Von den Progressionen.

Was eine Progression sey.

Aus mehreren zusammen verbundenen ståten Proportionen erwächset eine Zahlenreihe, welche Progression genannt wird. Sie hat einen Anfang und Fortgang, aber kein nothwendiges Ende. Mehrere ståte arithmetische Proportionen geben eine arithmetische Progression, und mehrere geometrische eine geometrische Progression, sowohl steigende als fallende, nachdem man Stuffen in die Höhe und hinabgehet. Z. B. Es sey das erste Glied einer arithmetischen 2, die Differenz 2; das erste Glied einer geometeischen 3, der Exponent 2, so formirt man die steigende Progression also:

∴ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 u. s. w.
∷ 3 . 6 . 12 . 24 . 48 . 96 u. s. w.

Eine arithmetische Progression ist eine Zahlenreihe, wo die Zahlen durch das wiederholte Addiren oder Subtrahiren der Differenz immer größer oder kleiner wird, z. B. in der Progression 4, 8, 12, 16 werden die Zahlen durch die Addition der Differenz 4 immer größer, und in der Progression 36, 30, 24, 18, 12, 6, werden sie durch die Subtraction der Differenz 6 immer kleiner. Im ersten Falle heißt die Progression eine zunehmende, und im zweyten Falle eine abnehmende Progression.

Eine geometrische Progression ist, eine Zahlenreihe, wo die Zahlen durch Wiederholung der

Mul-

Multiplication, oder Division mit dem Exponenten immer größer oder kleiner werden, z. B. in der Progression 3, 9, 27, 81, werden die Zahlen durch die Multiplication mit dem Exponenten 3 immer größer; und in der Progression 81, 27, 9, 3, werden die Zahlen durch die Division mit dem Exponenten 3 immer kleiner.

Es läßt sich daher eine jede Reihe, so weit man will fortsetzen, so bald nur zwey Zahlen, das Verhältniß auf welches sie sich gründen sollen, angegeben sind. Dieses Verhältniß braucht nicht allemal in ganzen Zahlen gegeben zu werden, sondern ein jedes Verhältniß, dessen Exponent ein Bruch ist, kann den Grund zu einer solchen Reihe geben. Z. B.

Eine arithmetische Reihe.

$4 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\frac{1}{2}$ u. s. w.

Eine geometrische Reihe, (wo der Exponent $\frac{3}{4}$ ist).

$1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{81}{256} \cdot \frac{243}{1024} \cdot \frac{729}{4096}$ u. s. w.

In einer Progression werden die Zahlen oder Größen auch Glieder oder Sätze genannt, wovon die erste und letzte die äußersten, und alle übrige die Zwischensätze heißen. Ist die Anzahl der Sätze unpaar, so gibt es einen mittlern Satz oder Glied, ist aber die Anzahl paarig, so gibt es in der Progression zwey mittlere Sätze oder Glieder.

Weil eine Progression, wenn sie aus drey Glieder, nur zwey gleiche Verhältnisse; wenn sie aus 4 Glieder bestehet nur 3 enthält, so läßt sich allgemein schliessen, daß jede Progression aus so vielen gleichen Verhältnissen bestehe, als dieselbe Glieder hat, weniger Eins.

Bey der Progression-Rechnung kommen folgende Lehrsätze vor:

Bey einer arithmetischen Progression.

In einer arithmetischen Progression ist die Summe von dem letzten und ersten Glieder so groß, als die Summe zweyer Glieder, welche von den beyden äußersten gleich weit abstehen; wie auch, wenn die Anzahl der Glieder unpaar ist, dem mittelsten Glied doppelt genommen gleich. Z. B.

2, 5, 8, 11, 14, 17

das ist $\underline{2 + 17} = \underline{5 + 14}$

$19 = 19.$

Und bey einer unpaarigen Progression:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

das ist $2 + 20 = 2 \cdot 11$ jedes $= 22$.

Um die Summe der äußersten und die Summe jedes Paares von den äußersten gleich weit entfernten Gliedern zu finden, schreibe man die Progression auch rückwärts darunter, und addire Glied vor Glied, so sind die einzelnen Summen gleich.

1,	3,	5,	7,	9,	11,	13
13,	11,	9,	7,	5,	3,	1
14,	14,	14,	14,	14,	14,	14.

Man kann die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression finden, wenn man die Summe von dem ersten und letzten Gliede durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt. Z. B.

Das erste Glied sey = 2
Das letzte . . . 17

Summa = 19
Die halbe Anzahl der Glieder 3 ×

Summe aller Glieder = 57
Denn $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57$.

Es läßt sich die Summe des ersten und letzten Gliedes finden, wenn man die Summe aller Glieder, durch die halbe Anzahl aller Glieder dividirt. Z. B.

Die Summe aller Glieder = 57
Die halbe Anzahl aller Glieder = $3 : 57 = 19$ = die Summe des ersten und letzten Gliedes.

In jedem Gliede einer arithmetischen Progression ist die Differenz so viel mal zu dem ersten Gliede addirt, oder von dem ersten Glied subtrahirt, als die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger weniger Eins beträgt. Z. B.

Zeiger 1 2 3
Arithmetische Progressionen = $2,\ \underline{2 + 3},\ \underline{2 + 2 \cdot 3},$
4 5 6
$\underline{2 + 3 \cdot 3},\ \underline{2 + 4 \cdot 3},\ \underline{2 + 5 \cdot 3}.$

Hier ist das fünfte Glied 2 + 4 . 3, das erste Glied nur mit 4 multiplicirt, also um 1 weniger als der Zeiger.

Die Anzahl der Glieder wird hier ebenfalls durch Zahlzeichen angegeben, welche man Zeiger oder Anzeiger nennt, sie werden oberhalb eines jeden Gliedes gesetzt.

Anmerkung. Wenn man diese und dergleichen Sätze durch Buchstaben bezeichnen wollte, (welches ich absichtlich vermeide) so liessen sich hierüber allgemeine Formeln angeben, wornach jeder Satz dieser Art ausgearbeitet wird.

Man kann das letzte Glied einer arithmetischen Progression finden, in welcher das erste Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekannt ist, wenn man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger Eins multiplicirt, und zu dem Producte das erste Glied addirt. Z. B.

Das erste Glied sey = 2, die Differenz = 4, und die Anzahl der Glieder = 100, so setzt man

Die Differenz = 4
Anzahl der Glieder weniger eins = 99 ×

396
+ 2 das erste Glied.

So ist 398 das letzte Glied.

Anmerkung. Um sich zu überzeugen, daß dieses Verfahren seine Richtigkeit habe, müßte man die Pro-

Progression bis 100 fortsetzen, so wird das letzte Glied 398 seyn, wenn das erste 2, und die Differenz 4 ist.

Wenn die Differenz, die Anzahl der Glieder und das letzte Glied bekannt ist, so findet man das erste Glied, wenn die Anzahl der Glieder weniger eins mit der Differenz multiplicirt, und dieses Product vom letzten Gliede subtrahirt wird. Z. B.

Die Differenz wäre = 4, die Anzahl der Glieder = 100, und das letzte Glied = 398, so ist 99 . 4 = 396 ab von 398 = 2 = das erste Glied.

Ist das erste, das letzte und die Anzahl der Glieder bekannt, so wird die Differenz gefunden, indem man das letzte Glied weniger als das erste Glied durch die Anzahl der Glieder weniger Eins dividirt. Z. B.

Das erste Glied sey = 3, das letzte 8, und die Anzahl aller Glieder = 11, so ist

$$\frac{8 - 3}{17 - 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ die Differenz.}$$

Beweis.

Das erste Glied ist = 3, und die gefundene Differenz = $\frac{1}{2}$ so entstehet folgende Progression.

$$3,\ 3\tfrac{1}{2},\ 4,\ 4\tfrac{1}{2},\ 5,\ 5\tfrac{1}{2},\ 6,\ 6\tfrac{1}{2},\ 7,\ 7\tfrac{1}{2},\ 8;$$

also das letzte und eilfte Glied ist 8.

Wenn endlich das erste und letzte Glied, und die Differenz gegeben sind, die Anzahl der Glieder zu finden. — Man dividire das letzte Glied weniger das erste Glied durch die Differenz, und zum Quotienten wird 1 addirt.

Das erste Glied sey = 3; das letzte = 8, und die Differenz = $\frac{1}{2}$, so ist.

$\frac{8 - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, und $10 + 1 = 11$ = die Anzahl aller Glieder.

Lehrsätze bey geometrischen Progressionen.

In einer geometrischen Progression ist das Product aus dem ersten Gliede in das letzte so groß, als das Product zweyer Glieder, welche von den äußersten gleich weit abstehen. Z. B.

Es sey die Progression 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729 . gegeben.

So gibt 3 mit 729 multiplicirt ein Product von 2187 } gleich.
und 9 mit 243 mult. . . . . 2187 }

Wenn die Zahl der Glieder unpaar ist; so ist das Product aus dem ersten Gliede in das letzte so groß, als das Quadrat des mittlern Gliedes. Und dieses gilt auch von allen andern Gliedern, die von dem mittlern gleich weit abstehen; Z. B.

Es sey die Progression:

$$3 \,.\, 9 \,.\, 27 \,.\, 81 \,.\, 243 \,.\, 729 \,.\, 2187$$

$$3 \times 2187 = 81 \times 81$$

$$\begin{array}{r} 2187 \\ \times\ 3 \\ \hline 6561 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561. \end{array}$$

Auch ist $9 \times 729 = 81 \times 81$.

Es mögen also die Verhältniße, aus welchen eine geometrische Progression formirt wird, steigende oder fallende seyn, so gelten die beyden vorhergehenden Lehrsätze. Denn setzt man die Glieder so untereinander, daß das letzte Glied unter dem ersten und so nach Verfolg zu stehen kommt, und multiplicirt die untereinanderstehenden Glieder mit einander, so werden die Producte unter sich alle gleich seyn, als:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 3 & . & 9 & . & 27 & . & 81 & . & 243 & . & 729 & . & 2187 \\ 2187, & & 729, & & 243, & & 81, & & 27, & & 9, & & 3 \\ \hline 6561 & = & 6561 & = & 6561 & = & 6561 & = & 6561 & = & 6561 & = & 6561 \end{array}$$

Das letzte Glied in einer wachsenden oder steigenden geometrischen Progression, ist ein Product aus dem ersten Gliede in dem Exponenten der Progression, welcher zu derjenigen Dignität erhoben, deren Exponent die Anzahl der Glieder weniger Eins ist.

Es sey das erste Glied = 2, der Exponent auch 2.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & . & \underline{2.2.} & & \underline{2.2^2.} & & \underline{2.2^3.} & & \underline{2.2^4.} & & \underline{2.2^5.} \\ 2 & . & 2.2. & & 2.2.2. & & 2.2.2.2. & & 2.2.2.2.2. & & 2.2.2.2.2.2. \\ 2 & . & 4 & . & 8 & . & 16 & . & 32 & : & 64. \end{array}$$

Z. B. $2 \, . \, 2^5$ ist das sechste Glied dieser wachsenden geometrischen Progression. Dieses ist ein Product aus 2 und 2^5. 2 ist ein Factor, nämlich das erste Glied, 2^5 der andre Factor, nämlich der Exponent der Progression 2, zur fünften Dignität erhoben (so viel als $2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2 \, . \, 2$) deren Exponent 5 ist. Diese 5 bedeutet die Anzahl der Glieder der Progression weniger 1. Wenn ich also 1 zu 5 addire, so bekomme ich 6, es hat also die Progression sechs Glieder.

Anmerkung. Der Exponent in einer geometrischen Progression, heißt die Zahl, durch welche das vorhergehende Glied entweder multiplicirt oder dividirt wird, um das nächstfolgende zu bekommen, und wodurch eine geometrische Progression immer größer oder kleiner wird, z. B. die Progression 2, 4, 8, 16 wird durch die Zahl des Exponenten 2 immer größer, und die Progression 81, 27, 9, 3, 1 wird durch die Zahl des Exponenten 3 immer kleiner.

Das letzte Glied in einer abnehmenden geometrischen Progression ist der Quotient, welcher entstehet, wenn man das erste Glied mit dem Exponenten der Dignität dividirt, nachdem dieser Exponent zu der zuvor bestimmten Dignität erhoben worden ist.

Z. B. Die absteigende Progression sey:

$$32 \; . \; 16 \; . \; 8 \; . \; 4 \; . \; 2$$

32 ist so viel als $2 \cdot 2^4$, und $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 : 32 =$ das letzte Glied der abnehmenden Progression.

In einer geometrischen Progression, verhalten sich die Summe aller Glieder weniger dem letzten, zu der Summe alle Glieder weniger dem ersten, wie das erste Glied zu dem andern. Z. B.

Die geometrische Progression sey. 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729.

Nun ist $3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 363$ (ohne das letzte Glied)

und $9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1089$ (ohne das erste Glied).

So verhält sich das erste Glied 3 zu dem zweyten Gliede 9, wie 363 : 1089 oder $3 : 9 = 363 : 1089$, beydemal die Zahl 3 als Quotient.

Der Exponent weniger eins, verhält sich zu dem letzten Gliede weniger dem ersten, wie eins zu der Summe aller Glieder weniger dem letzten. Z. B.

Die Progression sey: 5 . 25 . 125 . 625 . 3125 . 15625.

Folglich:

$$5 - 1 : 15625 - 5 = 1 : 5 + 25 + 125 + 625 + 3125.$$

Oder:

$$4 : 15620 = 1 : 3905.$$

Aus den bisher gegebenen Lehrsätzen lassen sich folgende Aufgaben auflösen.

Aufgabe. Aus dem ersten, andern und letzten Gliede einer geometrischen Progression die Summe aller Glieder zu finden.

Auflösung. Man multiplicire das letzte Glied in das andre. Von diesem Producte subtrahire man das Quadrat des ersten Gliedes. Die gefundene Differenz wird mit der Differenz des ersten und andern Gliedes dividirt. Der Quotient ist die verlangte Summe aller Glieder. Z. B.

Es sey folgende Progression gegeben:

$$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64$$

so ist $4 \times 64 = 256$

$- \; 4$ das Quadrat des ersten Gliedes

$2 : 252 = 126$ die Summe aller Glieder;

denn $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$.

Aufgabe. Aus dem ersten und letzten Gliede, wie auch aus dem Exponenten in einer geometrischen Progression die Summe aller Glieder zu finden.

Auflösung. Man dividire die Differenz des letzten und ersten Gliedes mit dem Exponenten der Progression weniger eins. Zu diesem Quotienten addire man das letzte Glied. Diese Summe gibt die verlangte Summe der gegebenen Progression. Z. B.

Die Progression sey: 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729

Es ist also das erste Glied 3
das letzte . 729
der Exponent . . 2
also 729 das letzte Glied
— 3 das erste . .

726 Differenz.

Der Exponent ist

3 — 1 = 2 : 726 gibt 363 als Quotient.
+ 729 das letzte Glied

1092 Summe aller Glieder.

Denn 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 723 = 1092.

Aufgabe. Aus dem letzten Gliede, dem Exponenten und die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression das erste Glied zu finden.

Auflösung. Man erhebe den Exponenten der Progression zu derjenigen Dignität, deren Exponent die Anzahl der Glieder weniger eins ist. Hiermit dividire man das letzte Glied. Der gefundene Quotient ist das erste Glied. Z. B.

Das letzte Glied sey, 3702, der Exponent 4, die Anzahl der Glieder 6. So ist 6 — 1 = 5 = Anzahl der Glieder weniger 1. Daher 4^5 das heißt, der Exponent zu der fünften Dignität erhoben = 4 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1024. Diese 1024 in dem letzten Gliede 3072 dividirt, gibt 3 zum Quotient. Also 3 das erste Glied.

Aufgaben über arithmetische Progressionen.

1) A verkauft an B ein Häuschen für 300 Thl. Da aber diesem die Summe zu viel dünkt, so wurden beyde eins, daß nur 15 Fensterscheiben im Hause bezahlt werden sollen, dergestalt, für die erste 4, die zweyte 8, die dritte 12 u. s. w. allemal jede Scheibe 4 Thlr. mehr gelten soll. Was muß B bezahlen?

Auflösung. Hier ist das erste 4, die Differenz 4, und die Anzahl der Glieder bekannt. Es muß also erst das letzte Glied gesucht werden. Daher sagt man nach den bekannten Lehrsätzen:

$4 \times 14 = 56 + 4 = 60$ das letzte Glied.

Weiter $4 + 60 = 64$

$\times\ 7\frac{1}{2}$ die halbe Anzahl der Glieder

448

32

480 Thl. muß B bezahlen.

Wenn man die 15 Glieder nacheinander folgen läßt, so kommt die nämliche Summe heraus. $4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 + 56 + 60 = 480$.

2) D kauft von M 42 Kälber mit dem Bedinge, daß er ihm für das erste 8 Ggr., für das zweyte 16, für das dritte 1 Thlr. und so für jedes 8 Ggr. mehr bezahlen wolle. Frage wie viel hat er bezahlen müssen?

Auflösung.

$42 - 1 = 41 \times 8 = 328 + 8 = 336$ das letzte Glied.

$336 + 8 = 344 \times 21 = 7224$ Ggr. oder 301 Thlr. Summe für alle Kälber.

3) A verkauft an B 108 Ohm Wein, mit dem Bedinge, daß er ihm für das erste Anker 1 Ggr., für das zweyte 3 Ggr., für das dritte 5 Ggr., und so weiter fort für jedes Anker 2 Ggr. mehr bezahlen soll. Frage, was hat B bezahlen müssen?

Auflösung.

Die 108 Ohm machen 432 Anker, als die Anzahl der Glieder.

Das erste Glied = 1

Die Differenz = 2, also

$432 - 1 = 431 \times 2 = 862$ das letzte Glied.

$862 + 1 = 863 \times 216 = 186408$ Ggr. = 7767 Thl. muß B bezahlen.

4) D hat ein schönes Haus, welches ihm G abkaufen will. D fordert aber für dasselbe 9000 Thl., welches G zu viel ist. Sie werden daher unter einander einig, daß sie ein gewisses Gefäß mit Weitzenkörnern anfüllen wollen, und dann soll G für jedes dieser Körner, fürs erste 1 Pf., fürs zweyte 2 Pf., fürs dritte 3 Pf., und so immer für jedes Korn 1 Pfenning mehr geben. Nachdem diese Körner gezählt worden sind, befindet sich, daß sich ihre Anzahl 2324 beträgt. Frage, wie viel hat G für das Haus bezahlen müssen?

Antwort. 9380 Thl. $17\frac{1}{2}$ Ggr., also 380 Thl. $17\frac{1}{2}$ Ggr. mehr, als D anfänglich dafür gefordert hat.

5) Es vermiethet sich ein Bedienter bey einem Herrn mit dem Bedinge, daß er ihm nach der Anzahl der Tage im Jahr den Lohn bezahlen solle, und zwar für den ersten Tag einen Deut, für den zweyten 2 Deute, für den dritten 3 Deute, und so für jeden Tag im Jahr ein Deut mehr, als für den vorhergehenden. Frage, wie viel wird derselbe nach Verlauf eines Jahrs an Lohn bekommen?

Auflösung.

$365 + 1 = 366 \times 182\frac{1}{2} = 66795$ Deute, zu Thl. reducirt kommen 139 Thl. 9 Stbr. 3 Deute.

Anmerkung. Wenn die Differenz 1 ist, und das letzte Glied nicht bekannt ist, so braucht man dasselbe nicht erst zu suchen, sondern man kann die Anzahl der Glieder für das letzte Glied annehmen.

Folgende Aufgabe soll zur Probe der vorgehenden dienen:

6) Ein Herr gibt seinem Bedienten jährlich 139 Thl. 9 Stbr. 3 Deute Lohn. Wenn er nun den letzten Tag 45 Stbr. 5 Deute erhält, und so täglich ein Deut weniger, so frage, wie viel er den ersten Tag an Lohn bekommen?

Auflösung.

Durch den letzten Tag des Jahrs ist die Zahl der Glieder bestimmt, nämlich: 365; folglich auch die halbe Anzahl derselben $= \frac{365}{2} = 182\frac{1}{2}$.

Die Summe, die der Herr dem Bedienten gibt, ist die Summe aller Glieder der Progression, welche in Deuten 66795 machen. Die Summe mit der halbne Anzahl der Glieder dividirt, $182\frac{1}{2}$; 66795 = 366 für den ersten und letzten Tag. Von diesen 366 das letzte Glied 365 abgezogen, bleibt 1, welches das erste Glied ist, oder die Summe für den ersten Tag.

7) Innerhalb zwölf Wochen soll eine gewisse Anzahl Bretter zu einem Bau geliefert werden, und zwar auf folgende Bedingung: Nach Verlauf der ersten Woche 20 Stück, nach der andern Woche 30 Stück, und so wöchentlich immer 10 Stück Bretter mehr. Frage, wie viel Bretter innerhalb dieser 12 Wochen geliefert werden müssen?

Auflösung.

Das erste Glied = 20
Die Differenz = 10
Die Anzahl der Glieder = 12.

Es muß also hier zuerst das letzte Glied gesucht werden, indem man sagt: $12 - 1 = 11 \times 10 = 110 + 20 = 130$ das letzte Glied.

Nun setze man weiter:

$20 + 130 = 150 \times 6 = 900$ die Summe aller Glieder oder die Anzahl der Bretter.

Aufgaben über geometrische Progressionen.

1) D verkauft an M ein Landgut mit dem Bedinge, daß M ihm das erste Jahr 3 Thl., das andre noch einmal so viel, im dritten noch einmal so viel, als im zweyten geben soll, und das 15 Jahre nach einander fortzusetzen. Frage, wie viel hat M im fünfzehnten Jahr bezahlen müs-

sen, und wie hoch kommt ihm überhaupt das Landgut zu stehen?

Auflösung.

Das erste Glied der Progression ist = 3

Der Exponent = 2

Die Anzahl der Glieder = 15.

Man suche daher zuerst das letzte Glied, welches nach der vorhergegebenen Regeln folgendermaßen geschieht:

Man erhebe den Exponenten 2 zur vierzehnten Dignität = 2^{14}, d. h. man multiplicire die Zahl 2 vierzehnmal in sich selbst, weil 15 — 1 = 14, d. i. die Zahl der Glieder weniger 1.

2	256
2	2
4	512
2	2
8	1024
2	2
16	2048
2	2
32	4096
2	2
64	8192
2	2
128	16384 = 2^{14}
2	$\times$ 3 = erstes Glied
256	49152 = letztes Glied.

So viel muß man D fürs fünfzehnte Jahr bezahlen.

Ferner dividire man die Differenz des letzten und ersten Gliedes mit dem Exponenten der Progression weniger eins. Zu diesem Quotienten wird das letzte Glied addirt. Diese Summe gibt die verlangte Hauptsumme an.

Also 49152 — 3 = 49149 + 49152 = 98301 = die Summe in allen 15 Jahren.

Anmerkung. Weil hier der Exponent weniger 1 nur 1 bleibt, so fällt hierbey die Division weg, weil alsdann der Quotient die nämliche Summe herausbringt.

2) Einer verkauft ein Pferd, nach den Hufnägeln, deren 32 sind, dergestalt, daß ihm der Käufer, für den ersten Nagel 1 Deut, für den zweyten 2, für den dritten 4, für den vierten 8, u. s. w. für jeden der 32 Nägel die Zahlung verdoppeln müsse. Frage, wie theuer dem Käufer das Pferd zu stehen kommt?

Auflösung.

Hier hat man zuerst die Anzahl der Deuten zu suchen, die der Käufer für den zwey und dreyßigsten Nagel bezahlen muß, oder was das nämliche ist, das letzte Glied = 2147483648 Deuten. Davon das erste abgezogen, bleibt 2147483647 + 2147483648 = 4294967295 = die Summe aller Glieder. Diese Summe macht in Thlr. = 8947848 Thlr. 31 Stbr. 7 Deut., welche der Käufer für das Pferd zu bezahlen hätte.

3) Man hat eine alte Erzählung von einem gewissen morgenländischen Könige, derselbe hat nicht schlafen und seine Aerzte ihm nicht helfen können.

nen. Da hohe Preise für denjenigen aufgestellet wurden, der den König zum Schlafen bringen könnte, so meldete sich ein Schäfer mit seinem Sohne, der ein Brett mit 64 Quadratfächern oder Feldern trug, wodurch er dem König zu helfen verspricht. So lächerlich die Sache schien, so ward man doch neugierig, ihn zu hören. Vater und Sohn fangen an zu spielen. Der König siehet zu, frägt nach den Regeln des Spiels, will selbst das Spiel lernen, strengt sein Nachdenken an und schläft dabey ein. Man wiederholt diese Cur so lange, bis der König selbst mitspielen und ruhig schlafen kann. Daher es hernach das Schach= oder Königsspiel genannt wurde; weil es nur für den König und seine Günstlinge seyn sollte. Nun soll der Schäfer eine Belohnung fordern. Er bittet sich Weitzenkörner aus, nach der Zahl der Quadratfächern des Brettes. Für das erste Feld 1, — für das zweyte 2, — für das dritte 4, — für das vierte 8, — und so für jedes folgende doppelt so viel Körner, als für das vorhergehende. Man lacht, und frägt: ob er nichts mehr verlange? Nichts mehr und nichts weniger, versetzte der Schäfer, man möge nur rechnen. Das gab neue Arzney für Schlaflose. — Da nun das Schachbrett 64 Felder hat, so entstehet die Frage, wie groß die Menge der Körner, die seine Belohnung ausmachen sollte?

Wenn diese Aufgabe nach den vorhergegebenen Regeln aufgelöset wird, so kommt die Zahl der Körner, welche der Schäfer verlangt = 18446744073709551615;

Dieses Resultat hat in Kochs Exempelbuch zu folgenden 12 Fragen Veranlassung gegeben, als:

a) Wie viel Pfund beträgt diese Kornmenge? Wenn angenommen wird, daß 7680 Körner ein Pfund wiegen. — b) Wie viel Scheffel? Wenn man 80 Pfund auf ein Berliner Scheffel rechnet. — c) Wie viel Winspel? — Wenn man ferner einen vierspännigen Wagen mit 2 Winspel beladet: wie viel d) Wagen, — und e) Pferde würden erforderlich seyn, diesen Kornhaufen zu transportiren? — f) Wie lange würde der Weg seyn, welche diese Wagenreihe einnehmen würde, da 500 vierspännige, dicht hintereinander fahrende Wagen, eine deutsche Meilen einnehmen? — g) Wie vielmals würde die Länge dieses Wagenzuges rund um die Erde reichen, da der Umkreis der der Erde 5400 Meilen beträgt. — h) Wie viel ist der Kornhaufen werth, wenn man den Winspel zu 50 Thlr. rechnet? — i) Wie viel Jahres Einkünfte der preuß. Monarchie, die man zu 30 Millionen Thaler rechnet, würde erforderlich seyn, um diesen Kornhaufen zu bezahlen? — k) Wie viel große Elbkähne könnten mit dieser Kornmenge beladen werden, da jeder mit 1400 Centner befrachtet wird? — l) Wie viel Jahr (zu 365 $\frac{1}{4}$ Tagen) würden erforderlich seyn, wenn diese Weitzenmenge abgeliefert werden sollte, und so viel als der jährliche Betrag einer guten Weitzenerndte im Herzogthum Magdeburg, welcher 43980 Winspel beträgt, täglich abgeliefert würde? — Wenn man endlich den Ertrag eines

Mor=

Morgens auf 6 Scheffel setzt, und annimmt, daß das ganze feste Land der Erde keine Wälder Sandwüsten, Wege, Seen, Flüsse rc. enthielte, sondern lauter gutes Weitzenland wäre: — m) Wie viel mal größer müßte die Erde seyn, wenn sie in einem Jahre so viel Körner hervorbringen sollte, als obige Menge ausmacht, da das feste Land der Erde 3059675 Quadrat-Meilen enthält, deren jede 21564 Morgen hat?

Resultate.

a) 240191980126426 4 $\frac{819}{1536}$ Pf.

b) 30023997515803 $\frac{3}{10}$ Scheffel.

c) 1250999896491 Winspel 19 Scheffel.

d) Wenigstens 625499948245 Wagen.

e) 2501999792980 Pferde.

f) Wenigstens 1250999896 Meilen.

g) Ueber 231666 mal.

h) 62549994824550 Thl.

i) Wenigstens 2084999 Jahres-Einkünfte.

k) 15596881826 $\frac{56498}{144375}$ Elbkähne.

l) 77877 $\frac{16922219781}{36143331375}$ Ernten.

m) Nahe am 76 mal oder 75 $\frac{3126780476281}{3711309283125}$.

Diese Resultate lassen sich leicht durch die aufsteigende Reduction mit ungleich benannten Zahlen finden.