Von den Zahlen-Verhältnissen und Proportionen.

Von den Verhältnissen.

Von der Größe einer Sache kann man einen Begriff bekommen, wenn man sie mit einer andern bekannten Größe von eben der Art vergleicht. Die Größe einer Sache, insofern sie durch Vergleichung mit der Größe einer andern erkannt werden kann, heißt das Verhältniß der ersten Größe, gegen die zweite; die Größen können übrigens Linien, Flächen, Körper, oder Maaße, Gewicht ꝛc. seyn. Da eine jede Größe durch Zahlzeichen ausgedrückt, folglich als eine Zahl betrachtet werden kann, so können auch die Größen der Zahlen von einerley Art durch Verhältnisse mit einander verglichen werden.

Ein Verhältniß ist also nichts anders, als eine Vergleichung zweyer Größen oder Dinge, und sie sind nicht allein dem Arithmetiker und Mathematiker zu wissen nöthig, sondern den Handwerkern, Künstlern und Malern sind sie eben so unentbehrlich. Denn wer nicht zwey Sachen mit einander zu vergleichen im Stande ist, der wird's gewiß nicht weit, so wenig in der Rechenkunst, als in andern Künsten und Wissenschaften bringen.

Es gibt zwey Arten von Verhältnissen, die man arithmetische und geometrische Verhältnisse nennt. Wird auf die Differenz (Unterschied) zweyer Zahlen oder Größen gesehen, so hat man ein arithmetisches Verhältniß. Z. B. Man nehme zwey Zahlen 7 und 21; und subtrahire die 7 von 21, so ist die Differenz, 14, welche den Namen des Verhältnisses anzeigt. Wird aber gefragt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fragt, wie oft eine Größe oder Zahl in der andern enthalsen sey; so ist es ein geometrisches Verhältniß. Z. B. 7 in 21 dividirt, so ist der Quotient als der Name eines Verhältnisses = 3, wobey man sich dieses Ausdrucks bedient: 7 verhält sich zu 21, wie 1 zu 3. Der Quotient eines geometrischen Verhältnisses wird auch der Exponent genannt.

Die beyden Zahlen, welche zu einem Verhältnisse erfordert werden, heißen die Glieder des Verhältnisses. Diejenige, die man zuerst im Verhältnisse setzt, nennt man das Vorderglied oder das Vorhergehende; die zweyte hingegen das Hinterglied oder das Nachfolgende. Diese Benennungen gelten sowohl bey den arithmetischen, als auch bey den geometrischen Verhältnissen. Fängt man das Verhältniß mit der kleinern Zahl an, und endigt mit der größern, so heißt es ein zunehmendes, im entgegengesetzten Falle aber, ein abnehmendes Verhältniß.

Man bezeichnet die Verhältisse auf folgende Art:

a) Arithmetische Verhältnisse,

1) zunehmende: 8 — 12; 11 — 16.
2) abnehmende: 12 — 8; 16 — 11.

Das ist im ersten Falle. 8 ist um 4 kleiner als 12, und 11 ist um 5 kleiner als 16, da denn 4 die Differenz des ersten, und 5 die Differenz des zweiten Verhältnisses ist.

Im zweiten Falle. 12 ist um 4 größer als 8, und 16 ist um 5 größer als 11. Die Differenzen sind wie im ersten Falle 4 und 5.

b) Geometrische Verhältnisse,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) zunehmende: 6 : 30; 7 : 49.
2) abnehmende: 30 : 6; 49 : 7.

Das ist im ersten Falle. 6 ist 5mal kleiner als 30, oder ist in 30, 5mal enthalten, so wie 7 in 49, 7mal.

Im zweyten Falle. 30 ist 5mal größer als 6, und 49 ist 7mal größer als 7.

Die Zahlen 5 und 7 sind hier in beyden Fällen die Exponenten der Verhältnisse.

Von den Proportionen.

Das Verhältniß von zwey paar Zahlen kann gleich oder ungleich seyn. Im ersten Falle stehen die vier Zahlen in Proportion, folglich heißt die Gleichheit zweyer Verhältnisse überhaupt, eine Proportion. Die Proportion ist eine arithmetische, wenn beyde Verhältnisse arithmetische; hingegen eine geometrische Proportion, wenn beyde Verhältnisse geometrische Verhältnisse sind.

Von den 4 Zahlen, die eine Proportion ausmachen, heissen die erste und vierte, die äussern, die zweite und dritte hingegen, die mittlern Glieder. Unter gleichnamigen Gliedern verstehet man entweder die vorhergehenden oder die nachfolgenden Glieder. Sind die Verhältnisse zunehmende, so heißt auch die Proportion eine zunehmende; sind hingegen die Verhältnisse abnehmende, so ist auch die Proportion eine abnehmende Proportion.

Die Proportionen werden auf folgende Art bezeichnet:

a) Arithmetische Proportionen,

1)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) zunehmende: 8 — 12 = 11 — 15.
2) abnehmende: 12 — 8 = 15 — 11.

Das ist im ersten Falle. Um so viel 8 kleiner ist als 12, um so viel ist auch 11 kleiner als 15, oder kürzer: wie sich 8 zu 12 verhält, so verhält sich 11 zu 15, und im zweiten Falle umgekehrt, wie 12 zu 8, so 15 zu 11.

b) Geometrische Proportionen,

1) zunehmende: 8 : 24 = 10 : 30.
2) abnehmende: 24 : 8 = 30 : 10.

Das ist im ersten Falle. So vielmal 8 in 24 enthalten ist, so vielmal ist auch 10 in 30 enthalten. Kürzer: wie sich 8 zu 24 verhält, so verhält sich 10 zu 30.

Im zweiten Falle: wie 24 zu 8, so 30 zu 10.

Oder allgemeiner: So vielmal das erste Glied im zweiten enthalten ist, so vielmal ist auch das dritte im vierten enthalten, und umgekehrt. Oder abgekürzt: wie das erste Glied zum zweiten, so das dritte zum vierten.

In Ansehung der Form werden die Proportionen noch auf folgende Art eingetheilt:

1) In unstäte Proportionen, wenn die mittlern Glieder von verschiedener Größe sind, als:

a) Unstäte arithmetische Proportion:
6 — 10 = 12 — 16.

b) Unstäte geometrische Proportion:
8 : 32 = 14 : 56.

2) In stäte Proportionen, wenn die mittlern Glieder einerley Größe haben, als:

a) Stäte arithmetische Proportion:

5 — 9 = 9 — 13.

b) Stäte geometrische Proportion:

5 : 20 = 20 : 80.

Anmerkung. Man bezeichnet die Proportionen auch wohl auf folgende Art:

1) Arithmetische: ÷ Ferner mit : oder ∵ Z. B. Anstatt 8 — 12 = 11 — 15, 8 — 12 ÷ 11 — 15, und anstatt 5 — 9 = 9 — 13, ÷ 5, 9, 13.

2) Geometrische: ∺ Anstatt 8 : 32 = 14 : 56, 8 : 32 ∺ 14 : 56, und anstatt 5 : 20 = 20 : 80, ∺ 5, 20, 80.

Man kann auch wohl den Strich zwischen den Punkten weglassen und nur so hinschreiben, nämlich bey einer arithmetischen ∵, und bey einer geometrischen Proportion ::

Daher kann man die stäten Proportionen durch 3 Zahlen angeben, und sie durch ein Komma unterscheiden, weil die mittlern Glieder allemal aus ein und eben derselben Zahl bestehen.

1) Arithmetische Proportion:

8, 14, 20, d. i. 8 — 14 = 14 — 20.

2) Geometrische Proportion:

7, 28, 112, d. i. 7 : 28 = 28 : 112.

Re-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Regeln welche bey den arithmetischen und geometrischen Verhältnisssen zu beobachten sind.

Bey einem arithmetischen Verhältniß kommen drey Sachen zu betrachten vor. 1tens die größere Zahl, 2tens die kleinere Zahl, und 3tens deren Unterschied. Z. B.

Es sey die größere Zahl = 15, die kleinere = 5; so wird der Unterschied gefunden, wenn die kleinere Zahl von der größern abgezogen wird, nämlich 5 von 15 oder 15 — 5, so ist die Differenz = 10.

Wenn aber die kleinere Zahl nebst dem Unterschied gegeben; so wird die größere gefunden, wenn man den Unterschied zu der kleinern Zahl addirt. Z. B. In dem vorigen Beyspiel ist 5 die kleinere Zahl und 10 der Unterschied, folglich 5 + 10 = 15 als die größere Zahl.

Ist aber die größere Zahl nebst dem Unterschied bekannt; so findet man die kleinere Zahl, wenn der Unterschied von der größeren Zahl abgezogen wird. Denn 15 — 10 = 5, also 5 die kleinere Zahl.

Zusatz. Wenn zu der größeren und kleineren Zahl, eine gleiche beliebige Zahl addirt, oder davon subtrahirt wird; so bleibt der Unterschied derselbe. Z. B.

Zu den zwey Zahlen die vorhin gegeben worden, 15 und 5, sollen 8 addirt werden

$$\begin{array}{rcr} 15 & - & 5 \\ +8 & & +8 \\ \hline 23 & - & 13 = 10 \end{array}$$

oder 4 subtrahirt:

$$\begin{array}{rcr} 15 & - & 5 \\ \div 4 & & \div 4 \\ \hline 11 & - & 1 = 10. \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn sich zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind; so entstehet eine arithmetische Proportion. Z. B.

$$18 - 4 = 14$$
und $$24 - 10 = 14$$

Hier ist der Unterschied zwischen 18 und 4 eben so groß als zwischen 24 und 10, denn beydemal ist die Differenz = 14, daher machen diese 4 gegebenen Größen eine arithmetische Proportion aus, und diese werden alsdann so vorgestellt:

$$18 - 4 = 24 - 10$$

Sind zwey gleiche geometrische Verhältnisse mit einander in Verbindung, so ist es eine geometrische Proportion. Z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} & 30 : 5 = 6 \\ \text{und} & 54 : 9 = 6 \end{array}\right\} \text{gleich.}$$

also $30 : 5 = 54 : 9$

Eine Proportion ist also nichts anders als zwey durch Zeichen der Gleichheit mit einander verbundene Verhältnisse.

Eine arithmetische Proportion bestehet demnach aus vier Gliedern, wovon das erste und vierte, die äussern, das zweite und dritte aber die mittlern Glieder genannt werden, welche die Eigenschaft besitzen, daß, wenn das 1te Glied vom 2ten und das 3te vom 4ten Glied abgezogen wird, die Reste einander gleich sind, wie schon gezeigt worden. Z. B.

	5 zu 9	wie	11 zu 15
	− 5		− 11
Differenz	4	=	4

2tens. Verhält sich das erste Glied zu dem dritten, wie das zweite zu dem vierten Gliede. Z. B.

$$\begin{array}{r} 5 \text{ zu } 9 \text{ wie } 11 \text{ zu } 15 \\ -5 - 9 \\ \hline 6 = 6 \end{array}$$

wo alsdann, wenn das erste Glied 5 von dem dritten Gliede 11 abgezogen wird, eben so viel übrig bleibt, als wenn das zweite Glied 9 vom vierten Glied 15 abgezogen wird, denn es bleiben jedesmal 6 übrig.

3tens. Ist die Summe der beyden äussern Glieder der Summe der beyden innern oder mittlern gleich. Z. B.

$$\begin{array}{ccc} 5 \text{ zu } 9 & \text{wie} & 11 \text{ zu } 15 \\ +11 & & +5 \\ \hline 20 & = & 20 \end{array}$$

Wenn also das 1te Glied 5 zum 4ten Glied 15, und und das 2te Glied 9 zum 3ten Glied 11 addirt wird, so kommen beydemale 20; folglich sind sie sich gleich.

Aus diesen vorhergehenden Regeln und deren Eigenschaften, können nun folgende Fragen leicht beantwortet werden.

Wenn drey Zahlen oder Glieder gegeben sind, das 4te Glied oder die 4te Proportional-Zahl zu finden:

a) Fehlet ein äusseres Glied, so werden die zwey mittlern Glieder addirt, und das bekannte äussere Glied von der Summe abgezogen; so zeigt der Rest, das unbekannte 4te Glied, welches auch die 4te Proportional-Zahl genannt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein Beyspiel wo das 4te Glied fehlt.

$$\begin{array}{r} 27 - 11 = 41 \\ +\ 11 \\ \hline 52 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} 27 - 11 & = & 41 - 25 \\ -\ 11 & & -\ 25 \\ \hline 16 & \ldots & 16 \text{ Differ.} \end{array}$$

Das gesuchte 4te Glied . 25

Wo das 1te Glied fehlt.

$$\begin{array}{r} 11 = 41 - 25 \\ +\ 11 \\ \hline 52 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array}$$

Das 1te Glied . 27

Der Beweis ist dem vorhergehenden gleich.

b) Ist eins der mittlern Glieder zu suchen; so werden die äussern Glieder addirt, und von der Summe das mittlere bekannte gegebene Glied abgezogen; der Rest zeigt alsdann das fehlende mittlere Glied an. Z. B.

$$\begin{array}{r} 13 - \text{,} = 20 - 9 \\ +9 \\ \hline 22 \\ -\ 20 \\ \hline \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} 13 - 2 & = & 20 - 9 \\ -\ 2 & & -\ 9 \\ \hline 11 & \ldots & 11 \text{ Differ.} \end{array}$$

also 2 das gesuchte 2te Glied.

Es können viele solche ähnliche Verhältnisse gedacht werden, welche unter einander die nämliche Differenz haben. Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} 7 - 4 = 16 - 13 \\ 11 - 8 = 19 - 16 \end{array}\right\} \text{3 die gemeinschaftlichen Differenzen.}$$

wel=

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welches auch so vorgestellet werden kann:

$7 - 4 = 11 - 8$ und $16 - 13 = 19 - 16$

Daraus wird dieser Schluß gemacht, daß wenn zwey Verhältnisse einem dritten ähnlich sind, so sind sie sich unter einander selbst ähnlich.

Denn da das Verhältniß $7 - 4 = 16 - 13$
und $7 - 4 = 11 - 8$
so ist auch $16 - 13 = 11 - 8$

Mit Worten würde dieses so heißen $7 - 4$ stehet mit $16 - 13$ in gleichem Verhältniß, und $7 - 4$ stehet auch mit $11 - 8$ in gleichem Verhältniß. Da nun $7 - 4$ sich selbst gleich ist; so müßen auch die beyden Verhältnisse $16 - 13$ und $11 - 8$ in gleichem Verhältniß stehen; denn $16 - 13 = 11 - 8$
$- 13$ $- 8$

Differ. 3 ... Differ. 3 was zu beweisen war.

Regeln und Sätze einer geometrischen Proportion.

1tens. Man erkennet eine geometrische Proportion daran, wenn der Quotient der zwey vordern Glieder, dem Quotienten der zwey hintern Glieder gleich ist. Z. B.

$$4 : 16 = 11 : 44$$

Hier ist 4 in $16 = 4$, und 11 in 44 auch 4, folglich sind diese beyden Quotienten sich gleich, stehen also in einer geometrischen Proportion.

2tens. In einer geometrischen Proportion ist das Product der beyden äussern Glieder, dem Producte der beyden in=

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

innern Glieder gleich. Wir wollen das vorige Beyspiel beybehalten.

$$4 : 16 = 11 : 44$$

Aeussere Glieder $4 \times 44 = 176$ ⎫ gleich.
Innere = = $16 \times 11 = 176$ ⎭

Zufolge dieser Grundsätze, deren Richtigkeit bewiesen ist, läßt sich eines der fehlenden Glieder, wenn die drey übrigen Glieder gegeben sind, finden:

a) Fehlet ein äusseres Glied, so werden die zwey mittlern Glieder mit einander multiplicirt, und das daraus entstehende Product durch das bekannte äussere Glied dividirt. Z. B.

$9 : 27 = 36 : x$
$\times\ 27$

$972 : 9 = 108$ das gesuchte äussere Glied.

Beweis.

9 in 27 = 3 ⎫ folglich gleich.
36 in 108 = 3 ⎭

Anmerkung. Das x hier zeigt das fehlende Glied an.

b) Wenn ein mittleres Glied fehlt, so werden die äussern Glieder mit einander multiplicirt, und das Product durch das bekannte mittlere Glied dividirt. Z. B.

$8 : x = 6 : 30$
8

$240 : 6 = 40$ das fehlende mittlere Glied.

Der Beweis geschiehet wie oben.

Ei=

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einige Aufgaben von den arithmetischen und geometrischen Proportionen.

Arithmetische Proportionen.

Aufgaben.	Auflösung.
Wenn das 1te Glied fehlt. Z. B. $x - 6 = 16 - 12$	$16 - 12 = 4$, u. $4 + 6 = 10 = x$
Wenn das 2te Glied fehlt: $10 - x = 16 - 12$	$16 - 12 = 4$ u. $10 - 4 = 6 = x$
Wenn das 3te Glied fehlt: $10 - 6 = x - 12$	$10 - 6 = 4$ u. $4 + 12 = 16 = x$
Wenn das 4te Glied fehlt: $10 - 6 = 16 - x$	$10 - 6 = 4$ u. $16 - 4 = 12 = x$

Geometrische Proportionen.

Aufgaben.	Auflösung.
Wenn das 1te Glied fehlt: $x : 15 = 6 : 18$	$15 \times 6 = 90 : 18 = 5 = x$
Wenn das 2te Glied fehlt: $5 : x = 6 : 18$	$18 \times 5 = 90 : 6 = 15 = x$
Wenn das 3te Glied fehlt: $5 : 15 = x : 18$	$18 \times 5 = 90 : 15 = 6 = x$
Wenn das 4te Glied fehlt: $5 : 15 = 6 : x$	$15 \times 6 = 90 : 5 = 18 = x$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn in einer arithmetischen oder geometrischen Proportion, die zwey mittlern Glieder sich gleich, und nur zwey Glieder gegeben sind, und das dritte zu suchen ist. Z.B.

1) Wenn das vordere und mittlere Glied bekannt ist:

∵ 3 zu 7 zu x
Auflösung. $7 \times 2 = 14 - 3 = 11 = x$

Man verdoppelt (oder multipliciret mit 2, welches gleichviel ist), das mittlere Glied, von der herauskommenden Summe wird das vordere Glied abgezogen, der Rest ist alsdann das fehlende 3te Glied. Dieses erhellet schon aus den vorhergehenden Regeln, wo es heißt, daß die Summe der beyden äussern Glieder, der Summe der beyden innern gleich ist. Da hier nun die beyden mittlern Glieder, wie vorausgesetzt, sich gleich sind, so braucht man nur das mittlere Glied zu verdoppeln, und wenn dann eins der äussern Glieder von der Summe abgezogen wird, so muß natürlich das andere fehlende herauskommen.

2) Wenn das vordere Glied fehlt:

∵ x, 7, 11.
Auflösung. $7 \times 2 = 14 - 11 = 3 = x$

3) Wenn das mittlere fehlt:

∵ 3, x, 11
Auflösung. $3 + 11 = 14 : 2 = 7 = x$

Die äussern Glieder werden hier nicht verdoppelt, sondern sie müßen addirt, und die Summe durch 2 getheilt werden, weil die mittleren Glieder sich gleich sind.

Die oben angeführten Regeln gelten auch bey einer geometrischen Proportion, nur mit dem Unterschiede, daß

dort

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dort die Glieder addirt und subtrahirt, hier aber multiplicirt und dividirt werden. Z. B.

1) Wenn das vordere und mittlere Glied bekannt ist.

$:: 6 : 18 : x$

Auflösung. $18 \times 18 = 324 : 6 = 54 = x$

2) Wenn das vordere und hintere Glied bekannt ist.

$:: 6 : x : 54$

Auflösung. $6 \times 54 = 324 = x \times x = x^2$
(Das heißt x ist mit sich selbst multiplicirt.)

Hier muß aus der Zahl 324, welche = x mal x ist. die Quadrat-Wurzel gezogen werden, deren Wurzel = 18 ist, denn 18×18 ist = 324, und so wäre $x = 18$.

Anmerkung. 1. Diese Bearbeitung ist hier für den Anfänger noch etwas zu schwer und zu unverständlich, weil bisher noch keine Anleitung zum Ausziehen der Quadrat-Wurzel gegeben ist. Da ich aber alle Fälle anführen wollte, so durfte dieser auch nicht weg bleiben.

Anmerkung 2. Eine Quadrat-Zahl ist diejenige, welche herauskommt, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, wie hier, ist 324 die Quadrat-Zahl von 18. — Eine Quadrat-Wurzel ist eine Zahl, die, wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, eine Quadrat-Zahl hervorbringt, wie hier, ist 18 die Quadrat-Wurzel von 324, denn $18 \times 18 = 324$.

3) Wenn das vordere Glied fehlt:

$:: x : 18 : 54$

Auflösung. $18 \times 18 = 324 : 54 = 6 = x$

An-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung. Ich muß mich hier bey den Verhältnissen und Proportionen auf wenige Beyspiele einschränken, um nicht den Fehler zu begehen, welchen man in verschiedenen Rechenbüchern findet, solche Aufgaben zu geben, wo im Resultate Brüche erscheinen, ehe noch von den Brüchen gehandelt worden ist. Im 3ten Heft werden mehrere Beyspiele folgen.

Re-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf