

# Quelques recherches relatives à la théorie des sections coniques.

## I.

### Equations des sections coniques.

1. Sous le nom de *sections coniques* ou *lignes du second degré*, on comprend toutes les courbes (et tous les systèmes de lignes droites) représentées par l'équation générale du second degré entre les coordonnées  $x$  et  $y$ ,

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0. \quad (I)$$

Cette équation contient six constantes indépendentes; mais comme elle n'est pas changée lorsqu'on divise toutes les constantes par une d'elles, on voit qu'en vérité elle n'en contient que cinq, savoir les quotients de cinq des constantes par la sixième. Une courbe du second degré est donc entièrement déterminée lorsqu'on connaît ces cinq constantes. Une équation quelconque qui ne contient que ces constantes et d'autres grandeurs données, détermine une des constantes en fonction des autres et réduit ainsi à quatre le nombre des constantes encore à déterminer. On voit donc que la courbe est déterminée si elle est assujettie à certaines conditions qui conduisent à cinq équations entre les constantes de son équation. C'est ainsi que cinq points par lesquelles elle doit passer suffisent pour la décrire; car en prenant un système

d'axes coordonnés quelconque et substituant dans l'équation (I) à la place de  $x, y$ , successivement les coordonnées de ces cinq points prises par rapport à ces axes, on obtient les cinq équations entre les cinq constantes et les coordonnées connues des points.

## 2. La droite

$$y = nx + q,$$

rencontre la courbe du second degré en général en deux points, dont les abscisses sont déterminées par l'équation  $x^2(an^2 + 2bn + c) + 2x(anq + bq + dn + e) + aq^2 + 2dq + f = 0$ . Pour que la droite soit tangente à la courbe, c'est à dire pour que les deux points d'intersection coïncident, il faut

$$(anq + bq + dn + e)^2 - (aq^2 + 2dq + f)(an^2 + 2bn + c) = 0,$$

ou

$$q^2(b^2 - ac) + 2nq(ae - bd) + n^2(d^2 - af) + 2q(be - cd) + 2n(de - bf) + e^2 - cf = 0. \quad (\text{II})$$

Cette équation, exprimant le rapport entre les constantes  $n, q$ , de chaque droite qui touche la courbe, en fonction des constantes de la courbe, est l'équation générale de la tangente. Si l'on donne à  $n$  et  $q$  successivement toutes les valeurs qui satisfont à cette équation, on obtient toutes les tangentes à la courbe. Donc, en considérant  $n$  et  $q$  comme des variables, cette équation représente encore la même courbe que l'équation (I), mais cette fois comme courbe enveloppe de ses tangentes.

3. L'équation (II) contient tous les termes de l'équation générale du second degré en  $n, q$ . Il est donc à présumer que l'équation générale en  $n, q$ , représentera encore toutes les courbes du second degré. Pour le prouver, soit l'équation

$$Aq^2 + 2Bnq + Cn^2 + 2Dq + 2En + F = 0; \quad (\text{III})$$

il s'agira de voir si l'on peut toujours, quelques soient les valeurs des constantes  $A, B$  etc., trouver une courbe du second degré dont toutes les tangentes soient contenues dans l'équation (III). Or, la courbe est donnée dès que les constantes de l'équation (I) sont connues; mais ses tangentes devant satisfaire à l'équation (II), il faut que cette équation devienne identique avec l'équation (III). Posons donc, après avoir divisé les deux équations par le coefficient de  $q^2$ ,



$$\begin{aligned}
 \frac{ae-bd}{b^2-ac} &= \frac{B}{A}, \\
 \frac{d^2-af}{b^2-ac} &= \frac{C}{A}, \\
 \frac{be-cd}{b^2-ac} &= \frac{D}{A}, \\
 \frac{de-bf}{b^2-ac} &= \frac{E}{A}, \\
 \frac{e^2-cf}{b^2-ac} &= \frac{F}{A}.
 \end{aligned}
 \tag{IV}$$

Pour trouver les constantes  $a, b, c, d, e, f$ , en fonction des constantes  $A, B, C$  etc., il est le plus simple de chercher les valeurs des fractions en  $A, B$  etc. qui sont de la même forme que les fractions formant les premiers membres des cinq équations. C'est ainsi qu'on trouve:

$$\frac{AE-BD}{B^2-AC} = \left( \frac{E}{A} - \frac{B}{A} \cdot \frac{D}{A} \right) \cdot \left[ \left( \frac{B}{A} \right)^2 \frac{C}{A} \right] = \left[ \frac{de-af}{b^2-ac} - \frac{(ae-bd)(be-cd)}{(b^2-ac)^2} \right] : \left[ \frac{(ae-bd)^2}{(b^2-ac)^2} - \frac{d^2-af}{b^2-ac} \right] = \frac{b}{a}.$$

De cette manière on obtient les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{a} &= \frac{AE-BD}{B^2-AC}, \\
 \frac{c}{a} &= \frac{D^2-AF}{B^2-AC}, \\
 \frac{d}{a} &= \frac{BE-CD}{B^2-AC}, \\
 \frac{e}{a} &= \frac{DE-BF}{B^2-AC}, \\
 \frac{f}{a} &= \frac{E^2-CF}{B^2-AC}.
 \end{aligned}
 \tag{V}$$

On peut donc toujours trouver une équation du second degré en  $x, y$ , qui représente la même courbe que l'équation donnée en  $n, q$ . D'ailleurs, comme les fractions exprimant les valeurs cherchées, ne contiennent pas de radicaux, ces valeurs sont toujours réelles et uniques; aussi les valeurs infinies, si elles existent, ne contiennent-elles rien d'absurde, puisqu'elles indiquent seulement que  $a$  est nul. Donc, l'équation générale du second degré en  $n, q$ , représente toujours

une courbe du second degré, parfaitement déterminée lorsque les quotients de cinq des constantes qui entrent dans l'équation, par la sixième, sont donnés.

Si l'on choisit pour axes coordonnés deux tangentes à la courbe, il faut qu'on obtienne (dans III)  $q=0$ , pour  $n=0$  et pour  $n=\infty$ , ce qui exige

$$F=0, C=0.$$

Par conséquent, l'équation plus simple,

$$Aq^2 + 2Bnq + 2Dq + 2En = 0, \quad (\text{VI})$$

représente toutes les courbes du second degré rapportées à deux tangentes comme axes coordonnés.

4. Si l'on représente la ligne droite par l'équation

$$py + qx = pq,$$

les équations (III) et (VI) prennent la forme:

$$Ap^2q^2 - 2Bpq^2 + Cq^2 + 2Dp^2q - 2Epq + Fp^2 = 0 \quad (\text{VII})$$

et

$$Apq - 2Bq + 2Dp - 2E = 0. \quad (\text{VIII})$$

On voit donc qu'une équation du second degré en  $p, q$ , qui ne contient pas les carrés des variables, représente une courbe du second degré rapportée à deux tangentes comme axes coordonnés. Pour plus de simplicité j'appellerai ces tangentes *les tangentes fixes*.

Les points où les axes touchent la courbe, sont

$$q=0, p = \frac{E}{D}, \text{ et } p=0, q = -\frac{E}{B}.$$

Pour les tangentes parallèles aux axes, on a  $p=\infty$  et  $q=\infty$ , ce qui fournit pour les longueurs des segments interceptés sur les axes, les valeurs

$$q_1 = -\frac{2D}{A}, \quad p_1 = \frac{2B}{A}.$$

Or, l'équation (VIII) peut s'écrire

$$\left(q + \frac{2D}{A}\right) \left(p - \frac{2B}{A}\right) = \frac{2E}{A} - \frac{4BD}{A^2},$$

ou

$$(q - q_1)(p - p_1) = \frac{2(AE - 2BD)}{A^2},$$

ce qui démontre le théorème de Brianchon: *Dans chaque section conique, le produit des segments interceptés sur deux tangentes fixes, entre une tangente quelconque et les tangentes parallèles aux tangentes fixes, est une quantité constante.*



5. On sait que la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que

$$b^2 - ac \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0,$$

ou, en divisant par  $a^2$  et mettant pour  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{c}{a}$  leurs valeurs (V), suivant que

$$AE(AE - 2BD) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0. \quad (\text{IX})$$

Pour la *parabole* il faut donc qu'une des trois équations suivantes soit satisfaite:

$$A = 0, \quad E = 0, \quad AE = 2BD.$$

La seconde de ces équations réduirait la courbe (VIII) au système de deux points,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{2B}{A}, \quad y = -\frac{2D}{A};$$

par la troisième des équations la courbe deviendrait

$$(Aq + 2D) \left( p - \frac{2B}{A} \right) = 0;$$

c'est à dire qu'elle serait le système des deux droites

$$q = -\frac{2D}{A} \quad \text{et} \quad p = \frac{2B}{A}.$$

Donc, pour la parabole, il faut

$$A = 0,$$

et son équation est

$$Bq - Dp + E = 0. \quad (\text{X})$$

Par conséquent l'équation générale du premier degré entre  $p$  et  $q$  représente une parabole.

En divisant la formule (IX) par  $A^2E^2$ , ce qui est permis puisque ce carré est toujours positif, elle devient

$$1 - \frac{2BD}{AE} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0.$$

Comme  $A$  peut toujours être censé positif, on en conclut que la courbe est toujours une hyperbole lorsque les trois coefficients  $B$ ,  $D$ ,  $E$  sont tous négatifs ou que deux sont positifs et le troisième négatif. Mais dans les cas contraires la courbe est une hyperbole ou une ellipse suivant que

$$\frac{BD}{AE} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{1}{2}$$

6. Si, dans l'équation de la parabole,

$$Bq - Dp + E = 0,$$

on remplace  $q$  et  $p$  par  $y$  et  $x$ , on obtient l'équation de la ligne droite. Par conséquent, *si par les points d'une droite on mène des parallèles à deux droites fixes, et que l'on joigne les points où ces droites sont coupées par les parallèles menées du même point, par des droites, toutes ces droites enveloppent une parabole.*

La réciproque est vraie.

Si dans l'équation de l'ellipse et de l'hyperbole on remplace  $q$  et  $p$  par  $y$  et  $x$ , on obtient l'équation de l'hyperbole rapportée à deux droites parallèles aux asymptotes comme axes coordonnés. Donc, *si par les points d'une hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes et que l'on joigne les points d'intersections de ces parallèles avec deux droites fixes parallèles aux asymptotes, par des droites, toutes ces droites enveloppent une ellipse ou une hyperbole.* Comme d'ailleurs on sait que les asymptotes ont pour équations :

$$x = \frac{2B}{A} \quad \text{et} \quad y = -\frac{2D}{A},$$

on voit (4.) que la courbe engendrée est touchée non seulement par les droites fixes mais aussi par les asymptotes de l'hyperbole génératrice.

Si l'on prend les asymptotes elles-mêmes, pour droites fixes et par conséquent pour axes coordonnés, l'équation de l'hyperbole est

$$Axy - E = 0,$$

et celle de la courbe engendrée,

$$Apq - E = 0,$$

une hyperbole ayant les mêmes asymptotes; ce dont on peut s'assurer en divisant toutes les équations (V) par la première. Quant aux axes, il est évident que si d'un des sommets de la première hyperbole on mène les parallèles aux asymptotes, la droite joignant les pieds de ces parallèles, sera bissectrice du demi-axe réel et tangente au sommet de la seconde hyperbole. Par conséquent, *si l'on joint les pieds des coordonnées d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes, par des droites, toutes ces droites enveloppent une hyperbole qui a les mêmes asymptotes, mais dont les axes sont les moitiés des axes de l'hyperbole donnée.*



### 7. Construction des sections coniques.

A. *Parabole*. La construction de la parabole au moyen des coordonnées d'une droite, se déduit immédiatement des développements précédents. Pour reconnaître la relation entre cette droite et le paramètre  $P$  de la parabole, prenons pour axes coordonnés les tangentes qui se coupent à angles droits sur l'axe principal. L'équation de la courbe est alors

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2Py \sqrt{\frac{1}{2}} - 2Px \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^2,$$

d'où l'on déduit

$$q + p - P \sqrt{2} = 0.$$

B. *Hyperbole*. Si l'on prend pour axes coordonnés les asymptotes, son équation est

$$pq = \frac{E}{A} = \frac{g^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{h^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}},$$

où  $2g$  et  $2h$  sont les axes de l'hyperbole et  $\omega$  l'angle des asymptotes. D'après cela il est aisé de construire les valeurs  $p$  et  $q$  qui appartiennent à la même tangente. On peut faire usage, entre autre, de la propriété du cercle, que la tangente menée d'un point hors du cercle, est moyenne proportionnelle entre les segments de la sécante.

C. *Ellipse*. Si  $2g$  et  $2h$  sont les axes de l'ellipse, son équation rapportée à deux tangentes aux extrémités des axes comme axes coordonnés, sera

$$pq - 2gq - 2hp + 2gh = 0. \quad (\text{XI})$$

Cette équation peut s'écrire

$$(p - 2g)(q - 2h) = 2gh,$$

ou

$$\left(2 - \frac{p}{g}\right) \left(1 - \frac{q}{2h}\right) = 1.$$

On peut donc poser

$$2 - \frac{p}{g} = \cot \alpha, \quad 1 - \frac{q}{2h} = \tan \alpha,$$

d'où

$$p = 2g - g \cot \alpha, \quad q = 2(h - h \tan \alpha).$$

On en déduit la construction suivante: On fait (fig. I.) les deux droites  $OX$  et  $OY$  qui se coupent à angles droits, respectivement égales à  $2g$  et  $2h$ ; par les extrémités  $X$  et  $Y$  on mène les perpendiculaires  $XA$  et  $YB$  égales à  $g$  et  $2h$ ,

et de leurs extrémités comme centres et d'un rayon quelconque on décrit les circonférences  $SR$ ,  $TU$ . Si alors on mène encore  $AR$  perpendiculairement à  $XA$  et qu'on fasse  $RC = TD$ , les rayons  $AC$ ,  $BD$ , couperont les deux droites fixes aux deux points  $M$ ,  $N$ , qui fournissent la tangente  $MN$ .

L'équation (XI) peut aussi s'écrire:

$$(h - q)(2g - p) = hp,$$

ou

$$\left(1 - \frac{q}{h}\right) \left(2\frac{g}{p} - 1\right) = 1.$$

Posons donc

$$1 - \frac{q}{h} = \operatorname{tang} \alpha, \quad 2\frac{g}{p} - 1 = \operatorname{cot} \alpha,$$

d'où l'on tire

$$q = h(1 - \operatorname{tang} \alpha),$$

$$p = \frac{2g}{1 + \operatorname{cot} \alpha} = g \left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}\right) = g(1 + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)),$$

ce qui fournit la construction connue.

Si nous rapportons l'ellipse à ses axes, son équation sera

$$p^2q^2 - g^2q^2 - h^2p^2 = 0,$$

ou

$$1 = \frac{g^2}{p^2} + \frac{h^2}{q^2};$$

et comme toujours  $p > g$ ,  $q > h$  on peut poser

$$\frac{g}{p} = \cos \alpha, \quad \frac{h}{q} = \sin \alpha,$$

ou

$$p = g \operatorname{sec} \alpha, \quad q = h \operatorname{cosec} \alpha.$$

De là résulte la construction suivante: On trace le rectangle  $ABCD$  (fig. II.), dont les côtés sont égaux aux demi-axes de l'ellipse, et l'on mène par le sommet  $D$  les droites quelconques  $DK$ ; alors les parties  $DM$ ,  $DN$ , de chacune de ces droites, déterminées par le point  $D$  et les côtés  $CB$ ,  $AB$ , ou leurs prolongements, seront les longueurs des coordonnées  $p$ ,  $q$ , d'une tangente, que l'on porte sur les côtés  $DC$ ,  $DA$ .

L'hyperbole, ayant pour équation

$$p^2q^2 - g^2q^2 + h^2p^2 = 0,$$

fournit

$$\frac{g^2}{p^2} = 1 + \frac{h^2}{q^2};$$



$$\frac{g}{p} = \operatorname{cosec} \alpha, \quad \frac{h}{q} = \operatorname{cotang} \alpha,$$

$$p = g \sin \alpha, \quad q = h \operatorname{tang} \alpha;$$

d'où l'on déduit une construction analogue à celle de l'ellipse mais plus compliquée.

## II.

### Génération des sections coniques par des faisceaux et par des droites anharmoniques.

#### A. Faisceaux anharmoniques.

8. Si à chaque rayon d'un faisceau rayonnant on fait correspondre un rayon d'un autre faisceau de manière qu'après avoir déplacé les faisceaux et les avoir fait tourner autour de leurs centres, toutes les intersections de deux rayons correspondants se trouvent sur la même droite; ces deux faisceaux sont dits *anharmoniques* ou *projectifs*. Lorsque le lieu des intersections des rayons correspondants est une droite, les faisceaux se trouvent en *position perspective*; toute autre position des faisceaux est appelée leur *position oblique*. \*)

Pour rechercher les relations entre les rayons correspondants, prenons d'abord les faisceaux dans la position perspective, plaçons l'axe des  $x$  rectangulaires sur la droite qui joint les centres des faisceaux, et prenons le premier des centres pour origine des coordonnées.

Si  $x'$  est l'abscisse du second centre, les équations de deux rayons correspondants seront

$$y = nx, \quad y = n'(x - x').$$

\*) Ces dénominations et définitions sont celles introduites en géométrie par M. Steiner dans son ouvrage intitulé: *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometr. Gestalten von einander*. On y retrouvera aussi les résultats contenus dans les numéros suivants, mais obtenus par des méthodes toutes différentes.

Pour que ces rayons se coupent sur une droite,

$$a'y + b'x + d' = 0,$$

il faut que cette équation soit satisfaite par les  $x$  et  $y$  qui satisfont à la fois aux équations des deux rayons. Par conséquent, on obtient la relation désirée entre les coefficients  $n$  et  $n'$ , en éliminant  $x$  et  $y$  entre les trois équations, ce qui fournit

$$a'x'nn' + (b'x' + d')n' - d'n = 0.$$

Réciproquement, deux faisceaux étant donnés, si l'on choisit les axes coordonnés de la manière indiquée, ces faisceaux seront projectifs et en position perspective, dès que les rayons correspondants sont liés entre eux par une équation de la forme

$$\alpha'nn' + \beta'n' + \delta'n = 0. \quad (\text{XII})$$

Car, si l'on substitue dans cette équation les valeurs de  $n$  et  $n'$  tirées des équations

$$y = nx, \quad y = n'(x - x'),$$

on aura

$$y[\alpha'y + (\beta' + \delta')x - \delta'x'] = 0;$$

donc les intersections des rayons correspondants se trouvent sur la droite

$$\alpha'y + (\beta' + \delta')x - \delta'x' = 0,$$

ce qu'il fallait prouver. La droite  $y = 0$ , étant la droite qui joint les deux centres, ne peut pas entrer dans nos considérations.

9. Si l'on fait tourner les deux faisceaux, des angles  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{S}'$ , et qu'on pose

$$\text{tang } \mathfrak{S} = m, \quad \text{tang } \mathfrak{S}' = m',$$

il est évident que dans l'équation (XII), il faudra remplacer  $n$  et  $n'$  respectivement par  $\frac{n-m}{1+nm}$  et  $\frac{n'-m'}{1+n'm'}$ , ce qui fournit la relation suivante entre les nouvelles  $n$  et  $n'$ :

$$nn'(\alpha' + \beta'm + \delta'm') + n'(-\alpha'm + \beta' - \delta'mm') + n(-\alpha'm' - \beta'm'm + \delta') + \alpha mm' - \beta'm' - \delta'm = 0.$$

En transposant enfin les faisceaux parallèlement à eux-mêmes, les directions des rayons et par suite les valeurs de  $n$  et  $n'$ , ne seront pas changées; donc cette équation subsistera encore. Il s'ensuit que les rayons correspondants de deux



faisceaux anharmoniques sont toujours liés entre eux par une équation de la forme :

$$\alpha nn' + \beta n' + \delta n + \varepsilon = 0. \quad (\text{XIII})$$

10. Réciproquement, toute équation de cette forme re présente toujours la relation entre deux rayons correspondants de deux faisceaux projectifs. En effet, les axes coordonnés étant donnés, l'équation n'est pas changée lorsqu'on fait glisser les deux faisceaux jusqu'à ce que un des centres coïncide avec l'origine des coordonnées et que l'autre tombe sur l'axe des  $x$ . Si l'on fait encore tourner les faisceaux autour de leurs centres, il faut remplacer  $n$  et  $n'$  par  $\frac{n+m}{1-nm}$

et  $\frac{n'+m'}{1-n'm'}$ ; l'équation (XIII) deviendra alors

$$(\alpha - \beta m - \delta m' + \varepsilon m m') n n' + (\alpha m + \beta - \delta m' m - \varepsilon m') n' + (\alpha m' - \beta m m' + \delta - \varepsilon m) n + \alpha m m' + \beta m' + \delta m + \varepsilon = 0.$$

Pour que les faisceaux soient maintenant des faisceaux anharmoniques en position perspective, il faut et il suffit (8) que l'équation prenne la forme (XII). Il faut donc poser

$$\alpha m m' + \beta m' + \delta m + \varepsilon = 0. \quad (\text{XIV})$$

Comme cette équation est à satisfaire d'une infinité de manières, on voit que l'on peut toujours placer les faisceaux donnés dans une position telle que les rayons correspondants se coupent sur une droite; par conséquent les faisceaux donnés sont des faisceaux anharmoniques.

De plus, l'équation (XIV) exprimant entre  $m$  et  $m'$  le même rapport que celui qui existe entre les  $n$  de deux rayons correspondants (XIII), il s'en suit que l'on fait passer deux faisceaux anharmoniques de la position oblique à la position perspective en les faisant tourner autour de leurs centres jusqu'à ce que deux rayons correspondants coïncident avec la droite qui joint les centres. Donc, en général, *deux faisceaux anharmoniques sont en position perspective dès que deux rayons correspondants coïncident.*

L'équation (XIII) nous apprend encore que le système de deux faisceaux anharmoniques est déterminé dès que trois couples de rayons correspondants sont données. Car ces rayons fournissent trois couples de valeurs pour  $n$  et  $n'$  qui, substituées successivement dans l'équation (XIII) en

déterminent complètement les constantes. Et comme les trois équations de détermination sont du premier degré et que les solutions infinies ne contiennent rien d'absurde, on voit que le problème est toujours possible, mais n'admet qu'une seule solution.

11. Si les coordonnées des centres de deux faisceaux projectifs sont  $\xi, \eta$  et  $\xi', \eta'$ , on obtient le lieu géométrique des intersections des rayons correspondants en éliminant  $n$  et  $n'$  entre les trois équations

$$y - \eta = n(x - \xi), \quad y - \eta' = n'(x - \xi'), \quad (\text{XV})$$

$$a\alpha n' + \beta n' + \delta n + \varepsilon = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha \frac{y - \eta}{x - \xi} \cdot \frac{y - \eta'}{x - \xi'} + \beta \frac{y - \eta'}{x - \xi'} + \delta \frac{y - \eta}{x - \xi} + \varepsilon = 0,$$

une équation du *second degré*. Donc le lieu cherché est une section conique. Cette équation étant satisfaite en posant  $y = \eta, x = \xi$ , ou  $y = \eta', x = \xi'$ , on voit que la courbe passe par les deux centres.

En éliminant  $y$  et  $x$  entre les deux équations (XV) et l'équation générale du second degré en  $x$  et  $y$ , on obtient une équation entre  $n$  et  $n'$  de la forme (XIII). Par conséquent, *toute section conique peut être engendrée par un système de deux faisceaux projectifs dont les centres se trouvent sur la courbe*. Comme les coordonnées des centres restent indéterminées, il y a une infinité de systèmes qui engendrent la même courbe.

Les relations entre la courbe et les faisceaux deviennent plus simples lorsqu'on place l'origine des coordonnées sur un des centres pris arbitrairement sur la courbe, en faisant passer l'axe des  $x$  par l'autre centre. L'équation de la courbe est alors

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex = 0,$$

et l'abscisse du second centre,

$$\xi' = -\frac{2e}{c}.$$

Par cette supposition la relation entre  $n$  et  $n'$  deviendra

$$a\alpha n' + (2be - cd)n' + cdn + ce = 0. \quad (\text{XVI})$$

Si l'on fait  $n' = 0$ , on a

$$n = -\frac{e}{d};$$



or,  $-\frac{e}{d}$  étant aussi la valeur du coefficient qui indique la direction de la tangente à l'origine des coordonnées, on voit que chaque tangente de la courbe est le rayon correspondant à la droite qui joint le point de contact à un autre point de la courbe pris pour centre du second faisceau.

Ce théorème peut aussi s'énoncer de la manière suivante :

*Si par deux points pris sur une section conique, on mène des droites qui se coupent sur la courbe, et que par l'un des deux points on mène d'autres droites qui fassent avec les droites passant par ce point, des angles égaux à l'angle compris entre la tangente à l'autre point et la droite qui joint les deux points; les dernières droites couperont les droites passant par l'autre point, sur une droite.* — La démonstration repose sur le théorème du numéro 10.

12. Pour reconnaître la courbe engendrée par deux faisceaux projectifs qu'on a fait passer de la position perspective à la position oblique en les faisant glisser parallèlement à eux-mêmes, sans les faire tourner : supposons les axes coordonnés tels qu'ils ont été choisis au numéro 8.; alors deux rayons correspondants sont liés entre eux par la relation

$$a'x'nn' + (b'x' + d')n' - d'n = 0.$$

Or, il est évident qu'on obtient toutes les positions relatives des faisceaux en n'en déplaçant qu'un seul. Supposons donc  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ; l'équation de la courbe deviendra

$$a'x' \frac{y}{x} \cdot \frac{y - \eta'}{x - \xi'}, + (b'x' + d') \frac{y - \eta'}{x - \xi'} - d' \frac{y}{x} = 0,$$

ou

$$a'x'y^2 + b'x'xy + (-a'x'\eta' + d'\xi')y - (b'x' + d')\eta'x = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation générale du second degré, on reconnaît que  $c = 0$ , et que par conséquent la courbe n'est jamais une ellipse Elle est une parabole lorsque  $b^2 - ac = 0$ , ce qui exige  $b' = 0$ , ou, en d'autres termes, que la droite fixe qui détermine le système des faisceaux, soit parallèle à la droite qui joint leurs centres dans la position perspective.

Mais si  $b'$  n'est pas nul, la courbe est une hyperbole, et l'on a

$$\frac{b'}{a'} = \frac{2b}{a}.$$

Or, on sait que les directions  $v$  des deux asymptotes d'une hyperbole sont fournies par la formule

$$av^2 + bv + c = 0,$$

d'où

$$v = \frac{1}{a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}),$$

et, pour  $c = 0$ ,

$$v = 0 \quad \text{et} \quad v = -\frac{2b}{a} = -\frac{b'}{a'}.$$

Par conséquent, la droite qui joint les deux centres dans la position perspective, est parallèle à une des asymptotes et fait avec l'autre asymptote un angle supplémentaire de celui qu'elle fait avec la droite fixe.

13. On peut encore exprimer le rapport entre la courbe et la position perspective des faisceaux, en supposant que le premier des faisceaux, ayant son centre à l'origine des coordonnées, reste invariable, tandis que le second seulement change de position et de direction. Pour plus de simplicité supposons encore que dans la position perspective, la droite fixe soit parallèle à l'axe des  $y$ . Si alors nous désignons par  $x'$ ,  $y'$ , les coordonnées du second centre, nous aurons l'équation de la droite

$$x = -\frac{d'}{b'} = s,$$

les équations des rayons

$$y = nx, \quad y - y' = n'(x - x'),$$

et pour la position oblique des faisceaux, la relation

$$m'snn' - (s - x' + m'y')n' + sn + m'(s - x') - y' = 0.$$

En admettant les axes coordonnés comme à la fin du numéro 11., nous pouvons comparer cette équation à l'équation (XVI), ce qui fournit

$$\frac{s - x' + m'y'}{m's} = \frac{2be - cd}{ae}$$

$$\frac{s}{m's} = \frac{cd}{ae}$$

$$\frac{m'(s - x') - y'}{m's} = \frac{ce}{ae};$$



d'où

$$m' = \frac{ae}{cd}, \quad \frac{x'}{s} = \frac{(a-c)ae + 2bcd}{a^2e^2 + c^2d^2}e, \quad \frac{y'}{s} = \frac{(a-c)cd - 2abe}{a^2e^2 + c^2d^2}e.$$

Ces résultats nous montrent que non seulement le problème est toujours possible, mais encore que  $s$  reste indéterminé, de sorte que le problème admet une infinité de solutions.

Mais comme le rapport  $\frac{y'}{x'}$  est déterminé, on voit que dans toutes ces solutions le centre du second faisceau se trouve toujours sur la même droite passant par le premier centre; de plus, la distance des deux centres est toujours divisée dans le même rapport par la droite fixe.

En ajoutant au numérateur de  $\frac{x'}{s}$  la quantité

$$b^2e^2 - b^2e^2 + c^2d^2 - c^2d^2 = 0,$$

on obtient

$$\frac{x'}{s} = 1 + \frac{e^2(b^2 - ac) - (be - cd)^2}{a^2e^2 + c^2d^2},$$

ce qui fait voir que, pour la parabole et l'ellipse, les centres des deux faisceaux dans leur position perspective, se trouvent du même côté de la droite fixe, tandis que pour l'hyperbole les centres se trouvent du même côté ou sur les côtés opposés, suivant que

$$e^2(b^2 - ae) \begin{cases} < \\ > \end{cases} (be - cd)^2.$$

Si la courbe est un cercle, on a

$$a = c, \quad b = 0,$$

d'où:

$$x' = 0, \quad y' = 0,$$

ce qui montre que dans la position perspective les deux faisceaux coïncident.

Pour l'hyperbole équilatère ( $c = -a$ ), on trouve

$$\frac{x'}{s} = 2e \frac{ae - bd}{a(e^2 + d^2)}, \quad \frac{y'}{s} = -2e \frac{ad + be}{a(e^2 - d^2)},$$

et, en faisant coïncider l'axe des  $x$  avec l'axe réel ( $b = d = 0$ ),

$$x' = 2s, \quad y = 0.$$

Donc la droite fixe est perpendiculaire à la droite qui joint les centres, et la divise en deux parties égales, ce qui conduit au théorème suivant:

*Les droites menées d'un des sommets de l'hyperbole équilatère à deux points quelconques de la courbe, comprennent le même angle que les droites qui joignent les mêmes points à l'autre sommet.*

Si l'on désigne par  $g$  et  $h$  les demi-axes d'une ellipse et qu'on fasse coïncider l'axe des  $x$  avec le grand axe et la droite fixe avec le petit axe, on obtient

$$s = g, \quad x' = g - \frac{h^2}{g}, \quad y' = 0, \quad m' = \infty.$$

L'hyperbole fournit sous les mêmes conditions

$$s = g, \quad x' = g + \frac{h^2}{g}, \quad y' = 0, \quad m' = \infty.$$

Pour la parabole, il convient de prendre pour axe des  $x$  la perpendiculaire à l'axe de la courbe qui passe par le foyer; l'équation de la parabole est alors

$$x^2 - py - px = 0,$$

d'où l'on tire

$$m' = 0, \quad y' = -s, \quad x = 0.$$

14. Ces développements conduisent aux constructions suivantes des sections coniques. Elles reposent sur le principe qu'au lieu de construire le second faisceau dans sa position primitive et de le transporter ensuite à la place qu'il occupe dans la courbe, on peut évidemment le construire directement dans la dernière position en traçant la droite fixe deux fois, chaque fois dans la position qu'elle occupe relativement au faisceau à construire.

A) *Ellipse.* Soit  $AA'$  (fig. III) le grand et  $BB'$  le petit axe de l'ellipse. Si l'on joint  $AB$  et qu'au point  $B$  on mène la perpendiculaire  $BC$  à  $AB$ , on a  $OC = \frac{h^2}{g}$ , et  $C$  serait le centre du second faisceau. On mène  $A'D$  perpendiculaire à  $AA'$ , on fait  $A'D = OC$ , et par le point  $D$  on mène  $DE$  parallèlement à  $AA'$ ; si alors sur la droite  $BB'$  on prend un point quelconque  $M$  et qu'on fasse  $DM' = OM$ , le point d'intersection  $P$  des droites  $AM$  et  $A'M'$  prolongées, sera un point de la courbe.

B) *L'hyperbole* se construit de la même manière, avec la différence qu'on prend le point  $M'$  de l'autre côté du point  $D$ ,



C. *Parabole.* Soit  $OC$  (fig. IV) l'axe de la parabole et  $O$  le foyer; par le point  $O$  on mène  $AA'$  perpendiculairement à  $OC$  et l'on fait  $OD = OA = OA' = \frac{1}{2}p$ . Si alors on prend sur  $OC$  les points quelconques  $M, N$ , et qu'à partir de  $D$  on fasse les distances  $DM', DN'$  égales à  $OM, ON$ , mais en sens opposé, les rayons  $AM, AN$  seront coupés par les rayons  $A'M', A'N'$  aux points  $P, Q$ , appartenant à la courbe.

### B. Droites anharmoniques.

15. Deux droites et un faisceau rayonnant étant donnés dans le même plan, chaque rayon coupe les droites en deux points *correspondants*. Cette position des droites est appelée la position *perspective*. Après avoir été déplacées et tournées arbitrairement elles se trouvent en position *oblique*. Mais en général, si les points d'une droite correspondent de la manière indiquée aux points d'une autre droite, ces droites sont dites *anharmoniques* ou *projectives*.

Si nous prenons les deux droites pour axes coordonnés et que nous désignons par  $x', y'$ , les coordonnées du centre du faisceau par rapport à ces axes, la relation entre les distances  $p, q$ , de deux points correspondants, à l'origine des coordonnées, sera exprimée par l'équation

$$py' + qx' = pq. \quad (\text{XVII})$$

Si l'on fait tourner les deux droites autour de leur point d'intersection, les valeurs de  $p$  et  $q$  ne seront pas changées; par conséquent nous aurons toujours l'équation

$$py' + qx' = pq,$$

ce qui nous apprend que toutes les droites joignant deux points correspondants, passeront par le même point dont les coordonnées, prises par rapport aux droites fixes dans leur *nouvelle* position, sont encore  $x', y'$ . Donc l'angle compris entre les deux droites n'influe pas sur la relation entre les points correspondants.

Si l'on fait encore glisser les deux droites parallèlement à elles-mêmes, des quantités  $k', k$ ; il est évident qu'on obtiendra la relation entre les *nouvelles* distances  $p, q$ , des points correspondants, au point d'intersection des deux droites, en remplaçant  $p, q$ , dans l'équation (XVII) par  $p + k, q + k'$ , et en mettant  $\xi + k, \eta + k'$  à la place de  $x', y'$ , où  $\xi$  et  $\eta$

désignent les coordonnées du centre du faisceau rayonnant, par rapport aux deux droites dans la dernière position prises pour axes coordonnés. Par cela l'équation (XVII) deviendra

$$(p+k)(\eta+k') + (q+k')(\xi+k) = (p+k)(q+k)$$

ou

$$pq - \xi q - \eta p - (kk' + \xi k' + \eta k) = 0. \quad (\text{XVIII})$$

Cette équation a la même forme que l'équation (VIII) aux tangentes des sections coniques rapportée à deux tangentes comme axes coordonnés. Donc, *les droites qui joignent les points correspondants de deux droites anharmoniques, enveloppent une courbe du second degré.* Cette courbe se réduit à un point lorsque

$$kk' + \xi k' + \eta k = 0,$$

ou, en retablissant le système primitif des coordonnées, lorsque

$$kk' - x'k' - y'h = 0,$$

c'est à dire lorsque les points  $k, k'$ , qu'on a fait coïncider, sont des points correspondants.

16. Réciproquement, toute équation de la forme

$$apq + bq + cp + d = 0, \quad (\text{XIX})$$

indique que les axes coordonnés sont des droites anharmoniques. En effet, si l'on fait glisser les deux droites parallèlement à elles-mêmes des quantités  $-k, -k'$ , on obtient

$$a(p-k)(q-k') + b(q-k') + c(p-k) + d = 0,$$

ou

$$apq + (-ak+b)q + (-ak'+c)p + akk' - bk' - ck + d = 0. \quad (\text{XX})$$

Pour que les droites se trouvent maintenant dans la position perspective, il faut que toutes les droites joignant deux points correspondants, passent par le même point  $(x', y')$ . Il faut donc que cette équation prenne la forme

$$pq + x'q + y'p = 0,$$

ce qui exige

$$akk' - bk' - ck + d = 0,$$

ou

$$a(-k)(-k') + b(-k') + c(-k) + d = 0.$$

Cette équation est toujours à satisfaire et nous montre que les points  $-k, -k'$ , sont des points correspondants. Donc deux droites dont les points correspondants sont liés entre eux par l'équation (XIX), peuvent être placées dans une position telle que les points correspondants deviennent les points d'intersection avec les rayons d'un même faisceau,



ce qu'il s'agissait de démontrer. En même temps on voit que deux droites anharmoniques sont ramenées dans la position perspective lorsqu'on fait coïncider deux points correspondants quelconques. On démontre encore, comme au numéro 10, que le système de deux droites projectives est entièrement déterminé lorsque trois couples de points correspondants sont données. Et comme l'équation (XV) est l'équation générale des sections coniques (4), on voit que chaque conique peut être considérée comme enveloppée par des droites qui divisent anharmoniquement deux quelconques de ses tangentes.

17. En comparant l'équation générale des courbes du second degré (VIII),

$$Apq - 2Bq + 2Dp - 2E = 0,$$

à l'équation (XVIII), on trouve

$$\xi = \frac{2B}{A}, \quad \eta = -\frac{2D}{A}, \quad kk' + \frac{2B}{A}k' - \frac{2D}{A}k - \frac{2E}{A} = 0. \quad (\text{XXI})$$

Donc, deux tangentes d'une section conique étant données, on peut les placer dans leur position perspective d'une infinité de manières, en leur menant des parallèles par les deux points où elles sont coupées par une tangente à la même courbe; mais tous ces systèmes de droites perspectives ont le même faisceau dont le centre a pour coordonnées

par rapport aux tangentes fixes, les valeurs  $\frac{2B}{A}$  et  $-\frac{2D}{A}$ .

Or, ces valeurs sont les mêmes que nous avons déjà obtenues pour les tangentes parallèles aux axes coordonnées (4); donc le centre du faisceau est l'intersection des deux tangentes parallèles aux tangentes fixes. On en peut déjà conclure que pour la parabole ce centre est situé à l'infini.

Nous savons (5.) que la courbe est une parabole lorsque  $A=0$ , ce qui fournit encore

$$\eta = \infty, \quad \xi = \infty,$$

et

$$Bk' - Dk - E = 0.$$

La courbe est une ellipse ou une hyperbole suivant que

$$1 - 2 \frac{BD}{AE} < 0.$$

Si l'on met pour  $\frac{B}{A}$ ,  $\frac{D}{A}$ ,  $\frac{E}{A}$  leurs valeurs tirées des équations (XXI), cette condition se réduit à

$$1 + \frac{\xi\eta}{kk' + \xi k' + \eta k} < 0;$$

et, si l'on rapporte le tout aux anciens axes coordonnés,

$$\frac{x'y'}{kk' - ky' - k'x'} < 0.$$

18. Il reste encore à considérer une position particulière des droites projectives qui, jusqu'à présent, n'a encore pu entrer dans les calculs, c'est la position parallèle. Or, dans ce cas les segments interceptés entre deux rayons, sont proportionnels; donc, si nous changeons la position des droites, nous aurons

$$p = k + p', \quad q = k' + xp,$$

où  $x$  désigne le rapport constant entre deux segments correspondants. En éliminant  $p'$ , on obtient pour l'équation de la courbe

$$q - xp - k' + xk = 0,$$

ce qui représente une *parabole*.

19. L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes comme axes coordonnés, étant

$$pq = \frac{E}{A},$$

nous trouvons

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

ce qui montre que l'intersection des asymptotes est le centre du faisceau.

L'ellipse rapportée à deux tangentes aux extrémités des axes, a pour équation

$$pq - 2gq - 2hp + 2gh = 0,$$

d'où

$$\xi = 2g, \quad \eta = 2h, \quad kk' + 2g'k' + 2hk + 2gh = 0.$$

Pour faire usage de ces développements dans la construction des courbes, il est le plus simple d'avoir recours à des considérations analogues à celles du numéro 14, c'est à dire de considérer le faisceau comme formé de deux faisceaux coincidents dont chacun appartient à une des deux droites projectives. Si alors on déplace les droites parallè-



lement à elles-mêmes, les faisceaux se dédoublent de manière que les rayons qui coïncidaient deviennent parallèles. Ce qui conduit aux constructions suivantes.

*Hyperbole.* Soient (fig. V)  $OA, OB$ , les asymptotes; si sur la bissectrice de l'angle  $AOB$ , on fait  $OC$  égal au demi-axe réel, et que par le point  $C$  on mène  $BA$  perpendiculairement à  $OC$ , cette droite sera une tangente de l'hyperbole; par conséquent les parallèles à  $OA, OB$  menées par  $B, A$  sont des droites projectives en position perspective, le centre du faisceau étant en  $O$ . En faisant maintenant glisser les droites parallèlement à elles-mêmes jusqu'à ce qu'elles coïncident avec les asymptotes, les centres du faisceau dédoublé viendront se placer en  $A', B'$ , si l'on fait  $OA' = OB' = OA$ . Donc, si par  $A', B'$ , on mène deux parallèles  $A'Q, B'P$ , elles déterminent sur les asymptotes les points correspondants  $Q, P$ , et la droite  $PQ$  sera une tangente de la courbe. Pour faciliter la construction des parallèles sans avoir recours à l'équerre glissant sur une règle, on peut faire usage de deux cercles du même rayon dont les centres sont en  $A', B'$ , ou bien on mène une droite parallèle à  $A'B'$  sur laquelle à partir de deux parallèles menées par  $A'$  et  $B'$ , on détermine des segments égaux.

Les modifications à apporter à ce procédé pour la construction du *cerce* et de l'*ellipse* sont aisées à reconnaître.

On peut cependant aussi employer la construction directe en construisant par les moyens indiqués plus haut, le système des deux droites en position perspective avec le centre du faisceau rayonnant, menant les rayons et portant sur les tangentes fixes, à partir de leur point d'intersection, les segments interceptés sur les droites perspectives entre un rayon et les tangentes fixes.

20. Il est clair que les résultats des numéros 15 et suiv. peuvent se déduire des résultats relatifs aux faisceaux projectifs, au moyen de la loi des réciprocités. Les deux systèmes projectifs sont encore liés entre eux par les propriétés suivantes:

*A. Les droites qui joignent les points correspondants de deux droites anharmoniques à deux points quelconques, forment un système de deux faisceaux projectifs.*

Pour le prouver prenons les deux droites pour axes coordonnés; deux points correspondants seront alors liés entre eux par la relation

$$Apq - 2Bq + 2Dp - 2E = 0.$$

Si  $x', y'$ , et  $x'', y''$ , sont les coordonnées des deux centres des faisceaux, les équations de deux rayons correspondants seront

$$y - y' = \frac{y' - q}{x'} (x - x')$$

$$y - y'' = \frac{y'' - p}{x'' - p} (x - x'').$$

L'élimination de  $p$  et  $q$  entre ces trois équations donne lieu à une équation du second degré entre  $x$  et  $y$ , ce qui démontre la proposition (comp. 11).

*B. Lorsqu'on coupe chacun de deux faisceaux projectifs par une droite, ces deux droites sont projectives entre elles.*

Si l'on prend, en effet, les deux droites pour axes coordonnés, les équations de deux rayons correspondants seront (11)  $y - \eta = n(x - \xi)$  et  $y - \eta' = n'(x - \xi')$ ; leurs intersections avec les axes seront donc

$$y = 0, \quad x = p = -\frac{\eta - n\xi}{n},$$

$$x = 0, \quad y = q = \eta' - n'\xi'.$$

Mais  $n$  et  $n'$  sont liés entre eux par la relation (XIII)

$$\alpha nn' + \beta n' + \delta n + \varepsilon = 0.$$

En éliminant  $n$  et  $n'$  entre les dernières équations, on obtient

$$\beta pq - (\beta\xi + \alpha\eta)q - (\beta\eta' + \varepsilon\xi')p + \alpha\eta\eta' + \beta\xi\eta' + \delta\xi'\eta + \varepsilon\xi\xi' = 0,$$

ce qui démontre que les axes sont des droites anharmoniques (16).

### III.

#### Construction des sections coniques au moyen de cinq points ou de cinq tangentes.

A. Cinq points étant donnés dans un plan, construire la section conique passant par ces points.



21. I. *Au moyen de l'hexagone inscrit.* Les cinq points  $R, S, T, U, V$ , peuvent être considérés comme cinq sommets d'une infinité d'hexagones inscrits, dont on construit les sixièmes sommets au moyen du théorème de Pascal. Pour trouver, par exemple, un point entre  $R$  et  $V$ , on mène par  $R$  une droite quelconque représentant le côté opposé à  $TU$ , et coupant ce côté en un point  $M$ ; on joint ce point à l'intersection  $N$  des côtés opposés  $RS, UV$ , par une droite qui coupe  $ST$  en  $P$ . La droite  $PV$  sera alors le sixième côté de l'hexagone, et son intersection  $W$  avec  $RM$ , le sommet cherché et un point de la courbe. En répétant cette construction dans un autre ordre et en employant les points construits, on peut trouver autant de points qu'on veut. Si  $RM$  est menée parallèlement à  $TU$ , on trouve le diamètre conjugué à la direction de  $TU$ , ce qui sert à construire le centre de la courbe, qui peut être situé à l'infini (parabole). La droite qui joint le centre à un des points, est la moitié d'un diamètre, dont on trouve le conjugué en construisant un côté qui lui soit parallèle. Si alors  $x', y'$ , sont les coordonnées d'un point de la courbe par rapport à ces diamètres et  $2a', 2b'$  les longueurs des diamètres,  $a'$  étant connu, on trouve

$$b' = \frac{a'y'}{\sqrt{a'^2 - x'^2}} \quad \text{ou} \quad b' = \frac{a'y'}{\sqrt{x'^2 - a'^2}},$$

suivant que  $x' < a'$   
 $> a'$

II. *Au moyen de la théorie des polaires.* En joignant les 4 points  $R, S, T, U$ , deux à deux, on obtient six droites qui se coupent deux à deux en trois points  $P, P', P''$ , dont chacun est le pôle de la droite passant par les deux autres. Il s'ensuit que si par le point  $P$  on mène une droite qui coupe la courbe supposée construite, en deux points, les deux droites qui joignent ces points d'intersections aux deux points  $R$  et  $S$ , ou  $U$  et  $T$ , devront se couper sur la droite  $P'P''$ . Donc, pour obtenir un sixième point  $W$ , on joint le cinquième point  $V$  aux points  $P$  et  $R$ ; la droite  $VR$  coupera  $P'P''$  en  $O$ ; si alors on joint encore  $O$  et  $S$ , l'intersection de  $OS$  avec  $PV$  sera le point cherché.

III. *A l'aide du pentagone inscrit.* On considère le pen-

tagone  $RSTUV$  comme un hexagone inscrit dont deux sommets sont réunis en un seul, par exemple en  $R$ , et dont un côté est par conséquent remplacé par la tangente en  $R$ . On trouve donc cette tangente d'après le théorème de Pascal. Pour cela on joint les intersections  $M, N$ , des côtés  $RS, UV$ , et  $RV, TS$ , par une droite qui coupe le cinquième côté  $TU$  en  $O$ ; la droite  $OR$  sera la tangente cherchée. En construisant encore les tangentes aux quatre autres points on ramène le problème à une des constructions B. Le point d'intersection de deux tangentes étant le pôle de la droite qui joint leurs points de contact, la droite qui joint le milieu de cette droite au point d'intersection passera par le centre de la courbe, de sorte que ce centre est facile à construire. La droite qui joint le centre à un des points donnés, et la tangente en ce point fournissent un système de deux diamètres conjugués, dont un de grandeur.

IV. *Au moyen de deux faisceaux projectifs.* On sait que chaque courbe du second degré est engendrée par deux faisceaux projectifs dont les centres sont deux points quelconques de la courbe (11) et que, de plus, le système de deux faisceaux projectifs est déterminé par trois couples de rayons correspondants dont les trois points d'intersection sont nécessairement des points de la courbe. On peut donc choisir à volonté deux des cinq points, par exemple  $R$  et  $U$ , pour centres des faisceaux et considérer les droites  $RS$  et  $US$ ,  $RT$  et  $UT$ ,  $RV$  et  $UV$ , comme des rayons correspondants. Si maintenant on parvient à construire d'autres rayons correspondants appartenant aux faisceaux ainsi déterminés, leurs intersections seront autant de points de la courbe. On y arrive par les méthodes suivantes:

a) Le faisceau  $R$  (fig. VI) reste invariable, et l'on construit le faisceau  $U$  dans la position perspective. Si l'on prend pour la droite fixe qui appartient à cette position des faisceaux, la droite  $SV$ , cette droite est coupée par les trois rayons du faisceau  $R$  aux points  $S, M, V$ , et la position  $U'$  du second centre sera déterminée par la condition que, les rayons  $U'S, U'M, U'V$ , formant le même faisceau que les rayons  $US, UT, UV$ , les angles compris entre les rayons du faisceau  $U'$  soient égaux aux angles du faisceau  $U$



compris entre les mêmes rayons. Mais comme les rayons du faisceau  $U$  se suivent nécessairement dans le même ordre, que ceux du faisceau  $R$ , il faut d'abord examiner si l'on doit prendre les rayons  $UT, US, UV$ , ou leurs prolongements  $UT', US', UV'$ . C'est ainsi que dans la figure le rayon  $UV$  et les prolongements  $UT', US'$ , se suivent dans le même ordre que les rayons correspondants du faisceau  $R$ . — On construira donc le point  $U'$  comme intersection de deux arcs de cercle capables des angles formés par les rayons du faisceau  $U$  (ou par leurs prolongements) et ayant pour cordes les distances  $VM, MS$ . Si alors on joint un point  $N$  de la droite  $VS$  aux deux centres  $R$  et  $U'$  et que par  $U$  on mène la droite  $UW'$  faisant avec  $UV$  un angle  $W'UV$ , égal à  $NU'V$ , les deux droites  $RN$  et  $UW'$  seront des rayons correspondants, et leur intersection  $W$  sera un point de la courbe. Cette construction, le point  $U'$  une fois déterminé, est très-simple à l'aide de deux cercles du même rayon décrits autour de  $U'$  et  $U$  comme centres.

b) En ayant égard aux considérations du numéro 14, on peut tracer les rayons du second faisceau directement dans leur position oblique. Il s'agit seulement de trouver une droite qui tienne pour le faisceau  $U$ , la place de la droite fixe  $VS$  de la position perspective, c'est à dire une droite dont les portions interceptées entre les rayons du faisceau  $U$ , soient égales aux portions de  $VS$  interceptées entre les rayons du faisceau  $R$ . Pour cela sur le prolongement de  $US$  (fig. VII), on fait  $UG=VM, GH=MS$ , on mène  $HK \parallel UV$ , on joint  $KG$ , on fait  $GL=GU=MV$ , et l'on mène  $LP \parallel HU$ ; la droite  $PQ$  menée par  $P$  parallèlement à  $KG$ , sera la droite cherchée. Si maintenant on joint le centre  $R$  à un point  $N$  de  $SV$ , et qu'on fasse  $PN' = VN$ , le rayon  $UN'$  prolongé s'il est nécessaire, coupera le rayon  $RN$  en un point  $W$  situé sur la courbe. Il est évident que si la droite  $VS$  ne fournit pas des constructions exactes, on peut la remplacer par toute autre droite et même par une droite parallèle à un des rayons, ce qui simplifie encore la construction de la droite  $PQ$ .

c) *Construction de M. Steiner.*\*) Elle repose sur les théo-

\*) System. Entw. 24.

rèmes (20) et (10) qui nous permettent de transformer le système de deux faisceaux projectifs en un système de deux droites projectives en position perspective. On mène par le point  $V$  (fig. VIII) deux droites quelconques  $VK, VK'$ , qui sont coupées par les six rayons aux points  $V, H, L$  et  $V, H', L'$ . Ces points divisent anharmoniquement les deux droites, et comme les deux points correspondants  $V$  coïncident, elles sont en position perspective. L'intersection  $P$  des droites  $HH'$  et  $LL'$  sera donc le centre du faisceau qui les rend projectives, et chaque droite  $PM$  menée par  $P$ , détermine sur  $VK$  et  $VK'$  deux points correspondants  $M, M'$ . Par conséquent les droites  $RM, UM'$  seront des rayons correspondants, et leur intersection  $W$  sera un point de la courbe. — Cette méthode a l'avantage de nous dispenser de l'emploi du compas, mais les angles sous lesquels les droites se coupent, sont souvent trop aigus.

B. 22. Cinq tangentes  $r, s, t, u, v$ , étant tracées, trouver la section conique touchée par ces droites.

Les solutions de ce problème étant analogues aux solutions précédentes, il suffira de les indiquer sans en ajouter les démonstrations.

I. *Hexagone circonscrit* (théorème de Brianchon). — On joint un point 5 de la tangente  $v$  à l'intersection 2 de  $s$  et  $t$ ; de même on joint les intersections 1 et 4 de  $r$  avec  $s$  et de  $u$  avec  $v$ . Par le point  $O$  où ces deux droites se coupent, et par l'intersection 3 de  $t$  et  $u$  on mène une droite qui coupe la tangente  $r$  en 6; alors la droite menée par 5 et 6, sera une sixième tangente.

II *Théorie des polaires* (quadrilatère circonscrit). — Les 4 tangentes  $r, s, t, u$ , forment un quadrilatère circonscrit, dont une diagonale  $EF$  est la polaire de l'intersection  $D$  des deux autres diagonales. On considère maintenant  $v$  comme troisième côté d'un autre quadrilatère circonscrit dont  $r$  et  $s$  sont deux côtés et dont le quatrième côté  $w$  est à construire. Pour le trouver, on prolonge  $v$  jusqu'à ce qu'il rencontre la diagonale  $EF$  en  $G$ ; on joint  $D$  à l'intersection  $H$  des côtés  $r$  et  $v$  par une droite qui coupe  $s$  en  $K$ ; alors la droite  $GK$  sera le côté cherché.

III. A l'aide du *pentagone circonscrit* on trouve les points de contact des cinq tangentes.



IV. *Droites anharmoniques.* — Deux des droites,  $r$  et  $u$  par exemple, étant prises pour tangentes fixes, les trois autres  $y$  déterminent trois couples de points correspondants qui suffisent pour déterminer le système.

a) On construit (fig. IX) la position perspective des deux droites  $u$  et  $r$  (16) en leur menant des parallèles  $OH$ ,  $OD$ , par les points  $A$ ,  $A'$ , où elles sont coupées par la tangente  $s$ ; ces parallèles se couperont en  $O'$ . En menant par les points  $B$ ,  $C$ , et  $B'$ ,  $C'$ , où les tangentes  $u$ ,  $r$ , sont coupées par  $t$ ,  $v$ , des parallèles à  $r$  et à  $u$ , ou en portant sur  $O'D$  et  $OH$ , les distances  $O'b$ ,  $O'b'$ ,  $O'c$ ,  $O'c'$  respectivement égales à  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $AC$ ,  $A'C'$ , et en menant les droites  $bb'$  et  $cc'$ , on trouve le centre  $M$  du faisceau rayonnant comme intersection de ces droites. Pour tracer une sixième tangente, on mène par le point  $M$  un rayon quelconque qui coupe les droites  $OD$ ,  $OH$  en  $P'$  et  $N'$ , on fait  $AP = O'P'$  et  $A'N = O'N'$ ; alors  $NP$  sera la tangente cherchée.

b) On construit les deux droites dans leur position oblique, chacune avec le faisceau générateur. Il est à remarquer (voir la fig. IX.) que lorsque les points de l'une des droites se suivent dans le même ordre que ceux de l'autre, les segments correspondants interceptés sur les deux droites sont vus du centre du faisceau sous le même angle, mais lorsque l'ordre des points est interverti, ils sont vus sous des angles supplémentaires l'un de l'autre. — On joint un point quelconque, par exemple le point  $P$  de la droite  $v$  (fig. XI), aux trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de la droite  $u$ ; puis au-dessus de  $BA$  on construit un segment de cercle capable de l'angle  $A'PB'$ , et au-dessus de  $AC$ , un autre, capable du supplément de  $A'PC'$ ; l'intersection  $P'$  de ces deux cercles sera le centre du faisceau par rapport à  $r$ . Donc, si l'on joint  $P$  à un point  $M'$  de  $u$ , et qu'on fasse  $AP'M = A'PM'$ , la droite  $MM'$  sera tangente à la courbe.

c) *Construction de M. Steiner.* Sur la tangente  $v$  (fig. XI) on choisit arbitrairement deux points  $P$ ,  $P'$ , que l'on joint aux intersections  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Ces six rayons formeront un système de deux faisceaux projectifs (20.), et comme deux rayons correspondants  $PC$ ,  $P'C'$ , sont réunis en un seul,

les faisceaux seront en position perspective. La droite fixe sera la droite  $KL$  qui joint les intersections des rayons correspondants  $PA, P'A'$  et  $PB, P'B'$ . Donc, si l'on mène deux rayons  $PN, P'N$  par le même point  $N$  de  $KL$ , la droite qui joint les intersections  $M$  et  $M'$  de ces rayons avec les deux tangentes  $s$  et  $u$ , sera tangente à la courbe.

On construit les deux droites dans leur position oblique, chacune avec le faisceau générateur. Il est à remarquer (voir la fig. IX) que lorsque les points de l'une des droites se suivent dans le même ordre que ceux de l'autre, les segments correspondants interceptés sur les deux droites sont vus du centre du faisceau sous le même angle, mais lorsque l'ordre des points est inversé, ils sont vus sous des angles supplémentaires l'un de l'autre. — On joint un point quelconque, par exemple le point  $P$  de la droite (fig. XI), aux trois points  $A, B, C$  de la droite et puis au-dessus de  $BA$  on construit un segment de cercle capable de l'angle  $APB$ , et au-dessus de  $AC$  un autre, capable du supplément de  $APC$  : l'intersection  $P'$  de ces deux cercles sera le centre du faisceau par rapport à  $P$ . Donc, si l'on joint  $P'$  à un point  $M$  de  $u$  et qu'on fasse  $APM = A'P'M'$ , la droite  $M'M$  sera tangente à la courbe.

Construction de M. Steiner. Soit la tangente (fig. XI) en choisit arbitrairement deux points  $P, P'$  que l'on joint aux intersections  $A, B, C$  et  $A', B', C'$ . Ces six rayons formeront un système de deux faisceaux projectifs (20), et comme deux rayons correspondants  $PA, P'A'$  sont réunis en un seul

On joint un point quelconque, par exemple le point  $P$  de la droite (fig. XI), aux trois points  $A, B, C$  de la droite et puis au-dessus de  $BA$  on construit un segment de cercle capable de l'angle  $APB$ , et au-dessus de  $AC$  un autre, capable du supplément de  $APC$  : l'intersection  $P'$  de ces deux cercles sera le centre du faisceau par rapport à  $P$ . Donc, si l'on joint  $P'$  à un point  $M$  de  $u$  et qu'on fasse  $APM = A'P'M'$ , la droite  $M'M$  sera tangente à la courbe.