Die ersten Sätze der neuen Geometrie

als

Pensum der Prima einer Realschule I. Ordnung

von

Dr. W. Stammer,

Oberlehrer.

Wissenschaftliche Beilage

zum

Osterprogramm der Realschule I. Ordnung

zu

Düsseldorf.

Hofbuchdruckerei von L. Voß u. Co. in Düsseldorf.

1878. Progr. Nr. 392.

Daß der Unterricht der Mathematik in der Prima der Realschule sich auch über die neuere (synthetische, projektivische) Geometrie zu erstrecken habe, ist wohl eine ausgemachte Sache. In so fern der Unterricht in Prima die Vorbereitung für die höhern Lehranstalten ins Auge fassen muß, darf er den genannten Zweig der Mathematik um so weniger unberücksichtigt lassen, als er nicht blos ein selbständiges Ganzes bildet, sondern auch seine Lehren und Methoden in den übrigen Zweigen vielfach zur Geltung kommen. Auch abgesehen hiervon bilden die Methoden und Anschauungen der neuern Geometrie zugleich einen würdigen Schluß des mathematischen Unterrichts und ein ausgezeichnetes Mittel zur Entwickelung des mathematischen Denkens. Weil aber dieses Denken schon eine gewisse Schulung erfahren haben muß, bevor man dem Schüler das vollständige Verständniß der neuern Geometrie zumuthen darf, so dürfte es sich nicht empfehlen, den Unterricht der neuern Geometrie in einer frühern Klasse als der Prima zu beginnen. Da indeß dieser Unterricht erst seit verhältnißmäßig kurzer Zeit in die Realschule eingeführt und meines Wissens kaum ein passender Leitfaden für Schüler herausgegeben worden ist, so erscheint es sehr wünschenswerth, wenn die Lehrer der Mathematik sich gegenseitig ihre Ansichten und Erfahrungen mittheilen, damit die Grenzen allmählich festgestellt werden, innerhalb deren sich der Unterricht auf der Realschule zu bewegen hat, und sich so eine Auswahl von Sätzen und Entwickelungen ergebe, welche sich für den Zweck eignen. Ich glaube daher keine überflüssige Arbeit zu unternehmen, wenn ich, wie es auch schon von einigen Kollegen geschehen ist, als Programm-Abhandlung eine kurze Uebersicht der Anfänge der neuern Geometrie gebe, wie ich sie seit einigen Jahren an unserer Anstalt gelehrt habe. Viel Neues erwarte man nicht auf den nachfolgenden Blättern; meine Absicht war, das Vorhandene zu sichten und zu ordnen, um es dem Zwecke dienlich zu machen. An einzelnen Stellen habe ich zur Vervollständigung und Verbindung Eigenes hinzugefügt, im Uebrigen aber hauptsächlich folgende Werke benutzt:

Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832.
Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte (nach Steiner). Leipzig 1867.
Geiser, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung (nach Steiner). Leipzig 1867.
Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie, Leipzig 1869.
Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 1871.
Blumberger, Grundzüge einiger Theorien aus der neuern Geometrie. Halle 1858.

Uebungsaufgaben zur Anwendung des Gelernten habe ich nur wenige eingestreut, da die geringe Zeit, welche auf die häuslichen Arbeiten verwendet werden kann, hinlänglich durch die vollständige Ausarbeitung der nur angedeuteten Beweise in Anspruch genommen wird. Eine größere Anzahl von Lehrsätzen ohne Beweise und Aufgaben ohne Lösungen, aber mit hinreichenden Andeutungen enthält der II. Theil der Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie von Gandtner und Junghans §. 11—28; auch Fiedler's darstell. Geom. 14—22; 24—36; Steiner, Entwickelung 21. S. ferner Stoll, Anfangsgründe der neuern Geometrie. Bensheim 1872.

Die Kenntnisse, welche der Unterricht voraussetzt, sind die für die Aufnahme in die Prima einer preußischen Realschule I. Ordnung vorgeschriebenen. Es gehört dazu unter Anderm auch die Bekanntschaft mit der Bedeutung der Vorzeichen und des Unendlichen in der Geometrie. Alle im Folgenden aufgestellten Sätze durchzunehmen, dazu wird sich wohl selten hinreichende Zeit finden: es muß jedem Kollegen überlassen bleiben, je nach Umständen eine geeignete Auswahl zu treffen.

Wenn ich, entgegen der Ansicht Fiedler's und Anderer, nicht vom Raume ausgehe, sondern unabhängig davon mit den ebenen Gebilden beginne, so geschieht es, weil ich nicht einsehe, warum die projektivischen Eigenschaften in der Ebene nicht eine selbständige Behandlung erfahren sollen. Der Zusammenhang dieser Lehren mit der räumlichen Anschauung wird übrigens an unserer Anstalt dadurch gewahrt, daß sie in demselben Jahre in Prima vorkommen, für welches die Beendigung der Stereometrie sowie im Zeichenunterrichte die Perspektive vorgeschrieben sind.

Zum Schlusse möge mir noch eine Bemerkung gestattet sein, obwohl sie eigentlich nicht hierher gehört. Wenn diese Abhandlung, entgegen dem bei wissenschaftlichen Veröffentlichungen immer mehr sich verbreitenden Gebrauche, nicht mit lateinischen Buchstaben gedruckt erscheint, so liegt der Grund darin, daß ich es eines Deutschen unwürdig finde, auch nur den kleinsten Theil deutschen Wesens, deutscher Eigenthümlichkeit preis zu geben. Die Gründe, welche man für die Abschaffung der deutschen Schrift ins Feld führt, können mich nicht überzeugen. Die Rücksicht auf das Ausland, welches, so lange der deutsche Name in der Geschichte genannt wird, unserm Vaterlande nichts weniger als Wohlwollen bewiesen hat, darf uns nicht bestimmen, selbst wenn man nicht zugeben müßte, daß wer die Schwierigkeiten der deutschen Sprache überwunden hat, wahrlich nicht vor der ganz unbedeutenden Schwierigkeit der Schrift zurückschrecken wird: ich erinnere an den die griechische Sprache beginnenden Quartaner des Gymnasiums. Den historischen Gründen gegenüber darf man wohl die Frage aufwerfen, was in der Welt denn eigentlich die Berechtigung seiner Existenz nachgewiesen hat, wenn man der deutschen Schrift nach mehr als dreihundertjährigem Bestehen plötzlich die Existenzberechtigung abstreiten will. Wie wenig übrigens die Vertreter der historischen Gründe von der Bedeutung derselben überzeugt sind, beweisen sie selbst dadurch, daß sie zu gleicher Zeit in der Orthographie den historischen Boden gänzlich zu verlassen vorschlagen und sich allein auf den heutigen Stand der Aussprache berufen. In der Behauptung die wissenschaftlichen Werke müßten mit dem schlechten Beispiele der Verachtung der deutschen Schriftzeichen vorgehen, könnte man wohl versucht sein, ein gutes Stück Autoren-Eitelkeit zu vermuthen, welche einerseits nach der bekannten Vorliebe des Deutschen für das Fremde in dem fremden Gewande der lateinischen Buchstaben einen Ausdruck größerer Gelehrsamkeit erblickt, anderseits sich mit der Hoffnung schmeichelt, daß auch der eine oder andere Ausländer das gedruckte Werk eines geneigten Blickes würdigen dürfte.

Wie wenig endlich Grund vorhanden ist, den Druckern und Verlegern zu liebe die lateinische Schrift zur alleinigen Herrschaft zu bringen, beweist unter Anderm die Bereitwilligkeit, mit welcher der Drucker dieser Abhandlung meinen Wünschen entgegengekommen ist.

1. Erklärungen.

Die geometrischen Grundgebilde (einfachen Systeme) sind die Punktreihe und das Strahlenbüschel.

Unter Punktreihe versteht man die getrennten oder stetig auf einander folgenden Punkte einer geraden Linie, welche der Träger der Reihe heißt.

Unter dem Strahlenbüschel versteht man die sämmtlichen durch einen Punkt einer Ebene gehenden und in der Ebene liegenden unbegrenzten geraden Linien. Der gemeinsame Punkt heißt Mittelpunkt des Büschels.

Die einzelnen Punkte und Strahlen heißen die Elemente der Gebilde.

Anharmonisches Verhältniß (Doppelschnittsverhältniß, Doppelverhältniß) von vier Punkten, A, B, C, D, einer Punktreihe ist der Werth des Quotienten, den man erhält, wenn man das Verhältniß der Abstände zweier der Punkte von einem dritten durch das Verhältniß der Abstände derselben beiden Punkte von dem vierten dividirt, stets unter Berücksichtigung des Vorzeichens, das von der Richtung abhängt, in welcher der Abstand gemessen wird. Da die vier Punkte in verschiedener Weise zusammengestellt werden können, so liefern dieselben vier Punkte ebenso viele verschiedene Doppelverhältnisse. Eines derselben ist

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

welches man auch kurz durch (ABCD) bezeichnet.

In diesem Falle sind A und B, ebenso C und D, zugeordnete Punkte.

Das anharmonische Verhältniß von vier Strahlen a, b, c, d, eines Strahlenbüschels erhält man, wenn man die Abstände von je zwei Punkten durch die Sinus der von je zwei Strahlen eingeschlossenen Winkel ersetzt, unter Berücksichtigung der von der Drehungsrichtung abhängigen Vorzeichen der Winkel und demnach auch der Sinus, also z. B.

$$\frac{\sin\,(ac)}{\sin\,(bc)} : \frac{\sin\,(ad)}{\sin\,(bd)} = (abcd)$$

2. Verschiedene Werthe des Doppelverhältnisses von vier Punkten.

a) Sind die vier Punkte gegeben, so lassen sie sich auf 24 verschiedene Weisen zu einem Doppelverhältnisse verbinden. Da aber diese Verhältnisse zu je vieren denselben Werth haben, so gibt es im Ganzen nur 6 verschiedene Werthe.*) Bezeichnet man einen dieser Werthe mit k, so sind die andern $\frac{1}{k}$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$. Ist also der Werth eines der möglichen Verhältnisse bekannt, so kann man daraus alle übrigen erhalten.

Aufg. 1. Die 24 Zusammenstellungen zu bilden.

2. Zu beweisen, daß

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

3. Den Werth irgend eines der Doppelverhältnisse aus dem eines andern abzuleiten.

b) Sind die Punkte veränderlich, so denken wir uns zwei davon, A, B, fest und einen dritten D beweglich. Dann nimmt das Verhältniß $AD : BD$ alle möglichen negativen Werthe von 0 bis $-\infty$ an, während D sich von A nach B bewegt. Geht D von B aus in derselben Richtung weiter bis ins Unendliche, so wird $AD : BD = 1 + \frac{AB}{BD}$, und das Verhältniß nimmt ab von $+\infty$ bis 1; nähert sich dann D, aus dem Unendlichen kommend, auf der andern Seite dem A, so sind sowohl AD als BD negativ; ihr Verhältniß bleibt positiv und nimmt weiter ab von 1 bis 0. Während also D die ganze gerade Linie durchläuft, nimmt das Verhältniß $AD:BD$ der Reihe nach alle mögliche Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, aber jeden Werth nur einmal.**) Bei vier Punkten denkt man sich drei fest, nämlich A, B, C; dann erscheint das anharmonische Verhältniß als das Produkt des festen Verhältnisses $\frac{AC}{BC}$ mit dem veränderlichen $\left(1 : \frac{BD}{AD}\right)$. Hieraus geht hervor, daß man auch hier durch Bewegung des vierten Punktes D für das anharmonische Verhältniß alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ erhält, aber jeden nur einmal, was den in der Folge sehr wichtigen Satz liefert:

Zu drei Punkten einer Punktreihe läßt sich immer ein vierter, aber nur **einer** finden, der mit den gegebenen ein bestimmtes anharmonisches Verhältniß bildet.

Aufg. 1. Algebraischer Beweis des Satzes, indem man den Abstand des vierten Punktes von einem der gegebenen als Unbekannte ansieht.

2. Den vierten Punkt durch Konstruktion zu finden, wenn der Werth des anharmonischen Verhältnisses als Verhältniß zweier Strecken gegeben ist.

Unter den besondern Werthen, welche das anharmonische Verhältniß annehmen kann, sind die Werthe -1 und $+1$ hervorzuheben. Soll $(ABCD) = -1$, so ist $AC:BC = -(AD:BD)$; die Reihenfolge der Punkte muß daher entweder ACBD oder ADBC sein: die vier Punkte (ebenso die vier Strahlen) heißen harmonische.

---

*) Schröter §. 6.

**) Es ist hier wohl der Ort, den Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß es auf einer Geraden nur einen unendlich fernen Punkt gibt und daß $+\infty = -\infty$. Die letztere Behauptung kommt schon in der Trigonometrie vor, insofern $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm\infty$. Eine Art von Vorstellung liefert die Betrachtung eines Kreises, dessen Radius ins Unendliche wächst während sein Mittelpunkt ins Unendliche rückt. Läßt man aber den Mittelpunkt unverändert, so gewinnt man die Vorstellung davon, daß alle unendlich entfernten Punkte der Ebene auf einer Geraden liegen, eine Behauptung, welche übrigens im Laufe des Unterrichts mehrfach bewiesen wird. Indessen ist auch wiederholt zu betonen, daß manche Begriffe, (wie imaginäre Punkte und Linien) keiner Anschauung fähig sind und daher einfach als Ergebnisse und Ausdrücke der analytischen Behandlung betrachtet werden müssen.

Der Bedingung (ABCD) = + 1 dagegen kann nur dadurch Genüge geleistet werden, daß entweder D auf C oder B auf A fällt, daß also zwei zugeordnete Punkte auf einander fallen.

3. Verbindet man vier Punkte einer Punktreihe mit einem außerhalb liegenden Punkte, so ist das anharmonische Verhältniß der vier entstandenen Strahlen gleich dem der vier Punkte; oder: Wird ein Strahlenbüschel von einer Transversalen geschnitten, so ist das anharmonische Verhältniß von vier Durchschnittspunkten gleich dem der entsprechenden Strahlen.

Beweis entweder durch Konstruktion der Sinus, indem man von A und B Senkrechte auf c und d fällt; oder mit Hülfe der Sätze über das Verhältniß der Inhalte zweier Dreiecke.

Dieser Satz gestattet alle Lehren über Punktreihen auf die Strahlenbüschel zu übertragen, ohne besondere Beweise, welche sonst dadurch umständlich würden, daß $\sin(\alpha + \beta)$ nicht gleich $\sin \alpha + \sin \beta$ ist.

4. Unter der Verwandtschaft zweier vollständigen Systeme von Punkten und Geraden (wozu im Raume noch die Ebenen kommen) versteht man eine solche Abhängigkeit des einen Systems von dem andern, daß jedem Elemente des einen Systems ein oder mehrere bestimmte Elemente des andern und ebenso jedem Elemente des zweiten Systems ein oder mehrere Elemente des ersten entsprechen. Wenn im Besondern das Entsprechen eindeutig ist, das heißt, wenn jedem Elemente nur ein Element entspricht, so heißen die Systeme projektivisch. Die Verwandtschaft der Projektivität kann eine zwiefache sein, insofern entweder dem Punkte ein Punkt und der Geraden eine Gerade oder dem Punkte eine Gerade und der Geraden ein Punkt entspricht. Im ersten Falle wird die Verwandtschaft mit dem Namen Kollineation, im zweiten mit Reciprocität bezeichnet.

5. Lehrsatz. Wenn jedem Punkte des ersten Systems **ein** Punkt des zweiten und jedem Punkte des zweiten Systems **ein** Punkt des ersten entsprechen soll, so muß auch jeder Geraden in dem einen der beiden Systeme **eine** bestimmte Gerade im andern entsprechen.

Beweis. Bewegt sich der Punkt A des Systems I stetig, d. h. beschreibt er eine Linie a, so muß auch der entsprechende Punkt A′ die entsprechende Linie a′ beschreiben; den beiden Geraden a, b des Systems I entsprechen die Linien a′, b′. Da der Durchschnittspunkt von a und b der den beiden Geraden gemeinschaftliche Punkt ist, so muß ihm ein Punkt entsprechen, der zugleich a′ und b′ angehört, d. h. ihr Durchschnittspunkt. Da aber dem einzigen Durchschnittspunkt von a und b nur ein Punkt entsprechen darf, so dürfen sich auch a′, b′ nur in einem Punkte schneiden, d. h. sie müssen ebenfalls gerade sein. Dieser Beweis lehrt zugleich, daß allgemein bei zwei kollinearen Gebilden der Verbindungslinie zweier Punkte die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte und dem Durchschnittspunkt zweier Geraden der Durchschnittspunkt der entsprechenden Geraden entspricht.

Ebenso läßt sich beweisen, daß wenn jedem Punkt des einen der beiden Systeme **eine** Gerade des andern entsprechen soll, umgekehrt auch jeder Geraden **ein** Punkt entspricht. Beschreibt nämlich ein Punkt A irgend eine Linie durch stetige Bewegung, so bewegt sich auch die entsprechende Gerade a′ stetig, d. h. sie dreht sich entweder um einen Punkt oder umhüllt eine Kurve, welche sie in jeder ihrer Lagen berührt. Dem Durchschnittspunkte zweier Geraden entspricht daher die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kurven. Da aber zwei Kurven mehr als eine gemeinschaftliche Tangente haben, so kann der Bedingung, daß dem Durchschnittspunkte nur eine Gerade entsprechen darf, nur dann Genüge geschehen, wenn die jede der beiden Kurven in einen Punkt zusammenschrumpft. Es muß also jeder der beiden Geraden ein Punkt entsprechen. Hieraus folgt ganz allgemein, daß dem Durchschnittspunkt zweier Geraden die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte, und umgekehrt, entspricht.

Die Verwandtschaft der Kollineation dient dazu, um Sätze, welche für einen bestimmten Fall bewiesen sind, auf andere Fälle auszudehnen; mit Hülfe der Reciprocität dagegen bildet man aus jedem Satze, der sich dazu eignet, einen zweiten, indem man Gerade an die Stelle der Punkte und Punkte an die Stelle der Geraden setzt. Um diese Vervielfätigung der Sätze ausführen zu können, muß man die Eigenschaften kennen, welche übertragbar sind, das heißt, welche, wenn sie für ein System bewiesen sind, auch für die verwandten Systeme gelten. Nach dem eben Gesagten sind es folgende:

Liegen in einem Systeme mehrere Punkte in einer Geraden, so liegen in den kollinearen Systemen die entsprechenden Punkte ebenfalls in einer Geraden, und im reciproken Systeme schneiden sich die entsprechenden Geraden in einem Punkte.

Schneiden sich in einem Systeme mehrere Gerade in einem Punkt, so thun das auch die entsprechenden Geraden der kollinearen Systeme; die entsprechenden Punkte des reciproken Systems liegen auf einer Geraden.

Sind zwei Systeme einem dritten projektivisch, so sind sie auch unter sich projektivisch. Denn dem Elemente A′ des ersten Systems entspricht das Element A‴ des dritten und diesem das Element A″ des zweiten, also entsprechen sich auch A′ und A″.

Verschiedene Fälle!

Von andern Eigenschaften muß die Uebertragbarkeit erst untersucht werden. Dazu gehört

6. Das anharmonische Verhältniß.

Sollen die Punkte einer Punktreihe den Punkten einer andern Punktreihe eindeutig entsprechen, so muß zu jedem Punkte der entsprechende sich konstruiren lassen. Die Lagen der beiden Punkte müssen also von einander abhängig sein, oder mit andern Worten, es muß sich eine Gleichung aufstellen lassen zwischen dem Abstande des Punktes A von einem festen Punkte M der Punktreihe I und dem Abstande des Punktes A′ von einem festen Punkte M′ der Punktreihe II. Bezeichnet man die beiden Abstände mit x und x′ und bedenkt man, daß wegen der Bedingung des eindeutigen Entsprechens die höhern Potenzen von x und x′ nicht vorkommen dürfen, so ist die allgemeinste Form der Gleichung, welche die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Abstände ausdrückt, $ax' + bx + cx' + d = 0$.

Hier sind die Größen a, b, c, d entweder konstant oder müssen von x und x′ abhängig sein. In letzterem Falle müssen sie solche Funktionen von x und x′ sein, daß dadurch keine höhern Potenzen dieser beiden Buchstaben in die Gleichung gelangen, so daß also auch nach Ersetzung der Koeffizienten durch die Funktionen von x und x′ die Gleichung ihre Form behält. Wir dürfen also stets die Koeffizienten a, b, c, d als Konstante betrachten.

Nimmt man 4 Paare entsprechender Punkte mit den Abständen x_1, x_1'; x_2, x_2'; x_3, x_3'; x_4, x_4', so gilt die obige Gleichung unverändert für jedes Paar. Subtrahirt man die Gleichungen paarweise von einander und bedenkt, daß

$x_3\, x_3' - x_1\, x_1' = x_3'\,(x_3 - x_1) + x_1\,(x_3' - x_1')$, so erhält man Gleichungen von der Form

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3' - x_1'}\,(ax_3' + b) + ax_1 + c = 0.$$

Durch weitere geeignete Behandlung erhält man schließlich:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x_3' - x_1'}{x_3' - x_2'} : \frac{x_4' - x_1'}{x_4' - x_2'};$$

d. h. das anharmonische Verhältniß von irgend vier Punkten der einen Punktreihe ist gleich dem der vier entsprechenden Punkte der andern Reihe.

Mit Hülfe der Sätze der §§. 3 und 5 folgt hieraus der allgemeinere Lehrsatz:

Sind zwei Grundgebilde projektivisch, so ist das anharmonische Verhältniß von irgend vier Elementen des einen Gebildes gleich dem der vier entsprechenden des andern.

Da ferner zufolge des §. 2 zu drei Elementen das vierte eindeutig gefunden wird, wenn das anharmonische Verhältniß gegeben ist, so kann dieser Lehrsatz jetzt auch als Definition für die projektivische Beziehung aufgestellt werden. Ferner: Wenn drei Paare entsprechender Elemente (drei Elemente des einen Systems und die drei ihnen entsprechenden des andern) gegeben sind, so ist dadurch die Art des Entsprechens (die Abhängigkeit der beiden Systeme von einander) vollständig bestimmt; denn man kann jedes Paar entsprechender Elemente als die zu den drei festen gehörigen vierten betrachten.

Wenn auch jetzt schon hieraus ein Mittel abgeleitet werden kann, zu jedem Elemente des einen Systems das entsprechende des andern zu finden, so soll diese Aufgabe doch noch verschoben werden, bis uns bequemere Mittel zu Gebote stehn.

Aus dem Gesagten folgt weiter:

Wenn bei drei Paar gegebenen Punkten zwei Abstände der einen Reihe in demselben Verhältnisse stehen, wie die entsprechenden Abstände der andern Reihe so ist das Verhältniß von je zwei entsprechenden Strecken konstant: die beiden Reihen sind ähnlich.

Sind hierbei zwei Strecken gleich den ihnen entsprechenden, so sind sämmtliche entsprechende Strecken gleich: — gleiche oder kongruente Reihen.

Schließen drei Strahlen eines Strahlenbüschels dieselben Winkel ein, wie die entsprechenden Strahlen des projektivischen Strahlenbüschels, so sind sämmtliche entsprechende Winkel gleich: — gleiche, kongruente Strahlenbüschel.

7. Besondere Elemente. Der unendlich entfernte Punkt und das Paar rechtwinklig auf einander stehender Strahlen.

Den unendlich entfernten Punkt der ersten Punktreihe bezeichnen wir mit Q und den der zweiten mit R′. Diese beiden Punkte können sich nur dann entsprechen, wenn die Systeme ähnlich sind, d. h. wenn $AC : BC = A'C' : B'C'$. In allen andern Fällen sind Q′ und R die den beiden unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte; sie werden Gegenpunkte genannt.

Mit Rücksicht auf (2) ist dann

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{A'R'}{B'R'} = 1, \text{ woraus folgt}$$

$AR \,.\, A'Q' = BR \,.\, B'Q'$; mithin, da A und B unabhängig von einander sind, allgemein:

$$AR \,.\, A'Q' = \text{const.}$$

Dieses konstante Produkt der Abstände zweier entsprechenden Punkte von den Gegenpunkten heißt die Potenz der projektivischen Beziehung und bietet ein bequemes Mittel, alle Paare entsprechender Punkte zu konstruiren, wenn statt irgend drei Paar entsprechender Punkte ein Punktepaar A, A′) und die beiden Gegenpunkte gegeben sind; denn in der That hat man auch hier 3 Paar entsprechende Punkte. Durch die Punkte Q, R und Q,′ R′ wird jede Punktreihe in zwei Theile getheilt, die sich gegenseitig entsprechen, nämlich $R\infty = \infty Q'$ und $\infty R = Q'\infty$. Nehmen wir die beiden Punktepaare A, A′ und B, B′ hinzu, so sind die beiden durch die Fig. 1 angedeuteten Fälle zu unterscheiden.

I. R liegt zwischen A und B; dann liegt Q′ zwischen B′ und A′.

II. R liegt außerhalb der Strecke AB, dann liegt auch Q′ außerhalb A′B′ und zwar nach entgegengesetzter Seite hin. Es läßt sich das leicht zeigen, wenn man die beiden Punktreihen, von A und A′ beginnend in der Richtung nach rechts durchläuft und mit einander vergleicht.

Wählt man den unendlich entfernten Punkt Q zum dritten Punkte einer Reihe von vier Punkten, so hat man für das anharmonische Verhältniß

$$(A'B'Q'D') = (ABQD) = \frac{BD}{AD},$$

wodurch also das Doppelverhältniß $(A'B'Q'D')$ auf ein einfaches $BD : AD$ zurückgeführt wird.

Die Stelle der unendlich entfernten Punkte und der Gegenpunkte nehmen bei projektivischen Strahlenbüscheln die Schenkel entsprechender rechten Winkel ein. Daß es immer ein Paar, aber nur ein Paar, entsprechender rechten Winkel gibt, soll später (10, II) gezeigt werden. Bezeichnen wir ihre Schenkel mit s, t und s′, t′, so ist zu beweisen, daß

$$\text{tang}\,(a\ t)\ .\ \text{tang}\,(a'\ s') = \text{const.} = \frac{1}{\text{tang}\,(a\ s)\ \text{tang}\,(a'\ t')}.$$

Man untersuche die beiden Strahlenbüschel in Bezug auf die Lage von s, t ebenso wie die Punktreihen.

8. Die Paare entsprechender gleicher Strecken und entsprechender gleicher Winkel.

Die Frage nach deren Existenz wird am einfachsten mit Hülfe der Gegenpunkte und der Rechtwinkelpaare beantwortet. Setzt man die Bedingung $AB = A'B'$ in die Gleichung

ein, so erhält man
$$AR.A'Q' = BR.B'Q'$$
$$RB = Q'A'; RA = Q'B'$$
für beide Fälle der Fig 1.

Sind demnach die Gegenpunkte und die Punkte A A' als die Anfangspunkte gleicher Strecken gegeben, so erhält man (Fig. 2) die Strecken selbst, indem man $RB_1 = RB = Q'A'$ und $Q'B' = Q'B'_1 = RA$ macht. Unter Berücksichtigung der Bemerkung in (7) sind dann die gleichen Strecken $AB_1 = A'B_1'$ und $AB = A'B'$. Es ist zur Erklärung der Figur zu bemerken, daß hier die Reihenfolge der Punkte der beiden Reihen entgegengesetzte Richtung hat.

Es ist also bewiesen, daß jeder Punkt der einen Punktreihe und sein entsprechender Punkt der andern Reihe zweimal als Anfangspunkt gleicher entsprechenden Strecken auftreten, daß es mithin zweimal unendlich viele Paare solcher Strecken gibt. Die Paare gleicher Strecken zerfallen in zwei Gruppen der Art, daß die beiden sich entsprechenden Paare der ersten Gruppe die Gegenpunkte R, Q' enthalten, während bei der zweiten Gruppe die Gegenpunkte außerhalb der beiden sich entsprechenden Strecken liegen. Dieses Ergebniß scheint im Widerspruch mit dem früher (6. Ende) über kongruente Punktreihen Gesagten zu stehen. Der Widerspruch verschwindet aber, wenn man bedenkt, daß die die Gegenpunkte einschließenden Strecken nur scheinbar gleich und entsprechend sind; gleich sind nur die Abstände ihrer Endpunkte, während in Wirklichkeit von den entsprechenden Strecken die eine endlich und die andere unendlich ist.

Aehnliches gilt für die Strahlenbüschel.

9. Perspektivische Lage.

Erklärungen. Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel befinden sich in perspektivischer Lage, wenn die Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehn und umgekehrt die Punkte auf den entsprechenden Strahlen liegen.

Zwei Punktreihen sind in perspektivischer Lage, wenn sie zu demselben Strahlenbüschel perspektivisch liegen, wenn also sämmtliche Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten durch einen und denselben Punkt (Mittelpunkt des Strahlenbüschels, Projektionspunkt) gehn.

Zwei Strahlenbüschel sind in perspektivischer Lage, wenn sie zu derselben Punktreihe perspektivisch liegen, wenn also die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Strahlen sich in einer Geraden befinden.

Jede andere Lage der Gebilde heißt schiefe Lage.

Bedeutung dieser Bezeichnung, von der perspektivischen Abbildung hergenommen?

Folgerungen und Aufgaben:

I. Sind ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe projektivisch, so lassen sie sich in perspektivische Lage bringen. Bedenkt man nämlich, daß die gegenseitige Abhängigkeit durch 3 Paare entsprechender Elemente vollständig bestimmt ist (6), so ergeben sich zwei Lösungen:

a) Man konstruirt einen Punkt O so, daß die von ihm nach den drei Punkten A, B, C gezogenen Strahlen Winkel einschließen, welche den Winkeln (a b), (b c) des gegebenen Strahlenbüschels gleich sind, daß also das Strahlenbüschel (O. A B C) dem gegebenen (a b c) kongruent ist. Verbindet man dann O mit irgend einem Punkte D der Punktreihe, so ist

$$(O.\ ABCD) = (ABCD);$$

aber nach der Voraussetzung $\qquad (abcd) = (ABCD);$

also auch $\qquad (O.\ ABCD) = (abcd).$

Daraus folgt, daß wenn man das gegebene Strahlenbüschel mit den Strahlen a, b, c auf das konstruirte legt, auch die Strahlen d und O D sich decken, d. h. daß die beiden Strahlenbüschel kongruent sind.

b) In ähnlicher Weise kann man die Punktreihe auf das Strahlenbüschel legen. — Konstruktion?

Diese Lösungen enthalten den Satz:

II. Fallen drei Punkte einer Punktreihe auf die ihnen entsprechenden Punkte eines projektivischen Strahlenbüschels, so befinden sich die beiden Grundgebilde in perspektivischer Lage.

III. Zwei projektivische Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage, wenn die Verbindungslinien von drei Paar entsprechenden Punkten sich in einem Punkte schneiden. Heißt nämlich der Punkt

O und verbindet man denselben mit einem vierten Punkte D der ersten Reihe, so schneidet diese Verbindungslinie den Träger der andern Reihe in einem Punkte D'; dann ist

$$(ABCD) = (O.\ ABCD) = (A'B'C'D').$$

Mithin entspricht D' dem Punkte D, und da es nur einen vierten Punkt D' zu dem gegebenen Verhältniß (ABCD) gibt, so geht also die Verbindungslinie D'D durch O.

IV. Da bei drei Paar Punkten zweier Reihen die angegebene Bedingung stets erfüllt wird, wenn irgend zwei entsprechende Punkte, z. B. A, A' auf einander fallen, so folgt, daß man zwei projektivische Punktreihen in perspektivische Lage bringen kann, indem man sie so legt, daß in dem Durchschnittspunkte ihrer Träger zwei entsprechende Punkte auf einander liegen. Der Mittelpunkt des gemeinschaftlichen Strahlenbüschels ist der Schnittpunkt von BB' mit CC'.

V. Ebenso liegen zwei projektivische Strahlenbüschel perspektivisch, wenn die Durchschnittspunkte von 3 Paar entsprechenden Strahlen in einer Geraden liegen; jeder Punkt dieser Geraden, welche darum der perspektivische Durchschnitt der beiden Büschel heißt, ist der Schnittpunkt von zwei entsprechenden Strahlen.

VI. Zwei Strahlenbüschel befinden sich demnach in perspektivischer Lage, wenn irgend zwei entsprechende Strahlen auf einanderfallen, also wenn in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind. Um daher zwei projektivische Büschel in perspektivische Lage zu bringen, braucht man nur das zweite um seinen Mittelpunkt um den Winkel zu drehen, den derjenige Strahl des ersten, welcher durch den Mittelpunkt des zweiten geht, mit dem ihm entsprechenden Strahle bildet.

VII. Während bei zwei projektivischen Punktreihen die Richtung der Reihenfolge keinen Unterschied ausmacht, da man die eine der beiden Geraden nur um 180° zu drehen braucht; ist bei den Strahlenbüscheln die Richtung der Drehung (Aufeinanderfolge der Strahlen) wohl zu beachten. Ist nämlich die Drehungsrichtung bei beiden Büscheln dieselbe (gleichlaufende Strahlenbüschel), so liegen bei der perspektivischen Lage die beiden Mittelpunkte auf derselben Seite des perspektivischen Durchschnitts; bei ungleichlaufenden Büscheln aber auf verschiedenen Seiten. Wenn man indeß nur 3 Strahlenpaare betrachtet, so ändert sich die Drehungsrichtung, wenn man statt eines der Strahlen seine Verlängerung nimmt.

10. Betrachtet man zwei projektivische Grundgebilde in der perspektivischen Lage, so kann man die früher (7. 8.) besprochenen Eigenschaften auf einfachere Weise beweisen.

I. Bei zwei projektivischen Punktreihen erhält man die Gegenpunkte R und Q' als Durchschnittspunkte jedes der beiden Träger mit dem zu dem andern parallelen Strahle des gemeinsamen Strahlenbüschels.

II. Bei zwei projektivischen Strahlenbüscheln ist die gegenseitige Abhängigkeit vollkommen bestimmt durch die beiden Mittelpunkte O, O' und die als perspektivischer Durchschnitt dienende Gerade g. Beschreibt man einen Kreis der durch O und O' geht und dessen Mittelpunkt auf g liegt, so schließen die nach seinen Durchschnittspunkten S, T mit der Geraden g gezogenen Strahlen s, t und s', t' rechte Winkel ein. Diese Strahlen sind also die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel; es gibt mithin immer ein Paar, aber nur ein Paar, solcher entsprechenden rechten Winkel.

III. Aufgabe. Mit Hülfe dieser Konstruktionen die Sätze über diese besondern Punkte und Strahlen, sowie über die entsprechenden gleichen Strecken an der Figur zu beweisen.

IV. Aufgabe. Konstruktion von Paaren entsprechender gleichen Winkel entweder mit Hülfe der entsprechenden rechten Winkel oder mit Hülfe von beliebigen durch O und O' gehenden Kreisen und des Satzes von der Gleichheit des Peripherienwinkel.*) Man erhält auch hier zwei Systeme gleicher Winkel, wenn man den Nebenwinkel zu Hülfe nimmt und statt des einen Mittelpunktes den Punkt benutzt, welcher zu ihm symmetrisch liegt in Bezug auf den perspektivischen Durchschnitt.

11. Anwendungen.

I. Zu drei Punkten A, B, C, die in gerader Linie liegen, einen vierten D zu konstruiren, der mit ihnen ein durch das Verhältniß zweier Strecken AB' : B'C' bestimmtes Doppelverhältniß bildet.**) Die Fig. 3 gibt die Lösung an.

*) Schröter, §. 13 Ende.
**) Fiedler §. 16, 4.

II. Liegen (Fig. 4) zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ so, daß die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ ihrer Ecken durch denselben Punkt gehen, so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten, AB mit A′B′, BC mit B′C′, CA mit C′A′ auf einer Geraden, und umgekehrt.

Beweis.*) Die Figur ergibt

$$(\gamma\,BAD) = (\gamma\,B'A'D')$$

Darum sind auch die Strahlenbüschel, welche durch diese Punkte gehn und C und — C′ zu Mittelpunkten haben, projektivisch, und zwar in perspektivischer Lage, weil die Strahlen CD und C′D′ zusammenfallen. Dann liegen aber die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen in einer Geraden. Umkehrung?

Anderer Beweis:**) Verbindet man α, β, γ noch mit O, so sind diese drei Punkte die Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, welche je zwei der durch O gehenden Geraden projektivisch machen. Die Strahlenbüschel sind aber in perspektivischer Lage, mithin fallen in den Verbindungslinien der Mittelpunkte je zwei entsprechende Strahlen zusammen u. s. w.

12. Aufgabe. Wenn die projektivische Beziehung zweier Punktreihen durch drei Paar entsprechende Punkte gegeben ist, so sollen alle übrigen Paare entsprechender Punkte durch Konstruktion gefunden werden.

Am einfachsten und bequemsten führt man die Aufgabe wohl in der Weise aus, daß man die beiden Punktreihen nach (9, IV) in perspektivische Lage bringt, d. h. daß man durch einen der drei Punkte der ersten Punktreihe, etwa A, eine beliebige Gerade zieht, auf derselben die Strecken A′B′, B′C′ abträgt u. s. w. Dann muß man die erhaltenen Punkte der Geraden wieder auf den ursprünglichen Träger der zweiten Punktreihe abtragen. Um dies zu vermeiden, wendet man folgende Konstruktion an, welche ohne Hülfe des Zirkels blos mittels des Lineals ausgeführt wird:

Sind die Punkte A, B, C und A′, B′, C′ gegeben, so nimmt man (Fig. 5) auf der Verbindungslinie AA′ zwei Punkte O, O′ als Mittelpunkte zweier Strahlenbüschel an, deren Strahlen durch die gegebenen Punkte gehen. Diese Strahlenbüschel sind projektivisch in perspektivischer Lage. Ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich also auf einer Geraden $\alpha\beta\gamma$. Um daher zu dem Punkte D den entsprechenden D′ zu bestimmen, verbindet man O mit D und den Durchschnitt der Verbindungslinie mit $\beta\gamma$ mit O′ Die letzte Verbindungslinie schneidet den Träger der zweiten Punktreihe in dem Punkte D′, welcher D entspricht.

Eine dritte Lösung geschieht mittels zweier kongruenten Strahlenbüschel, so daß die Strahlen eines jeden von ihnen durch die Punkte einer der Punktreihen gehn.

Legt man bei der zweiten Lösung die Mittelpunkte O, O′ auf die Punkte A, A′, so erhält man die Fig. 6, in welcher auch die Gegenpunkte konstruirt sind. In dem Durchschnittspunkte F sind zwei Punkte M, N′ vereinigt, die sich nicht entsprechen. Ihre entsprechenden sind der Konstruktion gemäß die Punkte M′, N, in denen die beiden gegebenen Träger der Punktreihen von dem perspektivischen Durchschnitte $\beta\gamma$ geschnitten werden. Da die Punkte M′, N, also auch die Gerade $\beta\gamma$, von der Lage der Mittelpunkte der Strahlenbüschel unabhängig sind, so folgt, daß auch der Durchschnittspunkt α von BC′ mit B′C auf $\beta\gamma$ liegen muß, woraus ein Lehrsatz folgt, der scheinbar ohne Beziehung zur ursprünglichen Aufgabe steht. Welcher?***) — Konstruktion entsprechender gleicher Strecken! Konstruktion der Gegenpunkte!

13. Ganz in gleicher Weise und mit denselben Folgerungen wird die Aufgabe gelöst, zwei projektivische Strahlenbüschel zu konstruiren, wenn drei Paar entsprechende Strahlen gegeben sind. (Vgl. 5.) Den Punkten A, A′ der vorigen Aufgabe entsprechen die Strahlen a, a′ (Fig. 7), dem perspektivischen Durchschnitt $\beta\gamma$ entspricht jetzt der Punkt P, in welchem die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte (ab′) und (a′b) die Verbindungslinie der Punkte (ac′) und (a′c) schneidet. Durch diesen Durchschnittspunkt geht auch die Gerade (bc′, b′c.)

Um aber auch die den Gegenpunkten entsprechenden Rechtwinkelpaare zu finden, muß man die Strahlenbüschel durch Drehung des einen von ihnen erst in perspektivische Lage bringen.****)

*) Schröter, §. 11.
**) Steiner, systemat. Entw. 21.
***) Fiedler §. 17. Steiner, system. Entw. 24.
****) Fiedler, §. 18.

14. Harmonische Eigenschaften.

Da dieselben in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Planimetrie eine Stelle gefunden haben, so erscheint es überflüssig, sie in der vorliegenden Sammlung von Sätzen einzeln aufzuführen. Als die in der Folge zur Verwendung kommenden sollen hier nur genannt werden:

1) Der Satz von dem Punkte welcher den Abstand zweier zugeordneten Punkte halbirt.

2) Wenn ein Strahl eines harmonischen Büschels den Winkel zweier andern Strahlen halbirt, so bildet der erste mit seinem zugeordneten einen rechten Winkel, und umgekehrt.

3) Zieht man durch die Ecke eines Dreiecks eine Gerade nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite und eine Parallele zu derselben, so bilden diese beiden Geraden mit den beiden in der Ecke zusammenstoßenden Seiten ein harmonisches Büschel.

4) Die harmonische Beziehung wird durch die Projektion nicht verändert, d. h. sind vier Elemente eines Gebildes harmonische, so sind die vier entsprechenden Elemente des projektivischen Gebildes ebenfalls harmonisch. (2. 6.)

Die Beweise aller Sätze werden ganz bedeutend vereinfacht, wenn man sie auf die Lehre vom anharmonischen Verhältnisse gründet. Als Beispiel hierfür möge der Beweis zu dem obigen zweiten Satze angeführt werden:

Bekanntlich bilden die zwei Seiten eines Dreiecks, und die Halbirungslinien des von ihnen eingeschlossenen Winkels und seines Nebenwinkels ein harmonisches Strahlenbüschel; oder: Wenn ein Strahl c eines Büschels den von den Strahlen a und b eingeschlossenen Winkel halbirt und der vierte Strahl d auf c senkrecht steht, so sind die vier Strahlen harmonische. Da nun bei harmonischen Gebilden das anharmonische Verhältniß den bestimmten Werth (—1) hat und bei gegebenem Werthe des anharmonischen Verhältnisses zu drei gegebenen Elementen nur ein viertes gehört, so folgt: Stehn die Strahlen b und d auf einander senkrecht und zieht man den beliebigen Strahl a, so genügt der Forderung der Strahl c, wenn Winkel (bc) = (ab); also muß b den Winkel (ac) halbiren, wenn die vier Strahlen harmonische sein sollen.

15. Aufeinander liegende Gebilde; Doppelpunkte.

Legt man zwei projektivische Punktreihen auf einander, so können zwei verschiedene Fälle eintreten, je nachdem die Punktreihen in dieser Lage gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

Es soll untersucht werden, ob es Doppelpunkte gibt, d. h. ob es vorkommt, daß irgend zwei entsprechende Punkte auf einander fallen.

Die Fig. 8. I zeigt den Fall, wo die Punkte in den beiden Reihen in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen. In der obern Reihe bewege sich der Punkt X von links nach rechts, während in der untern der entsprechende Punkt X' sich von rechts nach links bewegt. Liegt X im Unendlichen, so fällt X' auf Q'. Während X' sich nach links bis ins Unendliche fortbewegt, beschreibt X die Strecke aus dem Unendlichen bis R, wobei die Punkte sich einmal begegnen müssen. Kommt dann X' aus dem Unendlichen von rechts her wieder zurück bis Q', während X den Weg von R ins Unendliche macht, so muß eine zweite Begegnung statt finden. Bei ungleichlaufender Lage gibt es also immer zwei Doppelpunkte, so daß die Strecke Q'R zwischen ihnen liegt.

Verfährt man ebenso in dem Falle, wo die Punkte X und X' sich (Fig. 8, II) in derselben Richtung bewegen, so erkennt man sofort, daß es außerhalb der Strecke Q'R keine Doppelpunkte geben kann. Bewegt sich also X' von Q' an so rasch, daß es von X nicht zwischen Q' und R eingeholt wird, so gibt es überhaupt keinen Doppelpunkt. Wird es aber einmal eingeholt, so bleibt es also augenblicklich gegen X zurück; damit dann aber X' ins Unendliche gelange, während X erst auf R fällt, muß X wieder von X' überholt werden: es gibt mithin noch einen zweiten Doppelpunkt zwischen Q' und R. Es kann aber auch vorkommen, daß schon von der ersten Begegnung an die Bewegung von X langsamer und die von X' rascher wird, daß also die beiden Doppelpunkte aufeinander fallen. Bei gleichlaufenden Punktreihen gibt es also keine oder zwei getrennte oder zwei zusammenfallende (d. h. einen) Doppelpunkt.

Mehr als zwei Doppelpunkte kann es überhaupt nicht geben, weil sonst die Reihen kongruent wären und alle Punkte auf ihre entsprechenden fielen.

Aufgabe.*) Genauere Untersuchung der möglichen Fälle mit Hülfe der Gleichung
$RX . Q'X' = \text{const.}$

Die Untersuchung kann endlich auch auf algebraischem Wege geführt werden. Bezeichnet man nämlich mit x, x' die Abstände der (beweglichen) entsprechenden Punkte X, X' von irgend einem Punkte M (in welchem also zwei nicht entsprechende Punkte zusammenfallen) der Geraden, auf der die beiden Punktreihen liegen, so ist (6):

$$axx' + bx + cx' + d = 0.$$

Damit die Punkte auf einander fallen, muß $x' = x$, mithin

$$ax^2 + (b + c)\,x + d = 0,$$

$$x = \frac{1}{2a}\left[-\,(b + c) \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4\,ad}\right],$$

so daß die Existenz der Doppelpunkte von dem Werthe von $(b + c)^2 - 4\,ad$ abhängt. Dieser Ausdruck läßt sich auch schreiben:

$$w = (b-c)^2 + 4\,(bc-ad).$$

Um anderseits die gleiche oder entgegengesetzte Richtung der Aufeinanderfolge der Punkte auszudrücken, denken wir uns den Punkt X um die kleine Größe h fortbewegt, während X' die Strecke h' beschreibt. Es muß dann also auch sein:

$$a\,(x + h)\,(x' + h') + b\,(x + h) + c\,(x' + h') + d = 0,$$

daraus

$$a\,h' + a\,x\,\frac{h'}{h} + a\,x' + b + c\,\frac{h'}{h} = 0.$$

Läßt man hierin das h', also auch das h, sich der Null nähern, so verschwindet das erste Glied, und es wird an der Grenze:

$$\frac{h'}{h} = -\,\frac{ax' + b}{ax + c} = -\,\frac{bc - ad}{(ax + c)^2}.$$

Da nun die beiden Lagen dadurch charakterisirt sind, daß h und h' entweder verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben, so sind die Punktreihen ungleichlaufend oder gleichlaufend, je nachdem

$$bc - ad \gtrless 0,$$

was, mit dem Werthe von w verglichen, zu dem früher gefundenen Ergebnisse führt. Die beiden Doppelpunkte fallen zusammen, wenn

$$(b + c)^2 = 4\,ad.$$

Zu bemerken ist noch, daß die Differenz $bc-ad$ nie Null sein kann, denn sonst zerfiele die erste Seite der Gleichung zwischen x und x' in zwei lineare Faktoren, so daß man für x und x' nur je einen bestimmten Werth erhielte.

16. Konstruktion der Doppelpunkte P, P'*) Es seien (Fig. 9) A, A'; B, B'; C, C' drei Paare entsprechender Punkte von zwei auf einander liegenden projektivischen Punktreihen. Verbindet man dann diese Punkte mit dem beliebigen Punkte M irgend eines in der Ebene liegenden Kreises und verlängert die Verbindungslinie bis zu den Durchschnittspunkten $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ mit der Peripherie, so erhält man zwei projektivische Strahlenbüschel. Diese sind aber nach den Sätzen über die Peripheriewinkel (nöthigenfalls unter Berücksichtigung der Nebenwinkel) kongruent den Strahlenbüscheln, welche man erhält, wenn man einerseits β' mit α, β, γ und anderseits β mit α', β', γ' verbindet. Die beiden neuen Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten β, β' sind demnach ebenfalls projektivisch und zwar in perspektivischer Lage wegen der zusammenfallenden Strahlen $\beta\beta'$ und $\beta'\beta$. Die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte E und F, d. h. $(\beta'\alpha, \beta\alpha')$ und $(\beta'\gamma, \beta\gamma')$ ist mithin der perspektivische Durchschnitt, welcher daher auch, ähnlich wie in (12), dazu dienen kann, um zu jedem Punkte D den entsprechenden D' zu konstruiren. Zu dem Ende zieht man DM δ, verbindet δ mit β' und den Durch-

*) Schröter, §. 14.
*) Schröter, §. 15.

schnittspunkt von $\beta'\delta$ und EF mit β, verlängert diese Verbindungslinie bis zur Peripherie in δ' und zieht $\delta'MD'$. Sollen die beiden entsprechenden Punkte D und D' auf einander fallen, so muß auch δ' auf δ zu liegen kommen, was nur in den Durchschnittspunkten von EF mit der Peripherie stattfindet. Bedenkt man, daß die beiden Strahlenbüschel β^1 und β zugleich mit den Punktreihen ungleichlaufend oder gleichlaufend sind, und beachtet man das früher Gesagte über die Lage des perspektivischen Durchschnitts in Bezug auf die Mittelpunkte der Strahlenbüschel, so liefert die Konstruktion die Bestätigung der früher erhaltenen Ergebnisse über die Existenz der Doppelpunkte.

17. Anwendungen der vorhergehenden Konstruktion.

I. Nimmt man statt β' und β die Punkte α' und α zu Mittelpunkten der Strahlenbüschel, so wird der perspektivische Durchschnitt bestimmt durch die Punkte E und G, d. h. $(\alpha'\beta, \alpha\beta')$ und $(\alpha'\gamma, \alpha\gamma')$. Da aber die zwei Doppelpunkte dieselben bleiben müssen, so geht die Gerade EG durch dieselben beiden Punkte der Peripherie wie EF, d. h. die drei Punkte E, F, G liegen auf einer Geraden. Dieser Satz ist nichts Anderes als der unter dem Namen Pascal'sches Sechseck bekannte Lehrsatz.*)

II. Die Konstruktion des vorigen §. bietet ein Mittel die schöne Aufgabe zu lösen: Zu zwei Vielecken von gleicher Seitenzahl ein drittes von ebenso vielen Seiten zu konstruiren, dessen Ecken auf den Seiten (oder ihren Verlängerungen) des einen der gegebenen Vielecke und dessen Seiten (oder deren Verlängerungen) durch die Ecken des andern gehen.

Gegeben (Fig. 10.) die Vierecke ABCD und A'B'C'D'; die Ecken des dritten Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ sollen auf den Seiten von ABCD liegen, und die Seiten des dritten Vierecks sollen durch A', B', C', D' gehn.

Auflösung.**) Verbindet man beliebige Punkte M_1, N_1, P_1 der Seite BC mit dem Punkte B' und verlängert die Verbindungslinien bis zu ihren Schnittpunkten M_2, N_2, P_2 mit CD so erhält man zwei projektivische Punktreihen in perspektivischer Lage. Verbindet man die drei erhaltenen Punkte mit C und verfährt in ähnlicher Weise weiter unter Benutzung der Ecken D' und A' als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, so erhält man schließlich auf der Seite BC die Punktreihe M_5, N_5, P_5, welche mit den zuerst angenommenen Punkten auf derselben Seite des Vierecks ABCD projektivisch ist, so daß also diese Seite der gemeinsame Träger zweier auf einander liegenden projektivischen Punktreihen wird. Die gesuchte Ecke B_1 ist offenbar nichts Anderes als einer der Doppelpunkte dieser Reihen, weil nur dann das Viereck geschlossen ist. Die Aufgabe hat demnach keine, eine oder zwei Lösungen.

18. Aufeinanderliegende Strahlenbüschel; Doppelstrahlen.

Legt man zwei Strahlenbüschel so aufeinander, daß die beiden Mittelpunkte zusammenfallen, so finden ganz dieselben Beziehungen statt wie bei zwei auf einander liegenden Punktreihen. Die Untersuchung kann entweder in derselben Weise, wie in den vorigen §§. geführt werden, oder, was einfacher ist, man schneidet die beiden Strahlenbüschel durch eine Gerade, welche als zwei zusammenfallende Gerade erscheint, wodurch nach §. 3 die Sätze über die Strahlenbüschel unmittelbar aus denen über die Punktreihen abgelesen werden können.

19. Aufeinander liegende Gebilde; Involution.***)

Es können zwei projektivische Punktreihen in besondern Fällen so aufeinander liegen, daß von den unendlich vielen Paaren entsprechender gleichen Strecken ein Paar AB, A'B' verkehrt auf einander fällt (Fig. 11), so daß also A' auf B; B' auf A zu liegen kommt. Dem Punkte C der ersten Punktreihe entspricht der Punkt C', welcher mit einem vierten Punkte D der ersten Reihe zusammenfällt. Den entsprechenden Punkt D' findet man dann durch die Gleichung (A'B'C'D') = (ABCD).

---

*) Schröter, §. 15.
**) Steiner, System. Entw. §. 25.
Ders. Konstruktionen S. 91.
***) Schröter, §. 16.

Anm. Obgleich sich beim Unterrichte schwerlich die Zeit finden dürfte zu einer erschöpfenden Behandlung der Involution, so mußte sie doch der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen werden, auch wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der Kurven.

d. h.
$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$
Die Figur ergibt aber
$$\frac{AD}{BD} = \frac{B'C'}{A'C'},$$
also ist
$$\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{BC}{AC}.$$
Da auch die Vorzeichen übereinstimmen, so lehrt diese Gleichung, daß D' auf C fällt. Da ferner der Punkt C ganz willkürlich ist, so haben wir den Satz: **Wenn bei zwei aufeinander liegenden Punktreihen irgend zwei entsprechende gleiche Strecken verkehrt auf einander liegen, so fallen alle entsprechenden gleichen Strecken verkehrt auf einander.** Hieraus folgt, daß, da die unendlichen Strecken gleich sind, insbesondere Q' auf R fallen muß, wie übrigens auch die Gleichung
$$(A'B'Q'R') = (AB\,QR)$$
verlangt. Zwei projektivische Punktreihen werden daher in die bezeichnete Lage gebracht, indem man die Träger so auf einander legt, daß die Gegenpunkte Q' und R auf einander fallen.

Da sämmtliche gleiche Strecken **verkehrt** auf einander liegen, so sind in dieser Lage die beiden Punktreihen eigentlich immer **ungleichlaufend**. Je zwei entsprechende Punkte liegen dann immer entweder beide zwischen den Punkten A und B oder beide außerhalb der Strecke AB. Der Punkt (RQ',) liegt außerhalb jedes Paares zusammenfallender Strecken. Erweitert man aber nach der Bemerkung am Ende von (8) den Begriff der gleichen Strecken dahin, daß nur die Abstände ihrer Endpunkte gleich zu sein brauchen, während die eine Strecke endlich, die andere unendlich ist, so können auch die beiden Reihen **gleichlaufend** sein, wie Fig. 12 zeigt. In diesem Falle muß daher der Punkt (RQ') stets zwischen je zwei entsprechenden Punkten liegen, und von zwei entsprechenden Punkten fällt immer der eine zwischen A und B, der andere außerhalb AB. Es entspricht hier ARB nicht A'B' sondern A' ∞ B'. Die Reihenfolge ist ADRBC∞ und A'D'∞B'C'Q'.

Ein solches Paar aufeinander liegender Punktreihen wird **Punktsystem** (**involutorische Punktreihe**) genannt; die Punkte AB' und BA' heißen **zugeordnete** Punkte, der Punkt M oder Q'R **Mittelpunkt** des Systems. Wenn der Mittelpunkt zwischen zwei zugeordneten Punkten liegt (gleichlaufende Reihe) wird das System **elliptisch** im entgegengesetzten Falle **hyperbolisch**, genannt.

Wenn die projektivische Beziehung zwischen den beiden Punktreihen nicht anderweitig gegeben ist, so wird das Punktsystem vollständig bestimmt durch zwei Paare zugeordneter Punkte, denn jedes neue Punktpaar EF läßt sich betrachten als EF' und E'F.

Im Folgenden sollen die Paare zugeordneter Punkte mit A und A_1; B und B_1 u. s. w. bezeichnet werden, so daß also A mit A'_1 und A_1 mit A' zusammenfällt.

20. **Konstruction des Punktsystems.**

Sind zwei Paare zugeordneter Punkte A und A_1, B und B_1 gegeben, so ist zunächst der Mittelpunkt M zu bestimmen.

Die Gleichung
$$MA.\,MA_1 = MB.\,MB_1,$$
liefert
$$MA_1 : MB = A_1B_1 : AB,$$
wonach M leicht gefunden wird. Hat man M, so konstruirt man die übrigen Paare zugeordneter Punkte mittels des Sehnen- oder Sekantensatzes.

Eine andere Lösung der Aufgabe*) erhält man, indem man durch A und A_1 einen beliebigen Kreis legt, ebenso durch B und B_1, welcher den ersten in N und N' schneidet; die Verbindungslinie NN' trifft die Punktreihe in M. Jeder andere Kreis, der durch N und N' geht, schneidet den Träger des Punktsystems in zwei zugeordneten Punkten. Die Lage der Punkte B und B' in Bezug auf A und A_1

*) Schröter, §. 16.

entscheidet, welcher der beiden in (19) unterschiedenen Fälle eintritt. Diese Konstruktion läßt sich auch als Lehrsatz aussprechen: Die Kreise, welche durch zwei feste Punkte gehn, bestimmen auf jeder beliebigen Transversalen eine involutorische Punktreihe.

21. Eigenschaften der involutorischen Punktreihe.

I. Stellt man die Punkte eines Punktsystems derart zu zwei Reihen zusammen, daß von je zwei zugeordneten Punkten jeder einer andern Reihe angehört, so sind nach der Erklärung die beiden Punktreihen projektivisch. Dabei können wieder je zwei zugeordnete Punkte mit einander vertauscht werden; denn betrachtet man das Punktepaar $C C_1$, so kann man es ebensogut als $C C'$ wie als $C'_1 C$ auffassen: im ersten Falle gehört C zur ersten und C_1 zur zweiten, im andern Falle C zur zweiten und C_1 zur ersten Reihe.

II. Jede Punktreihe, welche mit einem Punktsystem projektivisch ist, ist selbst wieder ein Punktsystem. Denn die beiden Punktreihen, aus denen das erste Punktsystem besteht, bleiben auch nach der Projektion unter einander in der projektivischen Beziehung (5, letzter Absatz), und da außerdem je zwei zusammenfallende Punkte ebenfalls wieder aufeinander zu liegen kommen, so bleibt die Grundeigenschaft des Punktsystems bestehn.

22. Involution von sechs Punkten. Da ein Punktsystem durch zwei Paare zugeordneter Punkte vollständig bestimmt ist und man mittels dieser Bestimmung zu jedem fünften Punkte den ihm zugeordneten auf eindeutige Weise findet, so folgt, daß zwischen je sechs Punkten, welche drei Paare zugeordneter darstellen sollen, eine Abhängigkeit statt finden muß. Man spricht daher von sechs Punkten in Involution oder einer Involution von sechs Punkten.

Die eine dieser Abhängigkeiten ist durch die Eigenschaft des Mittelpunktes begründet; man sagt daher:

Sechs Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 bilden eine Involution, wenn sich ein Punkt M so finden läßt, daß

$$MA_1 . MA_1 = MB_1 . MB_1 = MC_1 . MC_1$$

Der zweite Ausdruck der Abhängigkeit beruht auf der Gleichheit des anharmonischen Verhältnisses zweier projektivischen Punktreihen. Betrachtet man nämlich $AA_1 BC$ als die vier Punkte einer Punktreihe, so sind nach der ursprünglichen Definition $A_1 AB_1 C_1$ die ihnen entsprechenden der projektivischen Reihe; daher

$$(AA_1 BC) = (A_1 AB_1 C_1),$$

woraus folgt

$$AB . AB_1 : AC . AC_1 = A_1 B . A_1 B_1 : A_1 C . A_1 C_1.$$

Ebenso ist

$$(ABB_1 C) = (A_1 B_1 BC_1); \; (ABCC_1) = (A_1 B_1 C_1 C),$$

woraus man die weitern zwei Gleichungen ableitet

$$BA . BA_1 : BC . BC_1 = B_1 A . B_1 A_1 : B_1 C . B_1 C_1$$
$$CA . CA_1 : CB . CB_1 = C_1 A . C_1 A_1 : C_1 B . C_1 B_1$$

Jede dieser Gleichungen dient ebenfalls als Definition der Involution.

Durch andere Zusammenstellung der anharmonischen Verhältnisse, so daß eine Strecke auf beiden Seiten an derselben Stelle vorkommt und man also durch dieselbe dividiren kann, erhält man ein drittes System von Gleichungen.

Aus der Gleichung z. B.

$$(AB\, CA_1) = (A_1 B_1\; C_1 A)$$

folgt (wenn man von den Vorzeichen absieht)

$$AB . B_1 C_1 . CA_1 = A_1 B_1 . BC . C_1 A.$$

Da nun nach dem früher Gesagten in der Gleichung zwischen zwei anharmonischen Verhältnissen je zwei zugeordnete Punkte mit einander vertauscht werden können, so kann das auch in der letztern Gleichung geschehen. Man erhält daraus noch folgende drei Gleichungen

$$AB \;.\; B_1 C \;.\; C_1 A_1 = A_1 B_1 \;.\; BC_1 \;.\; CA,$$
$$AB_1 \;.\; BC_1 \;.\; CA \;= A_1 B \;.\; B_1 C \;.\; C_1 A_1,$$
$$A_1 B \;.\; B_1 C_1 .\; CA \;= AB_1 \;.\; BC \;.\; C_1 A_1.$$

Um zu zeigen, daß umgekehrt die Beziehung zwischen sechs Punkten, welche durch eine der entwickelten Gleichungen ausgedrückt wird, nichts Anderes enthält, als was die ursprüngliche Definition des Punktsystems aussagt; ist zunächst zu bemerken, daß, sowie die Gleichungen aus der Gleichstellung zweier anharmonischen Verhältnisse abgeleitet worden, umgekehrt aus jeder der Gleichungen wiederum eine Gleichung von der Form

$$(A A_1 B C) = (A_1 A B_1 C_1)$$

hergeleitet wird, so daß wir nur den Zusammenhang dieser Gleichung mit der ursprünglichen Definition zu untersuchen haben. Diese Gleichung sagt aber aus, daß die sechs Punkte zwei projektivische Punktreihen bilden, in denen zwei gleiche entsprechende Strecken $A A_1$ verkehrt auf einander fallen, was die Definition des Punktsystems ist.

Um indeß die Existenz des Punktsystems noch strenger nachzuweisen, muß gezeigt werden, daß auch B und B_1 (ebenso wie C und C_1) die Endpunkte auf einander fallender entsprechenden Strecken sind. Zu dem Ende kann man die gegebene projektivische Beziehung der vier Paar Punkte durch die Gleichung ausdrücken

$$(A B A_1 C) = (A_1 B_1 A C_1).$$

Schreibt man die Gleichung vollständig hin, dividirt durch $A A_1$ und multiplizirt mit $B B_1$, so erhält man nach einiger Umformung:

$$(A B B_1 C) = (A_1 B_1 B C_1).$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Punktreihen sind mit den vorigen identisch geblieben, weil sie mit denselben die Elemente $A B C$ und $A_1 B_1 C_1$ gemein haben; außerdem aber gibt die Gleichung die zugeordneten Punkte $B B_1$ als die Endpunkte entsprechender gleichen Strecken zu erkennen.

23. Strahlensysteme, (involutorische Strahlenbüschel) lassen sich wie die Punktsysteme behandeln oder auf dieselben zurückführen. Zu bemerken ist hier, daß die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel verkehrt auf einander fallen.

24. Vollständige geradlinige Gebilde.

Zwei projektivische Gebilde, aus Punkten und Geraden zusammengesetzt, können bekanntlich in der Verwandtschaft der Kollineation oder der Reciprocität stehn.

Zur Feststellung des Entsprechens reichen jetzt nicht mehr drei Paare entsprechender Elemente hin, sondern es sind dazu vier Paare erforderlich, und zwar dürfen dabei weder drei Punkte in einer Geraden liegen, noch drei Gerade durch einen Punkt gehn. Es tritt daher das Viereck gewissermaßen als Grundfigur auf. Man unterscheidet das vollständige Vierseit und das vollständige Viereck, welche gegen einander als reciproke Figuren angesehen werden können.

Ein vollständiges Vierseit (Fig. 13) entsteht, wenn vier in der Ebene liegende Gerade a, b, c, d, bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten verlängert werden. Das vollständige Vierseit hat demnach drei Paar gegenüberliegende Ecken, nämlich die Durchschnittspunkte ab und cd, ac und bd, ad und bc. Die drei Geraden, welche je zwei Gegenecken verbinden, sind die Diagonalen. Das vollständige Vierseit umfaßt drei einfache Vierecke, nämlich ein gewöhnliches, eines mit einspringender Ecke und ein überschlagenes (zwei Scheiteldreiecke.)

Ein vollständiges Viereck (Fig. 14) entsteht, wenn vier in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, D zu je zweien durch gerade Linien verbunden werden. Das vollständige Viereck hat demnach drei Paare von Gegenseiten, nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC.

Die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten heißen Diagonalpunkte. Es zerfällt in drei einfache Vierecke, nämlich ein gewöhnliches und zwei überschlagene.

25. Eigenschaften des vollständigen Vierseits und des vollständigen Vierecks.

In der Fig. 15, welche man sowohl als vollständiges Vierseit, wie als vollständiges Viereck ansehen darf, je nachdem man von den Seiten AB, BC, CD, DA, oder von den Ecken A, B, C, D ausgeht, kann man die Geraden BF und AF betrachten einmal als geschnitten von den Strahlen des Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt E ist, und das andremal als geschnitten von dem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkte P. Daher hat man die beiden Gleichungen

$$(A D N F) = (B C M F)$$
$$(A D N F) = (C B M F).$$

Mithin
$$(BCMF) = (CBMF) = \frac{1}{(BCMF)}$$
Also $(BCMF) = +1$.
Da nach (2) das obere Zeichen nicht stattfinden kann, so gilt das untere,
also
$$(BCMF) = -1,$$
d. h. die Punkte B,M,C,F sind harmonische, mithin auch die vier Strahlen durch E, und die Punkte A P C P'. Wir haben also die Sätze:

Im vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch ihre beiden Endpunkte und die beiden andern Diagonalen harmonisch getheilt.

Im vollständigen Viereck bilden in jedem Diagonalpunkte die beiden Seiten und die Verbindungslinien mit den beiden andern Diagonalpunkten ein harmonisches Strahlenbüschel.

Folgerungen: Der Satz bietet bekanntlich ein bequemes Mittel zu drei Punkten oder Strahlen den vierten harmonischen zu konstruiren.

Da EN der einzige vierte harmonische Strahl zu EA, ED, EF ist, so folgt, daß wenn man von einem beliebigen Punkt F von EF je zwei Gerade FA, FB zieht und die Durchschnittspunkte derselben mit den zwei festen Geraden EA, ED kreuzweise verbindet, die Durchschnittspunkte P dieser Verbindungslinien sämmtlich in einer Geraden liegen, die durch E geht.

Dies bietet ein Mittel zur Lösung der Aufgabe: Einen Punkt (P) mit dem Durchschnittspunkt (E) zweier Geraden zu verbinden, ohne diesen Durchschnittspunkt zu benutzen.*)

Aufgabe I. Wenn drei Gerade und ein Punkt (drei Punkte und eine Gerade) gegeben sind, durch diesen Punkt eine Gerade so zu ziehen (auf der Geraden einen Punkt so zu bestimmen), daß der Punkt und die Durchschnittspunkte der Geraden mit den drei gegebenen Geraden vier harmonische Punkte bilden (— vier harmonische Strahlen —).

II. Liegen zwei vollständige Vierseite so, daß fünf Ecken des einen mit fünf Ecken des andern zu je zweien auf fünf durch einen Punkt gehenden Geraden liegen, so geht die Verbindungslinie der zwei sechsten Ecken durch denselben Punkt und die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Seiten liegen auf einer Geraden. — Beweis durch zweimalige Anwendung von. (11, II.)

26. Involution beim vollständigen Viereck und Vierseit.

Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks ABCD (Fig. 16) schneiden die Transversale MP in den Punken M, M_1, N, N_1, P, P_1. Betrachtet man dann A und B als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, deren Strahlen durch die sechs Punkte gehn und von den Geraden MP_1 und ED geschnitten werden, so hat man
$$(M M_1 P N) = (E M_1 C D),$$
$$(M_1 M P_1 N_1) = (M_1 E D C).$$
Da aber, wie leicht erkannt wird,
$$(E M_1 C D) = M_1 E D C,$$
so ist also auch
$$(M M_1 P N) = (M_1 M P_1 N_1);$$
das heißt (22. Ende): Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks schneiden jede Transversale in sechs Punkten, welche eine Involution bilden.

Ebenso gilt der reciproke Satz: Die Geraden, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits mit einem beliebigen Punkte der Ebene verbinden, bilden eine Involution von sechs Strahlen.

Diese beide Sätze geben ein einfaches Mittel, um zu fünf Elementen einer Involution das sechste zu finden. Konstruktion?

27. Verwandtschaft der vollständigen Systeme.

Es ist schon bemerkt worden (24), daß die Art des Entsprechens zwischen zwei Gebilden durch vier Paare entsprechender Elemente bestimmt wird. Es treten hier folgende Fälle auf:

---

*) Steiner, Systemat. Entw. 20.

I. System:	II. System:
a) vier Punkte;	vier Punkte oder vier Gerade;
b) drei Punkte und eine Gerade;	drei Punkte und eine Gerade (drei Gerade und ein Punkt);
c) zwei Punkte und zwei Gerade;	2 Punkte und 2 Gerade (2 Gerade und 2 Punkte).

Die fehlenden zwei Fälle bilden nur eine Vertauschung der beiden Systeme. Von den drei Fällen ist zunächst c, auszuschließen, denn derselbe ist zugleich unzureichend und einen Widerspruch enthaltend. Verlängert man nämlich die Verbindungslinie der beiden Punkte A, B bis zu den Durchschnitten C und D mit den Geraden c und d, so erhält man 4 Punkte in gerader Linie, denen die ebenso erhaltenen Punkte A', B', C', D, des zweiten Systems entsprechen müssen. Bei der ganz willkührlichen Annahme der Elementenpaare, werden aber die anharmonischen Verhältnisse der zwei Systeme von 4 Punkten in der Regel nicht gleich sein. Ebenso erhält man durch Verbindung der Punkte A, B mit dem Durchschnittspunkt von c und d vier Strahlen, deren anharmonisches Verhältniß im Allgemeinen nicht dem der entsprechenden Strahlen oder Punkte gleich sein wird. Anderseits reichen die gegebenen Elemente nicht hin, um zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern zu finden.

Der Fall b) ist identisch mit a) denn nicht nur liefert die Gerade d mit den drei Geraden, welche die Punkte ABC unter einander verbinden, ein aus vier Geraden bestehendes Gebilde, sondern man erhält auch eine Zusammenstellung von 4 Punkten, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, wenn man die Punkte A, B und die Durchschnittspunkte von d mit AC und BC herausnimmt.

Es bleibt hiernach nur der Fall bestehn, daß die Ecken eines Vierecks den Ecken eines andern Vierecks oder den Seiten eines Vierseits entsprechen sollen. Die Verbindungslinien der gegebenen Punkte und die Durchschnittspunkte der Geraden, dann die Durchschnittspunkte der neuen Geraden und die Verbindungslinien der neuen Punkte u. s. w. liefern immer wieder Paare von entsprechenden Elementen.

Um aber zu irgend einem Elemente das entsprechende zu konstruiren, bemerken wir zunächst, daß auf jeder der gegebenen Geraden durch die Durchschnitte mit den andern drei Punkte und ebenso durch jeden Punkt drei Strahlen bestimmt sind, denen drei bestimmte Elemente des andern Gebildes entsprechen, so daß man nach irgend einer der frühern Methoden*) zu jedem neuen Punkte einer der gegebenen Geraden oder zu jedem Strahle der durch einen der Punkte geht, das entsprechende Element als viertes im projektivischen Grundgebilde erhalten kann. Betrachtet man nun jede Gerade als bestimmt durch zwei Punkte, welche auf zwei der gegebenen Geraden liegen, und jeden Punkt als Durchschnitt zweier Strahlen, welche durch zwei der gegebenen Punkte gehn, so ist leicht einzusehn, wie man die Aufgabe praktisch lösen kann. — Daß die Lösung in einzelnen Fällen bedeutende Vereinfachung erfahren kann, liegt auf der Hand. —

28. Centrale Lage zweier kollinearen Gebilde. Indem wir uns vorläufig auf die Verwandtschaft der Kollineation beschränken und vorläufig die Beantwortung der Frage verschieben, ob sich irgend zwei gegebene kollineare Gebilde immer in die besondere Lage zu einander bringen lassen, betrachten wir zwei kollineare Systeme, welche so liegen, daß die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten alle durch denselben Punkt (Kollineationscentrum) gehn.

Das Kollineationscentrum O (Fig. 17) ist ein sich selbst entsprechender Punkt, denn wäre er das nicht, so müßte ihm auf jedem durch O gehenden Strahle (projicirendem Strahle) ein anderer Punkt entsprechen, was gegen die Bedingung der Projektivität ist. Hieraus folgt, daß die projicirenden Strahlen ebenfalls sich selbst entsprechen, weil die Gerade, welche durch O und A bestimmt ist, mit der Geraden durch O und A' zusammenfällt; ferner daß außer dem Punkte O nur noch drei Paare entsprechender Punkte AA', BB', CC', welche auf drei Strahlen liegen, willkührlich gegeben sein dürfen.

Da die Gerade AB der Geraden A'B' entspricht, so entsprechen sich auch die Punkte MM', in denen diese Geraden von demselben Strahle durch O geschnitten werden; mithin ist der Durchschnitts-

*) Am einfachsten wohl, indem man die eine Punktreihe in perspektivische Lage mit der ihr entsprechenden bringt. (9, VI.)

punkt von A B, A′B,′ überhaupt von je zwei entsprechenden Geraden, ein sich selbst entsprechender Punkt. Daraus folgt weiter, daß die Gerade, welche die Durchschnittspunkte γ, α, d. h. (A B, A′B′) und (B C, B′C′) verbindet, sich selbst entspricht, und zwar so, daß jeder ihrer Punkte ein sich selbst entsprechender ist, weil sie von jedem Strahle durch O nur in einem Punkte getroffen wird. Außer dem Punkte O und den Punkten der Geraden $\alpha\gamma$ gibt es weiter keine sich selbst entsprechenden Punkte; denn gäbe es einen solchen Punkt P, so wäre auch jede Verbindungslinie von P mit einem Punkte von $\alpha\gamma$ eine Gerade, auf welcher jeder Punkt sich selbst entspräche, so daß also jeder Punkt der Ebene ein sich selbst entsprechender Punkt würde, mithin die beiden Systeme kongruent sein müßten.

Wir haben hiermit nicht blos einen neuen Beweis für den Satz (11, II) gefunden, sondern können jetzt auch den Satz aufstellen:

Wenn zwei kollineare Systeme so liegen, daß die Verbindungslinie von je zwei entsprechenden Punkten durch denselben Punkt gehn, so liegen die Durchschnittspunkte von je zwei entsprechenden Geraden sämmtlich auf derselben Geraden. Diese Gerade heißt die Kollineationsaxe, und die besondere Lage heißt kollineare oder centrale Lage.

Verlängert man die Geraden B C, B′C′ bis zu ihren Durchschnittspunkten C_1, C_1' mit O A′ A so hat man auf diesem Strahle drei Paare entsprechender Punkte, nämlich A A′, $C_1 C_1'$ und O (für O O′). Man kann mithin auf diesem Strahle zu jedem Punkte seinen entsprechenden, insbesondere also auch die Gegenpunkte R, Q′ finden. Einfacher geschieht das durch Benutzung der Kollineationsaxe s. Um nämlich allgemein zu irgend einem Punkte P den entsprechenden P′ zu finden, verbindet man P mit einem der gegebenen Punkte A, den Durchschnittspunkt P′ der Verbindungslinie mit s mit A′ und schneidet die Verbindungslinie durch O P. Hieraus ersieht man, daß die Verwandtschaft vollständig bestimmt ist durch das Centrum O, die Axe s (welche für zwei Paar entsprechende Punkte gilt) und ein Paar entsprechende Punkte A A′.

Wendet man diese Konstruktion zur Auffindung des Punktes Q′ an, so konstruirt man, wenn O, s und A A′ gegeben sind, zuerst zwei entsprechende Punkte $B_1 B'$ (Fig. 19), indem man A′ und A mit einem Punkte von s verbindet und einen Strahl OS_2 zieht. Hierauf zieht man B E ∥ O A, verbindet E mit B′. Ebenso erhält man R wenn man E′ B′ ∥ O A′ zieht und E mit B verbindet.
Aus der Betrachtung der entstandenen ähnlichen Dreiecke findet man leicht

$$\frac{OR}{OS_1} = \frac{OB}{OS} \cdot \frac{B'S_2}{BB'}\ ;\ \frac{OQ'}{OS_1} = \frac{OB'}{OS_2} \cdot \frac{BS_2}{BB'}\ .$$

Da die Punkte B und B′ für die Gegenpunkte auf sämmtlichen Strahlen dienen können, so lehren uns diese Gleichungen, daß die Verhältnisse $\frac{OR}{OS_1}$ und $\frac{OQ'}{OS_1}$ für alle Strahlen dieselben sind, daß mithin alle Gegenpunkte der beiden Systeme auf zwei Parallen zur Kollineationsaxe liegen. Diese Parallelen heißen Gegenaxen und sollen mit q′ und r bezeichnet werden. Ferner findet man leicht, daß $OR + OQ' = OS_1$ oder $OR = S_1 Q'$ und $OQ' = S'R$; d. h. von den beiden Gegenaxen ist jede ebenso weit vom Kollineationscentrum, wie die andere von der Kollineationsaxe entfernt.

Daß die Gegenpunkte auf zwei Parallelen zur Kollineationsaxe liegen müssen, läßt sich auch folgendermaßen beweisen: Wäre die Verbindungslinie RR_1 zweier Gegenpunkte nicht parallel s, so schnitte sie dieselbe in einem Punkte T, durch welchen die der RR_1 entsprechenden Gerade $R'R_1'$ gehen müßte, was unmöglich ist, da R′ und R_1', also auch $R'R_1'$, im Unendlichen liegen; ebenso ist $RR_1 \,||\, s$ u. s. w. Hiermit hängt zusammen, daß alle unendlich entfernten Punkte der Ebene in der einzigen unendlich entfernten Geraden liegen. Man erkennt jetzt, daß die Abhängigkeit der beiden Systeme von einander vollständig bestimmt ist durch das Kollineationscentrum, die Kollineationsaxe und eine der beiden Gegenaxen, ferner daß die beiden Gegenaxen entweder zwischen O und s liegen oder durch O und s getrennt werden. Im ersten Falle liegen je zwei entsprechende Punkte zu beiden Seiten von s, im zweiten Falle auf derselben Seite, oder sie werden durch s und O getrennt.

29. Aufg. I. Zu jedem Punkte den entsprechenden zu finden mit Hülfe von O, s, q′.

II. Anwendung der Lehre von den Doppelpunkten auf den Punkt O und die Punkte auf s.

III. Zu beweisen, daß (Fig. 18) $(OS_1AA') = (OS_1DD_1')$, $= (OS_2BB')$, wenn DD' mit AA' auf demselben Strahle liegen. Das Doppelverhältniß OS_2AA', bleibt also dasselbe, wenn man auch die Punktepaare oder den Strahl ändert. Es ist das charakteristische Doppelverhältniß Δ der Kollineation, durch welches die Abhängigkeit gegeben wird.*)

IV. Zu beweisen, daß $\Delta = \frac{OR}{S_1R} = \frac{S_1Q'}{OQ'}$.

V. Wenn $\dot{\Delta} = -1$, so ist $(\dot{O}SAA') = OSA'A$; also Involution.

VI. Was von den beiden in jedem projecirenden Strahle auf einander liegenden Punktreihen gesagt worden, gilt auch von je zwei entsprechenden Strahlenbüscheln, welche ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt auf s haben.

VII. Anwendung auf die Perspektive.

Von den beiden kollinearliegenden Systemen läßt sich jedes als das perspektivische Abbild des andern betrachten. Zu dem Ende denkt man sich die Ebene, in welcher die perspektivisch abzubildende Figur liegt, um ihre Durchschnittslinie mit der Bildebene so lange gedreht, bis sie mit ihr zusammenfällt. Anderseits legt man durch das Auge eine Ebene parallel derselben Figurebene und dreht auch diese in derselben Richtung bis sie in die Bildfläche fällt; dann bleibt das Auge immer in der Verbindungslinie jedes Punktes mit seinem Bilde. Nach der Umlegung ist O das Auge, s die Durchschnittslinie der Bildfläche mit der gegebenen Ebene. Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß die Perspektive nur einen besondern Fall der allgemeinen Central-Projektion bildet, insofern bei der perspektivischen Abbildung die Bildfläche sich stets zwischen dem Auge und dem abzubildenden Gegenstande befindet. Daß die kollineare Lage eine solche Beschränkung nicht erheischt und daher mit der Centralprojektion im allgemeinsten Sinne des Wortes zusammenfällt, ist einleuchtend.

VIII. Anwendung auf die Zeichnung der Durchschnittsfigur einer Pyramide mit einer Ebene.

30. Besondere Fälle der kollinearen Verwandtschaft.

I. Fällt O ins Unendliche, so liegen auch q' und r im Unendlichen; die projicirenden Strahlen sind parallel. Die Verwandtschaft heißt dann Affinität; die beiden Systeme sind affin. Dieser Fall tritt ein bei der Parallelprojektion und bei den ebenen Schnitten eines Prismas.

II. Die Kollineationsaxe liegt im Unendlichen; die entsprechenden Geraden werden parallel. Die Systeme sind ähnlich und ähnlich liegend.

III. Wenn O und s im Unendlichen liegen, sind die Systeme kongruent.

31. Aufgabe: Zwei kollineare Systeme in centrale Lage zu bringen.**)

Die beiden Systeme sind durch vier Paare entsprechender Punkte AA', BB', CC', DD' gegeben (Fig. 19); dann verlangt die Aufgabe, zwei Punkte O'O, zu finden, so daß die Verbindungslinien von O mit A, B, C, D dieselben Winkel unter einander bilden wie die Strahlen von O' nach A', B', C', D'. Zu dem Ende betrachtet man AB und A'B' als zwei projektivische Gerade in schiefer Lage und konstruirt (12. 27, Anm.) auf AB den Gegenpunkt R und auf A'B' den Gegenpunkt Q', ebenso auf BC und B'C' die Punkte R_1 und Q_1' dann sind RR_1 und $Q'Q_1'$ die beiden Gegenaxen. Betrachtet man ferner, daß man bei der kollinearen Lage das zu einer Geraden AB gehörige Q' erhält als Durchschnittspunkt von q' mit einem Strahle durch O parallel zu AB, so folgt, daß umgekehrt O auf der Geraden liegt, welche durch Q' gezogen wird und mit q' denselben Winkel bildet wie AB mit q' (oder r). Man erhält also in dem zweiten Systeme den Punkt O' als Durchschnittspunkt der beiden Geraden, welche in den auf A'B', B'C' liegenden Punkten Q', Q_1' mit der bekannten Geraden q' dieselben Winkel bilden, wie AB, BC im ersten Systeme mit r. Ebenso findet man im ersten Systeme O mit Hülfe der beiden auf AB und BC liegenden Punkte R, R_1. Um also die beiden Systeme in die verlangte Lage zu bringen, legt man das erste System so auf das zweite, daß O auf O' fällt und $r \parallel q'$ wird, d. h. man zieht $O'\mathfrak{R} \parallel B'A'$, $O'\mathfrak{R}_1 \parallel B'C'$ und macht $O'\mathfrak{R}$ gleich OR, also $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1 \parallel q'$.

---

*) Fiedler 20.

**) Fiedler 22. — Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geom. §. 13.

Darauf zieht man durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ die Geraden $\mathfrak{R}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}_1\mathfrak{B}$, so daß sie mit $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ dieselben Winkel bilden wie BA und BC mit RR_1 u. s. w.

Hiermit ist indeß nur gezeigt, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, wenn die durch die Vierecke bestimmten Systeme in die kollineare Lage gelangen sollen. Daß das aber wirklich erreicht wird, muß noch bewiesen werden. Zunächst folgt aus der Konstruktion, daß $O'\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{B}\mathfrak{R} \cong OR_1BR$, $O,Q',B,Q,' \sim \mathfrak{B}\mathfrak{R}O'\mathfrak{R}_1$, woraus man leicht ableitet, daß $O'B'\mathfrak{B}$ eine Gerade ist und daß $\mathfrak{R}\mathfrak{B} = RB$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{B}\mathfrak{R}$ und $B'Q'$ sich in perspektivischer Lage befinden, daß also wenn $\mathfrak{A}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{B}\mathfrak{R}$ mit $O'A'$ bezeichnet, $\mathfrak{R}\mathfrak{A}.\ Q'A' = \mathfrak{R}\mathfrak{B}.\ Q'B'$. Es ist aber R im gegebenen ersten Viereck so konstruirt worden, daß $RB.\ Q'B' = RA.\ Q'A'$, mithin ist jetzt $\mathfrak{R}\mathfrak{A} = RA$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB$. Ebenso läßt sich beweisen, daß $\mathfrak{B}\mathfrak{E} = BE$, wenn $\mathfrak{E}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{B}\mathfrak{R}$ mit $O'E'$ ist; ferner $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = BC$, $\mathfrak{B}\mathfrak{F} = BF$. Da außerdem $\angle\, \mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A} = CBA$ nach der Konstruktion, so kann man also die Vierecke $ABCD$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ so aufeinander legen, daß die Punkte $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$, $E\mathfrak{E}$, $E\mathfrak{F}$ zusammenfallen, das heißt, daß fünf Ecken des ersten vollständigen Vierseits auf die von O' nach den entsprechenden Punkten des zweiten Vierseits gezogenen Strahlen zu liegen kommen; dann liegt nach (25, Aufg. II.) auch D auf $O'D'$ u. s. w. Hiermit ist also auch die Möglichkeit der kollinearen Lage allgemein bewiesen.*)

Diese Aufgabe gestattet vier verschiedene Lagen, je nach der Seite von q', nach welcher hin man die Winkel und das r abträgt. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Aufgabe, den Punkt O' so zu konstruiren, daß nur die vier Ecken $ABCD$ auf die Strahlen von O' nach $A'B'C'D'$ fallen; denn diese Aufgabe liefert für O' als geometrischen Ort eine Kurve.

Um Irrthümer zu vermeiden, ist ausdrücklich zu bemerken, daß zwei Vierecke stets als kollineare Figuren betrachtet werden können, so daß alle gleichliegende Punkte sich entsprechen, daß es aber zur kollinearen Lage nicht hinreicht, wenn die 4 Ecken des einen Vierecks mit den 4 Ecken des andern auf vier durch einen Punkt gehenden Strahlen liegen. Will man daher zu dem Viereck $A'B'C'D'$ ein beliebiges anderes in kollinearer Lage zeichnen, so darf man nur drei Ecken, etwa $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf den Strahlen OA', OB', OC' willkührlich annehmen. Zur Konstruktion der vierten Ecke $\mathfrak{D}$ bestimmt man den Durchschnittspunkt E' von $A'B'$ und $D'C'$, zieht $O'E'$ und sucht den Durchschnittspunkt $\mathfrak{E}$ von $O'E'$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; die Verbindungslinie $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ bestimmt dann auf $O'D'$ die gesuchte Ecke. Wenn man hierauf nicht achtet, befinden sich nur die 4 Paar Ecken, nicht aber die vollständigen Systeme in centraler Lage.

Aufgabe: An der Figur die Dualität zu erörtern.

32. Reciproke Systeme. Auch wenn zwei allgemeine Gebilde in der Verwandtschaft der Reciprocität stehn, lassen sie sich in eine besondere Lage zu einander bringen; doch gehört diese Untersuchung nicht mehr hierher, da sie mit der Lehre von den Kegelschnitten zusammenhängt.

33. Krummlinige kollineare Systeme. Bewegt sich in dem einen von zwei kollinearen Systemen ein Punkt so, daß er zugleich den Ort und die Richtung der Bewegung ändert, so beschreibt er eine Kurve; dann beschreibt sein entsprechender Punkt im andern Systeme ebenfalls eine Kurve. Ist die erste Kurve von der $n$ten Ordnung, d. h. wird sie von jeder Geraden in n Punkten geschnitten, so wird die zweite Kurve ebenfalls von jeder Geraden in n Punkten geschnitten, ist also auch von der $n$ten Ordnung. Einem Kegelschnitte (Kurve zweiter Ordnung) entspricht demnach ein Kegelschnitt. Fallen die zwei Durchschnittspunkte der ersten Kurve mit einer Geraden auf einander, so fallen auch die entsprechenden Durchschnittspunkte zusammen, d. h. der Tangente entspricht eine Tangente u. s. w. Liegen in dem einen Systeme drei Punkte in gerader Linie, so liegen die entsprechenden Punkte ebenfalls in einer Geraden &c.

Es läßt sich beweisen, daß sich irgend zwei Kegelschnitte als kollineare und kollinearliegende Figuren betrachten lassen, daß also im Besondern jeder Kegelschnitt jedem Kreise kollinear verwandt ist. Da indeß der Beweis des allgemeinen Satzes die Lehre von den Kegelschnitten einschließt, so möge hier

*) Ein anderer Beweis für die Möglichkeit dieser Ausführung ist angedeutet (mit Hülfe der analytischen Geometrie) in Magnus, Sammlung von Aufgaben &c. aus der analytischen Geometrie, §§. 11—13. Stammer, Lehrbuch der analitischen Geometrie 152 flgde.

der elementare Beweis für die Verwandtschaft des Kreises mit jeder der bekannten Arten von Kegelschnitten angedeutet werden.*) Wird ein gerader Kegel von einer Ebene geschnitten, so kann man dem Kegel zwei Kugeln einbeschreiben, welche zugleich die Ebene berühren. Verbindet man die beiden Berührungspunkte mit irgend einem Punkte der Durchschnittskurve, so läßt sich aus der Eigenschaft des geraden Kegels leicht ableiten, daß die Summe oder Differenz der beiden Verbindungslinien konstant ist. Um eine Parabel zu erhalten, muß die scheidende Ebene einer Tangentralebene des Kegels parallel sein u. s. w. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte (Brennpunkte) ist demnach die Axe des Kegelschnitts. Hiernach liegen die Axe des Kegelschnitts und die Axe des Kegels in einer Ebene, welche auf der Ebene des Kegelschnitts senkrecht steht.

Benutzt man die letzte Eigenschaft und die Definition der Kegelschnitte durch die Eigenschaften ihrer Brennpunkte, so kann man umgekehrt beweisen, daß sich über jedem Kegelschnitte unendlich viele gerade Kegel konstruiren lassen und daß der geometrische Ort für die Spitzen eine Kurve ist in einer Ebene senkrecht zur Ebene des Kegelschnitts, dessen Axe die Durchschnittslinie der beiden Ebenen bildet. Die Kurve ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse war. Noch (29, VII) ist hiernach jeder Kegelschnitt mit einem Kreise kollinear verwandt und läßt sich betrachten als mit ihm in kollinearer (perspektivischer, centraler) Lage befindlich.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß alle übertragbaren Eigenschaften des Kreises ohne weitern Beweis auch von allen Kegelschnitten gelten. Unter diese Eigenschaften gehören auch die von Pol und Polare.

34. **Pol und Polare.** Zieht man durch einen Punkt P in der Ebene eines Kreises beliebige Sekanten und bestimmt auf jeder von ihnen den vierten harmonischen Punkt zu P und den beiden Durchschnittspunkten der Sekante mit dem Kreise, so daß er dem Punkte P zugeordnet ist, so nennt man den geometrischen Ort der so bestimmten Punkte die **Polare von P in Bezug auf den Kreis.***)

Um diesen geometrischen Ort kennen zu lernen,**) bestimmen wir (Fig. 20) auf der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Sekante den vierten harmonischen Punkt P_1, ebenso auf der beliebigen Sekante PBA den Punkt E und verbinden E mit P_1, ferner A mit den Endpunkten des Durchmessers und P_1 mit A und B. Dann bilden die Verbindungslinien von A mit P, G, P_1, H ein harmonisches Büschel, in welchem AG und AH senkrecht auf einander stehen, mithin $\measuredangle BAG = P_1AG$, folglich Bogen $GB = GL$ und $\measuredangle BP_1G = LP_1G$.

Da aber die Strahlen $(P_1 . PBEA)$ harmonische sind, so muß P_1E auf P_1M senkrecht stehn. Hieraus läßt sich unmittelbar erkennen, daß die Polare von P eine Gerade ist, welche im Punkte P_1 auf dem durch P gehenden Durchmesser senkrecht steht.

Die Konstruktion der Polare gibt die Fig. 21 an, in welcher NK oder p die Polare ist, denn die Geraden NC, CK, KD, DN bilden ein vollständiges Vierseit, in welchem CD, BA, KN die drei Diagonalen sind.

Aus diesen Entwickelungen lassen sich die bekannten Eigenschaften der Polaren bequem ableiten. Konstruirt man zu den verschiedenen Punkten von P die Polaren, so müssen diese sämmtlich den Pol P enthalten, weil er zu jedem Punkte von p der vierte harmonische Punkt ist, d. h. **beschreibt ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden, und umgekehrt.**

35. **Reciproke krummlinige Gebilde.**

Gebild I.	Gebild II.
Der Punkt A bewegt sich, indem er Ort und Bewegungsrichtung ändert;	Die entsprechende Gerade a′ bewegt sich in der Ebene fort unter gleichzeitiger Drehung;
der Punkt A beschreibt mithin eine Kurve;	die Gerade a′ umhüllt bei ihrer Bewegung eine Kurve.

*) Geiser, Kegelschnitte §. 24.

*) Diese Definition ist hier gewählt worden, weil sie die allgemeinste ist und mit der Definition der Polaren bei Kurven höherer Ordnung übereinstimmt.

**) Geiser, Kegelschnitt, §. 6.

Gebild I.	Gebild II.
Einer Kurve als erzeugt durch stetige Bewegung eines Punktes entspricht	eine Kurve, welche von der Geraden in ihren verschiedenen Lagen berührt wird.
Jedem Punkte A der Kurve entspricht	eine Tangente a′ der Kurve.
Liegen n Punkte in einer Geraden (Kurve nter Ordnung),	so schneiden sich n Tangenten in einem Punkte (Kurve nter Klasse).
Durchschnittspunkt der Kurve mit einer Geraden a (Punkt auf der Kurve und der Geraden.)	Tangente von dem Punkte A′ an die Kurve (Gerade, welche zugleich Tongente der Kurve ist und den Punkt A′ enthält).
Dreht sich eine Sekante um einen Durchschnittspunkt, bis ein zweiter Durchschnittspunkt auf den ersten fällt, so wird sie zur Tangente.	Bewegt sich ein Punkt auf einer Tangente, bis eine zweite von ihm an die Kurve gelegte Tangente mit der ersten zusammenfällt, so erhält man den Berührungspunkt.
Der Tangente a im Punkt A entspricht	der Berührungspunkt A′ auf a′.

Hieraus erhellt, daß auch in Bezug auf krumme Linien das System I ganz in derselben Beziehung zum System II steht, wie System II zu I.

Da jeder Kegelschnitt von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten wird und sich anderseits an denselben von jedem Punkte zwei Tangenten legen lassen, so ist zu vermuthen, daß je zwei Kegelschnitte nicht bloß kollineare sondern auch reciproke Figuren sind.*)

36. Reciprocität beim Kreise.

Da zu jedem Pole eine bestimmte Polare und zu jeder Polare ein bestimmter Pol gehört, so stehen die Figuren, welche einerseits von einem Punkte und anderseits von seinen Polaren erzeugt werden, in der Verwandtschaft der Reciprocität.

Beschreibt der Punkt einen Kreis, so kann die Polare nur einen Kegelschnitt umhüllen, und umgekehrt: Bewegt sich eine Gerade so, daß sie einen Kreis mit dem Mittelpunkte K fortwährend berührt, so beschreibt ihr Pol in Bezug auf den festen Kreis mit dem Mittelpunkte M einen Kegelschnitt. Benutzt man die Eigenschaft der Kegelschnitte, daß die Fußpunkte der Perpendikel, welche von einem Brennpunkte auf seine Tangenten gefällt werden, ein Kreis ist, ferner die aus den harmonischen Eigenschaften folgende Gleichung $MP. Mp = r^2$, so findet man, daß M ein Brennpunkt des Kegelschnittes ist und MK auf seine Axe fällt.

Umgekehrt läßt sich auf demselben Wege beweisen, daß wenn man um einen Brennpunkt M eines Kegelschnittes einen Kreis beschreibt, die Polarfigur des Kegelschnittes in Bezug auf diesen Kreis wieder ein Kreis ist. Es läßt sich also zu jedem Kegelschnitt ein ihm reciproker Kreis finden; und da auch jeder Kegelschnitt mit einem Kreise kollinear verwandt ist, so folgt hieraus der am Ende des vorigen §. ausgesprochene Satz.**)

37. Erzeugung der Kegelschnitte.

Die elementaren Eigenschaften des Kreises und die Eigenschaften der Gegenpunkte reichen hin, um folgende beiden Sätze zu beweisen:***)

I. Die Durchschnittspunkte zweier festen Tangenten eines Kreises mit den übrigen Tangenten desselben Kreises bilden zwei projektivische Punktreihen. In dem Durchschnittspunkte der festen Tangenten fallen die sich nicht entsprechenden Endpunkte zweier gleichen Strecken auf einander, deren andere Endpunkte die Berührungspunkte sind; es sind das zwei Punkte, welche von den Gegenpunkten gleiche Abstände haben; da endlich Q′R durch den Mittelpunkt geht, so ist $\left(\frac{Q'R}{2}\right)^2 = AR.\ A'Q'$.

*) Geiser, Kegelschnitte §. 23.
**) Den vom Kreise unabhängigen Beweis gibt Schröter §. 23. Am einfachsten liefert ihn die analytische Geometrie.
***) Schröter §. 24. Fiedler 24.

II. Die Geraden, welche zwei feste Punkte auf der Peripherie des Kreises mit den übrigen Punkten der Peripherie verbinden, bilden zwei projektivische gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel.

Umkehrung. Die Geraden, welche die entsprechenden Punkte zweier projektivischen Punktreihen verbinden, umhüllen demnach einen Kreis, welcher die beiden Träger berührt, wenn 1) in dem Durchschnittspunkte der beiden Träger zwei (sich nicht entsprechende) Punkte vereinigt sind, welche gleiche Abstände von den Gegenpunkten haben, und 2) die beiden Träger so gegen einander geneigt sind, daß das Quadrat des halben Abstandes der Gegenpunkte gleich der Potenz der projektivischen Beziehung ist.*)

Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen bei zwei projektivisch gleichen und gleichlaufenden Strahlenbüscheln liegen auf einem Kreise, der durch die Mittelpunkte geht.

Konstruirt man über dem Kreise einen Kegel und schneidet ihn durch Ebenen, so kann man diese Sätze nach Anleitung der früheren §§. für die Kegelschnitte erweitern und erhält dadurch die Kegelschnitte in doppelter Erzeugungsweise, nämlich einmal als umhüllt von den Geraden, welche die entsprechenden Punkte von zwei beliebigen projectivischen Punktreihen verbinden, — und dann als Ort der Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen bei zwei beliebigen projektivischen Strahlenbüscheln. Es geht dies auch aus folgender Betrachtung hervor: Da nicht mehr als zwei Paar entsprechende Strahlen sich auf einer Geraden schneiden können, wenn die Strahlenbüschel in schiefer Lage sind, so wird die erzeugte Kurve von jeder Geraden nur in zwei Punkten geschnitten. Umgekehrt, soll eine Kurve, welche von jeder Geraden nur in zwei Punkten geschnitten wird, als Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen erscheinen, so darf jedem Strahle des einen Strahlenbüschels nur ein Strahl des andern Büschels entsprechen u. s. w.

Die ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes, der hier nicht weiter verfolgt werden kann, findet man bei Schröter §. 20 flgde. und Fiedler 24—36.

---

*) Schröter §. 24.

Fig.

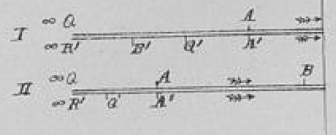


Fig. 4. (11π)

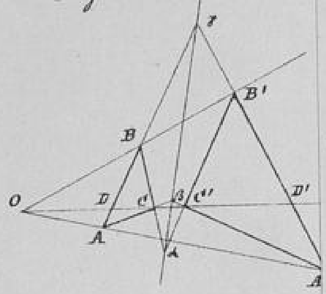


Fig. 7 (13

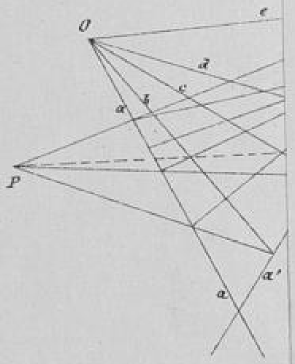


Fig. 10 (

Fig. 1 (7)

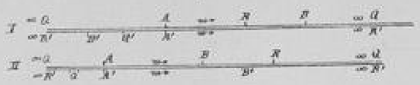


Fig. 2 (8)

Fig. 3 (11)

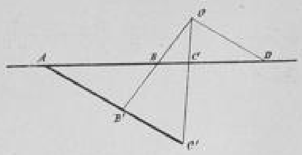


Fig. 4 (11a)

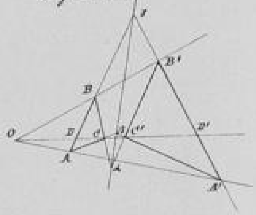


Fig. 5 (12)

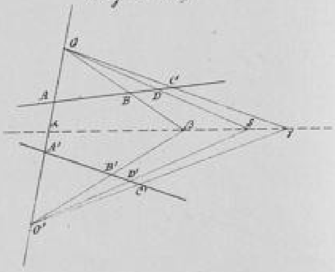


Fig. 6 (12)

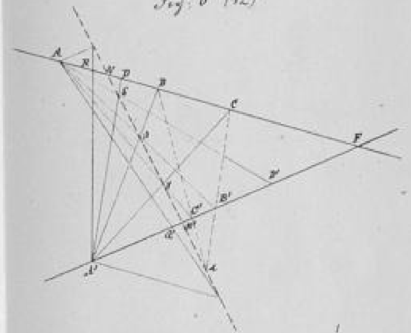


Fig. 7 (13)

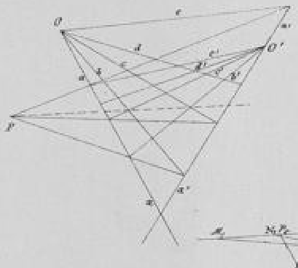


Fig. 8 (15)

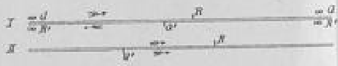


Fig. 9 (16)

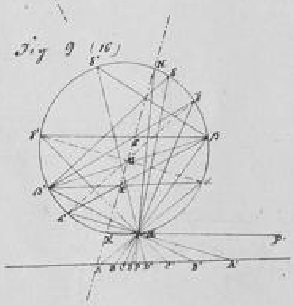


Fig. 10 (17)

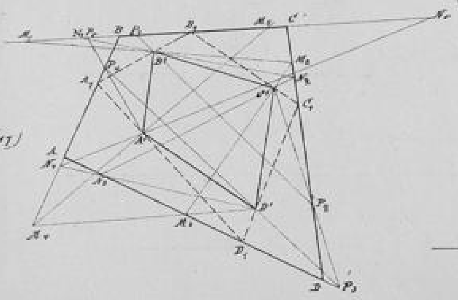


Fig. 11 (19)

Fig. 12 (19)

... übrigen
... Gipfel.
... Mittellinien
... Schnittpunkte
... von den
... Centrum des

... und gleich-

... man sich
... [illegible]
... [illegible] Punkte
... Schnittpunkte
... noch aus
... auf einer
... dieser von
... der Geraden
... erscheinen.
... [illegible] u. s. w.
... werden kann.

Fig. 13 (24)

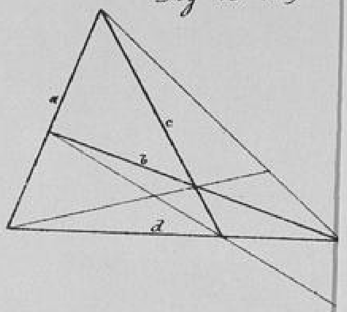
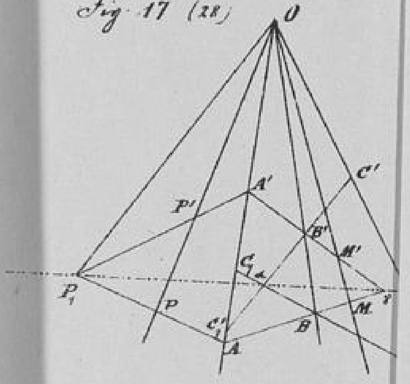


Fig. 17 (28)



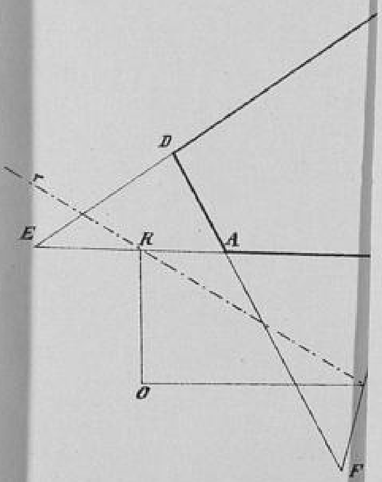


Fig. 13 (24)

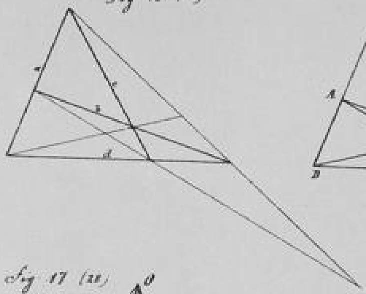


Fig. 14 (24)

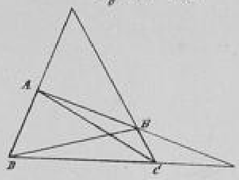


Fig. 15 (25)

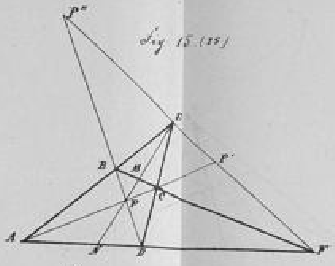


Fig. 16 (26)

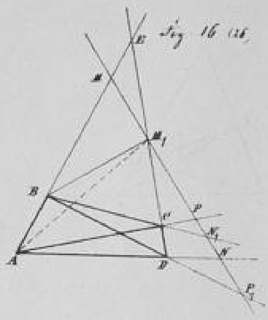


Fig. 17 (28)

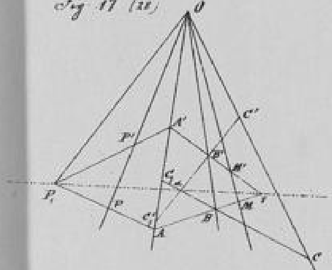


Fig. 18 (28)

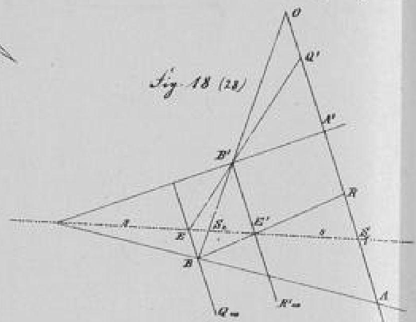
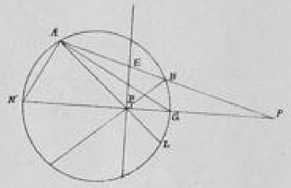


Fig. 20 (34)



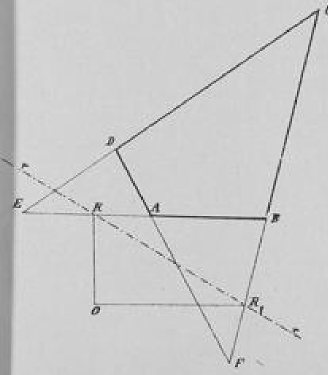


Fig. 19 (31)

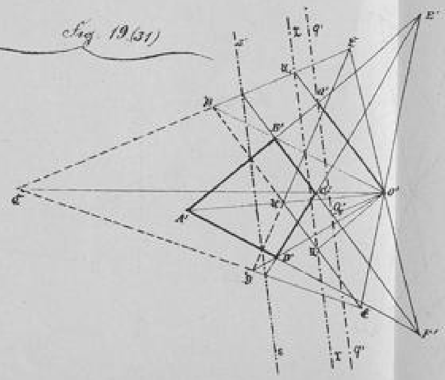


Fig. 21 (34)