{1}{24}$.

$15\frac{1}{2} \times 9\frac{2}{3}$ $\quad 15\frac{1}{2}$ = Log. 1,19033
$9\frac{2}{3}$ = " 98528
Log. 2,17561 = $149\frac{5}{6}$.

$\frac{4}{5}$ in $\frac{3}{4}$ $\quad \frac{3}{4}$ = Log. 12494
$\frac{4}{5}$ = " 9691
Log. 2803 = $\frac{15}{16}$.

$\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{8}$ $\quad \frac{3}{4}$ = Log. 12494
$\frac{7}{8}$ = " 5799
Log. 6695 = $1\frac{1}{6}$.

$\frac{15}{16}$ in 10 $\quad$ 10 = Log. 100000
$\frac{15}{16}$ = " 2803
Log. 1,02803 = $10\frac{2}{3}$.

10 in $\frac{15}{16}$ $\quad$ 10 = Log. 100000
$\frac{15}{16}$ = " 2803
Log. 102803 negativ = $\frac{3}{32}$.

6 in $29\frac{3}{8}$ $\quad 29\frac{3}{8}$ = Log. 1,46798
6 = " 77815
Log. 68983 = $4\frac{43}{48}$.

$7\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$ $\quad 7\frac{1}{2}$ = Log. 87506
$\frac{3}{4}$ = " 12494
Log. 100000 = $\frac{1}{10}$.

$1\frac{1}{4}$ in $1\frac{1}{8}$ $1\frac{1}{4}$ = Log. 9691
$1\frac{1}{8}$ = = 5115

Log. 4576 = $\frac{9}{10}$.

Anmerkung. Bey diesem angeführten Beyspiele sind die letzten Ziffern der Logarithmen weggeblieben, weil sie doch zum Ganzen nicht beytragen, und die Größe der Zahl dadurch nicht geringer wird.

b.

Vom Gebrauch der Logarithmen bey der Regel de Tri.

Bey der Regel de Tri wird bloß erfordert, die gesuchten Logarithmen der Zahlen des mittlern und hintern Satzes zu addiren, und von ihrem Product (Summe) aber den Logarithmen der Zahl des vordern Satzes zu subtrahiren; der Rest gibt alsdann eine logarithmische Antwort der gemeinen Zahl, welche in den Tafeln wieder gesucht werden muß, und die verlangte Antwort angibt. Enthält einer der dreyen Sätze mehrere Gattungs-Namen, so müssen solche, wie bey der Ketten-Rechnung in einen Bruch verwandelt werden. Z. B.

Für 4 ℔ Waare wird 14 Ggr. 8 Pf. bezahlt, was kommen 34 ℔ 4 Loth?

$14\frac{2}{3}$ Gr. = Log. 1,1663314

$34\frac{3}{4}$ ℔. = Log. 1,5409548 +

Log. 2,7072862.

4 ℔. = Log. 0,6020600 ÷

Log. 2,1052262 = $127\frac{5}{12}$ Gr. oder 5 Thl. $7\frac{5}{12}$ Gr.

Von dem Gebrauch der Logarithmen bey der Ketten-Rechnung.

In der kaufmännischen Rechenkunst ist es selten nothwendiges so scharf zu nehmen als bey andern mathematischen Rechnungen. Da man nun, wenn es auf Genauigkeit ankommt, beym Rechnen mit Logarithmen gewöhnlich nur bis 7 Decimalstellen annimmt, so kann man bey den kaufmännischen Rechnungen weniger Decimalstellen nehmen. Nach der Regel braucht man zu der Kennziffer nur 4 Decimalstellen zu nehmen, und in solchen Fällen, wo die Kennziffern der Logarithmen in der Divisions-Columne, den Kennziffern in der Multiplications-Columne sich gleich sind, kann man die Kennziffern weglassen.

Soll ein Kettensatz vermittelst der Logarithmen aufgelöset werden, so suche man zu den Zahlen, welche sich in beyden Columnen befinden, ihre gehörige Logarithmen. Ferner addire man die logarithmische Zahlen einer jeden Columne, und subtrahire die Summe der Columne zur Linken von der Summe der Columne zur Rechten ab, zum Rest suche man in den Tafeln die gemeine Zahl, welche die verlangte Antwort gibt. Z. B.

25 Louisd'or wie viel Neue $\frac{2}{3}$ f. v.; wenn der Ld'or 10 Mark $10\frac{3}{4}$ ß. Bco. gibt, und dieses Bco. 28 p. C. besser ist als N. $\frac{2}{3}$?

	?	—	25 Ld'or.
64	1	—	$10\frac{43}{64}$ Mk. Bco.
	100	—	128 Mk. in N. $\frac{2}{3}$.
	2	—	1 N. $\frac{2}{3}$ Stück.

Facit $170\frac{3}{4}$ N. $\frac{2}{3}$.

Mit

Mit Logarithmen.

64 = Log.	1,80618	25 = Log.	1,39794
100 = =	2	683 = =	2,83442
2 = =	0,30103	128 = =	2,10721
	4,10721		6,33957
			4,10721 ÷
		Antwort Log.	2,23236 = 170¾.