Analagmatische Flächen.

Um einen festen Punkt O des Raumes sei mit der Längeneinheit als Radius eine Kugelfläche beschrieben. Jedem Punkte P des Raumes wird dann ein und nur ein Punkt P' entsprechen, welcher auf dem von O nach P gezogenen Strahle liegt und die Bedingung erfüllt

$$OP \, . \, OP' = 1.$$

Die Punkte P und P' heissen zugeordnete, reziproke oder inverse Punkte in Bezug auf die mit der Längeneinheit als Radius um O geschlagene Kugelfläche; letztere wird Transformationskugel und Punkt O Transformationscentrum genannt.

Rückt Punkt P auf einer durch O gehenden Geraden aus unendlicher Ferne auf die Transformationskugel zu, so bewegt sich Punkt P' in entgegengesetzter Richtung von O nach der Transformationskugel hin; hier treffen beide Punkte zusammen, und während von da ab P den kleinen Weg von der Kugel nach O zurücklegt, eilt P' von der Kugel ins Unendliche.

außerhalb der Transformationskugel

Ist nun irgend eine Fläche gegeben, so kann man von O nach jedem Punkte P der Fläche einen Strahl ziehen und auf jedem dieser Strahlen einen Punkt P' derart bestimmen, dass

$$OP \, . \, OP' = 1$$

wird. Die Gesamtheit dieser Punkte P' stellt dann eine neue Fläche dar; sie wird das Bild der ersten Fläche, der Originalfläche, genannt.

Für Original- und Bildfläche lassen sich auf elementarem Wege folgende Eigenschaften nachweisen:

Sind P und Q zwei Punkte der Originalfläche und P' und Q' die entsprechenden Punkte der Bildfläche, so ist (s. Fig. 1) $\Delta OPQ \sim \Delta OQ'P'$, mithin $PQ : P'Q' = OP : OQ' = OP : \frac{1}{OQ}$, also

$$P'Q' = \frac{PQ}{OP \, . \, OQ}.$$

Liegt nun Q unendlich nahe an P, so wird

$$P'Q' = \frac{PQ}{OP^2}.$$

Nimmt man noch einen zweiten, P unendlich benachbarten Punkt S und nennt den Bildpunkt S', so wird

$$P'S' = \frac{PS}{OP^2}$$

und

$$S'Q' = \frac{SQ}{OP^2}.$$

Mithin ist

$$P'Q' : P'S' : S'Q' = PQ : PS : SQ,$$

d. h. $\Delta P'Q'S' \sim \Delta PQS$. Wir haben es also mit einer Abbildung zu thun, welche Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen hervorbringt.

Sind wieder P und Q zwei Punkte der Original- und P' und Q' die entsprechenden Punkte der Bildfläche, so bestimmen die Punkte P, Q, Q', P' ein Sehnenviereck, also ist $\sphericalangle OPQ + \sphericalangle P'Q'Q = 2R$. Rückt nun Q auf P zu, so wird beim Aufeinanderfallen beider Punkte die Sehne PQ zur Tangente PT und die Sehne $P'Q'$ zur Tangente $T_1'P'T'$, und wir erhalten $\sphericalangle OPT + \sphericalangle T_1'P'P = 2R$ oder

$$\sphericalangle OPT + \sphericalangle OP'T' = 2R.$$

Schneiden sich die Tangenten PT und $P'T'$ in R, so ist $\Delta PRP'$ ein gleichschenkliges.

Zieht man $OU \perp PT$ und $OU' \perp P'T'$, so ist $\Delta OPU \sim \Delta OP'U'$, also ist

$$OU : OU' = OP : OP'.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

Legt man durch OP einen beliebigen ebenen Schnitt, so bildet OP mit den Tangenten der Schnittkurven in den Punkten P und P' supplementäre Winkel, oder der Schnittpunkt dieser Tangenten liegt in der auf der Strecke PP' in ihrer Mitte errichteten Senkrechten.

Die von O auf diese Tangenten gefällten Lote verhalten sich zu einander wie OP zu OP'.

Die zu den Punkten P und P' gehörigen Tangentialebenen schneiden sich in einer Geraden, welche auf der in der Mitte der Strecke PP' zu dieser senkrecht gezogenen Ebene liegt, und die zugehörigen Normalen schneiden sich in derselben Ebene und bilden mit OP supplementäre Winkel.

Die von O auf die Tangentialebenen gefällten Lote verhalten sich zu einander wie OP zu OP'.

Im allgemeinen wird nun die Bildfläche eine andere Gestalt haben als die Originalfläche. Die unmittelbare Anschauung lehrt aber schon, dass es Flächen giebt, welche bei unserer Abbildungsweise sich wieder selbst erzeugen, in sich selbst übergehen; man denke an eine durch O gehende Ebene oder an einen Kegel, dessen Spitze in O liegt. Solche Flächen hat man anallagmatische [1]) genannt (s. Salmon-Fiedler, 3. Aufl., 2. Teil, Seite L).

Für diese tritt noch eine besondere Eigenschaft ein: Eine anallagmatische Fläche schneide die Transformationskugel. Legt man dann durch 0 einen ebenen Schnitt und zieht von 0 einen Radius nach der Stelle, wo die Schnittkurve der anallagmatischen Fläche den Kreisschnitt der Transformationskugel trifft, so begegnet man hier der anallagmatischen Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. der Radius ist eine Tangente der anallagmatischen Fläche. Also fällt an jedem Schnittpunkte der anallagmatischen Fläche mit der Transformationskugel die Normale der anallagmatischen Fläche in die Tangentialebene der Transformationskugel, d. h.: Schneidet eine anallagmatische Fläche die Transformationskugel, so schneidet sie dieselbe rechtwinkelig.

Wir wollen die anallagmatischen Flächen ermitteln.

Durch O sei ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gelegt, so dass die Gleichung der Transformationskugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

wird. Die allgemeine Gleichung einer algebraischen Fläche ist dann

$$\begin{array}{c} a_0 \\ + a_1x + a_2y + a_3z \\ + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = 0. \end{array}$$

Dieselbe setzt sich zusammen aus ganzen, rationalen, homogenen Funktionen in x, y, z vom 0., 1., 2., . . . Grade.

Führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \end{aligned}$$

so geht die Gleichung über in

$$\begin{array}{c} a_0 \\ + r(a_1\cos\vartheta + a_2\sin\vartheta\cos\varphi + a_3\sin\vartheta\sin\varphi) \\ + r^2(a_{11}\cos^2\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + a_{33}\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + 2a_{23}\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi + \\ + 2a_{31}\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = 0 \end{array}$$

oder in

$$f_0(\vartheta, \varphi) + rf_1(\vartheta, \varphi) + r^2f_2(\vartheta, \varphi) + \ldots\ldots = 0,$$

---

1) ἀλλάττω verändern, vertauschen und $\alpha\nu = \alpha$ privativum.

worin $f_0(\vartheta, \varphi)$ eine Konstante bezeichnet und $f_1(\vartheta, \varphi)$, $f_2(\vartheta, \varphi)$, . . . ganze, rationale, homogene Funktionen des 1., 2., . . . Grades in $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ ausdrücken.

Das Charakteristische dieser Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ besteht nun darin, dass $f_n(\vartheta, \varphi)$ nicht notwendig vom n. Grade zu sein braucht, sondern sich unter Umständen auf den $n-2$., $n-4$., . . . Grad reduziert, nie aber auf den $n-1$., $n-3$., . . . Grad. So geht beispielsweise

$$f_2(\vartheta, \varphi) = a_{11}\cos^2\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + a_{33}\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + 2a_{23}\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$+ 2a_{31}\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi$$

für $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_0$ und $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$ in a_0 über, wird also zu $f_0(\vartheta, \varphi)$.

Diese Eigenschaft der Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ giebt uns die Lösung unseres Problems.

Unsere allgemeine Flächengleichung hat unter Weglassung der Argumente ϑ, φ die Gestalt

$$r^n f_n + r^{n-1} f_{n-1} + r^{n-2} f_{n-2} + \dots\dots\dots\dots + r^2 f_2 + r f_1 + f_0 = 0.$$

Die hierdurch bestimmte Fläche soll nun nach unserem Abbildungsprinzip in sich selbst übergehen. Das ist der Fall, wenn die Wurzeln r dieser Gleichung sich paarweise so anordnen lassen, dass je zwei zusammengeordnete reziprok sind. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, dass n gerade und dass

$$f_n = f_0,\ f_{n-1} = f_1,\ \dots\dots\ f_{\frac{n}{2}+1} = f_{\frac{n}{2}-1}$$

sei. Der Gleichung kann man dann die Gestalt geben

$$(r^n+1) f_0 + (r^{n-2}+1) r f_1 + (r^{n-4}+1) r^2 f_2 + \dots\dots + (r^2+1) r^{\frac{n}{2}-1} f_{\frac{n}{2}-1} + r^{\frac{n}{2}} f_{\frac{n}{2}} = 0.$$

Verschwindet das mittelste Glied, ist $f_{\frac{n}{2}} = 0$, so darf auch

$$f_n = -f_0,\ f_{n-1} = -f_1,\ \dots\dots\ f_{\frac{n}{2}+1} = -f_{\frac{n}{2}-1}$$

sein. Die daraus sich ergebende Gleichung

$$(r^n-1) f_0 + (r^{n-2}-1) r f_1 + (r^{n-4}-1) r^2 f_2 + \dots\dots + (r^2-1) r^{\frac{n}{2}-1} f_{\frac{n}{2}-1} = 0$$

liefert aber nichts Neues; denn die Gleichung ist durch r^2-1 teilbar, und man erhält nach Ausführung der Division eine Gleichung, in welcher auf der linken Seite die gleichweit von beiden Enden abstehenden Koeffizienten einander gleich sind, also eine Gleichung der vorher betrachteten Form. Die erste Gleichung giebt also eine Fläche der vorigen Art und dazu die Transformationskugel.

Ist $f_0 = 0$, so muss auch $f_1 = 0$ sein, und die Bedingung wird

$$f_n = f_2,\ f_{n-1} = f_3,\ \dots\dots\ f_{\frac{n}{2}+2} = f_{\frac{n}{2}}$$

u. s. w.

Sämtliche anallagmatische Flächen sind demnach gegeben durch

$$(r^n+1)f_0+(r^{n-2}+1)rf_1+(r^{n-4}+1)r^2f_2+\;\ldots\;+(r^2+1)r^{\frac{n}{2}-1}f_{\frac{n}{2}-1}+r^{\frac{n}{2}}f_{\frac{n}{2}}=0$$

$$(r^{n-2}+1)r^2f_2+(r^{n-4}+1)r^3f_3+(r^{n-6}+1)r^4f_4+\;\ldots\;+(r^2+1)r^{\frac{n}{2}}f_{\frac{n}{2}}+r^{\frac{n}{2}+1}f_{\frac{n}{2}+1}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(r^4+1)r^{n-4}f_{n-4}+(r^2+1)r^{n-3}f_{n-3}+r^{n-2}f_{n-2}=0$$

$$(r^2+1)r^{n-2}f_{n-2}+r^{n-1}f_{n-1}=0$$

$$r^nf_n=0.$$

Wir gehen dazu über, die Gestalt der einfacheren unter diesen Flächen zu ermitteln. Dabei kehren wir von den Polarkoordinaten wieder zu den rechtwinkeligen Koordinaten zurück.

$$n=1$$

liefert die Fläche

$$a_1x+a_2y+a_3z=0,$$

also eine durch 0 gehende Ebene, deren Normale mit den Koordinatenaxen Winkel bildet, welche bestimmt sind durch

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\cdot$$

Diese Winkel sind zugleich die Neigungswinkel der Ebene mit der yz-, zx-, xy-Ebene; letztere werden in den Geraden $a_2y+a_3z=0$, $a_1x+a_3z=0$, $a_1x+a_2y=0$ geschnitten.

Ist einer der Koeffizienten a Null, so steht die Ebene auf einer der Koordinatenebenen senkrecht, geht also durch eine der Axen; sind zwei derselben Null, so fällt die Ebene in eine der Koordinatenebenen.

Schlägt man in der Ebene mit dem Radius $r=1$ um 0 einen Kreis, so ist das innerhalb des Kreises liegende begrenzte Stück der Ebene das Bild des ausserhalb liegenden unendlichen Stückes und umgekehrt; jeder Punkt des Kreises ist sein eigenes Bild.

$$n=2$$

liefert

$$1)\qquad (r^2+1)f_0+rf_1=0$$

$$2)\qquad r^2f_2=0.$$

Fläche 1)

$$(x^2+y^2+z^2+1)a_0 + a_1x+a_2y+a_3z = 0$$

oder

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2+b^2+c^2-1,$$

wo

$$a=-\frac{a_1}{2a_0},\quad b=-\frac{a_2}{2a_0},\quad c=-\frac{a_3}{2a_0} \text{ ist,}$$

ist eine Kugelfläche, die mit dem Radius $\sqrt{a^2+b^2+c^2-1}$ um den ausserhalb der Transformationskugel liegenden Punkt $x=a$, $y=b$, $z=c$ geschlagen ist.

$$a^2+b^2+c^2 = (\sqrt{a^2+b^2+c^2-1})^2 + 1^2$$

lehrt, dass die Kugel die Transformationskugel rechtwinkelig schneidet.

Die innerhalb der Transformationskugel liegende Kugelkappe ist das Bild der ausserhalb liegenden und umgekehrt. Der Schnittkreis beider Kugeln bildet sich Punkt für Punkt selbst ab.

Für $a^2+b^2+c^2=1$ degeneriert die Kugel in den Punkt $x=a$, $y=b$, $z=c$, der, weil er der Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$ genügt, auf der Transformationskugel liegt, sich daher selbst abbildet.

Ist einer der Koeffizienten a_1, a_2, a_3 gleich Null, so liegt das Centrum der Kugel in einer der Koordinatenebenen, sind zwei derselben Null, so liegt es auf einer der Axen, und sind endlich alle drei Null, so hat die Fläche keine geometrische Bedeutung.

Fläche 2)

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = 0$$

enthält zunächst den Punkt 0. Legt man durch irgend einen Punkt x_0, y_0, z_0 der Fläche und durch 0 die Gerade

$$x=x_0t,\ y=y_0t,\ z=z_0t,$$

wo t von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, so liegt jeder Punkt dieser Geraden in der Fläche, d. h. die Fläche ist ein Kegel, der seine Spitze in 0 hat.

Die xy-Ebene schneidet denselben in der Kurve

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy = 0.$$

Dieser Schnitt kann aber nur gerade Linien hervorbringen, da die linke Seite der Gleichung in zwei lineare Faktoren zerlegbar ist. Soll nun der Kegel durch die x- und y-Axe gehen, für welche $y=0$ und $x=0$ ist, so geht diese Gleichung über in

$$xy = 0,$$

also ist $a_{11}=a_{22}=0$.

Analog findet man, wenn der Kegel durch die x- und z-Axe gehen soll, $a_{11}=a_{33}=0$, so dass

$$a_{23}yz + a_{31}zx + a_{12}xy = 0$$

den durch die Axen gehenden Kegel ausdrückt.

Der Kegel berührt die Koordinatenebenen, wenn die Schnittkurven

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0,\ a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz = 0,\ a_{11}x^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz = 0$$

in je eine Doppelgerade übergehen. Das ist aber der Fall für

$$a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}a_{22}},\ a_{23} = \pm\sqrt{a_{22}a_{33}},\ a_{31} = \pm\sqrt{a_{33}a_{11}}.$$

Da nun a_{12}, a_{23}, a_{31} reell bleiben müssen, so müssen a_{11}, a_{22}, a_{33} dasselbe Vorzeichen haben; wir nehmen das positive.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 - 2\sqrt{a_{22}a_{33}}\,yz - 2\sqrt{a_{33}a_{11}}\,zx - 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\,xy = 0$$

giebt dann einen die Koordinatenebenen berührenden Kegel, während

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\sqrt{a_{22}a_{33}}\,yz + 2\sqrt{a_{33}a_{11}}\,zx + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\,xy = 0$$

oder

$$(\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y + \sqrt{a_{33}}\,z)^2 = 0$$

einen in zwei zusammenfallende, durch 0 gehende Ebenen degenerierten Kegel darstellt.

In zwei sich schneidende Ebenen artet der Kegel aus, wenn sich seine Gleichung in die Form bringen lässt

$$(ax + by + cz)(a_1x + b_1y + c_1z) = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur 4 Konstanten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$, während die ursprüngliche Gleichung deren 5 enthält; es muss also unter diesen eine Bedingungsgleichung bestehen. Dieselbe ergiebt sich folgendermassen:

Wir haben

$$aa_1 = a_{11},\ bb_1 = a_{22},\ cc_1 = a_{33}$$
$$ab_1 + a_1b = 2a_{12},\ ac_1 + a_1c = 2a_{13},\ bc_1 + b_1c = 2a_{23}.$$

Aus der 4. und 5. Gleichung folgt

$$a(bc_1 - b_1c) = 2(a_{13}b - a_{12}c)$$
$$a_1(bc_1 - b_1c) = 2(a_{12}c_1 - a_{13}b_1)$$

und daraus

$$aa_1(bc_1 - b_1c)^2 = 4(a_{13}b - a_{12}c)(a_{12}c_1 - a_{13}b_1)$$

oder

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmt man nun die Werte von $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$, so erhält man

$$\left[a_{11}x+\left(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\right)y+\left(a_{13}+\sqrt{a_{13}^2-a_{11}a_{33}}\right)z\right]$$
$$\times\left[a_{11}x+\left(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\right)y+\left(a_{13}-\sqrt{a_{13}^2-a_{11}a_{33}}\right)z\right]=0.$$

Für das Ebenenpaar haben wir also die fernere Bedingung

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0\,,$$
$$a_{13}^2-a_{11}a_{33}>0$$

und, da aus $\Delta=0$ folgt

$$(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(a_{23}^2-a_{22}a_{33})=(a_{12}a_{13}-a_{22}a_{13})^2\,,$$

auch

$$a_{23}^2-a_{22}a_{33}>0\,.$$

Ist nun φ der Winkel, welchen die beiden Ebenen mit einander bilden, so ist bekanntlich

$$tg\,\varphi=\frac{\sqrt{(ab_1-a_1b)^2+(ac_1-a_1c)^2+(bc_1-b_1c)^2}}{aa_1+bb_1+cc_1}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte ein und beachten, dass aus $\Delta=0$ auch folgt

$$(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(a_{13}^2-a_{11}a_{33})=(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})^2\,,$$

so erhalten wir

$$tg\,\varphi=\frac{2\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}+a_{13}^2-a_{11}a_{33}+a_{23}^2-a_{22}a_{33}}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}.$$

Die Ebenen stehen senkrecht auf einander, wenn $\varphi=90^0$, also $tg\,\varphi=\infty$ oder

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$$

wird. Sie fallen zusammen, wenn $\varphi=0$, also $tg\,\varphi=0$, oder

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}+a_{13}^2-a_{11}a_{33}+a_{23}^2-a_{22}a_{33}=0$$

oder

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=a_{13}^2-a_{11}a_{33}=a_{23}^2-a_{22}a_{33}=0$$

ist. Die doppelt zu zählende Ebene hat dann die Gleichung

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\,,$$

oder, um sie auf die vorhin schon gefundene Gestalt zu bringen,

$$\sqrt{a_{11}a_{11}}\,x+\sqrt{a_{11}a_{22}}\,y+\sqrt{a_{11}a_{33}}\,z=0 \quad \text{oder}$$
$$\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y+\sqrt{a_{33}}\,z=0\,.$$

Um nun die Gestalt des durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegels zu finden, nehmen wir eine Drehung des Koordinatensystems um O vor und können dadurch bekanntlich die Gleichung auf die Form bringen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Liegt ein Punkt x_0, y_0, z_0 auf der Fläche, so befinden sich auch die 7 anderen durch $\pm x_0$, $\pm y_0$, $\pm z_0$ gegebenen Punkte auf ihr. Der Kegel liegt also symmetrisch zu den Koordinatenebenen.

Die xz- und yz-Ebene liefern als Schnittkurven die durch O gehenden Geradenpaare $\frac{x}{a}\mp\frac{z}{c}=0$ und $\frac{y}{b}\mp\frac{z}{c}=0$, welche mit der z-Axe die durch $tg\,\varphi_1=\pm\frac{a}{c}$ und $tg\,\varphi=\pm\frac{b}{c}$ bestimmten Winkel φ_1 und φ bilden.

Die xy-Ebene schneidet den Kegel nur im Punkte O.

Jede mit der xy-Ebene parallele Ebene $z=l$ liefert als Schnittkurve eine Ellipse $\frac{x^2}{\left(\frac{la}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{lb}{c}\right)^2}=1$, die bei sowohl ins Positive als auch ins Negative wachsendem l immer grösser wird. Der Kegel dehnt sich also nach der positiven und negativen z-Axe hin ins Unendliche aus.

Charakteristisch ist der Schnitt $z=c$, da er die Schnittkurve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, also die Bedeutung der Koeffizienten a, b, c giebt.

Sind A und B die Halbaxen der Ellipsen, so ist

$$A:B:l=a:b:c.$$

Jede der xz-Ebene parallele Ebene $y=m$ liefert als Schnittkurve eine Hyperbel $\frac{z^2}{\left(\frac{mc}{b}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(\frac{ma}{b}\right)^2}=1$, deren reelle Axe parallel der z-Axe ist. Sind C und A die Halbaxen, so ist

$$C:A:m=c:a:b.$$

Die mit der yz-Ebene parallelen Schnitte $x=n$ geben ebenfalls Hyperbeln, deren reelle Axe parallel der z-Axe ist. Sind C und A die Halbaxen, so ist

$$C:B:n=c:b:a.$$

Legen wir jetzt durch den Punkt $x=0$, $y=0$, $z=p$ eine Ebene parallel zur x-Axe und machen den Schnitt dieser Ebene mit der xz-Ebene zur x_1-Axe und den Schnitt mit der yz-Ebene zur y_1-Axe und setzen $\sphericalangle(y_1, z)=\lambda$, so ist diese Ebene bestimmt durch

$$x=x_1\,,\; y=y_1\sin\lambda\,,\; z=p+y_1\cos\lambda.$$

Sie schneidet daher den Kegel in der Kurve

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(y_1\sin\lambda)^2}{b^2}-\frac{(p+y_1\cos\lambda)^2}{c^2}=0$$

oder unter Einführung des Winkels φ, den die z-Axe mit der Schnittlinie des Kegels mit der yz-Ebene bildet und, wie vorhin gezeigt, durch $tg\,\varphi = \frac{b}{c}$ bestimmt ist, in der Kurve

$$c^2 \sin^2\varphi\, x_1^2 + a^2(\sin^2\lambda \cos^2\varphi - \cos^2\lambda \sin^2\varphi)\, y_1^2 - 2\,p\,a^2 \sin^2\varphi \cos\lambda\, y_1 - p^2 a^2 \sin^2\varphi = 0.$$

Wird $\lambda = \varphi$, so reduciert sich die Gleichung auf

$$x_1^2 = \frac{2\,p\,a^2 \cos\varphi}{c^2}\left(y_1 + \frac{p}{2\cos\varphi}\right)$$

oder, wenn man das Koordinatensystem so verschiebt, dass $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta - \frac{p}{2\cos\varphi}$ wird, auf

$$\xi^2 = \frac{2\,p\,a^2 \cos\varphi}{c^2}\,\eta.$$

Das ist eine Parabel mit dem Parameter $\frac{2\,p\,a^2 \cos\varphi}{c^2}$, die sich nach der η-Axe hin erstreckt.

Ist $p = 0$, so wird $\xi = 0$ für jeden Wert von η, d. h. die Parabel geht in eine Doppelgerade über.

Ist $\lambda \gtrless \varphi$, so verschieben wir das Koordinatensystem so, dass $x_1 = x'$, $y_1 = y' + l$ wird. Dann fällt für

$$l = \frac{p \sin^2\varphi \cos\lambda}{\sin^2\lambda \cos^2\varphi - \cos^2\lambda \sin^2\varphi}$$

das Glied mit y_1 weg, und die Gleichung wird mit Weglassung der Indices zu

$$\frac{x^2}{\dfrac{p^2\, a^2 \cos^2\varphi \sin^2\lambda}{c^2 \sin(\lambda+\varphi)\sin(\lambda-\varphi)}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \sin^2\lambda}{[\sin(\lambda+\varphi)\sin(\lambda-\varphi)]^2}} = 1.$$

Der Koeffizient von y^2 ist nun stets positiv, der von x^2 aber nur für $\lambda > \varphi$.

$\lambda < \varphi$ liefert also Hyperbeln, deren Nebenaxe parallel der ursprünglichen x-Axe ist,
$\lambda > \varphi$ liefert Ellipsen.

Letztere gehen in Kreise über, wenn die Koeffizienten von x^2 und y^2 einander gleich werden, also für

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin(\lambda+\varphi)\sin(\lambda-\varphi)}$$

oder, da $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{c}$ ist, für

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}}}.$$

Da nun p jeden beliebigen Wert annehmen kann, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass $a > b$ ist, zwei Systeme von Kreisschnitten parallel zur x-Axe. $a < b$ liefert zwei Systeme von Kreisschnitten parallel der y-Axe.

Für $a = b$ wird $tg\,\varphi = \infty$, also $\varphi = 90^0$, d. h. alle Schnitte parallel der xy-Ebene sind Kreisschnitte; der Kegel ist dann ein Rotationskegel.

$$n=3$$

liefert

$$1)\qquad (r^2+1)\,rf_1+r^2f_2=0$$
$$2)\qquad r^3f_3=0.$$

Fläche 1)

ist die durch O gehende Fläche

$$(x^2+y^2+z^2+1)\,(a_1\,x+a_2y+a_3z)+a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}\,z^2+2\,a_{23}\,yz+2\,a_{31}\,zx+2\,a_{12}\,xy=0.$$

Wir nehmen eine solche Drehung des Koordinatensystems um O vor, dass

$$a_1x+a_2y+a_3z=z_1$$

wird, dass also die z_1-Axe mit den alten Koordinatenaxen Winkel bildet, die durch

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\qquad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

bestimmt sind. Dann wird $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ und die homogene Funktion 2. Grades geht wieder in eine homogene Funktion 2. Grades über. Wir erhalten also

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2+1)\,z_1+b_{11}x_1^2+b_{22}y_1^2+b_{33}\,z_1^2+2\,b_{23}y_1z_1+2\,b_{31}z_1x_1+2\,b_{12}x_1y_1=0.$$

Geben wir nun der x_1y_1-Ebene um die z_1-Axe eine Drehung um den Winkel φ, setzen also

$$x_1=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$$
$$y_1=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$
$$z_1=z',$$

so verschwindet für

$$tg\,2\varphi=\frac{2\,b_{12}}{b_{11}-b_{22}}$$

das Glied mit x_1y_1, und die Gleichung wird mit Weglassung der Indices zu

$$(x^2+y^2+z^2+1)\,z+l_1x^2+l_2y^2+az^2+2\,bzx+2\,czy=0.$$

Setzen wir nun $z=h$, wo h alle möglichen Werte durchlaufen soll, so sind alle möglichen zur xy-Ebene parallelen Schnittkurven der Fläche gegeben durch

$$(l_1+h)\,x^2+(l_2+h)y^2+2bh\,x+2\,chy+h^3+ah^2+h=0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Die Diskriminante ist

$$\begin{vmatrix} l_1+h, & o, & bh \\ o, & l_2+h, & ch \\ bh, & ch, & h^3+ah^2+h \end{vmatrix}=h\,[(l_1+h)\,(l_2+h)\,(h^2+ah+1)-(l_1+h)\,c^2h-(l_2+h)\,b^2h].$$

Deren Verschwinden zeigt an, dass der betreffende Kegelschnitt in zwei gerade Linien oder einen Punkt ausartet. Für beliebige Werte von l_1, l_2, a, b, c ist der eine Faktor rechts vom 4. Grade. Für $b=c=0$ verschwindet die Diskriminante für die Werte o, $-l_1$, $-l_2$ und $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$ von h, von denen die zwei letzten imaginär werden, wenn absolut genommen $a<2$ ist.

Die Art des Kegelschnittes hängt weiter ab von der Determinante

$$\begin{vmatrix} l_1+h, & o \\ o, & l_2+h \end{vmatrix} = (l_1+h)(l_2+h).$$

Dieselbe ist für hinreichend grosses $\pm h$ notwendig positiv, zeigt also eine Ellipse an. Diese zieht sich bei wachsendem h auf einen Punkt zusammen und wird dann imaginär. Die Determinante verschwindet für $h=-l_1$ und $h=-l_2$; diese Schnitte geben also Parabeln.

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit annehmen $l_1>o$, da man dies durch Umkehrung der z-Axe stets erreichen kann; es sei ferner $l_1>l_2$. Es giebt dann, wenn ε eine sehr kleine Grösse bezeichnet, der Schnitt

$$h=\begin{cases} +\infty \text{ eine imaginäre Ellipse,} \\ -l_2+\varepsilon \text{ eine Ellipse, die sich bei wachsendem } h \text{ in einen Punkt zusammenzieht,} \\ -l_2 \text{ eine Parabel, deren Axe parallel der } y\text{-Axe ist,} \\ -l_2-\varepsilon \text{ eine Hyperbel, deren reelle Axe parallel der } y\text{-Axe ist,} \\ -l_1+\varepsilon \text{ eine Hyperbel, deren reelle Axe parallel der } x\text{-Axe ist,} \\ -l_1 \text{ eine Parabel, deren Axe parallel der } x\text{-Axe ist,} \\ -l_1-\varepsilon \text{ eine Ellipse, die sich bei wachsendem } h \text{ in einen Punkt zusammenzieht,} \\ -\infty \text{ eine imaginäre Ellipse.} \end{cases}$$

Ist $l_1=l_2=l$, so wird die Fläche von den Parallelebenen nur in Kreisen geschnitten, deren Centren die Koordinaten

$$x=-\frac{bh}{l+h}, \quad y=-\frac{ch}{l+h}$$

haben und deren Radius

$$\pm\frac{1}{l+h}\sqrt{(b^2+c^2)h^2-(h^3+ah+h)(l+h)}$$

ist. Der Radikand lehrt, dass die Schnitte nur zwischen bestimmten Grenzen reell sind. Für $h=-l$ geht der Kreis in die Gerade

$$2bx+2cy+l^2-al+1=0$$

über.

Für $b=c=0$ werden die Schnittkurven

$$x^2+y^2=-\frac{h^3+ah^2+h}{l+h},$$

d. h. Kreise, die ihr Centrum in der z-Axe haben. Die Fläche ist dann eine Rotationsfläche. Fig. 2 stellt einen durch die Rotationsaxe gelegten ebenen Schnitt derselben für die Werte $a=3$, $l=2$ dar.

Für $a=2$ und $l=1$ nimmt dieselbe die Form an

$$(x^2+y^2+z^2+1)z+x^2+y^2+2z^2=0 \quad \text{oder}$$
$$\left[x^2+y^2+(z+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}\right](z+1) \qquad =0,$$

artet also in eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ und dem Centrum $x=0$, $y=0$, $z=-\frac{1}{2}$, d. h. eine durch 0 gehende und die Transformationskugel von innen berührende Kugel, und in eine diese Kugel und die Transformationskugel berührende Ebene aus.

Dies ist ein spezieller Fall einer allgemeineren in der ursprünglichen Gleichung enthaltenen Fläche, die wir erhalten, wenn wir

$$f_2=-\frac{4f_1^2+1}{2}$$

setzen.

Die Fläche ist nämlich dann

$$2r^2\, rf_1+2rf_1-r^2\, 4f_1^2-r^2=0 \quad \text{oder}$$
$$(r^2-2rf_1)(1-2rf_1)=0 \quad \text{oder}$$
$$(x^2+y^2+z^2-2\,a_1x-2\,a_2y-2\,a_3z)(1-2\,a_1x-2\,a_2y-2\,a_3z)=0 \quad \text{oder}$$
$$[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)]\cdot[a_1x+a_2y+a_3z-\tfrac{1}{2}]=0,$$

d. h. eine durch O gehende Kugelfläche mit dem Centrum $x=a_1$, $y=a_2$, $z=a_3$ und dem Radius $\varrho=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ nebst einer Ebene, die von O die Entfernung $OP=\frac{1}{2\varrho}$ hat. O, P und das Centrum der Kugel liegen in derselben Geraden. OP trifft die Kugel in dem durch $OP'=2\varrho$ bestimmten Punkte P'. Mithin ist $OP\,.\,OP'=1$, d. h. P und P' sind zugeordnete Punkte, oder die Ebene ist die Polare zum Pol P'. Ist $\varrho<\frac{1}{2}$, so liegt die Ebene ausserhalb der Transformationskugel, ist $\varrho=\frac{1}{2}$, so ist die Ebene Tangentialebene an die beiden sich von innen berührenden Kugeln, und ist $\varrho>\frac{1}{2}$, so schneidet sie die Transformationskugel. In diesem Falle liegt die Schnittlinie der Kugel mit der Transformationskugel in der zur Kugel gehörigen Ebene.

Die Kugel ist das Bild der Ebene und umgekehrt; dies ergiebt sich schon aus der Gleichung

$$(r^2-2rf_1)(1-2rf_1)=0,$$

die durch Einsetzung von $\frac{1}{r}$ statt r übergeht in

$$(1-2rf_1)(r^2-2rf_1)=0.$$

Fläche 2)

$$r^3 f_3 = 0$$

ist ein Kegel 3. Grades, der seine Spitze in O hat.

$$n = 4$$

giebt

$$1) \quad (r^4+1) f_0 + (r^2+1) r f_1 + r^2 f_2 = 0$$

$$2) \quad (r^2+1) r^2 f_2 + r^3 f_3 = 0$$

$$3) \quad r^4 f_4 = 0.$$

Wir betrachten nur einen speziellen Fall der Fläche 1). Es sei

$$f_2 = 1 + \frac{f_1^2}{(f_0+1)^2} + f_0^2.$$

Die Fläche hat dann die Gleichung

$$(r^4+1) f_0 + \frac{(r^2+1) r f_1 (f_0+1)}{f_0+1} + r^2 + \frac{r^2 f_1^2}{(f_0+1)^2} + r^2 f_0^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(r^2 + \frac{r f_1}{f_0+1} + f_0\right) + \frac{r f_1}{f_0+1}\left(r^2 + \frac{r f_1}{f_0+1} + f_0\right) + r^2 f_0 \left(r^2 + \frac{r f_1}{f_0+1} + f_0\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(r^2 + \frac{r f_1}{f_0+1} + f_0\right) \cdot \left(1 + \frac{r f_1}{f_0+1} + r^2 f_0\right) = 0.$$

Diese Fläche besteht aus zwei Teilen, und zwar ist der eine das Bild des andern; das ergiebt sich daraus, dass bei der Einsetzung von $\frac{1}{r}$ statt r die Gleichung in

$$\left(1 + \frac{r f_1}{f_0+1} + r^2 f_0\right)\left(r^2 + \frac{r f_1}{f_0+1} + f_0\right) = 0$$

übergeht.

Der eine Teil der Fläche ist

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{a_0+1} + a_0 = 0,$$

oder, wenn wir setzen

$$\frac{a_1}{2(a_0+1)} = -p, \quad \frac{a_2}{2(a_0+1)} = -q, \quad \frac{a_3}{2(a_0+1)} = -s,$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-s)^2 = p^2 + q^2 + s^2 - a_0,$$

also eine Kugelfläche mit dem Centrum $x=p$, $y=q$, $z=s$ und dem Radius $\varrho = \sqrt{p^2+q^2+s^2-a_0}$.

Die Kugel schneidet für $a_0=1$ die Transformationskugel rechtwinkelig; das Centrum ist dann $x=-\frac{a_1}{4}$, $y=-\frac{a_2}{4}$, $z=-\frac{a_3}{4}$ und der Radius $\frac{1}{4}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2-16}$.

Der zweite Teil der Fläche ist

$$1+\frac{a_1x+a_2y+a_3z}{a_0+1}+(x^2+y^2+z^2)a_0=0 \quad \text{oder}$$

$$\left(x-\frac{p}{a_0}\right)^2+\left(y-\frac{q}{a_0}\right)^2+\left(z-\frac{s}{a_0}\right)^2=\frac{1}{a_0^2}(p^2+q^2+s^2-a_0),$$

also eine Kugel mit dem Centrum $x=\frac{p}{a_0}$, $y=\frac{q}{a_0}$, $z=\frac{s}{a_0}$ und dem Radius $\frac{1}{a_0}\varrho$.

Diese Kugel schneidet für $a_0=1$ die Transformationskugel ebenfalls rechtwinkelig und zwar wird sie zur nämlichen Kugel, in welche die erste übergeht. Dies ersieht man auch aus der ursprünglichen Gleichung, die für $f_0=a_0=1$ in

$$\left(1+\frac{rf_1}{2}+r^2\right)^2=0$$

übergeht, also zwei zusammenfallende Kugeln darstellt.

Da das Centrum der ersten Kugel $x=p$, $y=q$, $z=s$ und das der zweiten $x=\frac{p}{a_0}$, $y=\frac{q}{a_0}$, $z=\frac{s}{a_0}$ ist, so geht die Centrale durch O. Schneidet diese die erste Kugel in den Punkten P und Q und die zweite in den Punkten P' und Q', so ist

$$OP=\sqrt{p^2+q^2+s^2}-\varrho$$
$$OQ=\sqrt{p^2+q^2+s^2}+\varrho$$
$$OP'=\frac{1}{a_0}\left(\sqrt{p^2+q^2+s^2}-\varrho\right)$$
$$OQ'=\frac{1}{a_0}\left(\sqrt{p^2+q^2+s^2}+\varrho\right).$$

Also ist $OP.OQ'=OQ.OP'=1$, d. h. P und Q', und Q und P' sind zugeordnete Punkte.

Fläche 3)

$$r^4f_4=0$$

stellt einen Kegel 4. Grades dar, der seine Spitze in O hat.

Auf den Kegel 3. Grades und die Flächen 4. Grades werde ich in einem der folgenden Programme näher eingehen.

Aachen, im März 1888.

Joseph Meder,
Gymnasiallehrer.

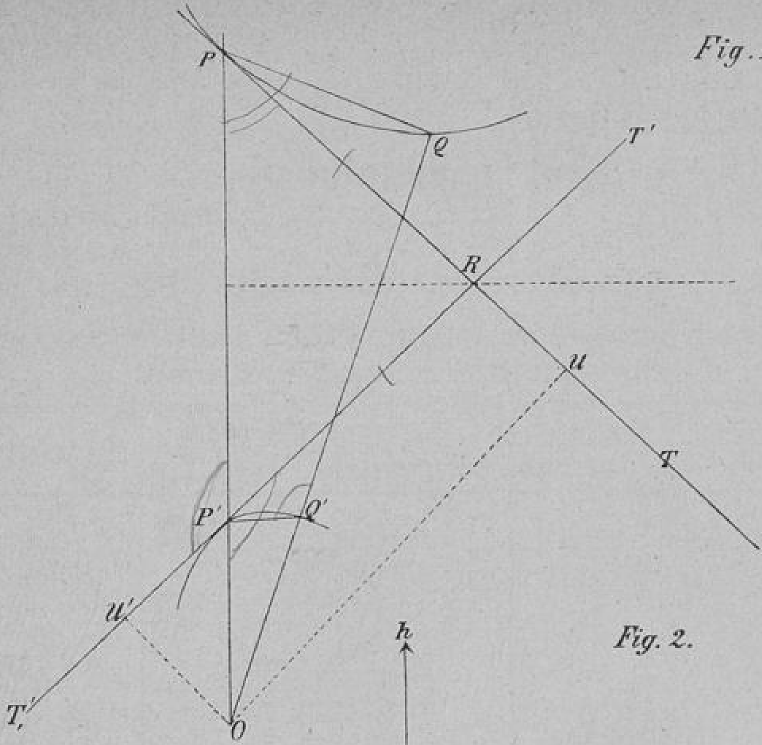

Fig. 1.

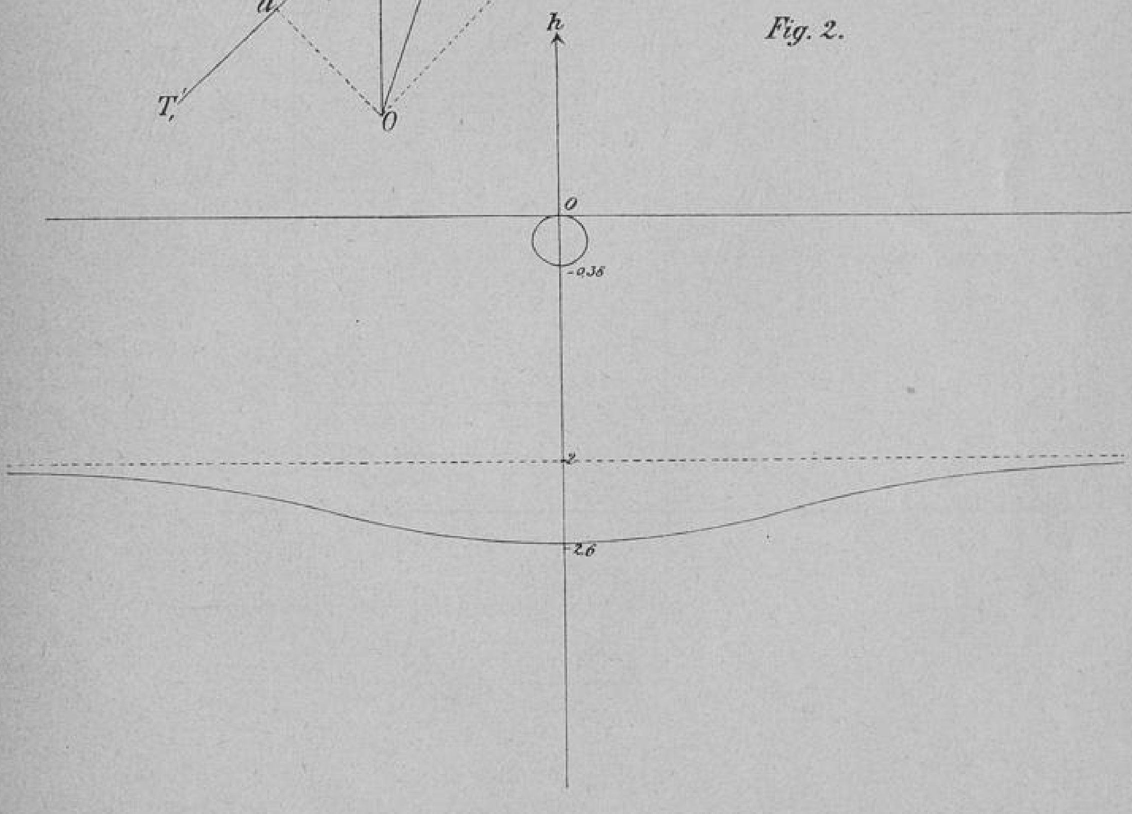

Fig. 2.