Anhang.

Formeln zur Berechnung der Krystalle.

Die Krystallberechnungen geschehen am einfachsten mit Anwendung der sphärischen Trigonometrie. In den meisten Fällen hat man es nur mit rechtwinklichen sphärischen Dreiecken zu thun und die dafür geltenden Formeln finden manche Abkürzung, da mit Rücksicht auf die Krystallschnitte öfters Winkel von 60^0, 30^0 und 45^0 in die Rechnung kommen und $\cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$; $\tang 45^0 = 1$.

I. Das Rhomboeder.

1) Gegeben der halbe Schtlktw.*) $= \alpha$, gesucht die Neigung der Scheitelkante zur Axe $= c$

$$\cos c = \cot \alpha . \cot 60^0 .$$

2) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Fläche zur Axe $= a$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin 60^0} .$$

3) Gegeben die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cot \tfrac{1}{2} \alpha = \cos c . \tang 60^0 .$$

4) Gegeben die Neigung der Fläche zur Axe $= a$, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \cos a . \sin 60^0 .$$

5) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht der ebene Winkel am Scheitel $= b$

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \frac{\cos 60^0}{\sin \alpha} .$$

*) Hier wie bei den Pyramiden ist Schtlktw. = Scheitelkantenwinkel und Randktw. = Randkantenwinkel.

6) Um die Axenlänge in Beziehung auf die aus der Mitte der Randkante auf die Axe gefällten Normale = 1 zu bestimmen, berechnet man den Winkel c dieser Normale mit der vom Scheitel auf sie gezogenen Linie. tang c giebt die halbe Axenlänge. Es sei die Neigung der Fläche zur Axe = a, so ist

$$\text{tang } c = \cot a.\ \cos 30^0.$$

II. Die Hexagonpyramide.

1) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$, gesucht der Schtlktw. $= \beta$

$$\cos \tfrac{1}{2}\ \beta = \tfrac{1}{2} \sin \alpha.$$

2) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \beta$, gesucht der Randktw. $= \alpha$

$$\sin \tfrac{1}{2}\ \alpha = 2.\ \cos \beta.$$

3) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Fläche zur Axe $=$ a

$$\cos a = 2 \cos \alpha.$$

4) Gegeben die Neigung der Fläche zur Axe = a, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cos \tfrac{1}{2}\ \alpha = \tfrac{1}{2} \cos a.$$

5) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Schtlkt. zur Axe = c

$$\cos c = \cot \alpha.\ \cot 30^0.$$

6) Gegeben die Neigung der Schtlkt. zur Axe = c, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cot \tfrac{1}{2}\ \alpha = \cos c.\ \text{tang } 30^0.$$

7) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht der ebene Winkel am Scheitel = b

$$\cos \tfrac{1}{2}\ b = \frac{\cos 30^0}{\sin \alpha}.$$

8) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$, gesucht der ebene Winkel am Rand = c

$$\cot c = \cos \alpha.\ \cot 60^0.$$

9) Zur Bestimmung der halben Axenlänge in Beziehung auf die halbe Diagonale der Basis = 1 dient der halbe Winkel zweier an der Basis zusammenstoßender Scheitelkt. = a, dessen tang die verlangte Axenlänge. Wenn der halbe Randktw. $= \alpha$, so ist

$$\text{tang } a = \text{tang } \alpha.\ \sin 60^0.$$

III. Das Skalenoeder.

Es sei der Winkel an den kürzern Scheitelkt. $= x$, an den längeren $= y$, an den Randkt. $= z$.

1) Gegeben x und y, gesucht z

$$\sin \tfrac{1}{2} z = \cos \tfrac{1}{2} x + \cos \tfrac{1}{2} y.$$

2) Gegeben x und z, gesucht y

$$\cos \tfrac{1}{2} y = \sin \tfrac{1}{2} z - \cos \tfrac{1}{2} x.$$

3) Gegeben y und z, gesucht x

$$\cos \tfrac{1}{2} x = \sin \tfrac{1}{2} z - \cos \tfrac{1}{2} y.$$ (Naumann.)

IV. Die Quadratpyramide.

1) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$, gesucht der Schtlktw. $= \beta$

$$\cos \tfrac{1}{2} \beta = \cos 45^0 . \sin \alpha.$$

2) Gegeben der halbe Schtlkw. $= \beta$, gesucht der Randktw. $= \alpha$

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos 45^0}.$$

3) Gegeben die Neigung der Fläche zur Axe $= a$, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \cos a . \sin 45^0.$$

4) Gegeben die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$, gesucht der Schtlktw. $= \alpha$

$$\cot \tfrac{1}{2} \alpha = \cos c.$$

5) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Fläche zur Axe $= a$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin 45^0}.$$

6) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$

$$\cos c = \cot a.$$

7) Gegeben der halbe Schtlktw. $= \alpha$, gesucht der ebene Winkel am Scheitel $= b$

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \frac{\cos 45^0}{\sin \alpha}.$$

8) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$, gesucht der ebene Winkel am Rand $= c$

$$\cot c = \cos \alpha.$$

9) Um die halbe Axenlänge $= a$ gegen die halbe Diagonale der Basis $= 1$ zu bestimmen, berechnet man die Neigung der Schtlkt. zu dieser Diagonale oder den Winkel A, dessen Tangente die verlangte Axenlänge. Wenn der halbe Randktw. $= \alpha$, so ist

$$\tang A = \tang \alpha . \sin 45^0.$$

V. Das Dioctaeder.

Zur Berechnung der Dioctaeder sind 2 Kantenwinkel erforderlich. Sind die halben Schtlktw. an den schärfern Kanten $= \alpha$ und an den stumpfern $= \beta$, so berechnet man die Neigung der schärferen Schtlkte. zur Axe $= b$ aus den drei Winkeln des sphär. Dreiecks α, β und $\gamma = 45^0$ nach der bekannten Formel

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (S - \alpha) \cos (S - \gamma)}{\sin \alpha . \sin \gamma}},$$

wo $S = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)$.

Den erhaltenen Winkel b zieht man von 90^0 ab und hat dann im rechtwinkl. sphär. Dreieck

$90^0 - b = a$; $\beta =$ der halbe Schtlktw. an der schärferen Schtlkte. Der Randktw. sei $= \alpha$, so ist

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha = \cos a . \sin \beta.$$

In andern Fällen wird ähnlich verfahren.

VI. Die Rhombenpyramide.

1) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$ und der halbe spitze ebene Winkel der Basis $= b$, gesucht der Neigw. der Fl. an den längern (schärferen) Schtlktn. $= \beta$

$$\cos \tfrac{1}{2} \beta = \cos b . \sin \alpha.$$

Um den Winkel an den kürzeren Schtlkt. zu finden, ist der halbe stumpfe Winkel der Basis als b in Rechnung zu bringen.

2) Gegeben einer der halben Schtlktw. $= \beta$ und einer der entsprechenden halben Winkel der Basis $= b$, gesucht der Randktw. $= \alpha$

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b}.$$

Die schärferen (längeren) Schtlkt. fallen immer in den spitzen Winkel der Basis, die stumpferen Schtlkt. in den stumpfen W. d. B.

3) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$ und der halbe spitze Winkel der Basis $= b$, gesucht die Neigung der schärfern Schtlkte. zur Makrodiagonale $= a$

$$\text{tang } a = \text{tang } \alpha . \sin b.$$

Für die Neigung der stumpfern Schtlkt. zur Brachydiagonale wird der halbe stumpfe Winkel der Basis in Rechnung gebracht.

4) Gegeben die Neigung der schärfern Schtlkt. zur Axe $= a$ und ebenso die der stumpferen $= b$ (oder die Neigung der entspre-

chenden Domen), gesucht die Schtlktw. an den schärferen Kanten $= \beta$ und an den stumpferen $= \alpha$

$$\cot \tfrac{1}{2} \beta = \cot b. \sin a; \cot \tfrac{1}{2} \alpha = \cot a. \sin b.$$

5) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$ und die Neigung der schärfern Schtlkt. zur Basis $=$ a, gesucht der Winkel an den schärferen Schtlkt. $= \beta$

$$\sin \tfrac{1}{2} \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}.$$

Bei gegeb. Neig. der stumpferen Schtlkt. zur Basis ist die Rechnung für den Winkel der Fl. an diesen Kanten dieselbe.

6) Gegeben der halbe Randktw. $= \alpha$ und der halbe spitze Winkel der Basis $=$ b, gesucht der ebene Winkel der Pyramidenfläche zwischen der schärfern Schtlkte. und Randkte. $=$ c

$$\cot c = \cot b. \cos \alpha.$$

Für den Flächenwinkel zwischen der stumpferen Schtlkte. und Randkte. wird der halbe stumpfe W. d. Bas. in Rechnung gebracht.

7) Zur Bestimmung der Dimensionen berechnet man die Neig. der schärfern Schtlkt. zur Makrodiagonale (nach 3). Für die halbe Makrodiagonale b $=$ 1 ist die tang des berechneten Winkels die halbe Hauptaxe $=$ a. Die Tangente des halben spitzen Winkels der Basis bestimmt die halbe Brachydiagonale $=$ c.

VII. Das Hendyoeder.

1) Gegeben der halbe vordere Seitenkantenwinkel $= \beta$ und die Neigung der Endfl. zur Seitenfl. $= \alpha$, gesucht die Neigung der Klinodiagonale oder der Endfl. zur Axe $=$ a

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

2) Gegeben die Neig. der Endfl. zur Axe $=$ a und der halbe vordere Seitenkantenwinkel $= \beta$, gesucht die Neig. der Endfl. zur Seitenfl. $= \alpha$

$$\cos \alpha = \cos a. \sin \beta.$$

3) Gegeben der halbe Seitenktw. an der Orthodiagonale $= \alpha$ und die Neigung der Endfl. zur Seitenfl. $= \beta$, gesucht der spitze ebene Winkel der Seitenfl. $=$ o

$$\cos o = \tan \alpha \cot \beta.$$

4) Gegeben der halbe Seitenktw. an der Orthodiag. $= \alpha$ und die Neigung der Endfl. zur Seitenfl. $= \beta$, gesucht der ebene Winkel der Endfläche an der Orthodiagonale $=$ a

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

5) Die Dimensionen bestimmt man durch Angabe des Verhältnisses der halben Hauptaxe = a zur halben im klinodiagonalen Hauptschnitt liegenden Diagonale des horizontalen Hauptschnittes b, welche = 1 gesetzt wird und zur halben zweiten Diagonale dieses Schnittes.

a ist die Tangente des Winkels der Endfl. mit der Diagonale b und c die Tangente des halben vorderen Seitenkantenwinkels.

VIII. Klinorhomboidische Gestalten.

Diese können nur mit Anwendung der Formeln für schiefwinkliche sphärische Dreiecke berechnet werden

Eine sehr brauchbare Formel für die Berechnung des Winkels λ im Rhomboid Fig. 83, wenn γ und β gegeben, ist die von Kupffer mitgetheilte

$$\tan \lambda = \frac{2. \sin \beta. \sin \gamma}{\sin \beta - \gamma}.$$

IX. Die tesseralen Gestalten.

Die tesseralen Gestalten können mit den vorhergehenden Formeln leicht berechnet werden, denn es gelten an ihnen für alle dreiflächigen einkantigen Ecken die Formeln für das Rhomboeder (I.), für alle 4fl. einkantigen Ecken mit gleicher Flächenneigung zur Eckenaxe die Formeln für die Quadratpyramide (IV.), für alle 4fl. Ecken mit abwechselnd gleichen Kanten die Formeln für die Rhombenpyramide (VI.), für 6fl. Ecken, je nachdem ihre Kanten gleich oder nur abwechselnd gleich, die Formeln für die Hexagonpyramide (II.) oder für das Skalenoeder (III.) u. s. w. Einige Beispiele mögen dieses zeigen.

1) Am Triakisoktaeder sei der Winkel an den längeren Kanten a gegeben und gesucht der Winkel an den kürzeren Kanten b. Man ziehe von a den Oktaederwinkel (109° 28′ 16″) ab, halbire den Rest und ziehe den erhaltenen Winkel von 90° ab, so erhält man die Neigung der Fläche zur trigonalen Axe = a, woraus nach Formel 4 beim Rhomboeder (I.) der verlangte Winkel an den Kanten b berechnet wird. Ist der Winkel an letztern Kanten gegeben, so verfährt man umgekehrt, um den Winkel der Kanten a zu finden ꝛc.

2) Am Tetrakishexaeder sei der Winkel an den längeren Kanten a gegeben und gesucht der Winkel an den kürzeren Kanten b. Man zieht vom gegebenen Winkel 90° ab, halbirt den Rest und berechnet (diesen als halben Randkantenwinkel genommen) nach

Formel 1) IV. den Winkel der Kanten b. — Der umgekehrte Fall versteht sich, ebenso die Berechnung der ebenen Winkel mit Formel 7) und 8) IV.

3) Am Trapezoeder sei gegeben der Winkel an den längeren Kanten a, gesucht der an den Kanten b. Man berechne nach Formel 5) IV. die Neigung der Fl. zur Axe = a. Da die trigonale Axe dieser Gestalt, wie am Oktaeder, die Hauptaxe unter 54° 44′ 8″ schneidet, so ist die Neig. der Trapeze zur trigonalen Axe = 180° — (54° 44′ 8″ + a). Aus dem so bestimmten Neigungswinkel wird der Winkel an den Kanten b nach Formel 4) I. berechnet.

4) Am Pentagondodecaeder sei der Winkel an den einzelnen Kanten a gegeben = r und gesucht der Winkel an den Kanten b. Man findet das Supplement von b = α aus der Formel

$$\cos \alpha = \tfrac{1}{2} \sin r.$$

5) Am Trigondodecaeder sei gegeben der Winkel an den längeren Kanten a, gesucht der an den Kanten b. Man zieht von dem gegebenen Winkel den Tetraederwinkel (70° 31′ 44″) ab, halbirt den Rest und berechnet mit dessen Complement = a (Neig. d. Fl. zur trigonalen Axe), den verlangten Winkel nach Formel 4) I.

Ueber andere Fälle, in dieser Weise behandelt, s. meine „Grundzüge der Mineralogie" p. 62.

Zum Schlusse möge noch die Berechnung der Ableitungscoefficienten für die Naumann'schen Zeichen angeführt werden. Diese Zeichen sind analog denen des quadrat. Systems. Für das Oktaeder gilt O, für das Rhombendodecaeder ∞ O, für das Hexaeder ∞ O ∞.

Das Triakisoktaeder ist m O. m > 1. Ist der halbe Winkel an den längeren Kanten = a gegeben, so ist, wie in Formel 9) IV., tang A = m gesucht.

$$\text{tang } A = \text{tang } a . \sin 45^\circ.$$

Um aus dem Ableit.-Coeffic. m den Winkel der Fl. an den längeren Kanten = 2 a zu finden, sucht man für m, als Tangente genommen, den zugehörigen Winkel A und hat dann

$$\cot a = \cot A . \sin 45^\circ.$$

Es kommen vor $\frac{3}{2}$ O, 2 O, 3 O.

Das Trapezoeder ist m O m. m > 1. Gegeben der halbe Winkel an den längeren Kanten = a, gesucht m = tang B

$$\cos B = \cot a.$$

Gewöhnliche Varietäten sind 2 O 2, 3 O 3.

Das Tetrakishexaeder ist $\infty O n$. $n > 1$. Gegeben der Winkel an den längeren Kanten $= C$. Es sei $v = \frac{C - 90^0}{2}$, so ist $\cot v = n$.

Gewöhnliche Var. sind $\infty O \frac{2}{3}$, $\infty O 2$, $\infty O 3$.

Das Hexakisoktaeder ist $m O n$. m und $n > 1$. Gegeben der Winkel an der mittleren und kürzesten Kante B und C. Es sei $a = \frac{1}{2} C$; $b = \frac{1}{2} B$. Man berechne $\sin A = \frac{\cos a}{\sin b}$, so ist $\operatorname{tang} (A + 45^0) = n$.

Um m zu finden, setzt man den berechneten Winkel $A + 45^0 = B'$, den halben Kantenwinkel $B = a$, so ist

$$\operatorname{tang} A' = \operatorname{tang} a . \sin B' = m.$$

Die gewöhnlichen Var. sind $3 O \frac{3}{2}$, $4 O 2$, $5 O \frac{5}{3}$.

Um aus dem Zeichen den Winkel der Fl. an den mittleren Kanten B zu finden, so ist $\frac{1}{2} B = a$; $m = \operatorname{tang} A$; $n = \operatorname{tang} B'$ und

$$\cot a = \cot A . \sin B'.$$

Um den Neigungswinkel der Fläche an den kürzesten Kanten C zu finden, hat man zu n, als Tangente genommen, den zugehörigen Winkel aufzusuchen und davon 45^0 abzuziehen. Das Compl. des Restes $= A$ und der halbe Winkel $= b$ an den mittleren Kanten B, so ist

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \cos A . \sin b.$$

Für diese Rechnungen kommen die Formeln für die Rhombenpyramide in Anwendung.