Die arithmetischen Grundoperationen im Anschluss an die Aufgabensammlung des Prof. Dr. Heis.

Von Dr. K. W. Neumann.

Vorwort.

Die Arithmetik ist noch weit davon entfernt, überall so gleichmässig behandelt zu werden wie die übrigen Disciplinen der höhern Schulen. Die Nachtheile, welche dieser Uebelstand den Schülern bringt, zeigen sich besonders deutlich, wenn Letztere von einem Lehrer zu einem andern übergehen. Abgesehen von dem oft wider Erwarten ungünstigen Ausfall der Aufnahmeprüfungen, kostet das Hineinfinden in die Auffassungsweise des neuen Lehrers auch begabteren Schülern oft viele Mühe, während es für die schwächern Schüler so schwer ist, dass sie längere Zeit am Fortschreiten ganz gehindert sind.

In der neuern Zeit hat allerdings eine dem Fassungsvermögen jüngerer Schüler angemessene Behandlung der Arithmetik angefangen sich weiter zu verbreiten. Namentlich hat sich Herr Professor *Heis* in dieser Beziehung durch seine vorzügliche Aufgabensammlung ein grosses Verdienst erworben, ein Werk, das, aus der Praxis hervorgegangen, immer mehr Anerkennung und Verbreitung an Schulen gefunden hat. Der Lehrgang, wie er sich aus der Anordnung der Beispiele und aus den in Fragen enthaltenen Andeutungen ergibt, erleichtert das Verständniss der arithmetischen Erklärungen, Sätze und Regeln, und die Aufgaben sind so gewählt, dass sie nicht nur zur Erläuterung der Lehrsätze dienen, sondern auch den Schüler veranlassen, in ihrer Anwendung auch auf schwierigere Fälle eine immer grössere Sicherheit und praktische Fertigkeit, so wie jene Klarheit und Kürze sich anzueignen, welche das Wesen der mathematischen Eleganz ausmacht.

Allein, während der Lehrer in dem Buche selbst eine Anleitung findet, bedarf der Schüler ausserdem noch eines Leitfadens, der das theoretische Material klar und wissenschaftlich geordnet enthält. Ohne diesen wird es dem Anfänger nicht möglich sein, die Resultate des Unterrichts, namentlich die Reihe von Schlüssen, aus denen der Beweis eines arithmetischen Satzes besteht, scharf aufzufassen und durch Repetitionen zu Hause sich anzueignen. Die vorhandenen Lehrbücher der Arithmetik weichen aber in Bezug auf den Lehrgang meistens so sehr von dem in *Heis'* Aufgabensammlung befolgten ab, dass sie für den Anfänger unbrauchbar sind.

Diesen Uebelständen, namentlich so weit sie unsere Schüler betreffen, einigermassen abzuhelfen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Sie umfasst in engem Anschluss an *Heis'* Aufgabensammlung nur die vier Grundoperationen, sowohl des beschränkten Raumes wegen, als auch weil für Anfänger ein Leitfaden am nothwendigsten ist.

Wenngleich nun der Verfasser hauptsächlich die Einführung der hiesigen Schüler in die Arithmetik nach Kräften erleichtern wollte, so möchte er seine Arbeit doch auch seinen Herrn Collegen zur Beachtung empfehlen, namentlich denen, welche das Werk von *Heis* gebrauchen. Sollte dieselbe die gleichmässigere Behandlung der Arithmetik befördern, so würde er dies als einen reichen Lohn seiner Arbeit betrachten.

Vorbegriffe.

§. 1a.

Zahl und Zahlenverbindung.

Die Arithmetik (Zahlenlehre) behandelt die Eigenschaften der Zahlen und ihrer Verbindungen.

Die Bildung der Zahlen, das Zählen oder Nummeriren, geht aus von der Einheit, d. h. von einem einzelnen Gegenstande (z. B. Thaler, Pfennig, Fuss, Zoll, Stunde, Minute) oder von Eins.

Denkt man mit der Einheit dieselbe wiederholt vereinigt, so erhält man nach und nach die Reihe der natürlichen Zahlen: eins und eins ist zwei, zwei und eins ist drei u. s. w.

Zahlen sind also Vielfache der Einheit.

Zur mündlichen Bezeichnung der Zahlen dienen die Zahlwörter. Die Schriftzeichen bestimmter Zahlen sind die Ziffern; will man aber unbestimmt irgend eine Zahl bezeichnen, so wendet man Buchstaben an und zwar meistens die des kleinen lateinischen Alphabets.

Um alle Zahlen vermittelst neun Ziffern bezeichnen zu können, hat man das dekadische Zahlensystem gebildet. Das Wesen desselben besteht darin, dass zehn Einheiten einer niedern Ordnung zu einer Einheit der nächst höhern Ordnung zusammengefasst werden, und der Rang dieser Ordnungen durch die Stellung der Ziffern bezeichnet wird.

Gibt man nur die Anzahl der gezählten Einheiten an, so ist die Zahl unbenannt; gibt man aber zugleich ihren Namen an, so ist die Zahl benannt. 7, 123 sind unbenannte, 7 Jahre, 123 Meilen sind benannte Zahlen.

Jede Bezeichnung einer Zahl heisst ein Ausdruck.

Haben zwei Ausdrücke a und b denselben Werth, ist a gleich b, so wird dieses durch das Gleichheitszeichen angedeutet $a = b$. Diese Verbindung heisst eine Gleichung, a heisst die erste, b die zweite Seite derselben.

Ist a grösser als b, so schreibt man $a > b$.

Ist a kleiner als b, so schreibt man $a < b$.

Rechnen oder mit Zahlen operiren heisst, Zahlen nach gewissen Bestimmungen mit einander verbinden und so aus ihnen andere Zahlen herleiten.

Nach der Art jener Bestimmungen heissen diese Operationen Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren, von denen die vier ersten die Grundoperationen oder die vier Species genannt werden.

Verbindungen von Zahlen durch diese Operationen heissen Formeln.

§. 1b.

Addition.

1. Die Addition schliesst sich an das Numeriren an als eine Erweiterung desselben. Wie durch das Numeriren Einheiten, so werden durch das Addiren Zahlen zu einer Zahl vereinigt.

2. Die gegebenen Zahlen heissen Summanden, die gesuchte Zahl heisst Summe.

Die Summanden addiren heisst, eine Zahl, die Summe, bilden, welche so viele Einheiten enthält als die Summanden zusammen.

3. Um anzudeuten, dass Zahlen addirt werden sollen, setzt man zwischen dieselben das Zeichen + (*„plus“*).

Beispiele: $5 + 3 = 8$, $a + b = s$.

In der Arithmetik bedeutet $a + b$ nicht nur, dass die Zahlen a und b addirt werden sollen, sondern auch das Resultat der Addition, die Summe beider Zahlen.

§. 2.

Subtraction.

1. Die Subtraction ist die Umkehrung der Addition. Während durch die Addition zwei Zahlen zu einer Summe vereinigt werden, soll durch die Subtraction eine Zahl in zwei Summanden zerlegt werden. Da aber eine Zahl in mehr als ein Paar verschiedene Summanden zerlegt werden kann, so muss zur Bestimmung der Aufgabe der eine Summand gegeben sein.

2. Die gegebenen Zahlen nennt man Minuendus und Subtrahendus, die gesuchte Zahl Rest, Differenz oder Unterschied.

Von dem Minuendus den Subtrahendus subtrahiren heisst, die Differenz bilden, welche, zum Subtrahendus addirt, den Minuendus als Summe ergibt.

3. Das Zeichen der Subtraction ist — (*„minus“*), vor dem der Minuend, hinter dem der Subtrahend steht.

Beispiele: $7 - 5 = 2$, $a - b = c$.

Auch hier bedeutet $a - b$ nicht nur, dass b von a subtrahirt, oder a um b vermindert werden soll, sondern auch die Differenz der beiden Zahlen.

4. Bezeichnet man den Minuend mit M, den Subtrahend mit S, die Differenz mit D, so dass man hat $M - S = D$, so folgt hieraus nach der gegebenen Erklärung: $S + D = M$.

Eben so folgt aus den obigen Beispielen: $5 + 2 = 7$, $b + c = a$.

5. Die Subtraction wird ausgeführt, indem man entweder untersucht, was übrig bleibt, wenn man von dem Minuendus den Subtrahendus fortnimmt, oder, wie viel zum Subtrahendus hinzugefügt werden muss, um den Minuend zu erhalten.

Man erhält also auch den Subtrahend, indem man untersucht, wie viel zur Differenz hinzugefügt werden muss, um den Minuend zu erhalten, oder indem man die Differenz von dem Minuend subtrahirt: $7 - 2 = 5$, $a - c = b$, $M - D = S$.

§. 3.

Multiplication.

1. Sind die Summanden einer Summe alle einander gleich, so wird die Addition zur Multiplication. Man bezeichnet nämlich die Summe kürzer in der Weise, dass man den Summanden nur einmal setzt und angibt, wie oft er als Summand gedacht werden soll.

2. Die erste der gegebenen Zahlen heisst Multiplicandus, die zweite Multiplicator, das Resultat Product.

Den Multiplicandus mit dem Multiplicator multipliciren heisst, das Product dadurch bilden, dass man den Multiplicandus so oft als Summanden setzt, als der Multiplicator die Einheit enthält.

3. Zur Bezeichnung der Multiplication dienen $\times$ oder . („*mal*"), vor denen der Multiplicandus, hinter denen der Multiplicator steht.

Beispiele: $7 \times 3 = 21$, $p \times q = r$, $4 \,.\, y = z$.

Diese Bezeichnung ist jedoch nur in dem ersten dieser Beispiele nothwendig, wenn nämlich zwei bestimmte Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen. In den andern Beispielen kann das Zeichen ausgelassen werden. Es ist also $p\,q = p \times q$, $4\,y = 4 \,.\, y$.

4. Nach der gegebenen Definition soll das Product aus 7 und 3 ursprünglich dadurch gebildet werden, dass man 7 dreimal als Summanden setzt. Also ist $7.\,3 = 7 + 7 + 7 = 21$.

Eben so soll in dem zweiten Beispiele p so oft als Summand gesetzt werden, als q die Einheit enthält: $p \,.\, q = p + p + p + \ldots\ldots = r$.

5. Um die Multiplication grösserer Zahlen unseres Zahlensystems schneller und bequemer ausführen zu können, als es durch wiederholte Addition des Multiplicanden geschehen kann, ist es nur nöthig, die Resultate der Multiplication der neun ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu kennen. Diese sind zusammengestellt in dem sogenannten Einmaleins. Durch die wiederholte Anwendung desselben wird auch die Multiplication grösserer Zahlen ausgeführt.

6. Der Multiplicator muss der Definition gemäss eine unbenannte Zahl sein, da er angibt, wie oft der Multiplicand als Summand gesetzt werden soll. Der Multiplicand kann benannt oder unbenannt sein. Dem entsprechend ist auch das Product eine benannte oder eine unbenannte Zahl.

7. Ist der Multiplicand eine unbenannte Zahl wie in dem Producte 4. 3, so ist

$$
\begin{array}{rl|l}
4.\,3 & = 4 + 4 + 4 & \\
 & = 1 + 1 + 1 & = 3 \\
 & + 1 + 1 + 1 & + 3 \\
 & + 1 + 1 + 1 & + 3 \\
 & + 1 + 1 + 1 & + 3 \\
\hline
 & & = 3.\,4
\end{array}
$$

In diesem Falle kann man also Multiplicand und Multiplicator mit einander vertauschen, und beide erhalten den gemeinschaftlichen Namen Factoren.

§. 4.

Division.

1. Wie die Subtraction die Umkehrung der Addition ist, so ist die Division die Umkehrung der Multiplication. Bei der Multiplication sollen die Factoren zu einem Product vereinigt werden; bei der Division soll eine Zahl in zwei Factoren, von denen der eine gegeben ist, zerlegt werden.

2. Die gegebenen Zahlen heissen Dividendus und Divisor, die gesuchte Zahl heisst Quotient.

Den Dividendus durch den Divisor dividiren heisst, eine Zahl, den Quotienten, bilden, welche, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus als Product gibt.

3. Das Zeichen der Division ist : , gelesen „dividirt durch", vor dem der Dividendus, hinter dem der Divisor steht.

Beispiele: $24 : 6 = 4$, $a : b = q$.

4. Bezeichnet Dd den Dividendus, Ds den Divisor, Q den Quotienten, so ist also $Dd : Ds = Q$ und daher auch der Erklärung gemäss $Ds \times Q = Dd$.

Ebenso folgt aus obigen Beispielen: $6 . 4 = 24$, $bq = a$.

5. Da der Dividendus gleich dem Product aus Quotient und Divisor ist, so erhält man den Divisor, indem man den Dividendus durch den Quotienten dividirt. Es ist

$24 : 4 = 6$, $a : q = b$, $Dd : Q = Ds$.

§. 5.

Potenziren.

1. Wie die Multiplication eine abgekürzte Addition ist, so ist das Potenziren eine abgekürzte Multiplication. Das Product ist eine Summe gleicher Summanden, die Potenz ein Product gleicher Factoren.

2. Bei dem Potenziren erhalten die gegebenen Zahlen die Namen Basis (Grundzahl oder Dignand) und Exponent. Die gesuchte Zahl heisst Potenz.

Die Basis mit dem Exponenten potenziren heisst, die Basis so oft als Factor setzen, als der Exponent die Einheit enthält.

3. Das Potenziren wird dadurch angedeutet, dass man den Exponenten rechts oben an die Basis setzt.

Beispiele: $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$, $a^4 = aaaa$, $r^m = rrr \ldots^{m\ \text{mal}}$

Diese Beispiele werden gelesen: 5 zur dritten Potenz, die vierte Potenz von a oder r hoch m.

§. 6.

Gebrauch der Klammern.

1. Aus den gegebenen Erklärungen der arithmetischen Operationen folgt, dass unmittelbar stets nur zwei Zahlen durch dieselben mit einander verbunden werden können. Die gefundene Zahl kann wieder mit einer andern Zahl verbunden werden, und so kann man weiter zu Verbindungen von vier und mehreren Zahlen fortschreiten.

2. Sind Zahlen durch die Zeichen $+$ oder $-$ verbunden, so heisst der Ausdruck ein zusammengesetzter, und die Zahlen heissen Glieder desselben. Nach der Anzahl der Glieder ist der Ausdruck ein zwei-, drei- oder mehrgliedriger (Binom, Trinom oder Polynom). Summen und Differenzen sind also zusammengesetzte, Producte und Quotienten sind einfache Ausdrücke.

3. Ein zusammengesetzter Ausdruck wird durch Klammern als eine Grösse bezeichnet. Diese Bezeichnung ist nothwendig, wenn der zusammengesetzte Ausdruck mit andern Grössen verbunden werden soll. So bedeutet also $(5 + 4) \,.\, 3$, dass die Summen der Zahlen 5 und 4, nämlich 9, mit 3 multiplicirt werden soll.

4. Wenn ein oder mehrere Glieder eines zusammengesetzten Ausdrucks selbst wieder zusammengesetzt sind, so müssen auch diese eingeklammert werden. Zum Unterschiede wechselt man mit runden und eckigen (kleinen und grossen) Klammern ab. $[(13 + 8) \,.\, 5 - 12] : 3$ bedeutet also, dass 13 und 8 addirt, die Summe mit 5 multiplicirt, von diesem Product 12 subtrahirt und die erhaltene Differenz durch 3 dividirt werden soll.

5. Hieraus folgt, dass bei der Berechnung eines Ausdrucks, in welchem Klammern vorkommen, zuerst die Zahlen vereinigt werden müssen, die von den Klammern eingeschlossen sind, und zwar von den kleinen Klammern anfangend. Enthält der Ausdruck keine Klammern, so müssen zuerst alle etwa angedeuteten Multiplicationen und Divisionen ausgeführt werden, und darauf der Reihe nach von links an die Addition und Subtraction der erhaltenen Zahlen.

Beispiele: 1) $13 + 8 \,.\, 5 - 18 - 6 : 3 = 13 + 40 - 18 - 2 = 33.$

2) $(13 + 8) \,.\, 5 - (18 - 6) : 3 = 21 \,.\, 5 - 12 : 3 = 105 - 4 = 101.$

3) $[(13 + 8) \,.\, 5 - (18 - 6)] : 3 = [21 \,.\, 5 - 12] : 3 = [105 - 12] : 3 = 93 : 3 = 31.$

Erster Abschnitt.

Sätze über Summen und Differenzen.

§. 7a.

1. Die Reihenfolge der Operationen, wie sie sich aus der ursprünglichen Verbindung von drei und mehr Grössen ergibt, ist nicht immer die zweckmässigste, weil man bei ihr das Resultat nicht immer in der einfachsten Form und auf dem kürzesten Wege erhält.

2. Die Aufgabe dieses und des folgenden Abschnittes besteht nun darin, zu zeigen, welche Umformungen man mit allen möglichen Verbindungen vornehmen darf, ohne den Werth des Ausdrucks zu ändern.

Der Zweck dieser Umformungen ist, dem Ausdruck die einfachste und bequemste Form zu geben.

3. Die Verbindungen von mehr als drei Grössen lassen sich durch wiederholte Anwendung der über die Verbindungen von drei Grössen gefundenen Sätze in allen möglichen Weisen umformen, indem man jedesmal die Reihenfolge zweier Operationen ändert, und daher sind es namentlich die Verbindungen von drei Grössen, welche hier zu untersuchen sind.

4. Bei drei Zahlen, a, b und c, sind folgende wesentlich verschiedene Verbindungen durch Addition und Subtraction möglich.

1) $a + b + c$	5) $a + (b + c)$
2) $a + b - c$	6) $a - (b + c)$
3) $a - b + c$	7) $a + (b - c)$
4) $a - b - c$	8) $a - (b - c)$

§. 7b.

I. $a + b = b + a$

II. $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$

1. Die Summe $a + b$ enthält so viel Einheiten, als a und b zusammen. Dieselbe Zahl bedeutet $b + a$, denn durch eine veränderte Reihenfolge der Summanden wird die Anzahl der in ihnen enthaltenen Einheiten nicht verändert. (I.)

2. Aus dem Begriff der Addition folgt, dass durch die Vergrösserung eines Summanden die Summe um eben so viel vergrössert wird.

Soll also eine Zahl zu einer Summe addirt werden, so kann man sie zu einem Summanden addiren. (II.)

Beispiel: $(13 + 8) + 7 = (13 + 7) + 8 = 13 + (8 + 7)$

3. Diese Sätze lassen sich in den einen zusammen fassen: Es ist einerlei, in welcher Ordnung die Summanden einer Summe addirt werden.

Durch Anwendung dieses Satzes lässt sich das Rechnen oft erleichtern und vereinfachen. So ist in dem letzten Beispiel der Ausdruck $(13 + 7) + 8$ offenbar der bequemste, weil $13 + 7$ die „runde" Summe 20 gibt, zu der 8 ohne alle Mühe addirt werden kann. Derselbe Vortheil lässt sich auch bei dem folgenden Beispiel anwenden.

$3997 + 296 + 3 + 4 = 3997 + 3 + 296 + 4 = 4000 + 300 = 4300.$

4. Sind die Summanden einander gleich, so ist die Summe ein Vielfaches der als Summand gegebenen Zahl. So ist $a + a = 2a$, $x + x + x = 3x$. Die Zahl, welche die Anzahl der in einem Vielfachen enthaltenen Summanden angibt, heisst Coëfficient.

Vielfache derselben Zahl heissen gleichnamig, z. B. $2a$ und $7a$.

Gleichnamige Grössen werden addirt, indem man ihre Coëfficienten addirt.

Beispiele: $3a + 2a = a + a + a + a + a = 5a.$

$7x + 6y + 2x + 4y = 7x + 2x + 6y + 4y = 9x + 10y.$

§. 8.

$$\text{I. } a - b + b = a. \quad \text{II. } a + b - b = a.$$
$$\text{III. } a - (a - b) = b. \quad \text{IV. } a - a = o.$$

1. Nach der Erklärung der Subtraction (§. 2.) ist die Summe aus der Differenz und dem Subtrahendus gleich dem Minuendus; also $D + S = M$ oder, wenn die Differenz $a - b$ ist, $a - b + b = a$.

2. Subtrahirt man von der Summe $a + b$ den Summanden b, so ist die Differenz gleich dem andern Summanden a, weil die Summe von b und a gleich dem Minuend $a + b$ ist: $a + b - b = a$.

3. Addition und Subtraction sind also entgegengesetzte Operationen, die sich aufheben, wenn sie mit denselben Grössen vollzogen werden. Eine Zahl bleibt folglich ungeändert, wenn man dieselbe Zahl durch Addition und Subtraction mit ihr verbindet.

4. Da der Minuendus gleich der Summe des Subtrahendus und der Differenz ist, so bleibt (nach 2.) der Subtrahendus übrig, wenn man von dem Minuendus die Differenz subtrahirt. Da $M = S + D$ ist, so ist $M - D = S$. Ist die Differenz $a - b$, so ist $a - (a - b) = b$.

5. Ist der Minuendus gleich dem Subtrahendus, so ist die Differenz gleich Null. Man kann also statt Null die Differenz zweier gleichen Zahlen setzen: $4 - 4$, $m - m$.

§. 9.

$$\text{I. } a + b - c = a - c + b.$$
$$\text{II. } a - b - c = a - c - b.$$

1. Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, indem man sie von einem Summanden subtrahirt und zu dieser Differenz den andern Summanden addirt. (I.)

Beispiel: $16 + 9 - 6 = 16 - 6 + 9 = 10 + 9 = 19$.

Beweis: Zwei Ausdrücke müssen einander gleich sein, wenn sie, auf gleiche Weise behandelt, dasselbe Resultat ergeben. Zum Beweise der Sätze über Differenzen addirt man, der Erklärung der Subtraction entsprechend, den Subtrahenden.

Addirt man c, so erhält man $a + b - c + c = a + b$ (§. 8, 1.)
$a - c + b + c = a - c + c + b$ (§. 7 b, 2.) $= a + b$ (§. 8, 1.)

2. Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, indem man sie zu dem Minuendus addirt und von dieser Summe den Subtrahendus subtrahirt. (I.)

Beispiel: $176 - 87 + 11 = 187 - 87 = 100$.

2

Beweis: Kehrt man Formel I um, so erhält man $a - c + b = a + b - c$. Aus der Richtigkeit einer Formel folgt aber die ihrer Umkehrung, denn wenn $p = q$ ist, so ist auch $q = p$.

3. Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, indem man sie von dem Minuendus subtrahirt und von dieser Differenz den Subtrahendus subtrahirt. (II.)

Beispiel: $29 - 7 - 9 = 29 - 9 - 7 = 20 - 7 = 13$.

Beweis: Addirt man c zu beiden Seiten der Formel II, so erhält man

$$a - b - c + c = a - b \text{ (§. 8, 1.)}$$
$$a - c - b + c = a - c + c - b \text{ (§. 9, 2.)} = a - b$$

4. Die bisher entwickelten Sätze lassen sich in einen Satz zusammen fassen: Sollen mehrere Zahlen addirt oder subtrahirt werden, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

§. 10.

$$a - (b + c) = a - b - c = a - c - b.$$

1. Eine Summe wird von einer Zahl subtrahirt, indem man die einzelnen Summanden subtrahirt.

Beispiel: $52 - (32 + 4) = 52 - 32 - 4 = 20 - 4 = 16$.

Beweis: Addirt man $b + c$ zu beiden Ausdrücken, so erhält man

$$a - (b + c) + (b + c) = a \text{ (§. 8, 1.)}$$
$$a - b - c + b + c = a - b + b - c + c \text{ (§. 9, 4.)} = a \text{ (§. 8, 1.)}$$

Folglich ist $a - (b + c) = a - b - c = a - c - b$ (§. 9, 3.)

2. Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, indem man sie zu dem Subtrahendus addirt.

Beispiel: $34 - 16 - 8 = 34 - (16 + 8) = 34 - 24 = 10$.

Beweis: $a - b - c = a - (b + c)$ ist die Umkehrung der vorigen Formel.

3. Gleichnamige Grössen (§. 7b, 4.) werden von einander subtrahirt, indem man ihre Coëfficienten von einander subtrahirt. Es ist $11\,a - 3\,a = 8\,a$, weil $3\,a + 8\,a = 11\,a$ ist.

§. 11.

$$\text{I. } a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.$$
$$\text{II. } (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

1. Eine Differenz wird zu einer Zahl addirt, indem man den Minuendus addirt und den Subtrahendus subtrahirt. (I.)

Beispiele: $43 + (15 - 8) = 43 + 15 - 8 = 58 - 8 = 50$

$27 + (23 - 7) = 27 - 7 + 23 = 20 + 23 = 43$

Beweis: Durch Addition des Subtrahendus c erhält man

$$a + (b - c) + c = a + (b - c + c) \text{ (§. 7b, 2.) } = a + b \text{ (§. 8, 1.)}$$
$$a + b - c + c = a + b$$
$$a + b - c = a - c + b \text{ (§. 9, 4.)}$$

2. **Eine Differenz wird zu einer Differenz addirt, indem man von der Summe der Minuenden die Summe der Subtrahenden subtrahirt.** (II.)

Beispiel: $(53 - 6) + (42 - 4) = (53 + 42) - (6 + 4) = 95 - 10 = 85.$

Beweis: Man addirt $b + d$. Dann ist

$$(a - b) + (c - d) + b + d = (a - b) + b + (c - d) + d \text{ (§. 7b, 3.)}$$
$$= a + c \text{ (§. 8, 1.)}$$
$$(a + c) - (b + d) + (b + d) = a + c.$$

§. 12.

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b.$$

1. **Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, indem man den Minuendus subtrahirt und den Subtrahendus addirt.**

Beispiel: $72 - (32 - 6) = 72 - 32 + 6 = 40 + 6 = 46$
$= 72 + 6 - 32 = 78 - 32 = 46.$

Beweis: Addirt man zu beiden Seiten der Formel $b - c$, so ergibt sich

$$a - (b - c) + (b - c) = a \text{ (§. 8, 3.)}$$
$$a - b + c + b - c = a - b + b + c - c = a$$

2. **Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, indem man sie von dem Subtrahendus subtrahirt.**

Beispiel: $41 - 28 + 7 = 41 - (28 - 7) = 41 - 21 = 20.$

Beweis: $a - b + c = a - (b - c)$ ist die Umkehrung der obigen Formel.

§. 13.

1. Die bisher bewiesenen Sätze kann man auch folgendermassen ordnen. Die Summe soll stets mit $A + B$, die Differenz mit $A - B$, die Zahl mit z bezeichnet werden.

1) $A + z + B = A + B + z.$

Vergrösserung eines Summanden = Vergrösserung der Summe.

2) $A - z + B = A + B - z.$

Verkleinerung eines Summanden = Verkleinerung der Summe.

3) $A + z - B = A - B + z.$

Vergrösserung des Minuendus = Vergrösserung der Differenz.

4) $A - z - B = A - B - z$.

Verkleinerung des Minuendus = Verkleinerung der Differenz.

5) $A - (B + z) = A - B - z$.

Vergrösserung des Subtrahendus = Verkleinerung der Differenz.

6) $A - (B - z) = A - B + z$.

Verkleinerung des Subtrahendus = Vergrösserung der Differenz.

2. Aus den Sätzen über die Addition und Subtraction der Summen und Differenzen ergibt sich die praktische Regel, dass bei Auflösung der Klammern die Zeichen ungeändert bleiben, wenn + vor den Klammern steht, dass die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt werden müssen, wenn — vor der Klammer steht.

3. Sind in einem Ausdruck die kleinen Klammern von grössern umschlossen, so hat man der Bedeutung der Klammern gemäss zunächst die innern Klammern aufzulösen und darauf die grösseren. Man erhält aber dasselbe Resultat schneller, wenn man in umgekehrter Ordnung verfährt.

Sind die Klammern aufgelöst, so ordnet man die Grössen so, dass die gleichnamigen leicht vereinigt werden können, und zwar am besten alphabetisch oder nach den Potenzen einer in allen Gliedern vorkommenden Grösse.

Beispiel: $13\,a - \{4\,b + [5\,a - (a - b) - 3\,a] + 8\,a\} = 13\,a - 4\,b - 5\,a + a - b + 3\,a - 8\,a = 13\,a - 5\,a + a + 3\,a - 8\,a - 4\,b - b = 4\,a - 5\,b$.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über Producte und Quotienten.

§. 14.

I. $(p \pm q)\,n = pn \pm qn$.

II. $m\,(a \pm b) = ma \pm mb$.

1. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die entstandenen Producte addirt. (I.)

Beweis: Nach der Erklärung der Multiplication ist

$(p + q)\,3 = (p + q) + (p + q) + (p + q) = (p + p + p) + (q + q + q)$
$= p\,3 + q\,3$.

Ebenso ist (§. 3.) $(p + q)\,n = (p + q) + (p + q) + \ldots{}^{n \text{ mal}}$ d. h. gleich einer Summe aus n Summanden, von denen jeder $= p + q$ ist. Addirt man auch hier zuerst die n Summanden p, dann die n Summanden q, wodurch man (§. 3.) $p\,n$ und $q\,n$ erhält, so ergibt sich $(p + q)\,n = pn + qn$.

2. Eine Zahl wird mit einer Summe multiplicirt, indem man die Zahl mit jedem Summanden multiplicirt und die entstandenen Producte addirt. (II.)

Beweis: $a\ (2 + 3) = a\ .\ 5 = a + a + a + a + a = (a + a) + (a + a + a)$ $= a\ .\ 2 + a\ .\ 3$

Ebenso ist $m\ (a + b) = \overbrace{m + m + m + \ldots}^{(a + b)\,\text{mal}}$ d. h. gleich einer Summe, die $(a + b)$ mal den Summanden m enthält. Denkt man die a Summanden zunächst zu einer Summe vereinigt, so erhält man (§. 3.) $m\ a$. Ebenso erhält man für die b letzten Summanden $m\ b$. Also ist $m\ (a + b) = m\ a + m\ b$.

3. Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Minuendus und den Subtrahendus mit der Zahl multiplicirt und von dem Product des Minuendus das Product des Subtrahendus subtrahirt. (I.)

Beweis: Nach §. 3 ist $(p - q)\ 3 = (p - q) + (p - q) + (p - q)$ $= (p + p + p) - (q + q + q)$ (§. 11, 2.) $= p\ .\ 3 - 9\ .\ 3$.

Ebenso ist $(p - q)\,n = (p - q) + (p - q) + \ldots^{n\text{mal}}$ d. h. gleich einer Summe aus n Summanden $(p - q)$. Addirt man (§. 11, 2.) die n Minuenden p und die n Subtrahenden q, so erhält man $p\ n$ und $q\ n$. Folglich ist $(p - q)\ n = p\ n - q\ n$.

4. Eine Zahl wird mit einer Differenz multiplicirt, indem man sie mit dem Minuendus und mit dem Subtrahendus multiplicirt, und von dem Product des Minuendus das Product des Subtrahendus subtrahirt. (II.)

Beweis: $m\ (5 - 2) = m\ .\ 3 = m + m + m$ (§. 3.)
$= m + m + m + (m + m) - (m + m)$ (§. 8. 3.) $= m\ .\ 5 - m\ .\ 2$.

Es ist das Product $m\ (a - b) = \overbrace{m + m + \ldots}^{(a - b)\,\text{mal,}}$ d. h. $m\ (a - b)$ ist gleich der Summe aus $(a - b)$ Summanden, deren jeder $= m$ ist. Diese Summe bleibt (§. 8, 3.) ungeändert, wenn man zu derselben $b$mal m addirt und dann $b$mal m subtrahirt. Durch diese Addition erhält man $a - b + b = a$ Summanden, deren Summe $= ma$ ist. Also ist $m\ (a - b) = m\,a - m\,b$.

5. Aus den Umkehrungen der bewiesenen Formeln ergibt sich:

Die Summe oder Differenz zweier Producte mit einem gemeinschaftlichen Factor ist gleich dem Producte aus dem gemeinschaftlichen Factor und aus der Summe oder Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren.

Es ist $m\,x \pm n\,x = (m \pm n)\ x,\ a\,p \pm a\,q = a\,(p \pm q)$.

6. Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich wichtige Regeln für das Fortschaffen und Setzen der Klammern bei Producten. Wenn ein Product, welches eine Summe oder eine Differenz als Factor hat, mit andern Grössen durch Addition oder Subtraction verbunden ist,

so werden die Klammern fortgeschafft, indem man zuerst die Multiplication ausführt und darauf die Addition oder Subtraction der entstandenen Summe oder Differenz.

Beispiel: $5\,a - 4\,(b + c) = 5\,a - (4\,b + 4\,c) = 5\,a - 4\,b - 4\,c.$

7. Sind Producte mit einem gemeinschaftlichen Factor durch Addition oder Subtraction mit andern Grössen verbunden, so kann man zunächst jene Producte vereinigen, indem man sie durch Klammern umschliesst (nach §. 10—12), und nun den gemeinschaftlichen Factor von den nicht gemeinschaftlichen trennt.

Beispiel: $a - m\,b + m\,c - m\,d = a - (m\,b - m\,c + m\,d) = a - m\,(b - c + d).$

§. 15.

$$\text{I. } (a\,.\,b)\,.\,c = (a\,.\,c)\,.\,b = a\,.\,(b\,.\,c). \quad \text{II. } a\,.\,b = b\,.\,a.$$

1. Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen Factor mit der Zahl multiplicirt. (I.)

Beweis: $(a\,.\,b)\,.\,c = a\,.\,b + a\,.\,b + \ldots\,.^{c \text{ mal}}$
$= (a + a + \ldots\,.^{c \text{ mal}})\;b$ (§. 14, 5.) $= (a\,.\,c)\,.\,b$
$= a\,.\,(b + b + \ldots\,.^{c \text{ mal}})$ (§. 14, 5.) $= a\,.\,(b\,.\,c)$

Der in Formel I. enthaltene Satz kann auch folgendermassen ausgedrückt werden:

Es ist einerlei, ob man eine Zahl mit mehreren Zahlen nach einander oder mit dem Product dieser Zahlen multiplicirt.

2. Aus dieser Formel folgt auch leicht der in §. 3. entwickelte Satz, dass man in einem Product Multiplicandus und Multiplicator mit einander vertauschen kann. (II.)

Setzt man nämlich $a = 1$ in $(a\,.\,b)\,.\,c = (a\,.\,c)\,.\,b$, so erhält man $(1\,.\,b)\,.\,c = (1\,.\,c)\,.\,b$ oder $b\,.\,c = c\,.\,b.$

3. Aus der Umkehrung der Formel I. ergibt sich der Satz:

Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, indem man sie mit dem einen Factor multiplicirt, und dies Product mit dem andern Factor multiplicirt.

§. 16.

$$\begin{aligned}
\text{I. } & (a + b)\,(c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d \\
\text{II. } & (a + b)\,(c - d) = a\,c - a\,d + b\,c - b\,d \\
\text{III. } & (a - b)\,(c + d) = a\,c + a\,d - b\,c - b\,d \\
\text{IV. } & (a - b)\,(c - d) = a\,c - a\,d - b\,c + b\,d
\end{aligned}$$

1. Eine Summe wird mit einer Summe multiplicirt, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern Summe multiplicirt und die entstandenen Producte addirt.

Beweis: $(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d)$ (§. 14, 1.)
$= a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$

2. Eine Summe wird mit einer Differenz multiplicirt, indem man jeden Summanden mit dem Minuendus und mit dem Subtrahendus multiplicirt und die ersten Producte addirt, die letzteren aber subtrahirt.

Beweis: $(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d)$ (§. 14, 1.)
$= (ac - ad) + bc - bd$ (§. 14, 4.) $= ac - ad + bc - bd$.

3. Eine Differenz wird mit einer Summe multiplicirt, indem man den Minuendus und den Subtrahendus mit jedem Summanden multiplicirt und die ersten Producte addirt, die letztern subtrahirt.

Beweis: $(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d)$ (§. 14, 3.)
$= (ac + ad) - (bc + bd)$ (§. 14, 2.) $= ac + ad - bc - bd$

4. Eine Differenz wird mit einer Differenz multiplicirt, indem man Minuendus und Subtrahendus der einen Differenz mit Minuendus und Subtrahendus der andern Differenz multiplicirt, und die aus den beiden Minuenden und aus den beiden Subtrahenden gebildeten Producte addirt, die aus einem Minuendus und einem Subtrahendus entstandenen Producte aber subtrahirt.

Beweis: $(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d)$ (§. 14, 3.)
$= (ac - ad) - (bc - bd)$ (§. 14, 4.) $= ac - ad - bc + bd$

5. Diese Sätze geben folgende Regeln für die Multiplication mehrgliedriger Ausdrücke: Man multiplicirt jedes Glied des einen Ausdrucks mit jedem Gliede des andern. Das Vorzeichen $+$ haben die Producte, deren Factoren gleiche Vorzeichen haben. Das Vorzeichen $-$ erhalten die Producte, deren Factoren verschiedene Vorzeichen haben.

6. Von Wichtigkeit sind noch die Producte, deren Factoren Summen oder Differenzen derselben Zahlen sind.

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

7. Aus diesen Formeln lassen sich folgende herleiten:

1) $(a + b + c)(a + b + c) = [(a + b) + c][(a + b) + c]$
$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$

2) $(a + b - c)(a + b - c) = a^2 + 2ab + b^2 - 2(a + b)c + c^2$
$= [a + (b - c)] . [a + (b - c)] = a^2 + 2a(b - c) + b^2 - 2bc + c^2$

3) $(a - b + c)(a - b + c) = a^2 - 2ab + b^2 + 2(a - b)c + c^2$
$= [a - (b - c)] . [a - (b - c)] = a^2 - 2a(b - c) + b^2 - 2bc + c^2$

4) $(a - b - c)(a - b - c) = a^2 - 2ab + b^2 - 2(a - b)c + c^2$
$= [a - (b - c)] . [a - (b - c)] = a^2 - 2a(b - c) + b^2 - 2bc + c^2$

5) $(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c][(a + b) - c]$
$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

6) $(a + b - c)(a - b + c) = [a + (b - c)][a - (b - c]$
$= a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

7) $(a + b + c)\ (a - b - c) = [\,a + (b + c)]\ [a - (b + c)]$
$= a^2 - b^2 - 2\,b\,c - c^2$

8. An die letzte Formel in 6. schliessen sich zwei Abtheilungen neuer Formeln an, indem man entweder für $a + b$ oder für $a - b$ mehrgliedrige Ausdrücke setzt. Die Glieder dieser Ausdrücke sind Producte, deren Factoren Potenzen von a und b sind. Enthält jedes Product zwei Factoren, so hat man folgende verschiedene Zusammenstellungen:

$a\,a,\ a\,b,\ b\,b$ oder $a^2,\ a\,b,\ b^2$

Bei drei Factoren: $a\,a\,a,\ \ a\,a\,b,\ \ a\,b.b,\ \ b\,b\,b$ oder $a^3,\ \ a^2\,b,\ \ a\,b^2,\ \ b^3$

Bei vier Factoren: $a\,a\,a\,a,\ \ a\,a\,a\,b,\ \ a\,a\,b\,b,\ \ a\,b\,b\,b,\ \ b\,b\,b\,b$ oder
$a^4,\ \ a^3\,b,\ \ a^2\,b^2,\ \ a\,b^3,\ \ b^4$

Der allgemeine Ausdruck bei n Factoren ist:

$a^n,\ \ a^{n-1}\,b,\ \ a^{n-2}\,b^2\,.....\,a^2\,b^{n-2},\ \ a\,b^{n-1},\ \ b^n$

9. Setzt man für die Summe $a + b$ die Summe dieser Producte, so erhält man

$(a^2 + a\,b + b^2)\ (a - b) = a^3 - b^3$
$(a^3 + a^2\,b + a\,b^2 + b^3)\ (a - b) = a^4 - b^4$
$(a^4 + a^3\,b + a^2\,b^1 + a\,b^3 + b^4)\ (a - b) = a^5 - b^3$
$(a^n + a^{n-1}\,b + a^{n-2}\,b^2 + \ldots + a^2\,b^{n-2} + a\,b^{n-1} + b^n)(a - b) = a^{n-1} - b^{n-1}$

10. Setzt man für $a - b$ mehrgliedrige Ausdrücke, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, so erhält man:

$(a + b)\ (a^2 - a\,b + b^2) = a^3 + b^3$
$(a + b)\ (a^3 - a^2\,b + a\,b^2 - b^3) = a^4 - b^4$
$(a + b)\ (a^4 - a^3\,b + a^1\,b^2 - a\,b^3 + b^4) = a^5 + b^5$
$(a + b)\ (a^n - a^{n-1}\,b + a^{n-2}\,b^2 + \ldots \mp a^2\,b^{n-2} \pm a b^{n-1} \mp b^n) = a^{n-1} \mp b^{n-1}$

In dem letztern Ausdrucke gilt von den doppelten Zeichen das obere, wenn n eine ungerade Zahl ist, das untere, wenn n eine gerade Zahl ist.

11. Bleibt also in diesen, aus $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ hergeleiteten Formeln der Factor $a - b$ ungeändert, so ist das Resultat der Multiplication stets eine Differenz; bleibt $a + b$ ungeändert, so erhält man, wie in der ursprünglichen Formel selbst, die Differenz gerader, die Summe ungerader Potenzen.

12. Setzt man $b = 1$, so ist jede Potenz von b ebenfalls $= 1$, und die Formeln erhalten eine einfachere Form. So werden die beiden allgemeinen Ausdrücke:

$(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots .\ a^2 + a + 1)\ (a - 1) = a^{n-1} - 1$
$(a + 1)\ (a^n - a^{n-1} + a^{n-2} - \mp a^2 \pm a \mp 1) = a^{n-1} \mp 1$

§. 17.

I. $a : b \times b = a$. II. $a \times b : b = a$. III. $a : (a : b) = b$. IV. $a : a = 1$.

1. Nach dem Begriff der Division (§. 4.) ist das Product aus Quotient und Divisor gleich dem Dividend, $Q \times Ds = Dd$, oder wenn der Quotient $a : b$ ist $a : b \times b = a$.

2. Aus dem Begriff der Division folgt unmittelbar, dass $a \times b : b = a$ ist. Wenn man nämlich den Quotient a mit dem Divisor b multiplicirt, so erhält man den Dividendus $a \times b$.

Dividirt man also ein Product durch einen seiner Factoren, so erhält man den andern Factor.

3. Hieraus folgt, dass Multiplication und Division, ebenso wie Addition und Subtraction, entgegengesetzte Operationen sind, die sich aufheben, wenn sie mit derselben Zahl ausgeführt werden.

Eine Zahl bleibt also ungeändert, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt und durch dieselbe Zahl dividirt.

4. Aus $Ds \times Q = Dd$ folgt nach 2. $Dd : Q = Ds$, oder für den Quotienten $a : b$

$$a : (a : b) = b.$$

Man erhält also den Divisor, wenn man den Dividend durch den Quotient dividirt.

5. Wenn Dividend und Divisor einander gleich sind, so ist der Quotient $= 1$. $a : a = 1$, denn es ist $a = a \,.\, 1$.

§. 18.

$$\text{I.} \quad \frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c} \qquad \text{II.} \quad \frac{a}{b} = \frac{a:c}{a:c}$$

1. Der Werth eines Quotienten bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

Beweis: Derselbe wird hier wie auch bei den folgenden Sätzen über Quotienten dadurch geführt, dass man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt.

Multiplicirt man $\frac{a\,c}{b\,c}$ mit $b\,c$, so erhält man $a\,c$. Dieselbe Zahl erhält man aus $\frac{a}{b}$, denn es ist $\frac{a}{b} \cdot b\,c = a \,.\, c$. Ebenso ist $\frac{a:n}{b:n} \cdot (b : n) = a : n$ und $\frac{a}{b} \cdot b : n = a : n$.

Anmerkung. Auf diesem Satze beruht das Gleichnamigmachen und das Aufheben der Brüche.

§. 19.

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}$$

1. Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividirt und die entstandenen Quotienten addirt. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, indem man Minuendus und Subtrahendus durch die Zahl dividirt, und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahirt.

Beweis: $\frac{a \pm b}{m} \,.\, m = a \pm b$

$$\left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right) m = \frac{a}{m} \,.\, m \pm \frac{b}{m} \,.\, m \quad (\text{§. 14, 1 und 3.}) \; = a \pm b.$$

2. Die Umkehrung obiger Formel enthält den Satz: **Zwei Quotienten mit einem gemeinschaftlichen Divisor werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz der Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.**

3. Sind diese Quotienten mit andern Grössen durch Addition oder Subtraction verbunden, so kann man die Vereinigung der Quotienten zunächst durch Klammern andeuten und sie dann nach 2. auszuführen.

Beispiele: $$x + \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = x + \left(\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}\right) = x + \frac{a \pm b}{m}$$

$$x - \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = x - \left(\frac{a}{m} \mp \frac{b}{m}\right) = x - \frac{a \mp b}{m}$$

Der Bruchstrich hat also hier eine doppelte Bedeutung, er dient als Divisionszeichen und vertritt die Klammern.

4. Sind die Quotienten ungleichnamig, d. h. haben sie ungleiche Divisoren, so macht man sie (nach §. 18, 1.) gleichnamig, indem man Dividendus und Divisor jedes Quotienten mit den übrigen Divisoren oder mit den nicht gemeinschaftlichen Factoren der übrigen Divisoren multiplicirt.

§. 20.

Ein Quotient ist gleich einem Bruch, dessen Zähler gleich dem Dividendus und dessen Nenner gleich dem Divisor ist.

Beweis: Es ist $4 : 5 = (1 + 1 + 1 + 1) : 5$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \quad (\S.\ 19.) = \frac{4}{5}$$

Ebenso kann man in dem Quotienten $a : b$ statt des Dividendus a die Summe von a Einheiten setzen $a : b = (1 + 1 + 1 + \ldots{}^{a\,\text{mal}}) : b$

$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \cdots{}^{a\,\text{mal}}$$

Man erhält hierdurch also den Bruch $\frac{1}{b}$ $a$mal als Summanden oder $\frac{1}{b} . a = \frac{a}{b}$. Also ist

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Die in den vorhergehenden und folgenden Paragraphen für Quotienten entwickelten Sätze lassen sich daher auf Brüche übertragen, indem man statt Dividend Zähler, statt Divisor Nenner setzt.

§. 21.

$$\text{I.}\quad a \times b : c = a : c \times b.$$

$$\text{II.}\quad a : m : n = a : n : m.$$

1. **Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Factor durch die Zahl dividirt.** (I.)

Beweis: $(a \times b : c) \times c = a \times b$ (§. 4.)
$(a : c \times b) \times c = a : c \times c \times b$ (§. 19.) $= a \times b$.

2. Aus der Umkehrung von Formel I. ergibt sich der Satz: **Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Dividend mit der Zahl multiplicirt und dies Product durch den Divisor dividirt.**

3. **Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Dividend durch die Zahl dividirt und diesen Quotienten durch den Divisor dividirt.** (II.)

Beweis: Multiplicirt man beide Seiten der Formel $a : m : n = a : n : m$ mit n, so erhält man $(a : m : n) \times n = a : m$,
und $(a : n : m) \times n = (a : n \times n) : m = a : m$.

§. 22.

$$a : b : c = a : (b \times c).$$

1. **Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Divisor mit der Zahl multiplicirt.**

Beweis: Nach §. 15, 3. ist es einerlei, ob man a mit b und c nacheinander oder mit dem Product $b \,.\, c$ multiplicirt. Hierdurch erhält man auf der ersten Seite $(a : b : c)\ c = a : b$, $(a : b)\ b = a$ und auf der zweiten Seite $a : (b \times c) \times (b \times c) = a$.

2. Aus der Umkehrung dieser Formel ergibt sich der Satz: **Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, indem man sie durch die einzelnen Factoren nach einander dividirt.**

§. 23.

$$\text{I. } c \,.\, \frac{a}{b} = \frac{c\,a}{b}. \quad \text{II. } \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{n\,q}.$$

Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplicirt, indem man sie mit dem Dividend multiplicirt und dies Product durch den Divisor dividirt. (I.)

Beweis: Die Multiplication mit b ergibt

$$\left(c \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot b = c \cdot \frac{a}{b}\ b = c \,.\, a$$

$$\frac{c\,a}{b} \cdot b = ca$$

2. Die Umkehrung obiger Formel enthält den Satz: **Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Factor durch die Zahl dividirt.**

3. **Ein Quotient wird mit einem Quotienten multiplicirt, indem man das Product der Dividenden durch das Product der Divisoren dividirt.** (II.)

Beweis: Multiplicirt man die erste Seite mit n und q, die zweite mit $n \,.\, q$, so erhält man nach §. 15, 3 $m\,p = m\,p$.

§. 24.

$$\text{I. } a : \frac{b}{c} = a : b \times c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

$$\text{II. } \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m:p}{n:q} = \frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p}.$$

1. **Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man sie in beliebiger Reihenfolge durch den Dividendus dividirt und mit dem Divisor multiplicirt, oder indem man die Zahl mit dem umgekehrten Quotienten multiplicirt.** (I.)

Beweis: Nach §. 23. ist es einerlei, ob man mit dem Quotienten $\frac{b}{c}$ multiplicirt, oder mit dem Dividend multiplicirt und durch den Divisor dividirt. Hierdurch erhält man

$$\left(a : \frac{b}{c}\right) \frac{b}{c} = a \text{ (§. 4.)}; \quad (a : b \times c) \times b : c = a \times c : c = a$$

$$\frac{ac}{b} \times b : c = ac : c = a; \quad \left(a \,.\, \frac{c}{b}\right) . \ b : c = ac : c = a$$

2. **Ein Quotient wird durch einen Quotienten dividirt, indem man den Quotienten der Dividenden durch den Quotienten der Divisoren dividirt, oder indem man den ersten Quotienten mit dem umgekehrten zweiten multiplicirt.** (II.)

Beweis: $\left(\frac{m}{n} : \frac{p}{q}\right) \times \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (§. 4.)

$$\left(\frac{m:p}{n:q}\right) \times \frac{p}{q} = \frac{m : p \times p}{n : q \times q} \text{ (§. 23.)} = \frac{m}{n} \text{ (§. 17, 1.)}$$

$$\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}\right) \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q \,.\, p}{p \,.\, q} \text{ (§. 15, 1.)} = \frac{m}{n} \cdot \quad \frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \text{ (§. 23, 2.)}$$

§. 25.

Division durch einen mehrgliedrigen Ausdruck.

$$\text{I. } \frac{mx + my + mz}{x + y + z} = m. \qquad \text{II. } \frac{A}{B} = C + \frac{A - BC}{B} = C - \frac{BC - B}{B}.$$

1. Wenn man den Dividendus so umformen kann, dass der Divisor als ein Factor desselben erscheint, so findet man durch Anwendung von §. 18. den Quotienten in der einfachsten Form.

Beispiele: $\frac{mx + my + mz}{x + y + z} = \frac{m\,(x + y + z)}{x + y + z} = m.$

$$\frac{mp + np + mq + nq}{m + n} = \frac{(m + n)\,p + (m + n)\,q}{m + n}$$

$$= \frac{(m + n)\,(p + q)}{m + n} = p + q$$

$$\frac{rt - ru + st - su}{t - u} = \frac{r(t-u) + s(t-u)}{t-u}$$

$$= \frac{(r+s)(t-u)}{t-u} = r + s$$

$$\frac{rt + ru - st - su}{t+u} = \frac{r(t+u) - s(t+u)}{t+u}$$

$$= \frac{(r-s)(t+u)}{t+u} = r - s$$

$$\frac{mp - np - mq + nq}{p-q} = \frac{(m-n)p - (m-n)q}{p-q}$$

$$= \frac{(m-n)(p-q)}{p-q} = m - n$$

2. Kann man den Dividendus nicht in solche Factoren zerlegen, so ist ein der Division bestimmter Zahlen ähnliches Verfahren anzuwenden. Nachdem man, falls es nöthig ist, die Glieder des Dividendus geordnet hat, dividirt man ein Glied des Dividendus durch das Glied des Divisors, welches den einfachsten Quotienten gibt. Diesen erhaltenen Partialquotienten multiplicirt man mit dem ganzen Divisor und subtrahirt das Resultat von dem Dividendus. Mit dem entstandenen Rest verfährt man ebenso wie mit dem Dividendus, und wiederholt dies Verfahren, bis der Rest gleich Null ist. (II.)

Der Beweis wird durch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor geführt, wodurch man (§. 4.) den Dividendus erhält.

$$\left(C + \frac{A - BC}{B}\right) . B = BC + A - BC = A$$

$$\left(C - \frac{BC - A}{B}\right) . B = BC - BC + A = A$$

Beispiel: $(10a^2 + 29ab + 21b^2) : (5a + 7b) = 2a + 3b$

$$\begin{array}{l} (10a^2 + 14ab \\ \hline \qquad 15ab + 21b^2 \\ \qquad 15ab + 21b^2 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nach einiger Uebung wird man die Division mehrgliedriger Ausdrücke in folgender abgekürzten Weise ausführen können.

$$\begin{array}{llllll|l} 55a^2 & + ab & - 24ac & - 36b^2 & + 37bc & - 7c^2 & 5a - 4b + c \\ \cline{7-7} 55a^2 & - 44ab & + 11ac & & & & 11a + 9b - 7c \\ & + 45ab & & - 36b^2 & + 9bc & & \\ & & - 35ac & & + 28bc & - 7c^2 & \\ \hline 55a^2 & + ab & - 24ac & - 36b^2 & + 37bc & - 7c^2 & \end{array}$$

3. Sind die Coëfficienten Brüche, so wird die Division häufig sehr erleichtert, wenn man Dividend und Divisor mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt.

Beispiel: $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{24}ab - \frac{1}{4}b^2 - 1\frac{5}{12}a + 1\right) : \left(\frac{1}{6}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}\right)$

$$= \left(12a^2 - ab - 6b^2 - 34a + 24\right) : \left(4a - 3b - 6\right)$$

4. Wenn der Divisor nicht als Factor im Dividendus enthalten ist, so kann man bei der Ausführung der Division nie den Rest Null erhalten. Die Division geht, wie man sagt, in diesem Fall nicht auf. Indessen stellt sich hierbei oft ein einfaches Gesetz heraus, nach welchem man beliebig viele Glieder des Quotienten bilden kann, ohne die Division weiter auszuführen.

Beispiel: $\frac{p}{a+x} = \frac{p}{a} - \frac{p}{a^2}x + \frac{p}{a^3}x^2 - \cdots = \frac{p}{a} - \frac{p}{a}\frac{x}{a} + \frac{p}{a}\frac{x^2}{a^2} - \cdots$

Man erkennt hieraus:

1) dass die Glieder abwechselnde Vorzeichen haben,
2) dass jedes Glied durch Multiplication des vorhergehenden mit $\frac{x}{a}$ gebildet wird.