MÉMOIRE

sur les triangles inscrits maxima et les triangles circonscrits minima de l'ellipse.*)

Soit ADBE (Fig 1.) une ellipse, dont les axes ont les valeurs 2a et 2b. Imaginons que, sur son grand axe, comme diamètre, on décrive une circonférence de cercle. Un point C de cette circonférence peut être déterminé par l'angle COB que le rayon CO forme avec l'axe OB. Désignons cet angle par la lettre m. Le même angle pourra être employé pour déterminer le point D de l'ellipse situé sur la perpendiculaire CF abaissée de C sur l'axe AB. Comme on a toujours

$$CF : DF = a : b,$$

les coordonnées du point D ont les valeurs

$$y = b \sin m, \qquad x = a \cos m.$$

Il est visible d'ailleurs que ces valeurs s'accordent avec l'équation

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

qui représente l'ellipse donnée.

Les remarques que nous venons de faire sur la détermination du point D, sont générales et s'appliquent également à tous les points de l'ellipse. Ainsi, chaque point de celle-ci est déterminé par un angle auxiliaire m, auquel les coordonnées de ce point sont liées par les équations

$$y = b \sin m, \qquad x = a \cos m.$$

Observons encore que l'angle $m + 2n\pi$ détermine le même point que l'angle m, n étant un nombre entier positif ou négatif.

---

*) J'ai composé ce mémoire à l'occasion d'un problème proposé par Mr. le professeur Steiner à Berlin dans le 30me tome du Journal de Mr. Crelle. Outre les démonstrations des théorèmes publiés par Mr. Steiner on y lira quelques résultats que j'ai trouvés en m'occupant de ce sujet.

Soit A (Fig. 2.) le point de l'ellipse déterminé par l'angle m. Deux autres points A_1 et A_2 étant déterminés par les angles m_1 et m_2, l'aire du triangle inscrit A A_1 A_2 sera une fonction des trois angles m, m_1, m_2. Exprimée au moyen des coordonnées des trois sommets elle a la valeur

$$\tfrac{1}{2}.\,(y + y_1).\,(x - x_1) + \tfrac{1}{2}\,(y_1 + y_2).\,(x_1 - x_2) + \tfrac{1}{2}.\,(y_2 + y).\,(x_2 - x).$$

Remplaçons les coordonnées des sommets par leurs valeurs. Le premier terme de l'expression précédente pourra être transformé en

$$\tfrac{1}{2}\,ab.\,\sin\,(m_1 - m) + \tfrac{1}{4}\,ab.\,\sin\,2m - \tfrac{1}{4}\,ab.\,\sin\,2m_1.$$

En y ajoutant les deux termes analogues on verra que les quantités multipliées par $\tfrac{1}{4}$ ab se détruisent mutuellement. Ainsi l'aire du triangle A A_1 A_2 est

$$\tfrac{1}{2}\,ab.\,\{\sin\,(m_1 - m) + \sin\,(m_2 - m_1) + \sin\,(m - m_2)\}.$$

Comme on a

$$(m_1 - m) + (m_2 - m_1) + (m - m_2) = 0,$$

l'aire est une fonction des deux différences $m_1 - m$ et $m_2 - m_1$.

Or, je dis que les valeurs de ces différences, pour lesquelles l'aire du triangle ou ce qui revient au même, la somme

$$\sin\,(m_1 - m) + \sin\,(m_2 - m_1) + \sin\,(m - m_2)$$

a la plus grande valeur, sont

$$m_1 - m = m_2 - m_1 = \tfrac{2}{3}\,\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.)$$

La démonstration de cette proposition peut être donnée sans avoir recours au calcul différentiel. En effet, l'expression

$$\tfrac{1}{2}\,ab.\,\{\sin\,(m_1 - m) + \sin\,(m_2 - m_1) + \sin\,(m - m_2)\}$$

donne la valeur générale du triangle inscrit à l'ellipse, quel que soit le rapport des deux axes de l'ellipse. Ainsi, lorsqu'on suppose le demi-axe b égal à a, il s'agit d'un triangle inscrit au cercle. De plus, dans le cercle, m, m_1, m_2, sont les angles que forme l'axe des abscisses avec le rayon de chacun des sommets. La valeur du triangle inscrit au cercle sera

$$\tfrac{1}{2}\,a^2\,\{\sin\,(m_1 - m) + \sin\,(m_2 - m_1) + \sin\,(m - m_2)\}.$$

Or le triangle inscrit au cercle a sa plus grande valeur lorsqu'il est équilatéral, ce qui exige que les angles m, m_1, m_2, soient liés entre eux par les équations

$$m_1 - m = m_2 - m_1 = \tfrac{2}{3}\,\pi.$$

Ainsi, le facteur $\tfrac{1}{2}\,a^2$ étant indépendant des angles m, ces équations renferment les conditions qui doivent être remplies pour que la somme

$$\sin\,(m_1 - m) + \sin\,(m_2 - m_1) + \sin\,(m - m_2)$$

ait sa plus grande valeur. Cette valeur est $\sqrt{27/4}$.

Les trois sommets A, A_1, A_2, pouvant être choisis à volonté sur l'ellipse, l'aire du triangle est une fonction des trois variables m, m_1, m_2. On devrait donc s'attendre de ce que les conditions du maximum fussent au nombre de trois. Mais, dans la valeur de cette aire ces variables n'entrent que par leurs différences liées entre elles par l'équation 1.), ce qui réduit à deux le nombre de ces conditions. Ainsi, un des trois sommets, A par exemple, peut être pris à volonté. Lorsqu'on détermine les deux autres sommets A_1 et A_2 de manière qu'on ait

$$m_1 = m + \frac{2}{3}\pi, \qquad m_2 = m + \frac{4}{3}\pi,$$

le triangle A A_1 A_2 aura sa plus grande valeur. En calculant cette valeur, on trouve ab $\sqrt{27/16}$. Cette expression ne renferme plus l'angle m employé pour spécialiser le sommet A pris à volonté. *Ainsi l'aire du triangle maximum* A A_1 A_2 *qui appartient à un point* A *de l'ellipse, est constante. Les triangles maxima de tous les points de l'ellipse sont égaux en grandeur.*

Le sommet A (Fig. 3) étant donné, il est aisé de trouver les deux autres sommets du triangle maximum A A_1 A_2 au moyen des points correspondants du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse. Soient B, B_1, B_2, ces points. Les équations

$$\angle BOB_1 = B_1OB_2 = \frac{2}{3}\pi$$

feront connaître B_1 et B_2, lorsque le point B est connu.

Il est bon d'observer *la réciprocité qui existe entre les trois sommets du triangle maximum.* En effet, les équations

$$m_1 = m + \frac{2}{3}\pi, \qquad m_2 = m + \frac{4}{3}\pi,$$

entraînent les suivantes

$$m_2 = m_1 + \frac{2}{3}\pi, \qquad m + 2\pi = m_1 + \frac{4}{3}\pi.$$

Mais le point de l'ellipse déterminé par l'angle $m + 2\pi$ est le même que le point A déterminé par l'angle m. Ainsi, les deux autres sommets du triangle maximum qui appartient au point A_1, ne sont autre chose que les points A_2 et A.

Occupons-nous à faire voir quelques propriétés remarquables du triangle maximum A A_1 A_2 (Fig 4). La corde A_1 A_2 est représentée par l'équation

$$\frac{y - b \sin m_1}{x - a \cos m_1} = \frac{b \sin m_1 - b \sin m_2}{a \cos m_1 - a \cos m_2}.$$

En vertu des équations 1) le second membre de cette équation a la valeur $-\frac{b}{a}$ cotang m. La tangente du point A étant représentée par l'équation

$$\frac{y - b \sin m}{x - a \cos m} = -\frac{b}{a} \text{ cotang } m,$$

on voit que la corde est parallèle à cette tangente. *Ainsi, chaque côté du triangle inscrit maximum est parallèle à la tangente menée à l'ellipse par le sommet opposé.* En effet, la figure 5 fait voir que le maximum ne saurait avoir lieu qu'à cette condition, à cause de la relation

$$\triangle A_1AA_2 = A_1BA_2 > A_1CA_2.$$

La corde A_1A_2 (Fig. 4) étant parallèle à la tangente menée par le point A, sera divisée en deux parties égales par le diamètre AC du point A. Ce diamètre, par conséquent, est une ligne de gravité du triangle AA_1A_2. En appliquant le même raisonnement aux diamètres des sommets A_1 et A_2, on reconnaîtra que *le centre de gravité de l'aire du triangle* AA_1A_2 *n'est autre chose que le centre* O *de l'ellipse.* De plus, on a l'équation AO = 2OD.

Comme la corde $A_1 A_2$ est parallèle à la tangente menée par le point A, elle est aussi parallèle au diamètre EF conjugué à celui de A. Ainsi il est facile d'effectuer la construction du triangle maximum qui appartient à un point donné A, au moyen du diamètre conjugué à celui de A.

Supposons trois forces parallèles égales, qui soient appliquées aux sommets du triangle inscrit maximum. On peut aisément s'assurer qu'en vertu des conditions du maximum on a

$$\sin m + \cos m_1 + \sin m_2 = 0,$$
$$\cos m + \cos m_1 + \cos m_2 = 0.$$

Cela suffit pour prouver que le centre de ces forces est déterminé par les coordonnées

$$y = 0, \qquad x = 0.$$

En conséquence, il coïncide avec *le centre de l'ellipse. Celui-ci, par conséquent, est aussi le centre de gravité des trois sommets du triangle inscrit maximum.*

* * *

Par trois points quelconques A, A_1, A_2, (Fig. 6) de l'ellipse menons des tangentes. Celles-ci seront les côtés du triangle BB_1B_2 circonscrit à l'ellipse. Les coordonnées de ses sommets auront les valeurs suivantes

$$\text{de } B_2: x = a.\frac{\cos \frac{1}{2}(m + m_1)}{\cos \frac{1}{2}(m - m_1)}, \qquad y = b.\frac{\sin \frac{1}{2}(m + m_1)}{\cos \frac{1}{2}(m - m_1)}.$$
$$\text{de } B: x = a.\frac{\cos \frac{1}{2}(m_1 + m_2)}{\cos \frac{1}{2}(m_1 - m_2)}, \qquad y = b.\frac{\sin \frac{1}{2}(m_1 + m_2)}{\cos \frac{1}{2}(m_1 - m_2)}.$$
$$\text{de } B_1: x = a.\frac{\cos \frac{1}{2}(m_2 + m)}{\cos \frac{1}{2}(m_2 - m)}, \qquad y = b.\frac{\sin \frac{1}{2}(m_2 + m)}{\cos \frac{1}{2}(m_2 - m)}.$$

L'aire du triangle BB_1B_2 étant exprimée par ces coordonnées, la forme de celles-ci fait voir que la valeur de l'aire aura la forme

$$\tfrac{1}{2}\, ab.\, M,$$

en désignant par M une fonction qui ne contient que les angles m, m_1, m_2. Or je dis que les conditions du minimum de M sont précisément les mêmes que nous avons trouvées pour le maximum du triangle AA_1A_2. Cette proposition peut être démontrée d'une manière, je crois, très-élégante en employant un raisonnement analogue à celui qui nous a fait connaître les conditions du maximum de AA_1A_2. Pour cela, supposons encore le demi-axe b égal à a. La substitution $b = a$ ne change pas la quantité M, qui est indépendante des demi-axes de l'ellipse. Ainsi, $\frac{1}{2} a^2 M$ est l'aire d'un triangle circonscrit au cercle. Or, celui-ci a la moindre valeur lorsqu'il est équilatéral, ce qui exige qu'on ait

$$m_1 - m = m_2 - m_1 = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Ainsi il est suffisamment prouvé que ces équations renferment les conditions du minimum de la fonction M, sans qu'il soit besoin d'entrer dans des détails quelconques sur la forme de cette fonction. D'ailleurs, la valeur du triangle minimum circonscrit au cercle étant $a^2 \sqrt{27}$, celle du triangle BB_1B_2 sera $ab. \sqrt{27}$. Plus loin cette valeur sera encore trouvée au moyen d'un autre raisonnement.

Dans l'énonce des conditions du minimum, les quantités m sont les angles auxiliaires qui déterminent les points de tangence. Par conséquent, *le triangle circonscrit à l'ellipse a sa moindre valeur, lorsque les points de tangence sont les sommets d'un triangle inscrit maximum.* De là il suit une relation très-curieuse entre les triangles inscrits et les triangles circonscrits à l'ellipse. *Trois points de l'ellipse qui sont les sommets d'un triangle inscrit maximum, déterminent trois tangentes de l'ellipse qui sont les côtés d'un triangle circonscrit minimum.*

La relation que nous avons indiquée tout à l'heure, nous fera connaître quelques propriétés remarquables. D'abord en ayant égard aux parallélogrammes $AA_2A_1B_2$ (Fig. 7) et $AB_1A_2A_1$, on reconnaîtra que B_1B_2 est le double de A_1A_2 et que le point A en est le milieu. Ainsi la ligne AD prolongée doit rencontrer le point B, ce qui exige que AB soit une ligne de gravité du triangle BB_1B_2. *Il s'ensuit que le centre de l'ellipse est le centre de gravité de* BB_1B_2 *et de tous les triangles circonscrits minima.* D'ailleurs, les aires des quatre triangles dont le triangle BB_1B_2 se compose sont égales. Ainsi, le triangle BB_1B_2 est quadruple de AA_1A_2. Par conséquent, *les aires de tous les triangles circonscrits minima ont la même valeur* ab. $\sqrt{27}$.

Concevons tous les triangles circonscrits minima de l'ellipse, et cherchons le lieu géométrique qui contient les sommets de tous ces triangles. Soit B un quelconque de ces sommets. Comme nous avons prouvé que le centre O de l'ellipse est le centre de gravité de BB_1B_2, on aura toujours une équation $BO = 2AO$, le point A étant situé sur l'ellipse donnée. Ainsi *le point* B *se trouve sur une nouvelle ellipse* dont les axes et le centre coïncident avec ceux de l'ellipse primitive et dont les dimensions sont doubles des dimensions de celle-ci. En vertu des conditions du minimum, les valeurs des coordonnées de B_2, B, B_1, trouvées plus haut, deviendront

de B_2: $x = 2a.\cos\frac{1}{2}(m + m_1)$, $\quad y = 2b.\sin\frac{1}{2}(m + m_1)$.

de B : $x = 2a.\cos\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $\quad y = 2b.\sin\frac{1}{2}(m_1 + m_2)$.

de B_1: $x = -2a.\cos\frac{1}{2}(m_2 + m)$, $\quad y = -2b.\sin\frac{1}{2}(m_2 + m)$,

ou

$$x = 2a\cos\tfrac{1}{2}(m_2 + m + 2\pi), \qquad y = 2b.\sin\tfrac{1}{2}(m_2 + m + 2\pi).$$

On remarquera que l'équation

$$\left(\frac{y}{2b}\right)^2 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2 = 1$$

qui représente la nouvelle ellipse est satisfaite, lorsqu'on y substitue les valeurs précédentes.

Les dimensions de la nouvelle ellipse étant doubles de celles de l'ellipse primitive, l'aire du triangle maximum inscrit à celle-là doit être quadruple de ab. $\sqrt{27/16}$ ou ab. $\sqrt{27}$. Or, voilà précisément *la valeur de tous les triangles minima circonscrits à l'ellipse primitive. Ces triangles,* en conséquence, *sont non seulement inscrits à la nouvelle ellipse, au contraire ils ne sont autre chose que les triangles inscrits maxima de cette ellipse.* Ce résultat peut être obtenu immédiatement en ayant égard aux valeurs des coordonnées de B_2, B, B_1. En effet, on reconnaîtra aisément que les équations

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) - \tfrac{1}{2}(m + m_1) = \tfrac{1}{2}(m_2 + m + 2\pi) - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) = \tfrac{2}{3}\pi$$

contiennent les conditions à remplir pour que le triangle inscrit BB_1B_2 soit un maximum pour la nouvelle ellipse. Nous indiquerons seulement que ces équations sont satisfaites en vertu des équations 1).

* * *

Soient A et A_1 (Fig. 8) deux points quelconques de l'ellipse, K et K_1 les points correspondants du cercle dont le grand axe de l'ellipse est un diamètre. Considérons l'aire de chacune de ces deux courbes terminée par les deux ordonnées, le grand axe et la courbe elle-même. On a

$$ADD_1A_1 : KDD_1K_1 = b : a.$$

De plus, choisissons pour unité l'angle dont le nombre de degrés est $\frac{180}{\pi}$. En evaluant l'aire KDD_1K_1, on trouvera

$$KDD_1K_1 = \tfrac{1}{2} a^2. (m_1 - m) - \tfrac{1}{4} a^2. (\sin 2 m_1 - \sin 2 m),$$

d'où il suit

$$ADD_1A_1 = \tfrac{1}{2} ab. (m_1 - m) - \tfrac{1}{4} ab. (\sin 2 m_1 - \sin 2 m).*)$$

De l'aire ADD_1A_1 retranchons la valeur du trapèze ADD_1A_1

$$\tfrac{1}{2} ab. \sin (m_1 - m) - \tfrac{1}{4} ab. (\sin 2 m_1 - \sin 2 m),$$

leur différence

$$\tfrac{1}{2} ab. \{ (m_1 - m) - \sin (m_1 - m) \}$$

sera l'aire du segment de l'ellipse compris entre l'arc A_1A et la corde qui le soutend. En ayant égard aux valeurs de $m_1 - m$, $m_2 - m_1$, $m - m_2$, qui déterminent le triangle maximum AA_1A_2, la valeur de chacun des segments compris entre les côtés du triangle et l'ellipse sera

$$\tfrac{1}{2} ab. (\tfrac{2}{3}\pi - \sqrt{\tfrac{3}{4}}) \text{ ou } ab. (\tfrac{1}{3}\pi - \sqrt{\tfrac{3}{16}}).$$

On voit que *les côtés du triangle inscrit maximum déterminent des segments de l'ellipse dont la valeur est constante.* Le triple de cette valeur ajouté à celle du triangle AA_1A_2, donne π ab, ce que nous savons être l'aire de l'ellipse elle-même.

L'aire du triangle A_1AO étant exprimée au moyen des coordonnées de ses sommets, on trouve la valeur

$$\tfrac{1}{2} ab. \sin (m_1 - m).$$

Cette valeur ajoutée à celle du segment

$$\tfrac{1}{2} ab. \{ (m_1 - m) - \sin (m_1 - m) \},$$

*) On reconnaitra aisément que le second membre de cette équation n'est autre chose que la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ ou $-$ ab. $\int \sin^2 m\, dm$, depuis $m = m$ jusqu'à $m = m_1$. — C'est pour éviter dans le cours de ce mémoire l'application de l'Analyse infinitésimale, que j'ai déduit la valeur de ADD_1A_1 de la manière qu'on vient de lire.

donne $\frac{1}{2}$ ab. $(m_1 - m)$ qui est celle du secteur $A_1 0 A$. Lorsque les points A, A_1, A_2, sont les sommets d'un triangle maximum, on a $m_1 - m = m_2 - m_1 = \frac{2}{3}\pi$; le secteur $A_1 0 A$, en conséquence, ainsi que chacun des deux secteurs $A_2 0 A_1$ et $A 0 A_2$ auront la valeur $\frac{1}{3}\pi$ ab. Il suit de là que *les sommets du triangle inscrit maximum déterminent trois secteurs équivalents de l'ellipse.* De plus, l'aire $\frac{1}{2}$ ab. sin $(m_1 - m)$ du triangle $A_1 0 A$ aura la valeur ab. $\sqrt{\frac{3}{16}}$, qui sera aussi celle des deux autres triangles $A_2 0 A_1$ et $A 0 A_2$. D'ailleurs l'égalité de ces trois triangles est une conséquence de ce que le point 0 est le centre de gravité du triangle $A A_1 A_2$.

Désignons par u et v (Fig. 9) les parties des deux axes de l'ellipse interceptées par le point 0 et les points d'intersection des prolongements de $A_1 A$. En faisant $m_1 - m = 2\vartheta$, on trouvera

$$u = \frac{b \cos \vartheta}{\sin \frac{1}{2}(m_1 + m)}, \quad v = \frac{a \cos \vartheta}{\cos \frac{1}{2}(m_1 + m)},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{b \cos \vartheta}{u}\right)^2 + \left(\frac{a \cos \vartheta}{v}\right)^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Cette relation entre les quantités u et v suffit pour prouver que la corde $A_1 A$, quelle qu'en soit la situation, est toujours tangente à la même ellipse, pourvu que ses extrémités soient liées par l'équation

$$m_1 - m = \text{Const.}$$

En effet, menons une tangente quelconque à l'ellipse représentée par l'équation

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1.$$

De plus, désignons par u et v les parties des axes interceptées par la tangente. Il sera aisé de prouver qu'entre les quantités u et v il existe toujours la relation

$$\left(\frac{B}{u}\right)^2 + \left(\frac{A}{v}\right)^2 = 1,$$

quel que soit le point de l'ellipse par lequel la tangente a été menée. Ainsi en vertu de l'équation 2), la corde $A_1 A$ est tangente à l'ellipse dont les axes ont les valeurs b cos ϑ et a cos ϑ. Or, la valeur de $m_1 - m$ ou 2ϑ, par hypothèse, est constante pour toutes les cordes $A_1 A$. Ainsi ces cordes sont des tangentes de la même ellipse, ce qu'il s'agissait de prouver.

Ce qu'on vient de lire renferme encore la solution du problème: *Déterminer pour une ellipse la courbe enveloppée par toutes les cordes qui appartiennent à des segments équivalents.* L'expression générale de l'aire du segment étant

$$\tfrac{1}{2} \text{ ab. } \{ (m_1 - m) - \sin (m_1 - m) \};$$

on voit que des segments équivalents appartiennent à des cordes dont les extrémités sont liées entre elles au moyen d'une équation de la forme

$$m_1 - m = \text{Const.}$$

Nous connaissons déjà le lieu géométrique enveloppé par des cordes de cette espèce; c'est une ellipse semblable à l'ellipse primitive et semblablement disposée par rapport à celle-ci. Quant à ses axes, on calculera leurs valeurs b cos ϑ et a cos ϑ, après avoir déterminé l'angle ϑ au moyen de l'équation

$$\tfrac{1}{2}\, ab.\, (2\vartheta - \sin 2\vartheta) = S,$$

en désignant par S la valeur constante du segment de l'ellipse.

Nous nous bornerons à indiquer qu'en vertu de l'équation

$$2\vartheta = m_1 - m = \tfrac{2}{3}\,\pi,$$

les côtés de tous les triangles inscrits maxima sont tangentes à l'ellipse qui a les demi-axes $\tfrac{1}{2}$ a *et* $\tfrac{1}{2}$ b. D'ailleurs, on peut obtenir le même résultat en considérant les triangles maxima BB_1B_2 inscrits dans la grande ellipse de la figure 7.

* * *

Nous avons vu que le centre de gravité est le même pour tous les triangles maxima inscrits à une ellipse. Remarquons quelques propriétés curieuses dont les autres points singuliers de ces triangles sont doués. D'abord, les hauteurs du triangle AA_1A_2 sont normales à l'ellipse aux points A, A_1, A_2. Ainsi les hauteurs abaissées des sommets A et A_1 (Fig. 10) sont représentées par les équations suivantes

$$\frac{y - b \sin m}{x - a \cos m} = \frac{a}{b}.\ \text{tang}\ m,$$

$$\frac{y - b.\ \sin\,(m + \tfrac{2}{3}\,\pi)}{x - a.\ \cos\,(m + \tfrac{2}{3}\,\pi)} = \frac{a}{b}.\ \text{tang}\ (m + \tfrac{2}{3}\,\pi).$$

Combinons ces équations pour avoir les coordonnées du point d'intersection G. Nous trouvons les valeurs

$$y = -\frac{a^2 - b^2}{2b}.\ \sin 3\,m, \qquad x = -\frac{a^2 - b^2}{2a}.\ \cos 3\,m \quad \ldots\ldots \quad 3.)$$

On reconnaîtra que l'équation

$$\left(\frac{y}{\frac{a^2 - b^2}{2b}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\frac{a^2 - b^2}{2a}}\right)^2 = 1$$

est satisfaite par ces valeurs. Ainsi *le point* G *est situé sur l'ellipse* représentée par cette équation. Le centre de cette ellipse est celui de l'ellipse primitive. De plus la direction et le rapport des axes sont les mêmes pour les deux ellipses, avec cette reserve que la direction du grand axe de l'une est celle du petit axe de l'autre, et réciproquement. C'est ce qu'on vérifiera aisément en discutant l'équation trouvée.

Le point G qu'on vient de considérer est encore le centre du cercle circonscrit au triangle BB_1B_2. On pourrait donc obtenir par analogie, sans avoir recours à des calculs ultérieurs, les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle AA_1A_2, ainsi que le lieu géométrique de ce centre. Continuons d'employer la méthode analytique; la perpendiculaire élévée en D à A_1A_2 est représentée par l'équation

$$\frac{y + \tfrac{1}{2}\, b \sin m}{x + \tfrac{1}{2}\, a \cos m} = \frac{a}{b}.\ \text{tang}\ m.$$

En cherchant l'intersection H de cette ligne avec une quelconque des deux autres perpendiculaires, on obtient les valeurs suivantes des coordonnées de ce point

$$y = \frac{a^2 - b^2}{4b} \sin 3m, \qquad x = \frac{a^2 - b^2}{4a} \cos 3m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4.)$$

Ainsi, le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit à $A A_1 A_2$ est l'ellipse représentée par l'équation

$$\left(\frac{y}{\frac{a^2 - b^2}{4b}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\frac{a^2 - b^2}{4a}}\right)^2 = 1.$$

Nous ne nous arrêterons pas à discuter cette équation. La forme en indique suffisamment les relations qui existent entre cette nouvelle ellipse et celles qui précèdent. Quant à la valeur r du rayon A H, son expression sera trouvée au moyen des coordonnées connues des points A et H. De cette manière on obtient l'équation

$$32\, a^2\, b^2\, r^2 = (a^2 + b^2) . (\, a^4 + 14\, a^2\, b^2 + b^4) - (a^2 - b^2)^3 . \cos 6\, m \; . \; . \; . \; . \; . \; 5.)$$

On voit que les équations

$$\cos 6\, m = -1 \quad \text{et} \quad \cos 6\, m = +1$$

font connaître les conditions du maximum et du minimum de r. Les valeurs de ceux-ci seront

$$r = \frac{a^2 + 3b^2}{4b} \quad \text{et} \quad r = \frac{3a^2 + b^2}{4a}$$

Pour tout triangle le produit des trois côtés est égal à l'aire multipliée par le quadruple du rayon. Or, l'aire est la même pour tous les triangles; ainsi, le maximum et le minimum du produit des trois côtés sont assujettis aux mêmes conditions que ceux du rayon. Leurs valeurs sont

$$a . (a^2 + 3b^2) . \sqrt{{}^{27}/_{16}} \quad \text{et} \quad b . (3a^2 + b^2) . \sqrt{{}^{27}/_{16}}.$$

Nous n'entrerons pas dans des détails relativement aux valeurs de m; il est évident qu'en cas du maximum on a

$$m = + \tfrac{1}{6}\, \pi \quad \text{et} \quad m = + \tfrac{1}{2}\, \pi,$$

en négligeant toutes les valeurs qui ne diffèrent de celles-ci que d'un multiple de $\tfrac{1}{3}\, \pi$. De même on a pour le minimum

$$m = 0 \quad \text{et} \quad m = \pi.$$

Par conséquent, *le cercle circonscrit au triangle maximum sera maximum ou minimum, lorsqu'un des sommets du triangle est situé à l'extrémité du petit ou du grand axe de l'ellipse.* Remarquons encore que dans l'un et l'autre cas *le triangle dont il s'agit est isoscèle.*

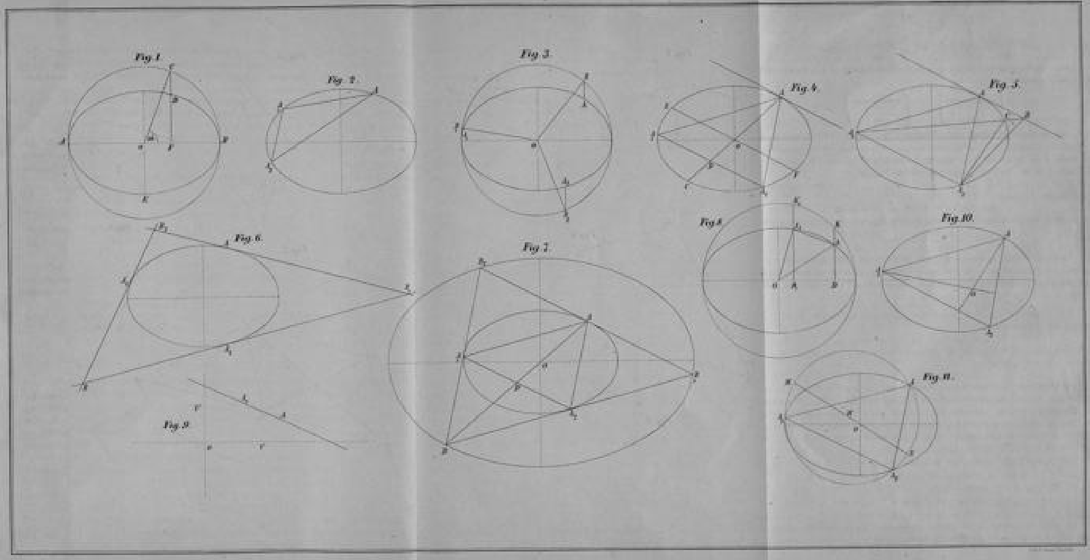
Dans le cercle circonscrit au triangle $A A_1 A_2$ (Fig. 11) traçons le diamètre MN qui passe par le centre O de l'ellipse. En O il sera divisé en deux parties dont les valeurs seront $r + g$ et $r - g$, en désignant par g la distance comprise entre le centre H du cercle et le centre O de l'ellipse. Or, O étant l'origine des coordonnées, la quantité g^2 est la somme des carrés des coordonnées du point H. De là il suit qu'on a

$$32\, a^2\, b^2\, g^2 = (a^2 + b^2) . (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2)^3 . \cos 6\, m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6.)$$

En combinant cette équation avec l'équation 5) on trouve

$$r^2 - g^2 = \tfrac{1}{2}\, (a^2 + b^2).$$

La quantité $r^2 - g^2$ est *le produit des parties MO et NO du diamètre,* dont les valeurs sont $r + g$ et $r - g$. *Ainsi la valeur de ce produit est constante.*



Entre les points singuliers du triangle on doit compter le centre du cercle inscrit. Quant au lieu géométrique de ce centre, je ne suis pas parvenu à le représenter d'une manière simple et élégante; je laisse cette recherche à faire à des savants plus habiles ou plus heureux que moi. Observons seulement qu'entre le rayon ρ du cercle inscrit et la somme S des côtés il existe la relation

$$\tfrac{1}{2}\, S\, \rho = T,$$

en désignant par T l'aire constante du triangle. Ainsi, les conditions du maximum et du minimum de ρ sont les mêmes que celles du minimum et du maximum de S. — De plus en m'occupant de la valeur de S

$$S = \sqrt{3}\,.\sqrt{[a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega]} + \sqrt{3}\,.\sqrt{[a^2 \sin^2 (\omega + \tfrac{2}{3}\pi)} $$
$$+ b^2 \cos^2 (\omega + \tfrac{2}{3}\pi)] + \sqrt{3}\,.\sqrt{[a^2 \sin^2 (\omega + \tfrac{4}{3}\pi) + b^2 \cos^2 (\omega + \tfrac{4}{3}\pi)]} \;\ldots\; 7.)$$

j'ai trouvé l'équation suivante

$$x^4 - 18.(a^2 + b^2).x^3 + 27.(3a^4 + 4a^2 b^2 + 3b^4).x^2 - 54.(a^6 + 6a^4 b^2$$
$$+ 6a^2 b^4 + b^6 - (a^2 - b^2)^3 \cos 6\omega).x + 729\, a^4 b^4 = 0 \;\ldots\ldots\; 8.)$$

La plus grande racine positive de cette équation donne la valeur de S qui, par cette raison, est une fonction de l'angle 6 ω. Je dois m'abstenir de discuter en détail cette équation dont les racines sont liées entre elles par des relations remarquables.

Voici encore une observation générale par laquelle je terminerai ce mémoire: Chacun des triangles maxima inscrits à l'ellipse est spécialisé par l'angle auxiliaire ω qui entre dans les valeurs des coordonnées du sommet A. Tout résultat dont l'énoncé, soit analytique, soit synthétique, est indépendant de cet angle, est le même pour tous les triangles. On a vu que tels sont le centre de gravité et l'aire du triangle. D'autre part, tout ce qui change de triangle à triangle, doit se reconnaître à l'angle ω qui entre dans l'énoncé du résultat. Or, en vertu de la réciprocité qui existe entre les trois sommets du triangle, les résultats de cette espèce doivent être les mêmes lorsqu'on remplace l'angle ω par $\omega + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $\omega + \tfrac{4}{3}\pi$. C'est de deux manières qu'on y pourra satisfaire. D'abord, toute expression analytique qui est symmétrique par rapport aux quantités ω, $\omega + \tfrac{2}{3}\pi$, $\omega + \tfrac{4}{3}\pi$, indique des résultats de l'espèce désignée. Pour en offrir un exemple nous renvoyons à l'équation 7). Mais, pour que les valeurs d'une fonction ne changent pas en substituant $\omega + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $\omega + \tfrac{4}{3}\pi$ à l'angle ω, il n'est pas nécessaire qu'elle soit symmétrique. Il suffit que l'angle ω n'y entre que par les lignes trigonométriques de son triple 3 ω ou des multiples de celui-ci, quelle que soit d'ailleurs la forme de cette fonction. En effet, les lignes trigonométriques de l'angle 3 ω sont les mêmes que celles de l'angle $3.(\omega + \tfrac{2}{3}\pi)$ ou $3.(\omega + \tfrac{4}{3}\pi)$. Par conséquent, la valeur d'une fonction des lignes trigonométriques de l'angle 3 ω ne change pas, lorsque l'angle ω y est remplacé par $\omega + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $\omega + \tfrac{4}{3}\pi$. On vient de voir que les coordonnées des points G et H, ainsi que les quantités r, R, S des équations 5), 6), 8), sont des fonctions de cette espèce.

Barmen, Juillet 1853.

Dr. Fasbender.

Entre les points singuliers du triangle on doit compter le centre du cercle inscrit. Quant au lieu géométrique de ce centre, je ne suis pas parvenu à le représenter d'une manière simple et élégante; je laisse cette recherche à faire à des savants plus habiles ou plus heureux que moi. Observons seulement qu'entre le rayon ϱ du cercle inscrit et la somme S des côtés il existe la relation

$$\tfrac{1}{2}\, S\, \varrho = T,$$

en désignant par T l'aire constante du triangle. Ainsi, les conditions du maximum et du minimum de ϱ sont les mêmes que celles du minimum et du maximum de S. — De plus en m'occupant de la valeur de S

$$S = \sqrt{3}\,\sqrt{[a^2 \sin^2 m + b^2 \cos^2 m]} + \sqrt{3}\,\sqrt{[a^2 \sin^2 (m + \tfrac{2}{3}\pi) + b^2 \cos^2 (m + \tfrac{2}{3}\pi)]} + \sqrt{3}\,\sqrt{[a^2 \sin^2 (m + \tfrac{4}{3}\pi) + b^2 \cos^2 (m + \tfrac{4}{3}\pi)]} \ldots 7.)$$

j'ai trouvé l'équation suivante

$$x^8 - 18.\,(a^2 + b^2).\,x^6 + 27.\,(3a^4 + 4a^2\, b^2 + 3b^4).\,x^4 - 54.\,\{a^6 + 6a^4\, b^2 + 6a^2\, b^4 + b^6 - (a^2 - b^2)^3.\, \cos 6\, m\}.\, x^2 + 729\, a^4\, b^4 = o \;.\;.\;.\;.\;.\; 8.)$$

La plus grande racine positive de cette équation donne la valeur de S qui, par cette raison, est une fonction de l'angle 6 m. Je dois m'abstenir de discuter en détail cette équation dont les racines sont liées entre elles par des relations remarquables.

Voici encore une observation générale par laquelle je terminerai ce mémoire: Chacun des triangles maxima inscrits à l'ellipse est spécialisé par l'angle auxiliaire m qui entre dans les valeurs des coordonnées du sommet A. Tout résultat dont l'énoncé, soit analytique, soit synthétique, est indépendant de cet angle, est le même pour tous les triangles. On a vu que tels sont le centre de gravité et l'aire du triangle. D'autre part, tout ce qui change de triangle à triangle, doit se reconnaître à l'angle m qui entre dans l'énoncé du résultat. Or, en vertu de la réciprocité qui existe entre les trois sommets du triangle, les résultats de cette espèce doivent être les mêmes lorsqu'on remplace l'angle m par $m + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $m + \tfrac{4}{3}\pi$. C'est de deux manières qu'on y pourra satisfaire. D'abord, toute expression analytique qui est symmétrique par rapport aux quantités m, $m + \tfrac{2}{3}\pi$, $m + \tfrac{4}{3}\pi$, indique des résultats de l'espèce désignée. Pour en offrir un exemple nous renvoyons à l'équation 7). Mais, pour que les valeurs d'une fonction ne changent pas en substituant $m + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $m + \tfrac{4}{3}\pi$ à l'angle m, il n'est pas nécessaire qu'elle soit symmétrique. Il suffit que l'angle m n'y entre que par les lignes trigonométriques de son triple 3 m ou des multiples de celui-ci, quelle que soit d'ailleurs la forme de cette fonction. En effet, les lignes trigonométriques de l'angle 3 m sont les mêmes que celles de l'angle $3.\,(m + \tfrac{2}{3}\pi)$ ou $3.\,(m + \tfrac{4}{3}\pi)$. Par conséquent, la valeur d'une fonction des lignes trigonométriques de l'angle 3 m ne change pas, lorsque l'angle m y est remplacé par $m + \tfrac{2}{3}\pi$ ou $m + \tfrac{4}{3}\pi$. On vient de voir que les coordonnées des points G et H, ainsi que les quantités r, g, x, des équations 5), 6), 8), sont des fonctions de cette espèce.

BARMEN, Juillet 1853. Dr. **Fasbender.**