## §. 1.

Die Vorgänge bei der Rotation der Körper, seit Kepplers und Huyghens Zeiten, ein Gegenstand der Forschung für den Mathematiker, haben mit den Fortschritten der Astronomie und der Technik immer mehr an Bedeutsamkeit gewonnen und fortdauernd Probleme geliefert, welche eben so fruchtbar für diese Gebiete geworden sind, als sie, mit deren Ausbeutung und Erweiterung an Schwierigkeit zunehmend, mächtig auf die Vervollkommnung der mathematischen Hülfsmittel zurück gewirkt haben, welche ihre Lösung erfordert. Zu denjenigen, welche in ihrer ganzen Allgemeinheit und nach allen Beziehungen hin noch nicht als vollkommen gelöst betrachtet werden, so Vieles auch dafür von Männern wie Euler, d'Alembert, Lagrange, Poisson, Airy, Jacobi u. A. geleistet worden ist*) gehört das der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, und sowohl seine Bedeutsamkeit an sich als mehr noch die verwickelten Rechnungen, zu welchen der Calcul bei seiner Behandlung greifen muss, und die Schwierigkeit, die Resultate desselben vor die Anschauung zu bringen, machen es erklärlich, dass Apparate, welche neue Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung oder auch bereits bekannte nur in verstärktem Masse zu zeigen und die Ergebnisse der mathematischen Entwickelungen über dieselbe zu versinnlichen besonders geeignet sind, von Mathematikern, nicht minder als von Physikern freudig begrüsst werden. Der älteste nächst dem Kreisel, diesem, wie J. Herschel **) mit Recht ihn nennt, „philosophical instrument," ist das Bohnenberger'sche Maschinchen. Kaum beschrieben,***) war es

---

*) St. Guilhem in den Nouvelles Annales des Mathématiques XV. Févr. 1856 „Le problème, qui a pour l'objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationelle." Auch spricht dafür die Preisaufgabe der Berliner Academie der Wissenschaften für das Jahr 1858: „die Differentialgleichungen eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers, auf welchen keine anderen beschleunigenden Kräfte als die Schwere wirken, durch regelmässig fortschreitende Reihen zu integriren, welche alle zur Kenntniss der Bewegung erforderlichen Grössen explicite durch die Zeit darstellen."

**) Treatise on Astronomy by J. Herschel §. 206.

***) Tübinger Blätter für Naturwissenschaft und Arzneikunde, von v. Autenrieth und von v. Bohnenberger, Bd. 3. H. 1. J. 1817 und Gilberts Annalen, Bd. 60. S. 60.

schnell in den physikalischen Kabineten eingebürgert, und wenn man jetzt auf die Aufmerksamkeit zurückblickt, welche sich ihm sofort zuwandte, und bedenkt, dass eine gehörige Würdigung seiner Theorie*) manche Abänderungen hätte nahe legen können, so möchte man sich fast wundern, dass mehrere Jahrzehnte vergingen, ehe eine einzige ans Licht trat. Erst zufällige Beobachtungen, wie bei dem Fessel'schen**) oder anderweitige Untersuchungen, wie die von Foucault über das Pendel und von Magnus über die Abweichung der Geschosse gaben in den letzten Jahren den Impuls dazu, und die seitdem unter besondern Namen bekannt gewordenen Apparate fanden eine so willkommene Aufnahme, als ständen sie gewissermassen einzig in ihrer Art dar. ***)

Im Folgenden soll nun die auf Veranlassung von Herrn Professor Plücker von dem Mechaniker Herrn Fessel zu Cöln ausgeführte Rotationsmaschine und des Zusammenhanges wegen, obwohl kürzer, zugleich das Bohnenberger'sche Maschinchen und das Polytrop von Magnus, überdies ein Apparat, den ich um ihn als Fessel'schen und Bohnenberger'schen und zu weitern Versuchen zu gebrauchen, habe construiren lassen, in ihrer Einrichtung und den Erscheinungen nach, welche sie bieten, im Wesentlichen beschrieben, dann eine elementare Erklärung der letztern gegeben und endlich mathematische Untersuchungen über die Abhängigkeit und Modification dieser Erscheinungen unter verschiedenen, von den gewöhnlichen zum Theil abweichenden Verhältnissen angeschlossen werden, welche zu neuen Abänderungen der Apparate führen.

---

*) Poisson „Mémoire sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans. Journal de l'école polytechnique. Cah. 16. t. 14. p. 247.

**) Poggendorffs Annalen, Bd. 90. S. 175 und 351 und Bd. 88 S. 18.

***) Vergl. den Bericht von Baden-Powell in den Notices of the Meetings of the Members of the Royal Institution Part. IV. Jul. 1854. p. 393.

# I. Die Apparate.

§ 2.

Das Bohnenberger'sche Maschinchen Fig. 1. besteht in seiner gewöhnlichen Einrichtung aus einem Sphäroid, (auch wohl aus einer messingnen, kreisförmigen Scheibe mit aufgeworfenem Rande oder besser noch aus einem Ringe aus Schmiedeeisen mit eingetriebener, dünner Scheibe) welches um seine Axe ii leicht beweglich und mittelst dreier Ringe J, M, A so aufgehangen ist, dass die Mittelpunkte der Ringe und zugleich der Mittelpunkt des Sphäroids genau zusammen fallen, und der Durchmesser m m, um welchen der die Axe desselben i i tragende innere Ring J in dem mittlern M drehbar ist, gegen diese Axe rechtwinklig, und der Durchmesser a a, um welchen der mittlere Ring M im äussern A drehbar ist, ebenfalls rechtwinklig gegen m m ist. Die leichte Beweglichkeit der Ringe um ihre Drehaxen wird durch stählerne Schräubchen bewirkt. Der äussere Ring ist in der Regel in einem festen Fuss F eingeschraubt, welcher das Instrument trägt. In dem innern Ring J lässt sich in der Richtung der Rotationsaxe ein kleines Gewicht G mit zweien Stiften, welche in entsprechende Löcher desselben passen, erforderlichen Falles aufsetzen. Am Ende der stählernen Axe des Sphäroids ist ein kleiner Stift angebracht, in welchen die Schlinge eines starken Seidenfadens eingehangen werden kann, um ihn auf die Axe oder eine kleine, auf derselben angebrachte Rolle aufzuwickeln. Durch einen kräftigen, möglichst gleichmässigen, gegen das Ende nicht abnehmenden Zug wird er, während man den innern Ring mit der einen Hand in seiner Lage festhält, mit der andern von der Axe abgewickelt und so das Sphäroid in eine rasche, eine geraume Zeit andauernde Rotation versetzt.

Eine für andere Versuche, als die sind, welche wir hier betrachten werden, zweckmässige Abänderung ist dem Apparate von Professor Poggendorf*) gegeben worden und besteht darin, dass der dritte äussere Ring A in einem vierten, mit ihm in einer Ebene liegenden Ringe sich so befestigen lässt,

*) Poggendorffs Annalen. Bd. X., S. 351.

dass die Drehaxe des erstern mit der verticalen Drehaxe des letztern jeden beliebigen Winkel bilden, die Verlängerung der letztern Drehaxe aber in eine Centifrugalmaschine eingesetzt werden kann. Es sei hier gelegentlich nur bemerkt, dass wenn man nicht, wie bei dieser Vorrichtung, eine Drehung des Apparates um eine Verticalaxe will, welche durch den Mittelpunkt der Ringe geht, sondern um eine, welche dieser parallel ist, man sich mit Vortheil der stählernen Drehaxe mit der Gabel in dem später zu beschreibenden Fessel'schen Apparate bedienen kann, indem man nur durch die kreisförmige Hülse derselben eine eiserne Stange zu stecken braucht, welche an dem einen Arm ein verschiebbares Gegengewicht, am andern eine festschraubbare Zwinge mit einem aus zwei Bogenstücken bestehenden Ansatze nach Unten trägt, zwischen welche der dritte Ring des Bohnenberger'schen Maschinchens, nachdem man das Ganze von dem Fusse abgeschraubt, unter jedem Winkel seiner Axe gegen die Verticale festgeschraubt werden kann.

2. Bei dem Fessel'schen Apparate ist der Rotationskörper gewöhnlich eine messingne, runde Scheibe mit starkem Rande; durch ihre Mitte geht eine stählerne Axe, welche in einem messingnen Ringe leicht drehbar ist. Ursprünglich war dieser Ring unmittelbar mittelst eines Scharniers, um welches der Ring in vertikaler Ebene drehbar ist, mit einem Stahlstifte verbunden, welcher sich mit möglichst geringer Reibung in einer vertikalen messingnen Säule mit gehörig festem, eisernem Fusse um die Verticale drehen kann. Wird ein kleiner Schieber, der sich zur Seite des Stahlstiftes befindet, vorgeschoben, so wird die Axe durch denselben getragen und zu sinken verhindert. Eine spätere, zweckmässigere Einrichtung ist die Fig. 2 abgebildete. In jenen Ring R ist eine lange, runde Stange S fest eingelassen, welche sich durch eine kleine Hülse h hindurch stecken und mittelst einer Schraube in derselben feststellen lässt. Die Hülse ist zwischen den Armen einer messingnen Gabel g, welche am Ausgangspunkt der Arme einen langen unten zugespitzten Stift J trägt, in vertikaler Ebene leicht drehbar. Der Stift dreht sich wieder in der verticalen, messingnen Säule eines eisernen Ständers F mit möglichst geringer Reibnng. Durch Verschiebung der Stange in der Hülse und Gewichte, welche sich auf ihr in verschiedenen Entfernungen vom Drehpunkte aufschrauben lassen, lässt sich theils auf beiden Seiten das Gleichgewicht, theils ein Druck auf die Axe hervorbringen, durch welchen die Scheibe gesenkt oder gehoben wird. Das Gegengewicht besteht aus einem soliden, mittelst einer gabel-

förmigen Vorrichtung anhängbaren Cylinder Z, zwischen welcher sich eine in beliebiger Entfernung vom Drehpunkte auf die Stange aufschraubbare, cylindrische Hülse befindet; auf den Cylinder kann man mit einem Einschnitte versehene Metallscheiben aufschieben.

Eine von Prof. Plücker ebenfalls veranlasste Abänderung des letztern Apparates, welche indessen in England einem Andern zugeschrieben zu werden scheint,*) besteht darin, dass durch den Ring mit der Tragstange senkrecht auf der Richtung derselben die Drehaxe eines zweiten innern Ringes geht, welche zugleich senkrecht auf der Axe des von diesem Ringe getragenen Rotationskörpers ist. Diese Drehaxe des innern Ringes wird nun einerseits bestimmt durch die Spitze eines, durch den äussern Ring hindurchgehenden, in den innern hineinreichenden Schräubchens, andrerseits ebenfalls durch eine Schraube, welche zwei concentrische Abschnitte von Kugelschalen gegeneinander presst, von denen der grössere eine Eintheilung trägt und an dem Ringe befestigt ist, der andere eine Marke hat, so dass der innere Ring unter jedem Winkel gegen den äussern festgestellt werden kann; nur wenn dieser Winkel Null ist, fällt die Rotationsaxe der Scheibe in die Richtung der Tragstange des äussern Ringes.

3. Ein Apparat, den ich durch H. Fessel grössten Theils habe ausführen lassen, um zugleich als Bohnenberger'scher und für weitere Zwecke zu dienen, ist in Fig. 3 dargestellt.

In den innern Ring J sind diametral gegenüber zwei Schraubenmütterchen von Stahl eingesetzt, in welche sich zwei stählerne Schrauben mit Spitzen umdrehen lassen, deren jede ein in der Nähe ihrer Spitze feststehendes, k, und ein durch Drehung nach der einen oder andern Seite versetzbares Schraubenköpfchen, $k^1$, trägt; durch Andrehen des letzteren an den Ring wird die Schraube, wenn man sie mehr oder weniger mittelst des festen Schraubenköpfchens in den Ring hineingeschraubt hat, im Ringe festgehalten. Man kann so mit Leichtigkeit den Schwerpunkt des Rotationskörpers R, dessen stählerne Axe von jenem Ringe getragen wird und den Spitzen der Schrauben entsprechende, kleine Vertiefungen hat, genau in den Mittelpunkt des Ringes einstellen, erforderlichen Falles mit Hülfe der beiden Schrauben um mehr als eine Linie weit aus demselben herausrücken, und ihn mit anderen Rotationskörpern bequem vertauschen. Durch den äussern, mit der Tragstange versehenen Ring A, geht dieser Stange gegenüber eine Schraube mit einem

*) Siehe den oben angeführten Bericht von Baden-Powell.

festen Köpfchen f nach Aussen, deren Spitze sich in die Oeffnung eines der in den innern Ring eingesetzten Schraubenmütterchen einsenken lässt, damit man den letztern, welcher sich um die Spitzen zweier Schrauben, d, $d^1$, die durch den äussern Ring in der Richtung eines auf der Stange senkrechten Durchmessers hindurchgehen, leicht drehen lässt, in der Ebene des äussern Ringes feststellen kann. Zwischen den parallelen Armen der Gabel G, in welche sich die in die messingene Säule des Ständers F passende, unten zugespitzte stählerne Verticalaxe endigt, ist auf den Spitzen zweier, durch dieselben hindurchgehender Schrauben eine etwa zwei Linien dicke, messingene Kreisscheibe K um ihren Mittelpunkt leicht drehbar, welche in der Richtung eines Durchmessers zur Aufnahme der Tragstange T des äussern Ringes durchbohrt ist und auf der einen Kreishälfte eine von der Mitte derselben nach beiden Seiten zu jenem Durchmesser hin sich erstreckende Theilung von 5 zu 5 bis 90 Grad hat, auf der andern, unteren, aber entsprechend gezahnt ist. Bequem ist es, die Theilung auf beiden Seiten der Kreisscheibe anbringen zu lassen. Die beiden verticalen Arme der Gabel tragen nach oben hin Zeiger i, welche wenn der mit der Durchbohrung der Kreishülse parallele Durchmesser horizontal ist, auf den Nullpunkt der Theilung zeigen. In der Richtung des durch den Nullpunkt gehenden Durchmessers dringt in die Kreishülse eine lange stählerne Schraube hinein, um die Stange in derselben festsetzen zu können. Auf ihr befindet sich zunächst der Kreisscheibe, etwa in der Mitte der ganzen Schraube ein festsitzendes Schraubenköpfchen a, und oben, auf der Verlängerung nach Aussen, eine kleine messingne Scheibe b, welche in verschiedenen Entfernungen vom Ende aufschraubbar ist und die Bestimmung hat, durch ihre Versetzung den Schwerpunkt des beweglichen Theils des Apparates zu heben oder zu erniedrigen, um ihn möglichst genau für den Fall des Gleichgewichtes in den Drehpunkt zu bringen. Zwei flache, metallne Bogenstücke, auf beiden Seiten auf die Kreishülse der Schraube gegenüber aufgeschraubt, dienen dazu, um den durch die Verzahnung an der unteren Hälfte hervorgebrachten Gewichtsverlust zu ersetzen und dem Gewicht der Schraube bei verschiedenen Lagen gegen die Verticale das Gleichgewicht zu halten. Durch richtige Stellung der versetzbaren, kleinen Scheibe erreicht man es, dass auch bei sehr abweichenden Neigungen der Stange gegen die Verticale das Gleichgewicht fortdauert. Als Gegengewicht gegen den Rotationskörper und die Ringe bediene ich mich eines messingnen in der Richtung seiner

Axe durchbohrten Cylinders, P, welcher sich auf der runden Tragstange mittelst eines Schräubchens, — als Gegengewicht steht ihm ein anderes gegenüber — in verschiedenen Entfernungen vom Drehpunkt feststellen lässt und vor dem oben beschriebenen den Vorzug hat, dass sein Schwerpunkt auf der Stange liegt, während durch dieses der Schwerpunkt des beweglichen Theiles unter die durch den Drehpunkt gehende Horizontale fällt und bei verschiedenen Neigungen der Stange bald auf die eine, bald auf die andere Seite der Verticalen rückt. In einer der Endflächen des Cylinders ist gegen den Rand hin ein gekrümmter Stift um Metallringe von kleinerm Durchmesser und sonstige ringförmige Uebergewichte bequem einzuhängen.

Zur Hervorbringung eines periodisch veränderlichen Gegendruckes dient ein Pendel, dessen Pendelstange in einen messingnen Ring eingelassen ist, durch welchen diametral gegenüber zwei stählerne Schräubchen senkrecht zur Richtung der Stange gehen. Eine auf der Tragstange feststellbare, cylindrische Hülse nimmt in zweien kleinen Vertiefungen die Spitzen jener Schrauben auf; in der verlängerten Richtung der Stange ist im Ringe eine Schraube befestigt, um auf derselben ein Gegengewicht aufschrauben zu können, ähnlich wie bei dem Metronom. Fig. 4 zeigt das Pendel mit der Hülse.

In den beiden Armen der Gabel G sind am untern Ende zwei mit der Ebene derselben parallele Einschnitte, durch welche ein messingnes, nach oben zugeschärftes Plättchen c geht, welches an beiden Enden aus der Gabel hervorragt und sich um ein Stiftchen in dem einen Arm dreht; je nachdem man auf das eine oder andere Ende abwärts drückt, greift das Plättchen in einen Zahn der Kreishülse ein, und fixirt dadurch die Stange in ihrem Winkel gegen die Verticale, oder fällt aus und lässt ihr wieder freie Beweglichkeit in der Vertical-Ebene. Um bei starken Erschütterungen des Apparats das Ausfallen des Plättchens aus dem Zahne zu verhindern, hängt man in einen Einschnitt des Plättchens an dem Ende, wo der Drehstift ist, ein Gewicht ein. — Noch ist an der Gabel in der Mitte des Zwischenstückes zwischen den beiden Armen senkrecht gegen dasselbe ein durchgehender horizontaler Stift, z, angebracht, der, wenn die stählerne Tragstange der Gabel in der messingnen Säule des Ständers F steht, unmittelbar sich über einer auf dem obern Ende der Säule angebrachten, ähnlich wie die Kreishülse, eingetheilten Metallplatte H als Zeiger bewegt. Eine durch die Säule hindurchgehende Schraube v dient dazu, die Verticalaxe der Gabel erforderlichen Falles festzustellen; bei gelöster Schraube kann man durch einen Druck auf das Blättchen in der Gabel die Bewegung um die Verticale beschleunigen oder verlangsamen.

Soll die Ebene des innern Ringes nicht mit der des äussern zusammenfallen, so löst man die Schraube f. Um ihn nun unter einem andern Winkel gegen jenen festzustellen, dient eine kleine messingne, eingetheilte Scheibe p, Fig. 5, welche nach der einen Seite zwei Stahlstifte trägt, die in Löcher, welche in gleichen Abständen von d im äussern Ringe A sich befinden, passen, nach der andern in ihrer Mitte eine Schraube hat. Ein schmales Metallplättchen q hat ebenfalls nahe an seinen Enden zwei etwas längere Stahlstifte, die in entsprechende Löcher des innern Ringes J, zu beiden Seiten des Drehpunktes d passen, in der Mitte eine Oeffnung, etwas weiter als den Durchschnitt jener Schraube, und der Länge nach gegen beide Enden eine Durchbrechung. Setzt man die Kreisscheibe mit ihren Spitzen in die beiden Löcher des äussern Ringes, dreht den innern Ring um d $d^1$ in die Lage, die er erhalten soll und schiebt das Plättchen mit seiner Oeffnung durch die Schraube der Scheibe, so dass seine Spitzen in den innern Ring eingreifen, so kann man mittelst eines einschraubbaren Schraubenkopfes t das Plättchen und dadurch den innern Ring in seiner Lage festsetzen, und die Durchbrechung des Plättchens gestattet, den Winkel, unter welchem dieser gegen den äussern steht, abzulesen. Beim Abziehen der Schnur muss man den innern Ring allerdings festhalten, dann aber reicht die obige Vorrichtung hin, ihn in seiner Stellung gegen den äussern zu erhalten.

Der Apparat verwandelt sich sofort in den Bohnenberger'schen, wenn man in die Säule des Ständers F die unten conisch zugespitzte Tragstange T des äussern Ringes einsetzt, welche ebenfalls genau in die verticale Durchbohrung der Säule passt. Figur 6 zeigt den Apparat bei dieser Anordnung.

Als Rotationskörper dienen für die gewöhnlichen Versuche eine dünne Scheibe mit starkem (wulstigem) Rande und die später in Betracht zu ziehenden Körper. Die stählernen Rotationsaxen derselben dürfen nur die eben erforderliche Stärke haben, überhaupt sollte das Gewicht des übrigen beweglichen Theiles des Apparates ausser dem Rotationskörper möglichst verringert sein. Es ist zweckmässig, den Apparat bei den Versuchen auf eine weiche Unterlage, etwa ein zusammengefaltetes Taschentuch, zu setzen, um den Einfluss von Stössen möglichst zu verhindern.

4. Das von Prof. Magnus construirte und so benannte Polytrop unterscheidet sich von der Fessel'schen zweiten Einrichtung im Wesentlichen nur dadurch, dass an beiden Enden der Tragstange sich ringförmige Bügel mit Scheiben befinden, deren Rotationsaxen ebenfalls bei beiden in der Richtung der Stange liegen und mit Stiften versehen sind, um in dieselben die Schlingen zweier gleichlanger Schnüre einhangen zu können, deren andere Enden sich an einem hölzernen Griffe befestigen lassen. Je nachdem die Schnüre beide in demselben oder in entgegengesetztem Sinne aufgewickelt sind, kann man die vollkommen gleichen Scheiben entweder in gleichem oder entgegengesetztem Sinne rotiren lassen, auch mittelst des Griffes den Zug so einrichten, dass die Geschwindigkeit beider wenigstens nahezu gleich wird. An der Hülse, in welcher die Stange sich verschieben und festklemmen lässt, ist unten ein halbkreisförmiges messingnes Stück befestigt, gegen welches sich durch eine in die Gabel eingelassene Schraube ein Messingstück andrücken lässt, um die Stange unter jedem Winkel gegen die Verticale erforderlichen Falles zu fixiren oder bei Lösung derselben ihre Bewegung in der Vertical-Ebene frei zu lassen, was indessen bei den Apparaten, die wir gesehen, sich nicht bewerkstelligen liess, ohne der Gabel eine Seitenbewegung zu ertheilen. Es bildet bei diesem Apparate also der eine Theil der Tragstange mit seiner Scheibe ein Gegengewicht gegen den andern, und hält diesem das Gleichgewicht oder nicht, je nachdem die Stange in ihrer Mitte in der Hülse eingeklemmt ist oder nicht; zugleich trägt sie zu beiden Seiten des Drehpunktes Bügel, in welche sich Gewichte zur Herstellung des Gleichgewichtes oder Hervorbringung eines Uebergewichtes nach einer Seite einhangen lassen, welches indessen den bei dem Fessel'schen Gegengewichte bereits bemerkten Uebelstand hat.

---

S. Poggendorffs Annalen 1854. S. 295.

# II. Die Versuche und ihre elementare Erklärung.

## § 3.

Indem wir uns nun zu den Versuchen wenden, welche sich mit den obigen Apparaten anstellen lassen, betrachten wir zunächst den unter Nr. 3 des §. 2 beschriebenen, und zwar, wenn er als Fessel'scher aufgestellt ist Fig. 3. Dabei denken wir uns den Beobachter auf der verlängerten Axe des Rotationskörpers, auf der Seite desselben, wo er die Scheibe wie den Zeiger einer Uhr von der Linken zur Rechten rotiren sieht. Die rechte Seite der Scheibe ist alsdann die, welche seiner Rechten, die linke die, welche seiner Linken gegenüberliegt.

Ist nun das cylinderische Gegengewicht P auf die Tragstange so aufgeschoben und festgestellt, dass Gleichgewicht vorhanden ist, so dauert dasselbe, wie bereits bemerkt, bei sehr abweichenden Stellungen der Stange gegen die Verticale fort und ein äusserst geringer Druck oder Stoss auf die Stange oder das Plättchen c an der Gabel reicht hin, um den beweglichen Theil des Apparates fortzubewegen. Diese leichte Beweglichkeit aber hört sofort auf, wenn die Scheibe durch einen kräftigen Zug in Rotation versetzt ist. Man empfindet alsdann einen starken Widerstand und vorübergehende, selbst kräftige Stösse versetzen die Stange nur in rasche Schwankungen um eine mittlere Lage, welche um so weniger von derselben abweichen und um so schneller geschehen, je rascher die Rotation der Scheibe ist. Man kann den Apparat rund in der Stube herumtragen, die Axe wird immer nach derselben Richtung zeigen. Schöner noch zeigt sich dieses Beharrungsvermögen, wenn man den ganzen Apparat auf eine, mit ihrer eisernen Axe in eine Centifrugal-Maschine einschraubbare, hölzerne Platte bringt, welche nach Oben theils um die Mitte herum, theils am Rande in angemessenen Entfernungen Stifte trägt, um den Fuss F des Apparates zwischen sich zu fassen und diesen dagegen zu schützen, dass er bei rascher Umdrehung der Platte ~~nicht~~ herabgeschleudert werde. Man kann alsdann in beliebiger Richtung und beliebig rasch drehen, den Apparat in die Mitte oder am Rande der Platte aufstellen, so wird die Stange, vorausgesetzt, dass ihre freie Beweglichkeit nicht gehemmt ist, fortwährend nach derselben Richtung zeigen. Wie sich dieses Experiment ändert, wenn die Gabelaxe durch das Schräubchen v festgeklemmt ist, soll später erörtert werden. Nimmt man den Apparat wieder von der Platte, klemmt nun das gedachte Schräubchen fest, oder hält das Plättchen c fest, so folgt die Stange mit derselben Leichtigkeit, Stössen von Oben oder Unten, als wenn die Scheibe nicht rotirte, und lässt man bei gelöstem Schräubchen v das Plättchen c bloss in einen Zahn der Kreisscheibe K eingreifen und fixirt so die Stange in ihrem Winkel gegen die Verticale, so bringt ein leiser Druck auf einen Arm der Gabel G eine Seitenbewegung um die Verticale hervor.

Hat man als Gegengewicht die Gabel mit dem tiefen herabhängenden Cylinder so angeschraubt, dass für die horizontale Lage der Stange das Gleichgewicht vorhanden ist, und zeigt sich bei nicht rotirender Scheibe, auch wenn man dieselbe hebt oder senkt, keine Tendenz derselben in ihre frühere Lage zurück zu kehren, so bemerkt man, wenn sie rotirt und man nun der Stange eine andere Lage in ihrer Vertical-Ebene gibt, dann, nachdem man sie eine Weile in derselben ruhig gehalten, sich selbst überlässt, dass allmählich eine horizontale Seitenbewegung der Scheibe beginnt, welche äusserst langsam vor sich geht, während der Winkel gegen die Verticale unverändert bleibt, und je nachdem man die Stange aufwärts oder abwärts in ihrer Vertikal-Ebene verrückt hat, eine entgegengesetzte Richtung hat. Bringt man die Stange vorsichtig in ihre ursprüngliche Lage zurück, so hört sogleich jede Seitenbewegung wieder auf.

Beachtet man, dass im vorigen Experimente, wenn der durchbohrte Cylinder aufgeschraubt ist, der Schwerpunkt des beweglichen Theils des Apparats in den Drehpunkt, bei angehängtem Cylinder aber unterhalb desselben fällt, so liegt die Vermuthung nahe, dass die mit der Neigung der Stange sich verändernde Lage des Schwerpunktes im zweiten Falle der Grund der Seitenbewegung ist, und man überzeugt sich davon leicht in folgender Weise: Hat man nämlich wieder den durchbohrten Cylinder zum Gleichgewichte scharf eingestellt und hängt, während die Scheibe rotirt, ein noch so kleines Uebergewicht z. B. eine Pappscheibe in denselben ein, so stellt sich sofort diese Seitenbewegung ein. Dasselbe geschieht, wenn man den durchbohrten Cylinder mit einem vorher zugefügten Uebergewicht zur Gleichgewichtslage eingestellt hat und dieses während der Rotation der Scheibe wegnimmt oder den Cylinder etwas näher nun dem Drehpunkte rückt; aber die Seitenbewegung ist der vorigen jetzt entgegengesetzt. Man kann daher durch Verschiebung des Cylinders oder Abheben und Zulegen von Uebergewichten die Seitenbewegung sofort umkehren. Bei gleich starker Rotation der Scheibe wächst sie oder nimmt ab, je nachdem der Druck, der sie hervorruft, stärker oder schwächer ist. Ist er sehr stark, so geht auch die Seitenbewegung sehr rasch vor sich, und bringt man gar kein Gegengewicht auf die Tragstange, so hat man den überraschenden Anblick, dass nun die messingne Scheibe, als sei sie dem Einflusse der Schwere ganz entzogen, sich rasch um die Verticale herumdreht. Hat man die Tragstange selbst bis ans Ende aus der Hülse herausgezogen und sie dann festgeklemmt, so vermag ein kräftiger Zug noch die Erscheinung hervorzurufen, und löst man gleich nachdem die Scheibe in Rotation versetzt, die Schraube an der Hülse und zieht die Stange heraus, so kann man sie mittelst einer Oese, die auf dem äussern Ringe ist, in der Schlinge einer Kordel aufhängen und sie eine geraume Zeit an derselben herumtragen, ehe die Axe herabsinkt. Wenn kein Gegengewicht aufgeschoben und besonders wenn die Stange weit aus der Hülse hervor gezogen ist, zeigt sich das Eigenthümliche, dass die Scheibe nun in starken Sätzen bei ihrer Seitenbewegung auf und nieder hüpft, indem sie zugleich weit kürzere Zeit ihre (mittlere) Lage gegen die Verticale beibehält. — Nimmt die Rotation der Scheibe allmählich ab, so nimmt die Seitenbewegung dagegen zu. Einzelne Stösse versetzen die Stange ebenso in Schwankungen, wie wenn die Seitenbewegung nicht vorhanden ist. Ein Druck von Oben nach Unten oder umgekehrt beschleunigt die Seitenbewegung oder verzögert sie, je nachdem er in der Richtung des Uebergewichtes auf die Scheibe oder ihr entgegengesetzt wirkt.

Uebt man auf das Metallplättchen c einen horizontalen Seitendruck aus und geschieht derselbe im Sinne der bereits stattfindenden Seitenbewegung, so senkt sich die Scheibe, wenn der durch das Uebergewicht auf dieselbe ausgeübte Druck bei nicht vorhandener Rotation sie heben würde, dagegen hebt sie sich im umgekehrten Falle, und suchte der Druck auf das Plättchen für sich eine der vorhandenen entgegengesetzte Seitenbewegung hervorzubringen, so hebt sie sich im erstern Falle und senkt sich im letztern. Hält man die Gabel mittelst des Plättchens c oder schraubt das Schräubchen v gegen ihre Axe, so dass die Seitenbewegung aufhört, so stellt sich die Stange sofort vertical. Fixirt man sie, indem man das Plättchen in einen Zahn der Kreishülse eingreifen lässt, unter dem augenblicklich stattfindenden Winkel gegen die Verticale, so hört die Seitenbewegung sogleich auf, vorausgesetzt, dass die Säule gehörig vertical steht, und nicht durch eine schiefe Lage derselben eine Tendenz zu einer Bewegung nach der einen oder anderen Seite vorhanden ist; lässt man sie wieder frei, so beginnt bei Fortdauer der Rotation der Scheibe auch die Seitenbewegung wieder.

Achtet man auf die Richtung der Seitenbewegung mit Rücksicht auf die anfangs gedachte Stellung des Beobachters, so sieht man, dass, wenn das Uebergewicht auf der Seite des Drehpunktes ist, wo die Scheibe sich befindet, der rechte Theil der Scheibe sich von seiner Rechten entfernt, der linke dagegen sich seiner Linken nähert; ist es auf der andern, wirkt es also hebend auf die Scheibe, so nähert sich umgekehrt der rechte Theil der Scheibe seiner Rechten und der linke entfernt sich von seiner Linken. Es ist selbstredend, dass, wenn die Kordel in entgegengesetztem Sinne auf die Axe aufgewickelt wäre, der Beobachter bei unveränderter Stellung also nun die Scheibe entgegengesetzt mit dem Zeiger einer Uhr rotiren sähe, die Seitenbewegung in beiden Fällen die umgekehrte sein würde.

Man gewinnt eine klare Uebersicht über diese Bewegungen, wenn man sich Figur 7, aus dem Drehpunkt O als Mittelpunkt eine Kugel von sehr grossem Halbmesser beschrieben und die durch den Drehpunkt gehende Verticale O V aufwärts und ebenso die Axe der Scheibe E verlängert denkt, bis sie, jene in T, diese in P die Kugel treffen. Legt man dann durch T P einen grössten Kreis T P Q und beschreibt mit T P um T als Pol einen Kugelkreis P r l wo r für einen Beobachter, der in T nach P sieht, rechts, l links liegt, und ist A B C die Richtung, in der sich die Scheibe dreht, so tritt Folgendes ein: Sucht eine die rotirende Scheibe E angreifende Kraft den Pol P aufwärts in der Richtung P T zu treiben, so weicht P nach P r aus; treibt sie P abwärts nach P Q, so weicht er nach P r aus; drängt sie dagegen P nach P r, so hebt sich P in der Richtung P T und drängt sie nach P r, so senkt sich P nach P Q.

Um die oben gedachten, durch Stösse verursachten Schwankungen und oft äusserst langsamen Bewegungen des Mittelpunktes der Scheibe schärfer beobachten und sofort wahrnehmen zu können, lasse ich auf die blanke Metallscheibe des Rotationskörpers in einem dunkeln Zimmer mittelst des Heliostats durch eine grosse Oeffnung, oder auch durch eine offene Fensterscheibe Sonnenlicht schief auffallen. Das reflectirte Licht bildet auf der gegenüberstehenden Wand einen kleinen lichten Kreis, in dem ein Paar sehr dunkler, vom Mittelpunkt aus sich erweiternder Streifen zusammenstossen, so dass sich ein Kreuz bildet, welches die leisesten Bewegungen des Mittelpunktes auf höchst anziehende Weise in verstärktem Maasse zeigt. Selbst die Rotation der Scheibe, wenn diese langsamer wird, lässt sich an demselben vollkommen deutlich erkennen, indem in dem Mittelpunkte des Bildes sich lichte und dunkle dünne Streifen durchschneiden, welche zugleich mit der Scheibe, während das Kreuz an seiner Stelle bleibt, wie die Speichen eines Rades rotiren. Hat man keinen Heliostat mit Uhrwerk, welcher das Sonnenlicht immer in gleicher Richtung auf die Scheibe sendet, so muss man eine Tageszeit wählen, wo die Sonne hoch am Himmel steht, indem sonst ihre eigene Bewegung mit in's Spiel kommt. Eine völlige Verdunkelung des Zimmers ist nicht nöthig, auch kann man sich Abends des Lichtes einer kräftigen Lampe bedienen, um welche man einen Schirm so stellt, dass ihr Licht nur auf die Scheibe fällt.

Ist nun Gleichgewicht vorhanden und ist M Figur 8 I das Bild des Mittelpunktes der nicht rotirenden Scheibe, sind ferner MU oder 1, MO oder 2, ML oder 3, MR oder 4 die Richtungen, nach welchen eine die Scheibe angreifende Kraft dieselbe bewegen würde, und nehmen wir zunächst an, es sei ein andauernder Druck, so sieht man, wenn $M^1$ in Figur 8 II das Bild des Mittelpunktes der in der Richtung $O^1$ $R^1$ $U^1$ rotirenden Scheibe ist, dieses entsprechend der obigen Ordnung sich nach $M^1$ $L^1$ oder $1^1$, nach $MR^1$ oder $2^1$, nach $MO^1$ oder $3^1$, endlich nach $M^1$ $U^1$ oder $4^1$ fortschreiten. Bei umgekehrter Rotation der Scheibe sind auch alle resultirenden Bewegungen umgekehrt. Ist das Gleichgewicht nicht vorhanden und findet also eine Seitenbewegung bereits statt, so treibt ein anhaltender Druck das Bild nach einer Richtung, welche die Resultante der horizontalen Bewegung und derjenigen ist, nach welcher der Druck nach dem Vorigen die rotirende Scheibe, wenn Gleichgewicht vorhanden wäre, drängen würde.

Interessanter sind noch die Erscheinungen, wenn der Druck nur ein schnell vorübergehender, ein Stoss ist. Je nachdem er die nicht rotirende Scheibe Fig. 8 I. nach MO, MU, ML oder MR treiben würde, bewirkt er, dass die rotirende die Spiralen A, B, C oder D beschreibt Fig. 9, wo A, B, C, D den Ort des Bildes auf der Wand im Augenblicke des Stosses bezeichnen. Je stärker die Rotation, um so näher liegen die Endpunkte der Spiralen dem Anfangspunkte, um so schneller geschieht ihre Beschreibung und um so weniger ist die Richtung im Anfange der Spirale erkennbar, nach welcher der Stoss die nicht rotirende Scheibe treiben würde. Ist z. B. die Rotation sehr schwach, so bewirkt der erste Stoss nach M O, dass das Bild die gleich anfangs stark ansteigende Spirale $A^1$ mit wenigen grossen Windungen beschreibt.

Findet in Folge eines Uebergewichtes — und man wählt zu dem Ende ein möglichst schwaches — eine Seitenbewegung statt, von der wir annehmen wollen, dass sie das Bild von der Linken zur Rechten, nach M R Fig. 8 I, fortschreiten lasse, so hat ein Stoss, welcher die nicht rotirende Scheibe in der Richtung M O, M U, M L oder M R treiben würde, zur Folge, dass die rotirende die Spiralen E, F, G, H beschreibt. Hat die Rotationsgeschwindigkeit abgenommen, also die Seitenbewegung zugenommen, so rücken die Spiralen weiter auseinander. Hat man das Pendel auf die Tragstange aufgeschoben, so beschreibt das Bild die Spiralen I oder K, je nachdem das Uebergewicht auf der Seite der Scheibe oder der andern ist. —

Die Erscheinungen, welcher unser Apparat bietet, wenn er als Bohnenberger'scher in der **gewöhnlichen** Weise gebraucht wird, also der Rotationskörper eine Scheibe oder ein Sphäroid ist, deren Schwerpunkt genau im gemeinsamen Mittelpunkt der Ringe liegt, bedürfen nach dem Vorhergehenden kaum noch der Erwähnung. Ist kein Uebergewicht in den innern Ring eingesetzt, so bleibt die Axe in jeder Lage in ihrer Stellung und folgt auch dem leisesten Drucke, rotirt aber die Scheibe, so leistet ihre Axe gegen Stösse, welche sie in eine andere Lage zu versetzen suchen, einen starken Widerstand, doch nur so lange, als der äussere Ring mit der Tragstange nicht festgehalten wird; wenn dieses aber geschieht, folgt sie ihnen wieder mit derselben Leichtigkeit. Ein anhaltender Druck auf den äussern Ring, der eine Rotation um die Verticale zu erzielen sucht, bewirkt eine Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene, ein Druck auf den innern Ring zu einer Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene bringt dagegen eine Seitendrehung um die Vertical-Axe hervor. Die Richtung jeder dieser Bewegungen so wie die Wirkung eines in den innern Ring eingesetzten Uebergewichtes sind aus dem Obigen und aus Fig. 7. ersichtlich, wenn man beachtet, dass der Drehpunkt O jetzt in den Mittelpunkt der Scheibe E fällt.

Die besonderen Erscheinungen, welche das Polytrop bietet, sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, später erwähnt werden, ebenso andere Versuche, welche sich mit dem obigen Apparate unter besondern Verhältnissen anstellen lassen.

## §. 4.

Versuchen wir nun, auf elementare Weise uns von den obigen Erscheinungen Rechenschaft abzulegen.

Es seien Fig. 10. I. A B C D, E C D F zwei sich in C D schneidende Ebenen, und ein in der erstern sich bewegender Körper von der Masse m gelänge in einem Punkte G ihrer Durchschnittslinie senkrecht auf dieselbe mit einer Geschwindigkeit an, welche ihn als trägen Körper in der Zeiteinheit von G nach H. brächte, so wird er, wenn er von jenem Augenblicke in die Ebene E C D F übergeht, in Folge der von ihm erlangten Bewegungsgrösse m. G H, von seinem Gewichte abgesehen, gegen diese neue Ebene einen Druck ausüben, der durch m. H I dargestellt ist, wenn H I die Länge der von H auf die Ebene gefällten Senkrechten bezeichnet. Die Geschwindigkeit, die er als träger Körper in der Ebene haben würde, wenn diese fest wäre, würde G I, also der Verlust an Geschwindigkeit = G H — G I sein. Errichtet man auf H G im Punkte H und in der Ebene I G H eine Senkrechte K H, so ist G K > G H, also G K — G I oder I K > G H — G I. Aber I K ist $= \frac{KH^2}{KG}$, also G H — G I $< \frac{KH^2}{KG}$, und um so mehr kleiner als $\frac{KH^2}{HG}$, Ist nun der Winkel der Ebenen I G H unendlich klein, so ist K H ebenfalls unendlich klein, während H G endlich ist, also ist G H — H I oder der durch den Uebergang in die neue Ebene bewirkte Verlust an Geschwindigkeit ein Unendlich kleines der zweiten Ordnung, welches unendlich mal wiederholt noch eine unendlich kleine Grösse sein würde, und wäre die Ebene E C D F nur zum Theil fest, so würde dieser Verlust noch geringer sein.

Wäre G H nicht senkrecht gegen die Durchschnittslinie C D, sondern schief, Fig. 10 II, so könnte man statt G H eine mit C D parallele Geschwindigkeit $HH^1$ und eine auf D C senkrechte $GH^1$ setzen, von denen $HH^1$, da sie den Körper parallel C D fortschieben würde, auf den Druck der in Folge seines Ueberganges als bewegende Kraft auf die zweite Ebene gewissermassen frei wird, keinen Einfluss äussern könnte, und es tritt also hier $GH^1$ an die Stelle von G H im Vorigen.

Denkt man sich nun, während alle Punkte einer materiellen Ebene nach Richtungen, welche alle der Ebene angehören, in Bewegung sind, drehe sich dieselbe durch eine äussere Kraft um eine Linie in ihr oder eine ihr parallele

Linie um einen unendlich kleinen Winkel, so wird je nach der Richtung und Grösse der im Augenblicke der Drehung bereits stattfindenden (nicht durch dieselbe hervorgebrachten) Geschwindigkeit jeder einzelne Massenpunkt auf die Ebene in ihrer nächstfolgenden Lage senkrecht gegen dieselbe einen Druck äussern, welcher sich für denselben nach dem Vorigen beurtheilen lässt und je nach der Art seiner Verbindung mit den übrigen auf diese zurückwirken und mit den von ihnen herrührenden Impulsen sich zu einer Gesammtwirkung auf die ganze Ebene in der neuen Lage zusammensetzen wird.

Taf I Ist die Ebene eine kreisförmige Scheibe, Fig. 11, welche sich um ihren Mittelpunkt M nach der Richtung A C B D dreht, und denkt man sich die Drehkräfte p q, $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $p_3 q_3$, welche auf die einzelnen Massenpunkte p, $p_1$, $p_2$, $p_3$ tangential gegen die Halbmesser M p, M $p_1$, M $p_2$, M $p_3$ wirken, nach zweien auf einander senkrechten Durchmessern A B, C D zerlegt, so sind die A B parallelen Seitenkräfte p r, $p_1 r_1$ der Punkte im obern Theile A C B der Scheibe unter sich gleichgerichtet, ebenso die A B parallelen $p_2 r_2$, $p_3 r_3$ im untern Theile, diese aber jenen entgegengesetzt, und beide setzen sich zu einem Kräftepaar P R, $P^1 R^1$ zusammen. In gleicher Weise geben die C D parallelen Seitenkräfte p s, $p_3 s_3$ auf der linken und $p_1 s_1$, $p_2 s_2$ auf der rechten Seite von C D das Kräftepaar P S, $P^1 S^1$, und es hat wegen der Gestalt und Gleichartigkeit der Scheibe das erstere Kräftepaar mit dem andern ganz gleiche Wirkung.

Nehmen wir an, der Durchmesser A B sei horizontal, Fig. 12, und es gelange die Scheibe, deren Axe M O Fig. 12 ist, durch Drehung um den festen Punkt O aus der Lage I indem sie sich senkt, in die benachbarte Lage II, so werden, wenn man in dieser die Linien P S, $P^1 S^1$ den gleichbenannten Kräften in der vorigen parallel und gleich macht, und nun P S, $P^1 S^1$ nach dem Obigen in die Seitenkräfte P G, P H und $P^1 G^1$, $P^1 H^1$ zerlegt, die auf der Scheibe senkrechten, also mit M O parallen P G, $P^1 G^1$ ein Kräftepaar bilden, welches den Druck angibt, der in Folge des Uebergangs aus der einen Lage in die andere auf die Ebene ausgeübt wird, während P H, $P^1 H^1$ zugleich mit dem Kräftepaar P R, $P^1 R^1$ die Drehung um die Axe O M fortsetzen wird und zwar die Stetigkeit der Lageveränderung vorausgesetzt, mit unveränderter Stärke. Durch diesen Druck wird der Punkt M gedrängt, sich in der horizontalen P $P^1$ und zwar in der Richtung von M nach P, also zur Linken des Beobachters, zu bewegen; wie man noch deutlicher sieht, wenn man das Kräftepaar durch ein anderes in derselben Ebene liegendes, und ihm ganz gleiches T U, $T^1 U^1$, welches O M unmittelbar angreift, ersetzt, da letzteres rücksichtlich seiner Drehkraft um den festen Punkt O die Wirkungsfähigkeit einer einzigen nach M P gerichteten Kraft M X hat, deren Moment O M. M X dem Unterschiede der Momente O $T.^1$ $T^1 U^1$ und O T. T U gleich ist. Die Folge der ersten Wirkung der Kraft K und der Rotation der Scheibe ist also ein Antrieb zu einer Rotation der Scheibe um die Vertical-Axe O V. Wird dieser Antrieb dadurch, dass man die Horizontal-Axe der Gabel gleich anfangs festhält, überhaupt die Axe O M verhindert, aus ihrer Verticalebene herauszutreten oder durch die Reibung und andere Widerstande gänzlich vernichtet, so verhält sich der Apparat für eine fernere Wirkung der Kraft K und der Rotation wie zuvor und es behält folglich auch die Axe O M so lange ihre leichte Beweglichkeit in dieser Ebene. Findet dieses aber nicht statt, so wächst mit den aufeinander folgenden Antrieben zur Drehung um die Vertical-Axe die Kraft um diese Widerstände zu bewältigen, und von dem Augenblicke an, wo dieses geschieht, stehen die Massentheilchen unter dem Einflusse zweier Rotationen, deren eine die Rotationsaxe unter unveränderlichem Winkel um die Verticale treibt, so dass sie für den auf der über O hinaus verlängerten Rotationsaxe stehenden Beobachter, welcher die Scheibe in der Richtung der Zeiger einer Uhr sich drehen sieht, von oben herab gesehen in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, während die andere die Drehung der Massentheilchen der Scheibe um die Rotationsaxe bewerkstelligt. Beide vereinigen sich zu einer Rotation um eine Axe, deren Lage man findet, wenn man von dem Scheidepunkt O aus auf der dann stattfindenden Lage der Axe O M und ebenso auf O V Linien O D, O J abträgt, welche den Winkelgeschwindigkeiten, das heisst, den Geschwindigkeiten, welche ein Punkt in einer Entfernung gleich der Einheit um diese Axen annehmen würde, proportional sind und nach den Seiten dieser Axen von O aus sich erstrecken, nach welchen die Rotationen für ein in O befindliches Auge als gleichgerichtet z. B. in der Richtung der Zeiger einer Uhr vor sich gehend, erscheinen würden, und alsdann die Diagonale O F des durch O J und O E bestimmten Parallelogramms E O J F zieht, indem durch diese Diagonale nicht bloss die Lage der augenblicklichen Drehaxe, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe in dem gegebenen Augenblicke bestimmt ist. Der Punkt resp. die Punkte, in welchen sie die Scheibe trifft, sind während desselben in Ruhe, sie bildet die Unveränderlichkeit der Rotation vorausgesetzt, fortwährend mit der Verticalaxe und der Rotationsaxe dieselben Winkel, trifft aber, indem sie sich mit der Letztern um jene gleichsam bewegt, die Scheibe von einem Augenblicke zum andern stets in andern Punkten. Sie bildet mithin die gemeinschaftliche Berührende zweier geraden Kegel, von denen der eine die Verticale zur Axe hat, der andere die Rotationsaxe, der erstere im Raume fest ist und der letztere auf jenem sich abrollt. Da die augenblickliche Drehaxe von der im Körper festen Rotationsaxe, welche bei unserer Annahme eine freie Axe ist, abweicht, so halten sich die Schwungkräfte um dieselbe nicht mehr im Gleichgewicht; sie bedingen im Vereine mit dem aus der beschleunigenden Kraft K hervorgehenden Kräftepaar die Verlegung der augenblicklichen Drehaxe und zugleich für die im Körper feste Drehaxe kegelförmige Drehungen oder Schwankungen, welche um so kleiner sind, je geringer jene Abweichung ist, oder je grösser die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe im Vergleiche zu der Geschwindigkeit ist, welche die Rotationsaxe und mit ihr die Scheibe durch die Kraft K in einem unendlich kleinen Zeittheilchen erlangt haben würde, also mit der Grösse der Kraft K und der Entfernung ihres Angriffspunktes auf der Rotationsaxe zunehmen; desshalb hüpft auch die Scheibe im Fessel'schen Apparate sehr stark, wenn man die Stange weit herauszieht und kein Gegengewicht angebracht ist. Will man den vorhergehenden Satz über die Zusammensetzung der Drehungen*) nicht als bekannt voraussetzen, so darf man nur beachten, dass, sobald die Drehung um die Verticalaxe beginnt, die Scheibe gegen ihren in der Verticalebene liegenden Durchmesser C D eine andere Lage einnimmt, welche iu Fig. 13 mit II. bezeichnet ist, und dass wenn wieder P R, $P^1 R^1$ das aus der Zerlegung der Rotationskräfte hervorgehende gegen diesen Durchmesser senkrechte Kräftepaar in der Lage I. darstellt, durch den Uebergang in die Lage II, ähnlich wie vorhin, aus demselben zwei gegen die neue Lage senkrechte, entgegengesetzt gerichtete Druckkräfte P U, $P^1 U^1$ entstehen, welche wieder O M, welches der zweiten Lage angehört, parallel sind und den Mittelpunkt M und die Axe O M in der Verticalebene heben, also der fernern Drehung der Axe durch die Kraft K nach entgegengesetzter Richtung

*) Ueber das Princip der Zusammensetzung der Drehungen, welches von Frisi ums Jahr 1750 entdeckt worden. (Frisius de Rotatione Op. II. 134,157 und Cosmographia II, 24) siehe Poinsot's Neue Theorie der Drehung, deutsch von Schellbach, Berlin 1851; auch in Ohm's Mechanik III. Th. §. 65 und in Duhamels analyt. Mechanik, übersetzt von Eggers. Leipzig 1853 I, S. 20 findet sich dasselbe erörtert.

entgegenwirken. Ist dieses Gleichgewicht vorhanden, so wird durch eine Hemmung oder Förderung der Drehung um die Verticale diese Gegenwirkung gegen die Kraft K geschwächt oder gestärkt, die Axe senkt sich oder steigt. Uebrigens darf man nicht unbeachtet lassen, dass durch die, wenn auch schwache Rotationsgeschwindigkeit um die Verticalaxe die Theilchen der Scheibe ein Bestreben erhalten, sich in horizontaler Richtung zu entfernen, welches für die der Axe näher liegenden Punkte z. B.: C schwächer, für die fernern z. B.: D stärker ist, als dasjenige, welches der Mittelpunkt der Scheibe durch diese Rotation erhält, und dessen Gesammtwirkung bei einer einzelnen Scheibe, je nachdem der Winkel V O M ein stumpfer ist, wie in der Figur, oder ein spitzer, die Wirkung der Kraft K zum Senken der Axe entweder verstärken oder sie schwächen wird. Will man sich experimental davon überzeugen, so darf man nur der Tragstange im Fessel'schen Apparate, ohne das die Scheibe rotirt, eine Drehung um die Verticale geben; sie senkt sich alsdann sofort mit Heftigkeit im erstern Falle, im letztern dauert diese Drehung eine Weile fort. Noch belehrender und zugleich ein Beleg für die obige Erklärungsweise ist folgender Versuch. Man setzt nämlich auf die früher gedachte Platte der Centrifugal-Maschine unsern Apparat zwischen den Stiften fest, fixirt die Axe der Gabel mittelst des Schräubchens v und setzt, während das Uebergewicht z. B.: bei der Scheibe ist, diese in Rotation. Gibt man alsdann mittelst der Kurbel der Centrifugalmaschine der Platte eine Umdrehung in der Richtung, in welcher bei Nichtfixirung der Gabelaxe die Umdrehung um die Verticale erfolgen würde, so kann man bei einiger Vorsicht eine Geschwindigkeit der Platte erzielen, welche derjenigen, die in jenem Falle stattfände, möglichst gleich ist; alsdann verharrt die Axe der Scheibe in ihrem Winkel gegen die Verticale, dreht man stärker, so hebt sie sich, dreht man langsamer, so senkt sie sich und fällt sofort, wenn die Drehung aufhört.

## §. 5.

Die Betrachtungsweise im vorigen §. kam im Grunde darauf hinaus, das System während einer unendlich kleinen Zeit, zunächst unter dem Einflusse der beschleunigenden Kraft anzunehmen und dann den Einfluss der rotatorischen Kräfte in anfänglicher Richtung und Stärke auf den Körper in der neuen Lage zu untersuchen. Wollte man umgekehrt verfahren, oder auch sofort die gleichzeitige Wirkung beider

Einflüsse auf die Scheibe ermitteln, so würde man die Wirkung der Kraft K zur Drehung von O M in der Verticalebene durch ein System von parallelen und unter sich gleichen, die einzelnen Massentheilchen der Scheibe angreifenden Kräften, von denen in Fig. 14 die in dem über dem horizontalen Durchmesser A B liegenden Theile A C B angebrachten in der Richtung O M, die in dem untern Theile A D B angebrachten in der Richtung M O wirken, ersetzen können.

Betrachten wir hier nur die gleichzeitige Wirkung und sind p, $p_1$, $p_2$ $p_3$ vier symetrisch gelegene Punkte, p t, $p_1 t_1$, $p_2 t_2$, $p_3 t_3$ Tangentialkräfte, p k, $p^1 k^1$, $p_2 k_2$, $p_3 k_3$ die parallelen, die Kraft K rücksichtlich ihres drehenden Einflusses ersetzenden Kräfte, und zwar die erstere $p_1 k_1$, $p_2 k_2$ in der Richtung O M, die letztern $p_2 k_2$, $p_3 k_3$ in der Richtung M O wirkend, endlich p m, $p_1 m_1$, $p_2 m_2$, $p_3 m_3$ die in den einzelnen Massenpunkten sich ergebenden Mittelkräfte, so wird eine durch A B gelegte Horizontalebene von p m nicht, wie von p t, in einem Punkte der verlängerten A B, sondern in einem Punkte e, der von N aus gesehen zur Linken von A M liegt, getroffen, von $p^1 m^1$ in einem Punkte $e^1$, der zur Linken von M B liegt, von $p_2 m_2$ in einem Punkte $e_2$ der ebenfalls zur Linken von M B, dagegen von $p_3 m_3$ wieder in einem Punkte $e_3$, der zur Linken von M A liegt, getroffen.

Die vereinigte Wirkung der Kräfte p m, $p_1 m_1$, $p_2 m_2$, $p_3$ $m_3$ geht also dahin, die, von O aus betrachtet, zur Linken liegende Hälfte der Scheibe gegen die Linke des Beobachters zu rücken, die zur Rechten liegende von der Rechten zu entfernen, was rücksichtlich der Axe O M ein Streben zur Folge hat, diese in derselben Höhe in entgegengesetzter Richtung mit der Bewegung eines Uhrzeigers um die Verticale zu führen; allein sie ist darauf nicht beschränkt. Denn wären die Massenpunkte frei, so dass sie den gedachten Mittelkräften folgen könnten und p m, $p_1 m_1$, $p_2 m_2$, $p_3 m_3$ die im ersten Augenblicke zurückgelegten Wege, so würde, wenn man sich M mit m, $m_1$, $m_2$, $m_3$ verbunden dächte, von diesen Linien die beiden erstern M m, M $m_1$ mit O M grössere, die letztern M $m_2$, M $m_3$ kleinere Winkel als M p, M $p_1$, M $p_2$, M $p_3$, bilden, es resultirt hieraus für die Scheibe ein Streben, den Winkel C M O zu vergrössern, dagegen O M D zu verkleinern, welches eine wenn auch äusserst kleine Senkung von A B und der Scheibe überhaupt nothwendig zur Folge hat. Sobald jene Rotation um die Verticale beginnt, tritt dieselbe, wie oben gezeigt worden, der fernen Wirksamkeit der Kraft K zur Senkung der Scheibe entgegen. Je grösser die Rotation der Scheibe gegen die Wirksamkeit der Kraft K ist, also die Tangentialkräfte p t,

$p^1 t^1$, $p t^2$, $p^3 t^3$ gegen die horizontal gerichteten $p k$, $p_1 k_1$, $p_2 k_2$, $p_3 k_3$, um so näher liegen die resultirenden $p m$, $p^1 m^1$, $p_2 m_2$, $p_3 m_3$ den Richtungen der erstern, um so näher also auch die Punkte $e$, $e_1$, $e_2$, $e_3$ dem Durchmesser AB, und folglich wird um so geringer die Rotation um die Vertikale und zugleich die anfängliche Senkung der Scheibe sein.*)

Kürzer, obwohl vielleicht nicht anschaulicher, würde man zu dem vorigen Ergebniss gelangen, wenn man sich die Massen des obern und untern Theiles der Scheibe in den Punkten $P$, $P^1$ der Symmetrie-Axe CD vereinigt, alle auf der Scheibe senkrechten k im obern Theile durch die Kraft PL, im untern durch $P^1L^1$ und die die Scheibe rotirenden Kräfte durch ein einziges Kräftepaar in der Ebene derselben PR, $P^1R^1$ parallel AB ersetzt dächte und nun in Betracht zöge, dass das resultirende Kräftepaar PJ, $P^1J^1$ auf die Scheibe den Einfluss äussert, 1. den Winkel AMO zu verkleinern, mithin OMB zu vergrössern, 2. den Winkel CMO zu verkleinern, dagegen OMD zu vergrössern, und der Apparat beiden Wirkungen im ersten Augenblicke nur durch eine Bewegung seiner Axe OM von der Rechten zur Linken unter gleichzeitiger kleiner Senkung Folge leisten kann. Wird daher die Axe gleich anfangs oder im Laufe der Bewegung in ihrem Winkel gegen die Verticale fixirt, so kann die Seitenbewegung nicht eintreten oder hatte sie bereits statt, so muss dieselbe sofort aufhören; es wird der drehende Einfluss der Kraft K um die Horizontalaxe, welcher im Vereine mit der Rotationsgeschwindigkeit die Seitenbewegung einleitet und unterhält, dadurch aufgehoben. — Man könnte auch von M aus auf der Axe MO und der Horizontalen MB Stücke MX, MY diesen Kräftepaaren proportional abtragen; die Resultirende MZ würde alsdann die Richtung der Axe des resultirenden Kräftepaares haben und zugleich dessen Grösse proportional sein. Nimmt MX in Folge der Widerstände, welche die Reibung und der Widerstand der Luft entgegensetzen, allmählich ab, während MY dasselbe ist, so liegt MZ näher bei MY und die Drehung der Scheibe um die Verticale muss stärker werden. Es darf übrigens bei der ganzen obigen Betrachtung nicht übersehen werden, dass wenn K nicht ein sehr bedeutendes Gewicht oder ein starker Stoss ist, die Kräfte $p k$ gegen die Kräfte $p t$, wenn die Scheibe schnell rotirt, äusserst klein sind.

*) Wir haben uns absichtlich bei der obigen Betrachtungsweise länger verweilt, weil sich in ähnlicher Weise von den Störungen eine allgemeine Vorstellung gewinnen lässt, welche auf die Bahn eines um einen Centralkörper M sich bewegenden Körpers p die Anziehungskraft eines dritten Körpers übt, der bald auf der einen, bald auf der andern Seite dieser Bahn steht.

§. 6.

Im Vorigen vertritt die Kraft K das Gewicht der Scheibe, wenn das Gewicht des Dreharms sammt dem des Ringes durch ein Gegengewicht aufgehoben ist, und, ist das Gewicht beider durch ein Gegengewicht oder die Art der Aufhängung, wie im Bohnenberger'schen Apparate aufgehoben, die Wirkung eines Uebergewichtes, oder eines beständigen, sich gleichbleibenden Druckes, welcher den Dreharm zu senken sucht. Wirkte K in entgegengesetzter Richtung also zur Hebung der Scheibe, oder rotirte sie bei derselben Richtung von K in entgegengesetztem Sinne, so muss die Rotation um die Verticale offenbar eine der betrachteten entgegengesetzte sein. Ueberhaupt wird man nach dem Gesagten sich von den Figur 8 II dargestellten, aus einem anhaltenden Drucke resultirenden Bewegungen leicht Rechenschaft geben können. Indem diese Bewegungen selbst Gegenwirkungen zur Folge haben, erklären sich nun auch ohne Schwierigkeit die Spiralen, welche durch einzelne Stösse hervorgebracht werden. Betrachten wir einen, welcher die Spirale A erzeugt, also die nicht rotirende Scheibe nach MO, Figur 8 I, treiben würde, so weicht die rotirende Figur 8 II nach $M^1 R^1$ aus, wird sich aber zugleich je nachdem der Stoss im Vergleich zur Rotation der Scheibe stärker oder schwächer ist, etwas über der Horizontalen erheben und unter dem Einflusse beider Bewegungen zunächst den Bogen ab beschreiben, in b wird die mit der Bewegung MR auftretende senkende Gegenwirkung in der Richtung $M^1 U^1$, Figur 8 II, vorherrschend und führt mit der in der Richtung MR noch fortdauernden Seitenbewegung den Mittelpunkt der Scheibe abwärts durch den Bogen bc, in c ist die Bewegung in der Richtung $M^1 R^1$ durch die in Folge der Senkung eintretende Gegenwirkung in der Richtung $M^1 L^1$ vernichtet, und diese letztere führt, während die Senkung fortdauert, die Scheibe durch den Bogen cd, in d ist nun auch die senkende Bewegung durch die in Folge der Seitenbewegung in der Richtung ML stattfindende Gegenwirkung aufwärts nach $M^1 O^1$ vernichtet, die Bewegung in der Richtung ML dauert fort und treibt mit der Gegenwirkung in der Richtung MO den Mittelpunkt aufwärts durch den Bogen de u. s. w. bis die Scheibe zur Ruhe kommt. Ist die rotirende Scheibe nicht balançirt, sondern schreitet sie um die Verticale z. B. in der Richtung $M^1 R^1$, Eigur 8 II, fort, so machen einzelne Windungen, welche ein Stoss erzeugt, die allgemein fortschreitende Bewegung des Centrums mit und rücken folglich auseinander, daher die Figuren E, F, G, H.

Der Grund, wesshalb die rotirende Scheibe sowohl wenn eine Seitenbewegung stattfindet als nicht, gegen jegliche Stösse ein um so grösseres Beharrungsvermögen besitzt, je stärker die Rotation, ergibt sich aus der Natur der dadurch bewirkten, spiralförmigen Bewegungen von selbst.

Ist der die Scheibe tragende, innere Ring mittelst der Scheibe p und des Plättchens q senkrecht gegen den äussern, den wir in der Verticalebene annehmen, gestellt, so kann ihr Gewicht, überhaupt eine in der Verticalebene der Tragstange wirkende Kraft keine Seitenbewegung mit der Rotation der Scheibe veranlassen, weil sie mit dieser in derselben Ebene liegt oder doch ihr parallel ist; es wird die Scheibe der Kraft ebenso folgen als wenn sie nicht rotirte. Steht der innere Ring unter einem andern Winkel gegen den äussern, so kann man die alsdann stattfindende Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe, indem man sie durch die Länge einer auf ihrer Axe vom Mittelpunkt der Scheibe aus aufgetragenen Linie darstellt, nach einer auf dem äussern Ringe senkrechten, also horizontalen und nach einer in dessen Ebene fallenden, auf dieser senkrechten Richtung zerlegen; alsdann trägt nach dem Gesagten die erstere Componente nichts zu einer Seitenbewegung bei, die letztere aber, mit unserm Normalfalle übereinstimmende, ist nothwendig kleiner als die, aus deren Zerlegung sie hervorgegangen ist. Man begreift daher, wie die obigen Erscheinungen je nach dem Winkel der beiden Ringe sich ändern müssen.

Auch die Erscheinungen, welche das Polytrop zeigt, lassen sich nach dem Obigen leicht vorhersehen. Da der Drehpunkt zwischen den beiden Scheiben liegt, so wird ein Druck in der Vertical-Ebene der Axe, der die eine Scheibe, wenn sie nicht rotirte, senkte oder Figur 8 I in der Richtung MU triebe, die andere heben oder in der Richtung MO bewegen. Rotiren also die Scheiben vom Drehpunkt aus gesehen nach derselben Richtung, z. B. wie Figur 8 unterstellt, so würde für die erstere eine Seitendrehung, Fig. 8 II, nach $M^1 L^1$, für die andere eine entgegengesetzte nach $M^1 R^1$ daraus hervorgehen; ist also Gleichgewicht vorhanden und rotiren die gleich schweren Scheiben gleich stark, so tritt keine Seitenbewegung ein und der Druck oder Stoss behält seine volle Wirksamkeit; das System zeigt keine Festigkeit. Sind die Entfernungen vom Drehpunkte ungleich, so ist das Drehmoment des Gewichtes des Theils nach der einen Seite desselben grösser als das des Theils nach der andern, also wird, wenn beide Scheiben wieder gleich stark rotiren, eine Seitendrehung eintreten, deren Grösse und Richtung durch den Unterschied der Dreharme bedingt ist. Der Apparat wird aber wieder leicht beweglich sein und Stössen leicht folgen, weil diese die Mittelpunkte der Scheiben zur Beschreibung von Spiralen nach entgegengesetzten Seiten veranlassen würden. Hierin hat es auch seinen Grund, dass wenn man den kleinern Dreharm durch Gewichte so belastet, dass das Gleichgewicht hergestellt ist, durch das kleinste Uebergewicht das Gleichgewicht trotz der Rotation der Scheiben gestört wird, und dürfte sich daraus der Schluss nicht ziehen lassen, als »sei die Entfernung, in welcher die rotirende Masse sich von der Vertical-Axe befindet, von keinem oder von einem ausserordentlich geringen Einfluss auf die Drehung des Apparates.« (Poggend. XCI. S. 299.) — Rotiren die Scheiben vom Drehpunkte aus gesehen nach verschiedener (von einem Punkte auf der verlängerten Axe nach derselben) Richtung, also wie eine einzige Masse und ist Gleichgewicht vorhanden, so würde der vorige Stoss, wenn er die Scheibe, welche wie Fig. 8 II rotirt, zu senken suchte, für beide Scheiben sich zu einer Richtung nach $M^1 L^1$, verbinden, also der Apparat um so weniger der ursprünglichen Richtung desselben folgen, und nur eine spiralförmige Bewegung der Axe daraus hervorgehen. Andere Versuche, welche mit diesem Apparate wie mit dem Fessel'schen sich anstellen lassen, und oben erwähnt sind, übergehen wir.

## §. 7.

Es ist oben der Centrifugalkräfte, welche bei diesen Rotations-Erscheinungen mitwirken, gelegentlich gedacht; allein sie verdienen eine nähere Beachtung und man kann eine allgemeine Einsicht in ihre Wirksamkeit selbst ohne mathematische Kenntnisse gewinnen.

Wie aus dem Obigen erhellet, ist nämlich die Seitenbewegung abhängig von der Grösse und Richtung der Rotations-Geschwindigkeit und der Grösse und Richtung des Drehmomentes der Kraft K, das letztere aber hängt ab von der Entfernung ihres Angriffspunktes vom Drehpunkte, oder, wenn nur das Gewicht des Rotationskörpers die beschleunigende Kraft bildet, von der Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte, und seiner Entfernung von der durch letztern gehenden Verticalen. Wenn also unter übrigens gleichen Umständen die Winkel des Dreharms mit der Verticalen sich zu 180° ergänzen, so werden die letztern Entfernungen, also die Drehmomente, gleich sein, mithin müssten auch die Seitenbewegungen gleich sein. Allein wie bereits angedeutet worden, wirkt, je nachdem der Winkel der Axe mit der Richtung der Schwere ein stumpfer oder spitzer ist, die aus der Seitenbewegung hervorgehende Centrifugalkraft ebenfalls in der Richtung der letztern, der Kraft K, oder ihr entgegengesetzt. Mithin hat auch die Seitenbewegung in diesen Fällen nothwendig zwei verschiedene Werthe und nur wenn der Winkel ein rechter ist Einen. Fixirt man daher den Dreharm der Scheibe am Fesselschen Apparate zunächst unter einem stumpfen Winkel gegen die Richtung der Schwere und setzt, während bei der Scheibe ein sehr kleines Uebergewicht vorhanden ist, dieselbe in Rotation, lässt ihre Axe dann frei und senkt, nachdem man die Grösse der Geschwindigkeit der Seitendrehung an der Bewegung des horizontalen Zeigers eben erkannt hat, die Scheibe, so dass ihre Axe nun einen spitzen Winkel bildet, der jenen, bei welchem der Beharrungszustand eingetreten ist, zu 180° ergänzt, so zeigt sich der Winkel mit der Verticalen wieder eine geraume Zeit constant, aber die Seitendrehung ist nun eine merklich verchiedene. War das Uebergewicht bei der Scheibe, so ist bei einem stumpfen Winkel die Bewegung rascher, weil die Centrifugalkraft jetzt ebenfalls senkend wirkt, bei dem ergänzenden spitzen dagegen, kleiner weil sie jetzt dem Uebergewicht entgegenwirkt. Indem man das Experiment wiederholt und die Axe zuerst unter einem spitzen, dann unter dem Ergänzungswinkel gegen die Richtung der Schwere stellt, überzeugt man sich, dass nicht Abnahme der Rotations-Geschwindigkeit der Scheibe der Grund ist. Ein anderer belehrender Versuch ist folgender:

Man bringt den Apparat auf die Platte der Schwungmaschine, und indem man durch Verschiebung das cylindrische Gegengewicht zum Gleichgewicht scharf eingestellt hat, versichert man sich an der Theilung der verticalen Kreishülse, dass wenigstens 20° beiderseits der Verticalen das Gleichgewicht fortdauert, sobald man die Stange nach der einen oder andern Seite neigt; dann stellt man sie nahe der einen Grenzlage, bei welcher sie einen stumpfen Winkel mit der Verticalen bildet, und, nachdem man die Gabelaxe durch das Schräubchen v festgestellt hat, setzt man die Scheibe in Rotation. Während man nun den Ring, der sie trägt, einen Augenblick leise hält, setzt man die Platte durch die Kurbel der Centrifugal-Maschine langsam in eine solche Bewegung, dass die Platte, von Oben gesehen, sich entgegengesetzt mit einem Uhrzeiger dreht. Man kann es dann bei vorsichtiger Führung der Kurbel leicht erreichen, dass die Axe der Scheibe ihren Winkel gegen die Verticale nicht ändert; dreht man nun aber nur ein wenig stärker, so steigt die Scheibe, dreht man noch so leise umgekehrt, so senkt sie sich, und geht über die Lage, in der ihre Axe horizontal ist hinaus, bis ihr Winkel mit der Verticalen die andere Grenzlage oder eine Grösse erreicht hat, der jenen zu 180° ergänzt; hat man fortdauernd mit derselben (sehr geringen) Geschwindigkeit gedreht, so verharrt jetzt die Axe wieder in ihrem Winkel gegen die Verticale. — Hier wirkt also die durch die Rotation der Platte bewirkte Centrifugalkraft allein und gerade so wie ein Uebergewicht, das im ersten Falle senkend, im andern hebend auf die Scheibe wirkt.

Hat man Rotationskörper verschiedener Gestalt oder von derselben Grundform, in denen aber das Verhältniss der Dimensionen ein verschiedenes ist, so werden hierdurch die Erscheinungen ebenfalls wesentlich abgeändert und der Grund liegt wieder in dem Einflusse, welchen die Centrifugalkraft alsdann äussert.

Ist z. B. der Rotationskörper ein Cylinder das eine Mal von sehr geringer Höhe gegen den Durchmesser der Basis, oder eine Scheibe, das andere Mal von grosser Länge, und setzt man sie nach einander in den Ring unseres Apparats, so dass ihre Schwerpunkte genau in den Mittelpunkt desselben fallen, steckt die Tragaxe des äussern in die verticale Säule und fixirt sie durch das Schräubchen v, so bewirkt, wenn man nun den Apparat auf die Platte der Centrifugal-Maschine setzt, wie Fig. 15, und die Axen der Cylinder gegen die Verticale neigt, eine Rotation der Platte, gleichviel, nach welcher Seite sie geschieht, wenn die Cylinder selbst nicht rotiren, dass die Axe der Scheibe sich vertical, dagegen die Axe des langen Cylinders sich horizontal stellet. Die Centrifugalkraft sucht also bei der Scheibe den nach Oben gerichteten Theil ihrer Axe MP zu heben oder den Pol P dem Pol T, der auf der nach oben verlängerten, durch den Mittelpunkt der Scheibe gehenden Lothlinie liegt, zu nähern, dagegen bei dem langen Cylinder davon zu entfernen. Hiernach lässt sich vorhersehen, was erfolgt, wenn die Cylinder in Rotation versetzt werden. Nehmen wir an, die Rotation geschehe bei beiden so, dass sie für ein Auge in P entgegengesetzt mit der Richtung eines Uhrzeigers von sich geht, und es stehe der Apparat zunächst mit der Scheibe auf der Platte. Dreht man nun die Platte der Centrifugalmaschine so, dass sie von Oben gesehen in der Richtung eines Uhrzeigers fortschreitet, so erkennt man aus dem oben §. 3 mit Rücksicht auf Fig. 7. Erörterten, dass hieraus und der Rotation der Scheibe eine Kraft entsteht, welche sich einer fernern Annäherung von P an T entgegensetzt, und bei einiger Behutsamkeit in der Drehung der Platte bleibt wirklich der Winkel der Axe mit der Verticalen constant, während die geringste entgegengesetzte Drehung ein Aufrichten der Axe zur Folge hat. Wünschenswerth für diesen Versuch ist es, dass das Gewicht der Scheibe im Vergleich zu dem Gewichte des dieselbe tragenden Ringes und ihrer Axe möglichst gross sei, da die Centrifugalkräfte für diese eine entgegengesetzte Wirkung mit denen der Scheibe haben, daher die Wirkung dieser schwächen. Eine Scheibe, wie die Engländer sie construiren, aus starkem schmiedeisernem Ringe mit in denselben eingetriebener Scheibe ist desshalb empfehlenswerth. — Stellt man den vorigen Versuch dagegen mit dem langen Cylinder an, so muss man der Platte eine umgekehrte Drehung geben, damit die Neigung der Axe gegen die Verticale sich nicht ändert. Man begreift hiernach auch, dass es ein gewisses Verhältniss zwischen den Dimensionen des Cylinders geben muss, bei welchem der Winkel mit der Verticalen sich auch bei der leisesten Rotation der Platte, geschehe sie nach der einen oder andern Richtung, ändern muss; es wird ein solches sein, bei dem die Centrifugalkräfte für sich bei nicht stattfindender Achsendrehung des Cylinders keine Lageveränderung hervorbriugen können. Wäre z. B. der Rotationskörper eine Kugel, so vermögen sie es offenbar nicht, und rotirt sie daher um eine Axe, die nicht mit der Verticalen zusammenfällt, so muss sie bei der geringsten Drehung um letztere ihren Winkel mit derselben verändern. Welches aber das Verhältniss der Dimensionen bei dem Cylinder und andern Körpern ist, lässt sich ohne Mathematik nicht darthun, wesshalb hierüber das Nähere in den folgenden mathematischen Entwickelungen, welche mit den vorhergehenden Schlüssen und Versuchen in vollkommener Uebereinstimmung stehen.

## §. 8.

Ehe wir diese elementaren Betrachtungen schliessen, mögen einige Worte über den obigen Apparat als ein Versinnlichungsmittel für die Bewegung der Erde beigefügt werden.

Die Verschiedenheit der Jahreszeiten rührt bekanntlich daher, dass die Axe der Erde auf der Bahn, welche sie um die Sonne beschreibt, der Ekliptik, nicht senkrecht steht, sondern mit einer auf der letztern senkrechten Linie, der Axe der Ekliptik, einen Winkel von nahe $23^0$, $28^1$ bildet und bei dem Umlauf der Erde um die Sonne sich nahezu stets parallel bleibt. Dieses Beharren der Erdaxe in ihrer Richtung versinnlicht unser Apparat, wenn er als Bohnenberger'scher, wie oben §. 3. erwähnt, auf die Platte der Centrifrugalmaschine in der Nähe des Randes gestellt und diese in Rotation versetzt wird; und die Spiralen, deren wir dort gedacht, zeigen, was die Wirkung stärkerer Stösse sein würde, welche die Erde von Aussen erhielte. Vollkommen bliebe die Axe der Erde sich parallel, wenn sie eine Kugel und nicht unter den Polen abgeplattet, ein Sphäroid wäre, und die Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes auf das Sphäroid nicht eine Veränderung in der Lage seiner Drehaxe zu bewirken suchten. Stellt Fig. 16 E den Mittelpnnkt der Erde, als Kugel gedacht, p p$^1$ ihre Axe und zwar p den Nordpol, A A$^1$ den Aeqnator der Erde, S die Sonne dar, so ist die Ekliptik eine durch S E auf die Ebene p E S senkrecht stehende Ebene. Wäre die Erde nun eine vollkommne Kugel, so würde jedem Massenpunkt Q derselben auf der einen Seite dieser Ebene ein symmetrisch gelegener auf der andern Q$^1$ entsprechen, den man findet, wenn man sich von Q eine Senkrechte auf die Ebene gefällt und sie um ein gleiches Stück nach der andern Seite verlängert denkt. Da die Entfernungen S Q, S Q$^1$ gleich sind, so ist die Anziehungskraft der Sonne für beide gleich, daher hat der eine kein grösseres Bestreben sich der Ebene der Ekliptik zu nähern als der andere, und es resultirt aus der Anziehung der Sonne nur ein Bestreben, den Mittelpunkt der Erde ihr zu nähern, aber keine Lageveränderung ihrer Axe gegen die Ebene der Ekliptik. Denkt man sich nun aber um den Aequator der Erde einen ringförmigen Wulst mit der vorhingedachten Kugel fest verbunden, so dass ihre Gestalt nun die eines Sphäroids wird und ist, Fig. 17 I die Stellung der Erde zur Zeit der Sommer-Sonnenwende, dagegen II ihre Stellung zur Zeit der Winter-Sonnenwende, so ist klar, dass in I die Massenpunkte des Wulstes A$^1$ unterhalb der Ekliptik näher an S liegen, also stärker als die oberhalb gelegenen, angezogen werden, in II aber diese die näher liegenden sind, also stärker als jene angezogen werden. Es wird also aus beiden Wirkungen in beiden Stellungen ein Bestreben des Wulstes hervorgehen, die Erdaxe aufzurichten und zwar den Punkt P, in welchem der verlängerte nördliche Theil der Erdaxe das Himmelsgewölbe treffen würde (den nördlichen Himmelspol des Aequators) dem Punkte T, in dem eine auf der Nordseite der Ekliptik errichtete Senkrechte E T dasselbe treffen würde, (dem nördlichen Himmelspole der Ekliptik) zu nähern, also jenen in der Richtung P T zu bewegen. Stände die Erde der Sonne so gegenüber, dass diese sich in der Ebene des Aequators befände, also zur Zeit der Frühlings oder Herbstes Tag und Nachtgleiche, so würde die Anziehung der Sonne auf die oberhalb und unterhalb der Ekliptik liegenden Massenpunkte des Wulstes offenbar gleich sein, und es könnte aus ihr keine Einwirkung auf eine Lageveränderung des Wulstes also auch nicht der Axe hervorgehen. In allen andern Stellungen muss sie vorhanden sein, obwohl kleiner als in den beiden oben gedachten. Bei der geringen Abplattung der Erde (Aequatorialhalbmesser = 860 Meilen, Polarhalbmesser nahe 857 deutsche Meilen), wird man sich diesen Wulst sehr dünn vorstellen müssen, und die Einwirkung, welche er in Folge der Anziehungskraft der Sonne auf die mit ihm verbundene übrige Erdmasse zur Aufrichtung ihrer Axe ausübt, kann daher nur sehr gering sein. Da ferner die Anziehungskraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht, so begreift man, dass je grösser die Entfernung SE ist, um so kleiner wird die Verschiedenheit der Einwirkung auf die beiden Hälften des Wulstes sein. Daher sind bei der Sonne, ungeachtet ihrer grossen Masse, die die Erdaxe aufrichtenden Kräfte nur sehr kleine Grössen, aus welchen indessen eine mittlere Wirkung resultirt, welche schon nach Verlauf eines Jahres merkbar ist. Denken wir uns statt jener mit der Stellung der Erde zur Sonne veränderlichen Kräfte diese mittlere fortwährend wirksam, so wird sie in Vereinigung mit der Rotation der Erde, welche um p p, in der bei p durch einen Pfeil bezeichneten Richtung geschieht, eine Bewegung des nördlichen Himmelspols des Erd-Aequators P senkrecht zu der Verbindungslinie TP desselben mit dem Pol der Ekliptik T hervorrufen und zwar so, dass, von T aus gesehen, P von der Linken zur Rechten wie der Pfeil auf dem Bogen Pr angibt, fortschreitet und sich P in einem Kreise um den Pol der Ekliptik T bewegt. Der Wulst wird jetzt grade so auf die Erde wirken, wie ein auf dem innern Ring des Bohnenberger'schen Apparates in der Nähe des untern Theils der Axe eingesetztes (äusserst kleines) Uebergewicht auf die rotirende Scheibe desselben, und es ist in §. 3 mit Rücksicht auf Fig, 7, in der eine übereinstimmende Bezeichnung gewählt ist, dargethan, wie diese Bewegung alsdann erfolgt. Bringt man dagegen in dem Apparate Nr. 3, Seite 9, die rotirende Scheibe theils in die verticale Lage des äussern Ringes, theils unter verschiedenen Winkeln gegen denselben, so erhält man gemäss dem §. 25 Erörterten eine Vorstellung davon, wie die Anziehungskraft der Sonne bei ihren verschiedenen Stellungen gegen die Ebene des Aequators in Verbindung mit der Rotation des Wulstes auf die Seitenbewegung des Pols bald schwächer bald stärker wirkt —

Dem Monde wird der geringe Einfluss, den seine Masse im Vergleich zu der Masse der Sonne auf den Aequatorwulst äussern kann, durch seine grosse Nähe reichlich ersetzt, so dass er jenen selbst bedeutend übertrifft, ungefähr im Verhältniss 5 : 2; auch er sucht die Axe senkrecht auf die Ebene seiner Bahn zu stellen, welche indessen mit der Ekliptik nicht zusammenfällt, sondern beständig einen Winkel von 5°, 8', 48" macht.

Nehmen wir für einen Augenblick an, die Linie, in welcher seine Bahn um die Erde die Ekliptik durchschneidet, die Knotenlinie, falle stets mit der Durchschnittslinie des Erdäquators und der Ekliptik zusammen, und bezeichnet Fig. 18 I E wieder den Mittelpunkt der Erde zur Zeit des Sommer-Solstitiums, wie in Fig. 17 I, $AA^1$ die Lage des Erdäquators, P dessen nördlichen Himmelspol, also E P die Richtung der Erdaxe, E T eine Senkrechte auf der Ekliptik und T ihren nördlichen Himmelspol, ferner $MM^1$ ein auf der Knotenlinie senkrechter Durchmesser der Mondsbahn, E L eine Senkrechte auf der Mondsbahn und zwar L den nördlichen Himmelspol derselben, so würde die mittlere aufrichtende Kraft, welche der Mond bei seinem Umlauf um die Erde auf den Aequatorwulst äussert, offenbar den Himmelspol des Erdäquators P in derselben Richtung P r um L treiben, wie dieses eben von der Sonne mit Bezug auf T gezeigt worden; es würden sich also beide Wirkungen mit einander verbinden. — Allein während der Winkel der Mondsbahn gegen die Ekliptik derselben bleibt, bleibt sich die Durchschnittslinie dieser Ebenen nicht parallel, sie hat vielmehr eine sehr schnelle rückläufige Bewegung, oder der Himmelspol der Mondsbahn L bewegt sich selbst in einem Kreise in der Richtung $L\ L_1\ L_2\ L_3$ um den Pol der Ekliptik und kömmt erst nach einer Periode von ungefähr $18^1/_2$ Jahren (genauer 679,334 mittleren Sonnentagen) an seinen frühern Ort zurück, so dass, wenn heute die oben angenommene Lage statt hat, nach der Hälfte dieser Periode ungefähr $9^1/_4$ Jahren, die in Fig. 18 II dargestellte Lage statt findet. Auch in dieser erkennt man, dass der Mond den Himmelspol des Aequators in demselben Sinne P r wie vorhin zu drehen suchen würde, aber der Neigungswinkel der Mondsbahn gegen den Aequator $M^1EA$ oder, was dasselbe ist, der Winkel $L_2EP$ ist jetzt grösser $= TEP + TEL_2$ oder $= 28^0, 37^1$, während in der vorigen Lage $= MEA = LEP = TEP - TEL$ oder $18^0, 19^1$ war, und es werden daher auch die Entfernungen des Mondes von den beiden Theilen des Aequator-Wulstes $A, A^1$ jetzt von einander weniger verschieden sein als in der vorigen Lage. Der Mittelwerth der aufrichtenden Kräfte, welche der Mond bei den einzelnen Umläufen um die Erde auf ihre Axe übt, verändert sich demnach zugleich mit dem Fortschreiten des Himmelspoles seiner Bahn auf dem Kreise $L L_1 L_2$, er ist einmal am geringsten in $L_2$, einmal am grössten in L und zweimal in $L_1, L_3$ hat er einen mittlern Werth. Dabei ist aber zu beachten, dass in der Lage II die anziehenden Kräfte eine mehr senkrechte Richtung gegen die Ebene des Aequators haben als in der Lage I, also auch die aus ihnen und der Rotation des Wulstes hervorgehende Seitenbewegung des Pols dort eine stärkere sein wird, wie eben bereits rücksichtlich der Sonne mittelst des Apparates Nr. 3 erläutert worden ist. — Es geht hieraus ein Schwanken des Poles P (Nutation) hervor, in Folge dessen er bei seiner langsamen Rundbewegung um den Pol T sich demselben bald nähert, bald wieder davon entfernt und eine wellenförmige Linie um denselben beschreibt. Stellt Fig. 19 T den Pol der Ekliptik vor und sind um T auf der Himmelskugel zwei Kreise beschrieben, der eine I mit einem Halbmesser $= 23^0, 28^1$, der andere ganz ausgezogene II, mit einem Halbmesser $= 5^0, 8^1, 48''$, so wird auf dem Kreise II der Himmelspol der Mondsbahn L fortschreiten, dagegen der Kreis I der mittlere Ort für den Himmelspol des Aequators sein. Es seien nun L, $L_1$, $L_2$, $L_3$ die verschiedenen Stellungen des erstern, und der letztere befinde sich auf dem Kreise I in $P_3$, wenn jener in $L_3$ oder seine Entfernung von $P_3$ die mittlere ist. Die Bewegung, welche $P_3$ alsdann erhält, ist nach dem oben Erörterten senkrecht auf $L_3$ $P_3$ und zwar, von $L_3$ aus gesehen, von der Linken zur Rechten gerichtet, und während $L_3$ sich auf seinem Wege $L_3$, L, $L_1$. $L_2$, $L_3$, dem äusserst langsam fortschreitenden Pole $P_3$ zunächst von $L_3$ bis L nähert, dann von L nach $L_1$ und von $L_1$ nach $L_2$ davon entfernt, endlich von $L_2$ nach $L_3$ und $L_3$ nach L wieder nähert und demgemäss seine Einwirkung auf $P_3$ sich ändert, wird dieser nach P, $P_1$, $P_2$ u. s. w. geführt. Durch die gleichzeitige Wirkung der Sonne wird diese epicycloidale Curve in der Richtung $P_3$ $P_1$ verlängert, ohne dass indessen die periodischen Veränderungen in den Entfernungen des Himmelspols des Aequators vom Pol der Ekliptik sich dadurch veränderten; die oscillatorische Bewegung hat genau dieselbe Dauer mit der Umdrehung des Pols der Mondsbahn um den Pol der Ekliptik, gerade so als wenn das durch die Sonne veranlasste Fortschreiten desselben um diesen Pol nicht vorhanden wäre. Es ist dieses ein specieller Fall von einem für die Himmels-Mechanik höchst wichtigen, allgemeinen Principe, und, was oben von den Curven erörtert worden ist, welches das Bild der rotirenden Scheibe des Fessel'schen Apparates, wenn sie bereits in einer Seitenbewegung begriffen ist, unter der Einwirkung einzelner Stösse oder der Schwingungen des angehängten Pendels beschreibt — denen selbstredend kegelförmige Bewegungen der Axe entsprechen — bringt dieses Princip zu einer klaren Vorstellung.

Es ist hier nicht der Ort, auf die Erscheinungen alle einzugehen, welche die wellenförmige Bewegung des Himmelspols des Aequators um den Pól der Ekliptik verursacht; wir bemerken nur, dass die Durchschnittslinie beider Ebenen, die Linie der Tag- und Nachtgleichen, offenbar in Folge derselben eine rückläufige Bewegung, von Osten nach Westen, annehmen muss, welche jährlich 50",1 beträgt (Präcession), und sie ihren Kreislauf in 25868 Jahren vollendet.

# III. Mathematische Entwickelungen.

§. 9.

Wir nehmen den Drehpunkt $O$ (Fig. 20.) als den Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen $OX$, $OY$, $OZ$, von denen die positive $OZ$ sich vertical in der Richtung der Schwere erstreckt; ferner sei $O$ der Anfangspunkt eines zweiten, mit dem Rotationskörper fest verbundenen, mit ihm also zugleich sich rund drehenden, rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen eine Axe $Oz$ mit der Drehaxe des Rotationskörpers stets zusammenfällt, während die Ebene der beiden andern Axen $Ox$, $Oy$ die Horizontalebene der festen Axen $OX$, $OY$ in einem bestimmten Augenblick in einer Geraden $NON'$ schneiden mag. Die Lage der beweglichen Axen gegen die festen ist alsdann bekanntlich durch die Winkel $ZOz = \vartheta$, $XON = \psi$ und $NOx = \varphi$ vollkommen bestimmt, wenn vorher die Art, wie diese Winkel gerechnet werden sollen, festgesetzt ist. Wir nehmen an, der Winkel $\vartheta$ werde von der positiven Axe $OZ$ zu der positiven $Oz$ gerechnet und bleibe in den Grenzen 0 und 180°, der Winkel $XON = \psi$ werde stets von der positiven $OX$ aus zu der negativen $OY$ rund herum, wie der Pfeil vor $\psi$ angibt, gerechnet, so dass sein zweiter Schenkel für $\psi = 90$ mit $-OY$, für $\psi = 180°$ mit $-OX$, für $\psi = 270°$ mit $+OY$ u. s. w. zusammenfällt, endlich werde der Winkel $\varphi$ (wenn $\varphi$ positiv ist) von der jedesmaligen Lage von $ON$ auf der Ebene der $Ox$, $Oy$, der Aequatorialebene, in aufwärtsgehender Richtung (über der Horizontalebene), wie ebenfalls durch den Pfeil neben $\varphi$ bezeichnet ist, rund herum bis 360° gerechnet.*) Ist demnach $\vartheta$ ein spitzer Winkel wie in Fig. 20. und dreht sich eine Linie um $O$ in der Horizontalebene in der Richtung des Pfeils oder der positiven $\psi$, so wird ihre Projection auf die Aequatorialebene in entgegengesetzter Richtung mit der vorausgesetzten Rotation derselben oder derjenigen, nach welcher $+\varphi$ gerechnet wird, fortschreiten; ist dagegen $\vartheta$ stumpf, so wird unter denselben Umständen (s. Fig. 21.) die

*) Wir haben die obige, von der frühern abweichende Richtung der Drehung gewählt, um bekannte, im Folgenden erforderliche Formeln hier nicht zu entwickeln, und uns auf Poisson's Lehrbuch der Mechanik beziehen zu können.

Drehung der Projection in übereinstimmendem Sinne statthaben. Die Cosinus der Winkel der festen Axen mit den beweglichen, nämlich

$$\cos XOx = a,\ \cos XOy = b,\ \cos XOz = c$$
$$\cos YOx = a',\ \cos YOy = b',\ \cos YOz = c'$$
$$\cos ZOx = a'',\ \cos ZOy = b'',\ \cos ZOz = c''$$

können durch trigonometrische Functionen von $\vartheta$, $\psi$, $\varphi$ ausgedrückt werden, welche auf analytischem Wege*) oder mittelst sphärischer Trigonometrie**) leicht erhalten werden. Von den 9 Gleichungen sind diejenigen, welche für $a''$, $b''$, $c''$ unter den obigen Voraussetzungen stattfinden:

$$\begin{aligned} a'' &= -\sin\vartheta.\ \sin\varphi, \\ b'' &= -\sin\vartheta.\ \cos\varphi, \\ c'' &= \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnen ferner $p$, $q$, $r$ die Zerlegungen der Drehungsgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe, so ist

$$\begin{aligned} p &= \sin\vartheta.\ \sin\varphi.\ \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi.\ \frac{d\vartheta}{dt} \\ q &= \sin\vartheta.\ \sin\varphi.\ \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi.\ \frac{d\vartheta}{dt} \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\vartheta.\ \frac{d\psi}{dt} \end{aligned} \tag{2.}$$

Die allgemeinen (Euler'schen) Gleichungen der Drehungsbewegung sind nun

$$C\,\frac{dr}{dt} = (A-B)\,pq + R$$

$$B\,\frac{dq}{dt} = (C-A)\,rp + Q$$

$$A\,\frac{dp}{dt} = (A-C)\,qr + P$$

in welchen $C$, $B$, $A$ die Haupt-Trägheitsmomente des bewegten Körpers gegen die Axen der $Oz$, $Oy$, $Ox$ und $R$, $Q$, $P$ die

---

*) Lagrange mec. anal. t. II. sect. 9. §. 7. — Duhamel mec. anal. Deutsch von Eggers. 1 Thl. S. 17. — Eine besonders elegante Entwickelung gibt Hansen Theorie der Pendelbewegung. Danzig 1853. S. 20.

**) Poisson mec. II. ed. §. 377. Minding, Theoretische Mechanik. §. 33.

Projectionen der äussern, auf den Körper einwirkenden, beschleunigenden Kräfte auf die Ebenen $xOy$, $xOz$, $yOz$ bezeichnen, oder nach Poinsot (Theorie der Drehungen) die Glieder auf der linken Seite die allgemeinen Ausdrücke eines beschleunigenden Kräftepaares, geschätzt nach den beweglichen Axen $Oz$, $Oy$, $Ox$ sind, welches erforderlich wäre, um die Axen und Grössen der den Körper in dem Augenblicke angreifenden Kräftepaare der Fortdauer der Bewegung gemäss zu ändern, und die auf der rechten Seite eben diese aus der Schwungkraft und den äussern Kräften entstehenden, beschleunigenden Kräftepaare, geschätzt nach denselben Axen, ausdrücken. In unserm Falle ist die Schwere die einzige beschleunigende Kraft, ihr Maass sei mit $g$ bezeichnet. Man kann nun entweder den in der Wirklichkeit nur annäherungsweise darstellbaren, speziellen Fall in Betracht ziehen, wo bloss das Gewicht des Rotationskörpers $mg$ diese beschleunigende Kraft bildet, oder den allgemeinern, wo ein Gewicht $Mg$ überhaupt, in irgend einem Punkte der Rotationsaxe $Oz$ als solche wirkt. Wir fassen zunächst den letztern ins Auge und haben, wenn $+\gamma$ die Entfernung des gedachten Punktes (des Schwerpunktes des beweglichen Theiles des Apparates) von $O$ bezeichnet, wie leicht ersichtlich ist, $Mg\gamma \sin \vartheta$ für den allgemeinen Ausdruck des Momentes dieser Kraft. Da seine Ebene senkrecht auf der Ebene $xOy$ ist, so ist seine Projection auf letztere $R = 0$, und da der Bau der Maschine voraussetzt, dass $A = B$ ist, so wird die erste der Euler'schen Gleichungen

$$C \frac{dr}{dt} = 0$$

oder $r =$ constans.

Dieses Resultat, einzig aus den Gleichungen $R = 0$ und $A = B$ hergeleitet, zeigt, dass, welches auch die Werthe von $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$ in irgend einem Augenblicke sein mögen, die Zerlegung $r$ der Drehgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe nach der Rotationsaxe $Oz$ während der ganzen Dauer der Drehung unveränderlich bleibt.

Indem wir nun zunächst die Erscheinungen in Betracht ziehen, bei welchen der Winkel $\vartheta$ sich als constant zeigt, werden die obigen Gleichungen (2):

$$p = \sin \vartheta . \sin \varphi . \frac{d\psi}{dt}$$

$$q = \sin \vartheta . \cos \varphi . \frac{d\psi}{dt}$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos \vartheta . \frac{d\psi}{dt}.$$

Die ersteren lassen sich den Gleichungen (1) gemäss auch so schreiben:

$$-p = \frac{d\psi}{dt} . a''$$

$$-q = \frac{d\psi}{dt} . b''$$

und zeigen, dass $-p$, $-q$ in diesem Falle die Zerlegungen einer Drehung $\frac{d\psi}{dt}$ um die Vertical-Axe $OZ$, nach den Axen $Ox$ und $Oy$ ist, deren Zerlegung nach der Axe $Oz$ durch $\frac{d\psi}{dt} . \cos \vartheta = \frac{d\psi}{dt} . c''$ dargestellt ist. Bezeichnen wir durch $\overline{\varphi}$ den Werth der Rotationsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ in diesem Augenblicke und nehmen ihn als denjenigen, in welchem die Axe $Ox$ mit $OX$ zusammen fällt, so wird, wenn wir von ihm die Zeit $t$ anrechnen, unter der Voraussetzung, dass im Zustande der Bewegung sich nichts ändert, nach Verlauf dieser Zeit $\varphi = \overline{\varphi} . t$, und wenn $\overline{\psi}$ den $\vartheta$ und $\overline{\varphi}$ zugehörigen Werth der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ um die Vertical-Axe bezeichnet, $\psi = \overline{\psi} . t$ sein. Für die Projection $Q$ des Momentes $Mg\gamma \sin \vartheta$ auf die Coordinaten-Ebene $xOz$ hat man, da der Neigungswinkel desselben (der Ebene $zOZ$) gegen letztere gleich dem Winkel $NOy$ der auf diesen Ebenen Senkrechten $NO$ und $Oy$ oder gleich $90 + \overline{\varphi} . t$ ist, $Q = Mg\gamma \sin \vartheta \cos (90 + \overline{\varphi} . t) = - Mg\gamma \sin \vartheta \sin \overline{\varphi} t$. Ebenso findet man für $P$, die Projection desselben Momentes auf die Ebene $yOz$, da $Ox$ senkrecht auf $yOz$ mithin $NOx$ oder $\overline{\varphi} . t$ der Neigungswinkel dieser Ebenen ist,

$$P = Mg\,\gamma \sin \vartheta .\ \cos \overline{\varphi}\ t.$$

Setzt man nun diese Werthe von $Q$ und $P$, ferner den Werth $R = 0$ und zugleich die Werthe, welche sich aus den Gleichungen

$$p = \overline{\psi}.\ \sin \vartheta .\ \sin \overline{\varphi}\ t$$

$$q = \overline{\psi}.\ \sin \vartheta .\ \cos \overline{\varphi}\ t$$

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} \cos \vartheta$$

für $\frac{dr}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dp}{dt}$ ergeben, nämlich

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\ \overline{\varphi} .\ \overline{\psi} .\ \sin \vartheta \sin \overline{\varphi} .\ t$$

$$\frac{dp}{dt} = \overline{\varphi} .\ \overline{\psi} \sin \vartheta .\ \cos \overline{\varphi}\ t$$

in die Euler'schen Gleichungen, so erhält man unter Beachtung, dass $B = A$ ist, für die erste, wie vorauszusehen war

$$0 = 0$$

und die beiden andern geben, indem man $A$ statt $B$ setzt, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $\sin \vartheta$ herausschreibt, nach einer leichten Reduction übereinstimmend:

$$\sin \vartheta \left[ Mg\,\gamma + (C{-}A) \cos \overline{\psi}^2 - C .\ \overline{\varphi} .\ \overline{\psi} \right] = 0.$$

Genügen $\vartheta$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ dieser Gleichung, so werden es zusammengehörige Werthe von der gesuchten Beschaffenheit sein, für welche also der Zustand der Bewegung, abgesehen von dem Widerstande der Luft und der Reibung unveränderlich bleibt. Zu dem Ende muss entweder

$$\sin \vartheta = 0 \qquad \text{I.}$$

oder $$(C{-}A) \cos \vartheta .\ \overline{\psi}^2 - C\ \overline{\varphi} .\ \overline{\psi} = -\ Mg\gamma \qquad \text{II.}$$

sein.

§. 10.

In den Gleichungen I. und II. ist die Lösung der Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt, die Abhängigkeit zwischen den beiden Drehungen um die Rotations- und die Vertical-Axe aufzufinden, wenn ihr Winkel sich als ein unveränderlicher zeigt, enthalten. Bevor wir sie indessen näher erörtern, wollen wir die Aufgabe noch auf eine andere, directe Art angreifen.

Es sei wieder Fig. 22. der Drehpunkt $O$ der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen $OX$, $OY$, $OZ$, von denen $OZ$ sich in der Richtung der Schwere erstrecket, und zugleich der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, mit dem rotirenden Körper fest verbundener Axen $Ox$, $Oy$, $Oz$, von welchen $Oz$ mit der Rotationsaxe desselben zusammen falle. In dem Augenblicke, von welchem wir die Zeit $t$ zählen, falle die Axe $Ox$ mit $OX$ zusammen oder nach $Ox_1$, die beiden andern beweglichen Axen $Oy_1$, $Oz$, welche sich alsdann in der Ebene $YOZ$ befinden, mögen $Oy_1$, $Oz_1$ und der Winkel der letzteren mit der Vertical-Axe $z_1 O Z = \vartheta$ sein. Hat nun der Körper in diesem Augenblicke eine Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ um seine Rotationsaxe und zugleich eine andere, noch zu bestimmende Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ um die Vertical-Axe der Art, dass bei Unveränderlichkeit beider der Winkel $\vartheta$ constant bleibt, so ist die Lage, in welche in Folge beider das System der beweglichen Axen nach der Zeit $t$ gelangt, bekanntlich dieselbe, als wenn diese Drehungen nacheinander jede eine Zeit $t$ hindurch stattgefunden hätten. Nehmen wir an, die letztere um die Vertical-Axe geschehe zuerst und zwar wieder in der Richtung der positiven $OX$ zu den negativen $OY$, so dass die beweglichen Axen nun $Oz_2$, $Ox_2$, $Oy_2$ sind und $Ox_2$ $(ON)$ mit $OX$ den Winkel $x_2 OX = \psi$ bildet, so ist, weil die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ dieselbe bleibt, $\psi = \overline{\psi}.\ t$. Dreht sich alsdann das System um $Oz_2$ $(Oz)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ eine Zeit $t$ hindurch aufwärts bis die Axen $Ox_2$, $Oy_2$ die Lage $Ox$, $Oy$ annehmen, und der Winkel $x_2\ Ox = \varphi$ ist, so hat man $\varphi = \overline{\varphi}.\ t$. Denkt man sich nun von $O$ aus eine Kugel beschrieben, welche von $OZ$, $Oz_2$, $Oy$, $Oy_2$, $Ox$, $Ox_2$, in den Punkten $Z$, $z_2$, $y$, $y_2$, $x$, $x_2$, geschnitten werden mag, so ist $z_2$ der Pol des Bogens $yy_2$ $xx_2$, daher sind die sphärischen Dreiecke $Zy_2\,y$ und $Zy_2\,x$ beide bei $y_2$ rechtwinklig, mithin

$$\cos Zx = \cos xy_2 . \cos Zy_2, \quad \cos Zy = \cos yy_2 . \cos Zy_2$$

Oder, da $\cos Zy_2 = \cos (90 + \vartheta) = - \sin \vartheta$

und $\cos y_2 x = \cos (90 - \overline{\varphi} . t) = \sin \overline{\varphi}\, t$, ferner

$\cos yy_2 = \cos xx_2 = \cos \overline{\varphi} . t$ ist,

$$\cos Zx = - \sin \vartheta . \sin \overline{\varphi}\, t, \quad \cos Zy = - \sin \vartheta . \cos \overline{\varphi}\, t$$

Bezeichnen nun $p$, $q$, $r$ wieder die Zerlegungen der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit nach den Axen $Ox$, $Oy$, $Oz$, so bestehen dieselben aus den Zerlegungen der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ um die Rotationsaxe $Oz$ weniger denen der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ um die Vertical-Axe, indem die letztere bei unserer Voraussetzung von der Linken zur Rechten, die erstere von der Rechten zur Linken geschieht. Die Zerlegungen von $\overline{\varphi}$ nach den Axen $Ox$, $Oy$ sind, da $Oz$ senkrecht auf denselben steht, beide Null. Demnach ist

$$p = 0 - \left(- \overline{\psi} . \sin \vartheta . \sin \overline{\varphi}\, t\right) = \overline{\psi} \sin \vartheta . \sin \overline{\varphi}\, t$$

$$q = 0 - \left(- \overline{\psi} \sin \vartheta . \cos \overline{\varphi}\, t\right) = \overline{\psi} \sin \vartheta . \sin \overline{\varphi}\, t$$

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} \cos \vartheta .$$

Die Werthe von $R$, $Q$, $P$ ergeben sich wie oben, und man gelangt demnach auch mittelst ihrer und der eben für $p$, $q$, $r$ gefundenen, welche dieselben sind, als die §. 9 aufgestellten, für die Bestimmung der Werthe von $\overline{\psi}$, bei welchen die Fortdauer der Unveränderlichkeit von $\vartheta$ und $\overline{\varphi}$ möglich ist, zu denselben beiden Bedingungsgleichungen I. und II.

## §. 11.

Untersuchen wir nun diese Gleichungen näher. Die erste $\sin \vartheta = 0$ wird erfüllt, wenn $\vartheta = 0$ oder $180^0$, also die Rotations-Axe senkrecht ist. In diesem Falle sind die Winkelgeschwindigkeiten $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ und ebenso das Gewicht $Mg$ beliebig.

Um die zweite richtig zu deuten, ist zunächst zu beachten, dass von den Gleichungen, aus denen sie hergeleitet ist, nur die Gleichung

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} . \cos \vartheta$$

den cosinus des Winkels $\vartheta$ enthält. Nimmt man also die Drehung $\overline{\varphi}$ stets als positiv oder in der Richtung von der Rechten zur Linken um $+ Oz$ an, so zeigt für einen spitzen Winkel $\vartheta$ in der obigen Gleichung ein positiver Werth von $\overline{\psi}. \cos \vartheta$ eine Bewegung der Durchschnittslinie der Aequatorialebene mit der Horizontalebene auf dieser letztern von der Linken zur Rechten um $+ OZ$ (Fig. 20), ein negativer aber eine Drehung von der Rechten zur Linken, oder eine mit $\overline{\varphi}$ gleichgerichtete an, dagegen bedingt für einen stumpfen Winkel $\vartheta$ (Fig. 21) ein negativer Werth von $\overline{\psi} \cos \vartheta$ eine Drehung derselben Linie auf der Horizontalebene von der Linken zur Rechten, ein positiver von der Rechten zur Linken.

Die Gleichung II. gibt nun im Allgemeinen, so lange über $A - B$, $\gamma$, $\vartheta$, keine besonderen Bestimmungen getroffen werden, für $\overline{\psi}$ zwei (reelle, oder imaginäre) Werthe, nämlich

$$\overline{\psi} = \frac{\frac{1}{2} C \overline{\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}^2 - M g \gamma (C - A) \cos \vartheta}}{(C - A) \cos \vartheta.}$$

Ein einziger Werth hat statt

1. wenn $\vartheta = 90^0$
2. wenn $A = B$
3. wenn $\gamma = 0$

ist.

Ist erstens $\vartheta = 90^0$, so liegen der Schwerpunkt der bewegten Masse und die Rotations-Axe in der durch den Drehpunkt gehenden Horizontalebene. Dieser spezielle Fall ist gemäss dem Berichte »über die Preisfragen der Universität Bonn vom Jahre 1855—56« von Herrn Stud. Albert Schmitz in einer Preisschrift behandelt worden.

Ist zweitens $A = C$, so ist das Central-Ellipsoid oder dasjenige Ellipsoid, dessen drei Hauptdurchmesser in die durch den festen Drehpunkt gehenden Hauptdrehaxen fallen und der Länge nach den Quadratwurzeln aus den Haupt-

---

*) Die merkwürdigen Beziehungen des Central-Ellipsoids zu den rotirenden Körpern, auf welche keine beschleunigenden Kräfte wirken, finden sich in Ohms Mechanik, §. III. Thl. S. 223 u. f., Duhamels Lehrbuch der Mechanik, Thl. II. §§. 82, 121 u. f. und besonders in der Schrift von Poinsot: Neu-Theorie der Drehungen, übersetzt von Schellbach Seite 27 u. f. erörtert.

trägheitsmomenten $A$, $B$, $C$ ($A = B$) der bewegten Masse proportional sein würde, eine Kugel.

In beiden Fällen reducirt sich die Gleichung II. auf

$$C\,\overline{\varphi}\,.\,\overline{\psi} = M.g\gamma$$

Der Werth $\overline{\psi} = \frac{Mg\gamma}{C\,\overline{\varphi}}$, welchen sie liefert, ergibt sich aus demjenigen der beiden obigen Wurzelwerthe der ursprünglich quadratischen Gleichung, in welchem die Wurzelgrösse das negative Zeichen hat, wenn $C - A$ oder $\cos \vartheta = 0$ gesetzt wird, und welcher alsdann unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint; der andere Wurzelwerth wird in diesen Fällen $= \infty$.

Man sieht sofort aus dem Werthe von $\overline{\psi}$, dass in beiden Fällen $\overline{\psi}$ um so kleiner ist, je grösser $\overline{\varphi}$ oder auch $A$ gegen $M$, und je kleiner $\gamma$ oder die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte ist, und dass die Drehung $\overline{\psi}$ sich in eine entgegengesetzte verwandelt, wenn $\gamma$ sein Zeichen ändert.

## §. 12.

Im dritten Falle wenn $\gamma = 0$ ist, der Schwerpunkt also im Unterstützungspunkt liegt, wird unsere Hauptgleichung II.

$$\overline{\psi}\left((C - A) \cos \vartheta.\ \overline{\psi} - A\ \overline{\varphi}\right) = 0$$

und befriedigt, wenn $\overline{\psi} = 0$,

$$\text{oder } \overline{\psi} \cos \vartheta = \frac{A.\ \overline{\varphi}}{C - A}$$

ist.

Es findet also entweder gar keine Drehung $\overline{\psi}$ statt, oder wenn eine erfolgt, muss sie, wenn $\vartheta$ ein spitzer Winkel ist, nach der einen oder andern Richtung geschehen, je nachdem

$C \gtrless A$ ist.

Ist $\vartheta > 90^0$ und $C < A$, so ist die Drehung $\overline{\psi}$ mit der erstern im vorigen Falle übereinstimmend; ist $C < A$ mit der letztern.

§. 13.

Die allgemeinen Wurzelwerthe

$$\overline{\psi} = \frac{\frac{1}{2}\, C\, \overline{\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, C^2\, \overline{\varphi}^2 - (C-A)\, Mg\gamma.\, \cos\vartheta}}{(C-A)\cos\vartheta}$$

sind reell, einander gleich oder imaginär, je nachdem

$$\frac{1}{4}\, C^2\, \overline{\varphi}^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} (C-A)\, Mg\gamma.\, \cos\vartheta \text{ ist.}$$

Der erste Fall tritt stets ein, wenn von den drei Grössen $C - A$, $\gamma$ und $\cos\vartheta$ eine negativ und die beiden andern positiv oder alle drei negativ sind. Es ist alsdann die mit dem Wurzelzeichen behaftete Grösse grösser als das erste Glied, mithin sind die in diesen Fällen möglichen Drehungen $\overline{\psi}$ einander entgegengesetzt.

Der zweite Fall kann unter den eben gemachten Voraussetzungen nicht eintreten, da $\frac{1}{4}\, C^2\, \overline{\varphi}$ positiv ist, sondern nur wenn zwei der Grössen $C - A$, $\gamma$, $\cos\vartheta$ negativ und die dritte positiv oder alle drei positiv sind. Ist unter den letzt gemachten Voraussetzungen die Bedingungsgleichung der Realität

$$\frac{1}{4}\, C^2\, \overline{\varphi}^2 > (C - A)\, Mg\gamma \cos\vartheta$$

erfüllt, so ist der Wurzelausdruck kleiner als $\frac{1}{2}\, C\, \overline{\varphi}$ und für einen spitzen Winkel $\vartheta$ sind die beiden möglichen Drehungen $\overline{\psi}$ unter sich gleich gerichtet, sowohl wenn $C - A > 0$ und $\gamma$ positiv, als wenn $C - A < 0$ und $\gamma$ negativ ist; aber die beiden erstern sind den beiden leztern entgegengesetzt. Dasselbe gilt, wenn $\vartheta$ stumpf und zugleich entweder $C - A > 0$ und $\gamma$ negativ oder $C - A < 0$ und $\gamma$ positiv ist.

§. 14.

Da die Hauptgleichung II. die Drehungen $\overline{\psi}$ überhaupt bestimmt, welche der bewegliche Körper um die vertikale Axe entweder bereits haben oder aber durch eine äussere

Kraft erhalten müsste, damit der Winkel $\vartheta$ seiner Haupt- (Rotations-) Axe mit der letztern constant bleibe, so wird sie auch gelten, wenn der Körper um diese Axe nicht rotirt oder $\overline{\varphi} = 0$ ist, also für jedes Centrifugal-Pendel, in welchem eine Hauptaxe durch den festen Drehpunkt geht und die Trägheitsmomente rücksichtlich der beiden andern Hauptaxen einander gleich sind. Man erhält alsdann

$$\overline{\psi} = \pm \sqrt{\frac{-Mg\gamma}{(C-A)\cos\vartheta}}$$

Die Deutung der Fälle, in denen dem Centrifugal-Pendel eine Drehung von der verlangten Beschaffenheit gegeben werden kann oder nicht, ergibt sich aus dem Obigen leicht.

## §. 15.

Nehmen wir jetzt an, dass bloss das Gewicht des Rotationskörpers als beschleunigende Kraft wirkt, welches bei der Bohnenbergischen Aufhängung und auch im Fesselschen Apparate dann stattfindet, wenn man, ehe der Rotationskörper mit seiner Axe in den Ring eingesetzt wird, den übrigen beweglichen Theil desselben durch ein Gegengewicht in's Gleichgewicht bringt, alsdann tritt $m$ an die Stelle von $M$ und $\delta$ oder die Entfernung seines Schwerpunktes vom Drehpunkte an die Stelle von $\gamma$. Die Gleichung II. bietet alsdann, je nach der Gestalt des Rotationskörpers verschiedene Eigenthümlichkeiten.

Bezeichnen $A'$, $B'$, $C'$ die Trägheitsmomente rücksichtlich seines Schwerpunktes, $A$, $B$, $C$ wie vorhin die Trägheitsmomente in Bezug auf den festen Drehpunkt, so hat man

1. für ein Rotations-Ellipsoid, welches $2a$ zur Rotationsaxe und $2b$ zur Aquatorialaxe hat, die Gleichungen

$$C' = \frac{2}{5}\,mb^2,\; A' = B' = \frac{1}{5}\,m\,(a^2 + b^2)$$

folglich (Siehe Poisson mec. t. II. §. 344)

$$C = \frac{2}{5}\,mb^2,\; A = B = m\left(\frac{1}{5}\,(a^2 + b^2) + \delta^2\right)$$

$$\text{mithin}\quad C - A = m\left[\frac{1}{5}\,(b^2 - a^2) - \delta^2\right]$$

2. für die Kugel, da für sie $b = a$ ist,

$$C - A = -\,m\delta^2$$

3. für einen Rotations-Cylinder, dessen Halbmesser der Basis $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist,

$$C' = \frac{1}{2} m R^2, \; A' = B' = m \left[\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right],$$

also $C = C' = \frac{1}{2} m R^2, \; A = B = m \left[\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} + \delta^2\right]$

$$\text{folglich} \quad C - A = m \left[\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right]$$

$$\text{Ist} \quad \frac{R^2}{4} = \frac{H^2}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{H}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^0,$$

ist also $H$ die halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= 2R$ ist, so stimmt dieser Werth mit dem obigen für die Kugel überein, folglich ist in diesem Falle das Haupt-Central-Ellipsoid für den Cylinder ebenfalls eine Kugel.

4. für den geraden Kegel, dessen Halbmesser der Basis $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist,

$$C' = \frac{3}{10} m R^2, \; A' = B' = \frac{3}{20} m \left[R^2 + \frac{H^2}{4}\right]$$

mithin $C = C' = \frac{3}{10} m R^2, A = B = \frac{3}{20} m \left[R^2 + \frac{H^2}{4}\right] + m \delta^2$

$$C - A = m \left\{\frac{3}{20}\left[R^2 - \frac{H^2}{4}\right] - \delta^2\right\}$$

Auch dieser Werth von $C - A$ stimmt mit dem der Kugel überein, wenn $R^2 = \frac{H^2}{4}$, also $H$ dem Durchmesser der Basis $2R$ gleich ist,

u. s. w.

§. 16.

Setzt man nun in die Gleichung II. oder in

$$\frac{(C - A)}{M} \cdot \cos\vartheta. \, \overline{\psi}^2 - \frac{C}{M} \overline{\varphi} \cdot \overline{\psi} + g\gamma = 0$$

$\delta$ statt $\gamma$ und für $\frac{C - A}{M} = \frac{C - A}{m}$ und $\frac{C}{M} = \frac{C}{m}$

die eben gefundenen Werthe, so ergibt sich:

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\left[\frac{1}{5}\,(b^2 - a^2) - \delta^2\right] \cos\vartheta. \overline{\psi}^2 - \frac{2}{5} b^2 \, \overline{\varphi} \cdot \overline{\psi} + g\delta = 0 \;\; \text{(III)}.$$

2. für die Kugel, deren Halbmesser $= b$ ist,

$$\delta^2 \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 + \frac{2}{5} b^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} - g\delta = 0 \qquad \text{(IV.)}$$

3. für den Rotations-Cylinder

$$\left[\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right] \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - \frac{1}{2} R^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} + g\delta = o. \qquad \text{(V.)}$$

4. für den geraden Kegel

$$\left[\frac{3}{20}\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right) - \delta^2\right] \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - \frac{3}{10} R^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} + g\delta = o \qquad \text{(VI.)}$$

Von den beiden Wurzelwerthen dieser Gleichungen müssen Apparate, welche den bezüglichen Rotationskörpern unter den gegebenen Bedingungen eine freie Bewegung um einen festen Punkt gestatten, den einen oder andern zeigen, so oft $\vartheta$ constant bleibt, sei es dass die Seitendrehung $\overline{\psi}$ durch die vereinigte Wirkung der ursprünglichen Rotation und des Gewichtes des Rotationskörpers hervorgebracht wird, oder dass eine andere Kraft die Rotation um die Verticale veranlasst. Die Werthe, welche Versuche mit unsern Apparaten geben können, werden um so kleiner gegen die berechneten ausfallen, je grösser die ausser dem Rotationskörper zu bewegende f r e m d e Masse ist; auch entstehen durch die Anordnung der letztern rücksichtlich der durch den Drehpunkt gehenden Lothrechten Centrifugalkräfte, welche mehr oder weniger störend einwirken. Man muss daher schon desshalb darauf verzichten in bestimmten Zahlen diese Formeln durch Versuche verificiren zu wollen, abgesehen davon, dass ohne sehr complicirte Einrichtungen es schwerlich möglich sein dürfte, dem Rotationskörper eine gegebene Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen. Man könnte zu letzterm Zwecke zwar auf der Rotationsaxe ein gezahntes Rädchen anbringen und mittelst eines dagegen gehaltenen Kartenblättchens aus dem Tone der dann entsteht, auf die Zahl der Umdrehungen schliessen, allein es würde schwer sein, von vornherein eine bestimmte oder auch nur nacheinander genau dieselbe Zugkraft hervorzubringen. Wie man im Allgemeinen die Formeln verificiren kann, haben wir oben §. 7. schon für einige Fälle dargethan, und würde man ebenso für andere im Folgenden zu betrachtende verfahren können.

Wir verweilen nicht bei der allgemeinen Discussion der Gleichungen, sondern gehen gleich zu den besondern Voraussetzungen über.

A. Liegt der Schwerpunkt im Drehpunkt, wie in der

Bohnenbergischen Einrichtung, ist also $\vartheta = 0$, so geben unsere Gleichungen

1. Für das Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2b^2\,\overline{\varphi}}{(b^2 - a^2)\cos\vartheta}.$$

Es verändert mithin $\overline{\psi}\cos\vartheta$ bei demselben $\overline{\varphi}$ mit $b^2 - a^2$ sein Zeichen, oder die möglichen Drehungen sind für das abgeplattete und längliche Rotations-Ellipsoid entgegengesetzt.

2. Für die Kugel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \infty.$$

Es schneidet also die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie, und man kann der Kugel keine Rotation um die Verticale ertheilen, bei welcher der Winkel ihrer Drehaxe mit derselben constant bleibt.

3. Für den Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{R^2\,\overline{\varphi}}{2\left(\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3}\right)\cos\vartheta}$$

Der letztere Werth wird $= \infty$, wenn $\frac{H}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Es schneidet also bei einem solchen Cylinder ebenfalls die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie oder gibt man ihm irgend eine Rotation um die Verticale, so verändert sich $\vartheta$.

Mit $\frac{H}{R} \lessgtr \frac{1}{2}\sqrt{3}$ verändert $\overline{\psi}\cos\vartheta$ sein Zeichen.

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2R^2\,\overline{\varphi}}{\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\cos\vartheta}$$

Ist seine Höhe dem Durchmesser der Basis gleich, so ist der zweite Werth unendlich, mithin gilt für einen solchen Kegel ebenfalls das oben rücksichtlich der Kugel Bemerkte und $\overline{\psi}\cos\vartheta$ ändert mit $H \lessgtr 2R$ sein Zeichen.

B. Liegt der Schwerpunkt nicht im Drehpunkte, ist aber das Gewicht des Rotationskörpers aufgehoben, wie am Fessel'schen Apparate stattfindet, wenn durch ein Gegengewicht Gleichgewicht hervorgebracht ist, so erhält man aus den obigen Gleichungen, wenn man $g = 0$ setzt

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2\, b^2\, \overline{\varphi}}{\left[(b^2 - a^2) - 5\,\delta^2\right] \cos \vartheta}\cdot$$

Es verändert mithin $\overline{\psi} \cos \vartheta$ mit $b^2 - a^2 \lesseqgtr 5\,\delta^2$ sein Zeichen; ist $b^2 - a^2 = 5\,\delta^2$, so wird der zweite Werth unendlich, oder keine Seitendrehung findet, wenn $\vartheta$ constant bleibt, statt.

2. für die Kugel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = -\frac{2b^2\, \overline{\varphi}}{5\,\delta^2 \cos \vartheta}$$

3. für den Cylinder

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{R^2\, \overline{\varphi}}{2\left(\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right) \cos \vartheta}$$

Für einen spitzen Winkel $\vartheta$ ist $\overline{\psi} \cos \vartheta \lesseqgtr 0$, je nachdem $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} \lesseqgtr \delta^2$ ist. Hat man $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} = \delta^2$, so ist $\overline{\psi} = \infty$. Ist $\frac{H}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, so wird der zweite Werth gleich $\frac{-R^2\, \overline{\varphi},}{2\delta^2 \cos \vartheta}$, welcher mit dem der Kugel im Zeichen übereinstimmt und auch im Werthe, wenn $R = \frac{2b}{\sqrt{5}}$ ist.

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2\, R^2\, \overline{\varphi}}{\left(R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{20}{3}\,\delta^2\right) \cos \vartheta}\cdot$$

Eine constante Rotation um die Lothrechte ist wieder unmöglich, wenn $R^2 - \frac{H^2}{4} = \frac{20}{3}\,\delta^2$. Ist $H = 2R$, so wird $\overline{\psi} = -\frac{3}{10}\cdot\frac{R^2\,\overline{\varphi}}{\delta^2 \cos\vartheta}$ also wie bei dem Cylinder mit dem $\overline{\psi}$ der Kugel im Zeichen übereinstimmend und auch im Werthe, wenn $R = \frac{2b}{\sqrt{3}}$ ist.

1. Vergleicht man die einzelnen Werthe von $\overline{\psi}$ in $B$ mit denen in $A$, so sieht man, dass wenn die Nenner in beiden positiv sind, das $\overline{\psi}$ in allen Fällen $B$ grösser ist als in den entsprechenden $A$.

C. Ist der Winkel $\vartheta$ der Rotationsaxe mit der Vertikalen ein rechter, so wird ein Wurzelwerth in den obigen Gleichungen unendlich; er bezieht sich auf den Fall, wo die Seitenbewegung wie in §. 7 eine künstlich ertheilte ist. Der andere ist

1. für das Ellipsoid

$$\overline{\psi} = \frac{5}{2}\,\frac{g}{b^2}\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

2. für die Kugel ebenfalls

$$\overline{\psi} = \frac{5}{2}\cdot\frac{g}{b^2}\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

3. für den Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = \frac{2\,g\,\delta}{R^2\,\overline{\varphi}}$$

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = \frac{10}{3}\,\frac{g\,\delta}{R^2\,\overline{\phantom{\varphi}}}$$

Dieselben Werthe ergeben sich natürlich, wenn der andere Factor von $\overline{\psi}^2$ in den Gleichungen III, V und VI Null ist. Sie zeigen das Merkwürdige, dass die Seitenbewegung in diesem Falle sich gleich bleibt, welches auch die Länge der Umdrehungsaxe (Axe der Figur) des bezüglichen Körpers sein mag, wenn nur die andere Dimension, die Rotationsgeschwindigkeit und die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte $\delta$ dieselbe bleibt. Der Grund liegt unzweifelhaft darin, dass bei einem rechten Winkel alle Punkte eines auf der Rotationsaxe des Körpers senkrechten Schnittes bei der Drehung um die Verticale eine gleiche Centrifugalkraft erlangen. Zugleich aber zeigen sie, dass obwol die Länge der Rotationsaxe dann nicht in Betracht kommt, die Gestalt des Körpers keineswegs gleichgültig ist. Das $\overline{\psi}$ des Cylinders und des Kegels ist nur dann dem der Kugel vom Halbmesser $b$ gleich, wenn der Halbmesser der Basis des erstern $= \frac{2b}{\sqrt{5}}$, des letztern dagegen $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ ist.

D. Setzen wir endlich $\overline{\varphi} = 0$, so geben die obigen Gleichungen für das Centrifugal-Pendel, welches als Schwungkörper hat

1. ein Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left\{\delta^2 - \frac{1}{5}(b^2 - a^2)\right\} \cos\vartheta}}$$

2. eine Kugel

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos\vartheta}}$$

3. einen Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left(\delta^2 + \frac{H^2}{3} - \frac{R^2}{4}\right) \cos\vartheta}}$$

4. einen geraden Kegel

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left\{\delta^2 + \frac{3}{20}\left(\frac{H^2}{4} - R^2\right)\right\} \cos\vartheta}}\,.$$

Wenn also die Entfernung des Schwerpunktes des geraden Kegels vom Drehpunkte dieselbe ist, so hat auch $\overline{\psi}$ denselben Werth, der Kegel mag seine Spitze von oder zu dem Drehpunkte wenden.

Ist das Centrifugal-Pendel ein mathematisches, der Schwungkörper also nur ein materieller Punkt, so geben die obigen Formeln, wenn in ihnen $a$, $b$, $H$, $R$ gleich Null gesetzt werden, sämtlich

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos \vartheta}}$$

oder denselben Werth, der stattfindet, wenn der Schwungkörper entweder 1. eine Kugel ist;

oder 2. ein Rotations-Cylinder, welcher zur Höhe die halbe Höhe eines über dem Durchmesser seiner Basis als Seite beschriebenen gleichseitigen Dreiecks hat;

oder endlich 3. ein gerader Kegel ist, welcher den Durchmesser der Basis zur Höhe hat.

Haben letztere den Halbmesser der Kugel zum Halbmesser ihrer Grundflächen und bezeichnen $c$, $k$ ihre Inhalte, $K$ den Inhalt der Kugel, so ist

$$K : k : c = 4 : 2 : \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

Haben sie dagegen gleichen Inhalt, also bei derselben Länge des Pendelarms auch gleiche Wirkungsfähigkeit, so verhalten sich ihre Halbmesser wie $1 : \sqrt[3]{2} : \frac{2}{3} \sqrt{3}$.

Bei den vielfachen Anwendungen, welche das Centrifugal-(conische) Pendel in der Technik hat, gebraucht man bis jetzt nur das mit einer Kugel als Schwungkörper, und es war Huyghens der Erste, welcher es untersucht hat. Lagrange,*) welcher die von Clairaut in den Memoires der Academie des Sciences de l'annee 1735 aufgestellte allgemeinere Theorie des Pendel-Problems wesentlich vervollständigt hat, findet die Rotationsgeschwindigkeit um die Lothrechte $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r \cos \alpha}}$,

in welcher Gleichung $\frac{d\varphi}{dt}$, $2g$, $r$, $\alpha$ unser $\overline{\psi}$, $g$, $\delta$, $\vartheta$ bezeichnen. Auf elementarem Wege ergibt sich diese Formel ebenfalls leicht. Denn ist Fig. 23. $P$ der schwere Punkt von der Masse $m$, $O$ der Aufhängepunkt, $OP = \delta$ der Pendelarm, $\vartheta$ sein Winkel mit der Verticalen $OV$, so entspricht der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$, bei der die Entfernung von der Verticalen $= 1$ ist, in einer Entfernung $PE$ eine Umdrehungsgeschwindigkeit $PE.\overline{\psi}$, also eine Centrifugalkraft $PF$

*) Mecanique anal. t. II. sect. VIII, p. 205.

$= \frac{m, P E^2 . \overline{\psi}^2}{P E} = m P E \overline{\psi}^2$. Ihr Drehmoment gegen $O$ ist $P F. O E = m P E. \overline{\psi}^2 . O P \cos \vartheta = m. P E. \overline{\psi}^2 . \delta. \cos \vartheta$. Das Drehmoment des Gewichtes dagegen ist $m g. P E$. Soll $\vartheta$ constant sein, so müssen diese Momente gleich oder $\overline{\psi}^2 . \delta. \cos \vartheta = g$ sein.

Man sieht aus dem Obigen, dass, abgesehen vom Widerstande der Luft, die Kugel durch andere der genannten Rotationskörper von den bezeichneten Dimensionen ersetzt werden könnte, und wie man die Dimensionen dieser Körper und des Ellipsoids nehmen müsse, damit bei derselben Umdrehungsgeschwindigkeit und demselben Pendelarme der Winkel mit der Verticalen grösser oder kleiner als für die Kugel sei. Die Formeln zeigen ferner, dass während das conische Kugel-Pendel nur bei einem spitzen Winkel seines Armes mit der Richtung der Schwere constant schwingen kann, für die übrigen ihre Dimensionen und der Pendelarm auch so angenommen sein können, dass nur bei einem stumpfen Winkel eine constante Drehung möglich ist. Dass einem rechten Winkel dagegen, wenn wir nicht voraussetzen, dass $g = 0$ oder die Wirkung der Schwere durch ein Gegengewicht an dem verlängerten Pendelarme aufgehoben wäre, in keinem Falle eine solche stattfinden kann, ist von selbst einleuchtend, und zeigen die obigen Formeln, indem $\cos \vartheta = 0$ für $\overline{\psi}$ den Werth $\infty$ gibt. Aus demselben Grunde gibt es für die Körper 1, 3, 4 keine constante Drehungslage, wenn ihre Dimensionen so beschaffen sind, dass der Factor von $\cos \vartheta = 0$ ist. Es sind diese Bedingungen dieselben, denen wir bei den Formeln $B$ begegnet sind, und es erhellet hieraus, und aus dem in §. 7 bereits Erörterten, dass die zweiten Werthe für $\overline{\psi}$ in den Formeln $A$ und $B$ den Fällen zukommen, wo dem ganzen Apparate eine Umdrehung um die Lothlinie in der in jenem §. bezeichneten Weise künstlich ertheilt wird, während die Werthe Null von $\overline{\psi}$ den Fällen entsprechen, wo dieses nicht geschieht. Jene beziehen sich also auf den allgemeinen Fall des conischen Pendels, wo der Schwungkörper ein Rotationskörper ist und zugleich um die Axe seiner Figur und die Verticale in Rotation gesetzt wird.

Um die obigen Resultate in dem gewöhnlichen Fall, dass die erstere Rotation nicht statt hat, für die verschiedenen Schwungkörper zur Anschauung zu bringen, könnte man sie paarweise wie an den Armen eines Regulators an einer in die verticale Säule des Fessel'schen Apparates passenden Stange aufhängen, das Ganze auf die Platte der Schwungmaschine bringen, und, nachdem man die Stange mittelst des Schräubchens festgestellt und die Kurbel in Bewegung gesetzt hat, darauf achten, wann man eine Geschwindigkeit erreicht hätte, bei welcher keine weitere Entfernung von der Verticalen stattfände, und alsdann eine Gabel einfallen lassen, um die Pendel in dieser Lage festzuhalten und die Winkel, die sie nun mit den Verticalen bilden, zu beobachten.

## §. 17.

Um die Schwankungen, welche der Winkel $\vartheta$ der Rotationsaxe mit der Verticalaxe um einen mittlern Werth unter Umständen zeigt, in Betracht zu ziehen, müssen wir zu den Eulerschen Gleichungen zurückgreifen.

Sie sind in unserm Falle, wo $A = B$ ist, gemäss §. 9.:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & C dr = 0 \\ (2) & A dq - (C-A)\, rp\, dt = \gamma a''. Mg\, dt \\ (3) & A dp + (C-A)\, rq\, dt = -\gamma b''. Mg\, dt \end{array}\right\} \quad (A.)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Zugleich ist:}\quad pb'' - qa'' = \sin\vartheta. \dfrac{d\vartheta}{dt} \\ \qquad pa'' + qb'' = \sin^2\vartheta. \dfrac{d\psi}{dt} \end{array}\right\} \quad (B.)$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{ferner}\quad dc'' &= (aq'' - b''p)\; dt \\ db'' &= (c''p - a''r)\; dt \\ da'' &= (b''r - c''q)\; dt \end{array}\right\} \quad (C.)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen $B$ folgt

$$p^2 + q^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \sin\vartheta^2. \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1-c''^2). \frac{d\psi^2}{dt^2}$$

und aus den drei letzten

$$r dc'' = q db'' + p dc''$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise mit $c''$, $b''$, $a''$ und addirt so findet man

$$C.\ dc''r + A.\ d\,(b''q + a''p) = 0$$

oder, da $r = \text{Const} = n$ zufolge (1) ist,

$$C.\,nc'' + A\,(b''q + a''p) = \text{Const} = l,$$

$$\text{oder}\quad C.\,nc'' - A\,(1 - c''^2)\,\frac{d\psi}{dt} = l. \qquad \text{(D.)}$$

Multiplicirt man dagegen die Gleichung (2) mit $q$ und die Gleichung (3) mit $p$ und addirt, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}A.\,d\,(p^2+q^2) = \gamma\,Mg\,(a''q - b''p)\,dt = -\gamma\,Mg\sin\vartheta\,dt = \gamma\,Mg.\,d\,c''$$

oder $\quad A\,(p^2 + q^2) = 2\,\gamma\,Mg.\,c'' + \text{Const} = 2\,\gamma\,Mg\,c'' + h,$

oder endlich

$$A\left(\frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1-c'')^2\,\frac{d\psi^2}{dt^2}.\right) = 2\,Mg\gamma\,c'' + h. \qquad \text{(E.)}$$

Aus D und E folgt

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{A\sqrt{(1-c''^2)}}{\sqrt{A\,(1-c''^2)\,(2\,Mg\gamma\,c'' + h) - (Cnc.'' - l)^2}} \qquad \text{(F.)}$$

Ferner ist (nach D) $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{Cnc'' - l}{A\,(1-c''^2)},$

$$\text{also}\quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{Cnc'' - l}{\sqrt{A\,(1-c''^2)\,(2\,Mg\gamma\,c'' + h) - (Cnc'' - l)^2}} \qquad \text{(G.)}$$

Ebenso ergibt sich aus $\dfrac{d\varphi}{dt} = r + c''.\,\dfrac{d\psi}{dt},$

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{nA\,(1-c''^2) + (Cnc'' - l)\,c''}{\sqrt{(1-c''^2).\,[A\,(1-c''^2)\,(2\,Mg\gamma\,c'' + h) - (Cnc'' - l)^2]}} \qquad \text{(H)}$$

Die Integration der Gleichungen $(F)$, $(G)$, $(H)$ führt zu elliptischen Functionen. Wir befassen uns hier nur mit der ersten, welche wir, beachtend, dass

$$\sqrt{(1-c'')^2}.\,d\vartheta = \sin\vartheta.\,d\vartheta = -\,dc''$$

ist, auch so schreiben können:

$$t - t^0 = -A\int\frac{dc''}{\sqrt{A\,(1-c''^2)\,(2\,Mg\gamma c'' + h) - (Cnc'' - l)^2}}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, den wir mit $W$ bezeichnen wollen, bleibt so lange reell, als $c''$ reell ist und verändert sich stetig, wenn $c''$ sich stetig verändert. Denkt man sich nun, ohne die Zulässigkeit solcher Werthe zunächst zu berücksichtigen, es wachse

$c''$ von $c'' = -\infty$ bis $c'' = +\infty$,

so ist

$$\begin{aligned} W &= +\infty & \text{für } c'' &= -\infty \\ W &= -(Cn+l)^2 & \text{für } c'' &= -1 \\ W &= -(Cn+l)^2 & \text{für } c'' &= +1 \\ W &= -\infty & \text{für } c'' &= +\infty \end{aligned}$$

Es liegt also jedenfalls eine reelle Wurzel von $W = 0$ zwischen $c'' = -\infty$ und $c'' = -1$. Nun kann aber $W$, während $c''$ von $c'' = -1$ bis $c'' = +1$ wächst, nicht fortdauernd negativ sein, weil sonst $\sqrt{W}$ mithin auch $t$ fortdauernd imaginär wäre, die Realität von $t$ in der Aufgabe aber nur Werthe von $\vartheta$ zwischen 0 und 180°, also von $c''$ zwischen $-1$ und $+1$ zulässt. Zwischen $c'' = -1$ und $c'' = +1$ muss es also zwei reelle Wurzeln von $W$ geben, eine bei der $W$ aus dem Negativen ins Positive, eine andere bei der $W$ aus dem Positiven wieder ins Negative übergeht. Bezeichnen wir den kleinern dieser Werthe von $c''$ mit $c''_1$, den grössern mit $c''_2$ und die dritte ebenfalls nothwendig reelle Wurzel des cubischen Ausdrucks, welche zwischen $-1$ und $-\infty$ liegt, also stets negativ ist, mit $w_3$, so ist, damit $\sqrt{W}$ reell werde, $c''_1 \leq c'' < c''_2$ und zugleich $c''_2 - w_3 > 0$. Bringen wir $\sqrt{2AMg\gamma}$, den Coefficienten von $-(c'')^3$ in dem obigen Integral, vor das Wurzelzeichen, so lässt es sich demnach in folgender Form darstellen:

$$t - t^0 = -\sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}} \int \frac{dc''}{\sqrt{-(c''-c''_1)(c''-c''_2)(c''-w_3)}}$$

Substituirt man hierin für $c''$ den Werth

$$c'' = c''_2 - x_2\,(c''_2 - c''_1),$$

dividirt durch $c''_2 - w_3$, und setzt $\dfrac{c''_2 - c''_1}{c''_2 - w_3} = k^2$, so ergibt sich

$$t - t0 = +\sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}}\,\frac{2}{\sqrt{c''_2 - w_3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x''}\,\sqrt{1-k^2x^2}},$$

also

$$x = \sin \text{am.} \sqrt{\frac{Mg\gamma}{2A}\,(c''_2 - w_3)}.\ (t - t^0),$$

für welchen Ausdruck wir der Kürze wegen

$$x = \sin \text{am.}\ u$$

setzen. Mithin erhält man für $c''$

$$c'' = c''_2 - (c''_2 - c''_1)\sin^2 \text{am}\ u$$

Wenn $u = 0$, hat $c''$ seinen grössten Werth $c''_2$, mithin Winkel $\vartheta$ seinen kleinsten. Ist $u = K$, wo $K$ bekanntlich das obige Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +1$ bezeichnet, so hat $c''$ seinen kleinsten Werth $c''_1$, also $\vartheta$ seinen grössten. So oft das Argument $u$ um $2\,K$ zunimmt, welches geschieht, wenn die Zeit um $2\,K.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{Mg\gamma}{2\,A}(c'' - w_3)}}$ wächst, erhält $c''$ wieder denselben Werth, also auch $\vartheta$, welches auch der augenblickliche Werth von $\vartheta$ sein mag. Der Winkel $\vartheta$ der Rotationsaxe mit der Verticalen verändert sich also periodisch und schwankt in der Zeitperiode $\frac{T}{2}$ zwischen seinem kleinsten und grössten Werthe.

Wollte man die Wurzeln $c''_2$, $c''_2$, $w_3$ selbst durch die Coefficienten des Ausdruckes $W$ darstellen, so hat man bekanntlich, wenn

$$W = z^3 + az^2 - bz - c = 0$$

gesetzt wird, diese Gleichung zuerst auf die Form

$$y^3 - b'y - c' = 0$$

zu bringen und $\cos\varepsilon = \frac{c'}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{b'}\right)^3}$ zu setzen, indem man alsdann für die Wurzeln dieser Gleichung

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{b'}{3}\cos\frac{1}{3}\varepsilon}$$

$$y_2 = 2\sqrt{\frac{b'}{3}\cos\frac{(2\,\pi - \varepsilon)}{3}} = -\,2\sqrt{\frac{b'}{3}\cos\left(\frac{\pi + \varepsilon}{3}\right)}$$

$$y_3 = 2\sqrt{\frac{b'}{3}\cos\left(\frac{2\,\pi + \varepsilon}{3}\right)} = -\,2\sqrt{\frac{b'}{3}\cos\left(\frac{\pi - \varepsilon}{3}\right)}$$

findet, und die Wurzeln von $W = 0$, einzeln den letzern weniger $\frac{a}{3}$ gleich sind.

## §. 18.

Im Falle auf den Rotationskörper im Anfange seiner Bewegung durchaus keine anderen bewegenden Kräfte wirken, als solche, welche gemeinsam ihm eine Drehgeschwindigkeit $n$ um seine Axe ertheilen und er alsdann allein dem Einflusse der beschleunigenden Kraft und der Trägkeit überlassen ist, — wie gewöhnlich bei unsern Apparaten — lassen sich ohne Schwierigkeit die Bedingungen auffinden, damit die gedachten Schwankungen fortdauernd sehr klein bleiben.

Es ist nämlich in diesem Falle im Anfange der Bewegung $\frac{d\psi}{dt} = 0$, mithin gibt die Gleichung $D$ im vorigen §.:

$$C\,n\,c''_1 = l$$

wenn $c''_1 = \cos\vartheta$, dem anfänglichen Winkel $\vartheta$ zugehört.

Ebenso ist in diesem Augenblicke $p = 0$, und $q = 0$, mithin gibt die Gleichung $A\ (p^2 + q^2) = 2\,Mg\gamma c''_1 + h$ für $h$ den Werth $-\,2\,Mg\gamma c''_1$. Substituirt man diese Werthe für $l$ und $h$ in Gleichung $F$, so erhält man

$$\sqrt{(1 - c''^2)}\,d\vartheta =$$
$$\frac{1}{A}\sqrt{A\,(1 - c''^2)\,2\,Mg\gamma\,(c'' - c''_1) - C^2 n^2\,(c'' - c''_1)^2}.\,dt$$

oder

$$dc'' = -\frac{1}{A}\Big[A(1 - c''^2)2\,Mg\gamma - C^2 n^2 (c'' - c'')\Big]^{\frac{1}{2}}(c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}}.\,dt \quad (J.)$$

Hat man aber einen Ausdruck von der Form

$$du = dx.\,fu,$$

so ist $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{du}{dx}.\,\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{du} = fu.\,\frac{dfu}{du}$,

mithin gemäss der Reihe

$$u' - u = \frac{du}{dx}.\,dx + \frac{d^2u}{dx^2}.\,\frac{dx^2}{1.\,2} + \frac{d^3u}{dx^3}.\,\frac{dx^3}{1.\,2.\,3} + \ldots$$

$u$ ein Maximum, wenn $fu = 0$ und $fu.\,\frac{dfu}{du}$ negativ, dagegen $u$ ein Minimum, wenn $fu = 0$ und zugleich $fu.\,\frac{dfu}{du}$ positiv ist.

In unserm Falle wird $fu = 0$, wenn entweder $c'' - c''_1 = 0$, oder $A\,(1 - c''^2)\,2\,Mg\gamma - C^2 n^2\,(c'' - c''_1) = 0$

ist. Bezeichnet man ferner den Factor in der grossen Klammer in der Gleichung $J$ der Kürze wegen mit $K$, so ist

$$\frac{dfu}{du} = \frac{dfu}{dc''} = -\frac{1}{2A} K^{\frac{1}{2}} (c'' - c_1'')^{\frac{-1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2A}\left[4AMg\gamma c'' + C^2 n^2\right] K^{\frac{-1}{2}} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}},$$

also $f u \frac{dfu}{du} = - \frac{dfu}{dc''} \cdot \frac{K^{\frac{1}{2}}}{A} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2A^2} \cdot K - \frac{1}{2A^2} \cdot (4\,AMg\gamma c'' + C^2 n^2)\,(c'' - c_1'')$$

Für $c'' = c_1''$ reducirt sich dieser Ausdruck, da
$K = A\,(1 - c''^2).\ 2\,Mg\gamma - C^2 n^2\,(c'' - c_1'')$ *ist.*
auf $\frac{1}{A}$ $(1 - c''^2_1)\ Mg\gamma$, mithin gibt $c'' = c_1''$ für ein positives $\gamma$ ein Minimum.

Setzt man $K = 0$ und bezeichnet die Wurzeln dieser Gleichung mit $c_2''$, so ergibt sich:

$$c_2'' = -\frac{C^2 n^2}{4\,AMg\gamma} \pm \sqrt{1 + \frac{C^2 n^2 c_1''}{2\,AMg} + \frac{C^2 n^2}{16\,A^2 M^2 g^2 \gamma^2}}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\frac{M\gamma}{A} = \frac{1}{\lambda}$ und

$\frac{C^2 n^2}{A^2} = \frac{4 g \beta^2}{\lambda}$, also $\beta^2 = \frac{C^2 n^2}{4\,AMg\gamma}$

setzt, $\quad c_2'' = -\beta^2 \pm \sqrt{1 + 2\,\beta^2 c_1'' + \beta^4}$

Macht man dieselbe Substitution in

$$-\frac{1}{2A^2}\,[4\,AMg\gamma c'' + C^2 n^2.]\,(c'' - c_1''),$$

indem man mit $4\,AMg\gamma$ multiplicirt und dividirt, so erhält man $\quad -\frac{2g}{\lambda}\,(c'' + \beta^2)\,(c'' - c_1'')$.

Der negative Werth von $c_2''$ ist grösser als 1, mithin nicht zulässig. Substituirt man den andern mit positivem Wurzelzeichen für $c''$, so wird der letztere Ausdruck

$$-\frac{2g}{\lambda}\sqrt{1 + 2\beta^2 c''_1 + \beta^4}\left[-\beta^2 - c''_1 + \sqrt{1 + 2\beta^2 c''_1 + \beta^4}\right]$$

also, da

$$\sqrt{1+2\beta^2 c''_1+\beta^4} = \sqrt{(\beta+c''_1)^2+(1-c''^2)} > \beta^2 + c''_1$$

ist, negativ, folglich gibt

$$c''_2 = -\beta^2 + \sqrt{1+2\beta^2 c''_1 + \beta^4}$$

$$= -\beta^2 + (1+\beta^2)\left[1 - \frac{2\beta^2(1-c''_1)}{(1+\beta^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ein Maximum.

Der Ausdruck $\frac{2\beta^2(1-c''_1)}{(1+\beta^2)^2}$ ist sehr klein

1. wenn $c_1''$ nahe $= 1$ d. h. die Rotationsaxe sehr wenig von der verticalen Lage abweicht, und $\beta$ nicht gleich Null ist.

2. wenn der ursprüngliche Winkel mit der Verticalen, also $c''_1$ beliebig, aber $\beta^2$ unendlich gross ist, welches um so mehr der Fall ist, je grösser die Umdrehungsgeschwindigkeit $n$, je kleiner die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte $\gamma$, je kleiner ferner das Gewicht des Rotationskörpers $Mg$ und je grösser endlich das Trägheits-Moment $C$ rücksichtlich der Rotationsaxe gegen das Trägheits-Moment $A$ rücksichtlich der auf ihr senkrechten Axe, oder je kleiner jene Axe gegen diese ist.

Die Experimente mit dem Fesselschen Apparate bestätigen alle diese Bedingungen und würden es noch mehr, wenn die fremde mitzubewegende Masse nicht vorhanden wäre.

In den beiden Fälllen (1) und (2) können die höhern Potenzen des gedachten Ausdruckes vernachlässigt werden, und man erhält

$$c''^2 = 1 - \frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2}$$

$$\text{also } c''_2 - c''_1 = 1 - c''_1 - \frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2}$$

ein Unterschied, welcher in den gedachten beiden Fällen so klein werden kann, als man will.

Will man in dem ersten Falle den Winkel $\vartheta_2$ selbst ausdrücken, welcher dem maximum $c''_2$ entspricht, und bezeichnet man den dem minimum $c''_1$ zugehörigen Winkel mit $\vartheta_1$, so gelangt man dazu mittelst des Ausdrucks

$$c''^2 = 1 - \frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2},$$

indem man in demselben, da $\vartheta_2$ und $\vartheta_1$ beide sehr klein sind,

$1 - \frac{\vartheta_2^2}{2}$ für $c''_2$ und $1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$ für $c''_1$ substistuirt. Man erhält alsdann

$$\vartheta_2 = \frac{\beta\,\vartheta_1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

Es ist dieser Grenzwerth derselbe, welchen Poisson in seinem traité de mécanique t. II. §. 431 aus der Gleichung $J$ herleitet, indem er in ihr unmittelbar $1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ für $c''$ und $1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$ für $c_1''$ substituirt und $\beta^2$ für $\frac{C^2 n^2}{4\,A M g \gamma}$ setzt.

Wir verweilen hierbei nicht, sondern verweisen auf das bezogene Werk, wo man auch die angenäherten Werthe für $\vartheta$ und $\psi$ in $t$ findet, welche sich ergeben, wenn man unter den gemachten Voraussetzungen im ersten Falle $\vartheta = \vartheta_1 \sin u$, im zweiten $\vartheta = \vartheta_1 - u$, wo $u$ eine sehr kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen als $u^2$ zu vernachlässigen sind, in den Ausdrücken für $\frac{d\vartheta}{d\,t}$ und $\frac{d\psi}{d\,t}$ substituirt und integrirt. Da Poisson und ebenso Andere, welche nach ihm verfahren sind, z. B. Ohm in seiner Mechanik III. Theil S. 316. die obigen Untersuchungen über die Bedingungen, unter welchen $u$ auch im zweiten Falle sehr klein bleibet, nicht anstellt, so ist er genöthigt, diese Möglichkeit von vornherein anzunehmen und findet die Bedingungen erst nach vollzogener Integration. Der von uns eingeschlagene Weg rechtfertigt diese Annahme, und kürzt zugleich die Integration ab, indem er sofort gestattet, für $\cos\vartheta_1 + 4\,\beta^2$ oder wie Poisson schreibt, für $\cos\alpha + 4\,\beta^2$ bloss $4\,\beta^2$ zu setzen.