Vorwort.

Die vorliegende Abhandlung hat zum Gegenstand die doppelte Brechung, oder vielmehr die Entstehung und die Richtung des sogenannten außergewöhnlichen Strahles in den einarigen Krystallen. Die Absicht bei der Veröffentlichung derselben ist, die hierauf bezüglichen Gesetze auf einfache Weise aus der Undulations-Theorie abzuleiten und so eine klare Uebersicht über diese Eigenthümlichkeiten des Lichtes zu geben. Als Einleitung zu diesen Entwickelungen über doppelte Brechung und zugleich, damit die Schüler der oberen Klassen einigen Nutzen aus dieser Abhandlung ziehen können, sind die allgemeinsten Eigenschaften des Aethers, der Wellenbewegung desselben und die Anwendung der Huyghen'schen Construction (aus welcher auch die Gesetze der doppelten Brechung abgeleitet sind) auf die Erklärung der Reflexion und der einfachen Brechung, freilich nur kurz und ohne Rücksicht zu nehmen auf das Fresnel'sche Interferenz-Princip, vorhergeschickt.

Aether, Schwingungen desselben, Fortpflanzung dieser Schwingungen.

Nach der Undulations-Theorie ist durch den ganzen Raum ein höchst feines, imponderabeles, elastisches Fluidum verbreitet, Aether genannt, welcher alle Körper durchdringt und in schwingende, wellenförmige Bewegung versetzt werden kann. Punkte, Körper, welche diese Wellenbewegung des Aethers veranlassen, sind leuchtende. Von diesen pflanzen sich die Aether-Wellen mit sehr großer, jedoch meßbarer Geschwindigkeit und so lange sich in der Anordnung des Aethers nichts ändert, mit gleichförmiger Bewegung bis zu unserm Auge fort, und veranlassen hier durch das Aufstoßen auf den Sehnerven das Sehen, ähnlich wie die Schallwellen der Luft durch den Impuls auf die Gehörnerven das Hören bewirken.

Diese Wellenbewegung ist aber keineswegs ein Fortrücken des Aethers selbst, des schwingenden Mediums, sondern vielmehr eine Fortpflanzung der vibrirenden Bewegung. Indem nämlich irgend ein Aethertheilchen innerhalb gewisser Gränzen pendulirend hin und her geht, veranlaßt es durch die Molekular-Kräfte, die es mit den benachbarten Theilchen verbinden, daß diese ebenfalls in oscillirende Bewegung innerhalb gewisser Gränzen gerathen, an welcher Bewegung dann wieder die nächsten Theilchen Antheil nehmen. Bei dieser Art der Bewegung ist also ein doppeltes zu unterscheiden:

1. Die Art der Bewegung, die Vibration eines Aethertheilchens selbst, und
2. Die Fortpflanzung der Bewegung.

Da die letztere eine Folge der erstern ist, so werden beide in einer bestimmten Abhängigkeit von einander stehen. Die Rechnung und die dem Aether beigelegten Eigenschaften zeigen, daß, wenn überhaupt eine Fortpflanzung möglich und die Erscheinungen sich vollständig erklären lassen sollen, die Aethertheilchen sich in Ebenen bewegen müssen, die gegen die Fortpflanzungsrichtung senkrecht sind, oder, daß bei einer Aetherbewegung, die Licht erzeugen soll, die Fortpflanzung der Bewegung senkrecht gegen die Schwingungen der einzelnen, bei der Ruhe in gerader Linie liegenden, Aethertheilchen erfolgt. In diesen gegen die Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebenen geschehen nun die Schwingungen entweder geradlinig senkrecht gegen jene Richtung, kreisförmig oder elliptisch um dieselbe. Bei der ersten Schwingungsweise liegen entweder die einzelnen Bahnen aller in der Fortpflanzungsrichtung liegenden Aethertheilchen sämmtlich in einer und derselben Ebene, d. h. alle Vibrationen erfolgen in einer Ebene und solches Licht heißt geradlinig polarisirt, während jene die Vibrationen enthaltende Ebene die Vibrations-Ebene und die durch die Fortpflanzungsrichtung senkrecht gegen die Vibrations-Ebene gelegte Ebene die Polarisations-Ebene heißt; oder aber die Vibrationen der genannten Aethertheilchen erfolgen in allen möglichen Ebenen, so daß keine Vibrations-Ebene vorherrschend ist; von dieser Art sind die Schwingungen beim gewöhnlichen Lichte.

So viel nur von der Bewegung der einzelnen Aethertheilchen. Was die Fortpflanzung der Bewegung betrifft, so breiten sich, wenn die Aether-Erschütterung von einem leuchtenden Punkte ausgeht, die Wellen um jenen Punkt nach allen Seiten immer mehr aus und die Bewegung ist zu einer bestimmten Zeit nach jeder vom leuchtenden Punkte ausgehenden Richtung bis zu einer bestimmten Gränze fortgeschritten. Die krumme Fläche, in welcher sämmtliche Punkte liegen, bis zu denen die Bewegung zu derselben Zeit gelangt ist, heißt Wellenfläche. Sie ist die Gränze der Aether-Erschütterung für einen bestimmten Moment. Die Richtung, nach welcher die Fortpflanzung der Aetherbewegung erfolgt, heißt Lichtstrahl. Diese Fortpflanzung des Lichts und die Ausbreitung der Wellenfläche geschieht entweder

I. nach allen möglichen vom leuchtenden Punkte ausgehenden Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit, oder

II. nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit,

und in beiden Fällen, so lange die Natur des Mediums, in welchem die Bewegung Statt findet, sich nicht ändert, mit gleichförmiger Bewegung.

I. Haben in dem Medium, in welchem die Schwingungen des Aethers geschehen, die Massentheilchen nach allen Richtungen durchaus dieselbe Beschaffenheit und dasselbe Verhalten zu einander, oder hat, wie man sich auszudrücken pflegt, der Aether nach allen Richtungen dieselbe Elastizität: so geschieht die Fortpflanzung nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit. In einem solchen Medium ist also die Erschütterungsgränze des Aethers für einen bestimmten Moment, oder die Wellenfläche eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der leuchtende Punkt ist und die sich um so mehr ausbreitet und um so mehr sich der Ebene nähert, je weiter sie sich vom leuchtenden Punkte entfernt, endlich in eine Ebene übergeht, wenn sie von jenem Punkte unendlich entfernt ist. Jeder Radius einer solchen kugelförmigen Wellenfläche stellt einen Lichtstrahl vor, der also senkrecht auf der Wellenfläche steht. Kommt ein Lichtstrahl aus einem unendlich weiten Punkte, so ist die resultirende Wellenfläche eine auf demselben senkrechte Ebene. Der Fall der gleichen Aether-Elastizität und also der kugelförmigen Wellenfläche tritt da ein, wo der Aether nicht an Körpern gebunden ist, sondern frei für sich schwingen kann; ferner bei Luftarten, Flüßigkeiten und nicht krystallisirten Medien, wenn sich deren Massentheilchen nicht in einer unnatürlichen Spannung befinden, endlich auch bei solchen Krystallen, die zum regulären Systeme gehören.

II. Haben dagegen in einem Medium die Massentheilchen nicht nach allen Richtungen dasselbe gegenseitige Verhalten oder hat der Aether nicht allenthalben dieselbe Elastizität, wie es z. B. bei Krystallen der Fall ist, die nicht zum regulären System gehören, ferner bei gepreßtem oder rasch gekühltem Glase ꝛc.: so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nach verschiedenen Richtungen verschieden. In diesem Falle kann die Wellenfläche nicht kugelförmig sein; ihre Form ist abhängig von der Natur des Mediums oder von der Größe der Aether-Elastizität nach den verschiedenen Richtungen.

Die Fortpflanzung der Wellenbewegung rührt also her von der Einwirkung eines schwingenden Aethertheilchens auf die benachbarten ruhenden. In dem Momente, wo diese von der Bewegung der vorhergehenden Theilchen erreicht werden, fangen sie selbst an zu schwingen und werden dadurch Mittelpunkte von neuen Elementarwellen, die sich mit den Elementarwellen um die vorhergehenden Theilchen zusammensetzen und theils in ihren Wirkungen sich zerstören, theils aber zu einer neuen wirksamen Welle sich verstärken. Um eine, wenn auch nur oberflächliche, Anschauung von dieser Betrachtungsweise zu geben, stellen wir uns vor, eine kugelförmige Welle sei in fig. 1. vom leuchtenden Punkte A zu einer bestimmten Zeit in MN angekommen; dann wird in diesem Momente jedes Aetherttheilchen in der Wellenfläche MN erschüttert und dadurch Mittelpunkt von neuen Elementarwellen, durch deren Zusammentreten untereinander und mit den Wellen der vorhergehenden Theilchen die neue Wellenfläche MN des leuchtenden Punktes A für einen folgenden Moment hervorgeht. Daraus sieht man zugleich, daß eine Wellenfläche, so lange sie in demselben Medium bleibt, bei ihrer Ausbreitung dieselbe Form beibehält, bedingt die Natur des Mediums eine sphärische Welle, so bleibt sie in demselben sphärisch; ist die Wellenfläche eine Ebene, so rückt sie weiter, indem sie sich selbst parallel bleibt. Aus dieser Betrachtung ergibt sich also die Wellenfläche als das Resultat unendlich vieler einzelner Elementarwellen, die in der Weise zusammenwirken, daß sie alle zu derselben Zeit von einer Fläche gemeinschaftlich umhüllt werden; diese alle Elementarwellen gemeinschaftlich tangirende Fläche ist dann die resultirende Wellenfläche.

Reflexion des Lichtes.

1.) Nehmen wir zuerst den einfachsten Fall, daß die in einem Bündel auf die spiegelnde Fläche auffallenden Strahlen parallel sind, oder daß das einfallende Licht aus einem unendlich weiten Punkte kommt. Das Medium, in welchem dieses sich bewegt, habe gleiche Aether-Elastizität. In diesem Falle ist die Wellenfläche eine Ebene. Der Strahl ca (fig. 2) treffe zu einer bestimmten Zeit t die spiegelnde Fläche (die Ebene des Papiers) in a; so heißt dieses nach dem Vorigen nichts anderes, als daß die ebene Wellenfläche, die zu ca senkrecht ist, in ihrem parallelen Fortrücken zu dieser Zeit zuerst auf den Spiegel aufstößt. Diese Fläche schneidet den Spiegel in af und die Einfallsebene (zur Ebene des Papiers senkrecht gedacht) in ab, so daß ca $\perp$ ab. Verfolgen wir hier, wie in den folgenden Erörterungen, die Erscheinungen, wie sie in der Einfallsebene vor sich gehen, deren Durchschnitt mit dem Spiegel mn sei.

In dem Momente t wird das gestoßene Aethertheilchen a und in den folgenden Zeittheilen auch die Theilchen in der Linie af, Mittelpunkt einer neuen Welle, die einerseits oberhalb der spiegelnden Fläche in dem Medium, in welchem sich das einfallende Licht bewegt, andererseits (wenn die Natur des Körpers dieses zuläßt) unterhalb derselben sich immer weiter ausbreitet, während die erste ebene Welle baf, sich selbst parallel bleibend, fortschreitet.

Jene, in das ursprüngliche Medium zurückschreitenden (reflectirten) Elementarwellen sind die Ursache der Reflexion des Lichtes; hingegen veranlassen die im Innern des spiegelnden Körpers sich ausbreitenden Wellen, falls sie überhaupt sich bilden können, die Brechung.

Von der Lage baf schreitet die Welle in einem nächsten Moment, den wir als Zeiteinheit annehmen wollen, bis zur Lage edg; dann ist edg die Wellenfläche des leuchtenden Punktes zur Zeit $t+1$ und die auf beiden Wellenflächen senkrechte Linie di ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.*) Während dieser Zeiteinheit wurden alle zwischen a und d liegenden Aetherthеilchen von der fortrückenden Ebene baf nacheinander getroffen und zu neuen Schwingungen angeregt. Da diese neuen Wellen in demselben Medium sich ausbreiten, in welchem sich die ursprüngliche Bewegung fortpflanzte: so haben die reflectirten Wellen dieselbe Form, welche die ursprünglichen des leuchtenden Punktes haben, also eine sphärische und schreiten auch mit derselben Geschwindigkeit fort, wie die erstern. Am Ende der Zeit $t+1$ hat also die reflectirte Welle um a einen Radius gleich di; die Welle des in der Mitte von ad liegenden Aetherthеilchens k einen Radius $\frac{di}{2}$ u. s. f.; während das Theilchen d seine Vibration erst beginnt. Eine einfache geometrische Construktion aller Durchschnittskreise dieser reflectirten Wellen mit der Einfallsebene zeigt, daß sie alle eine gemeinschaftliche durch d gehende Tangente dh haben. Was mit den Theilchen a, k, d geschieht, das geschieht beziehlich mit allen in den Linien af, kl, dg liegenden Theilchen, da alle Punkte derselben Linie z. B. kl zu derselben Zeit $t+\frac{1}{2}$ von der Welle baf getroffen werden. Wir gelangen daher zur Vorstellung der gesammten Erscheinungen, wenn wir die Einfallsebene mit den darin liegenden Constructionen, sich selbst parallel bewegen; dann beschreibt die gemeinschaftliche Tangente dh eine Ebene, welche, da sie alle reflectirte Wellen umhüllt, der geometrische Ort für die gleichzeitige Ankunft der neuen Elementarwellen, d. h. die aus den neuen, reflectirten Wellen hervorgehende Wellenfläche ist. Da ein Lichtstrahl nichts anderes ist, als die Fortpflanzungsrichtung der Aetherbewegung und bei einer ebenen Welle durch die vom leuchtenden Punkte auf diese Fläche gefällte Senkrechte dargestellt wird: so erhalten wir für den Punkt a den reflectirten Strahl, indem wir von a auf die neue Wellenfläche eine Senkrechte ah fällen. Diese liegt in der Einfallsebene; und da $\triangle$ ahd $\cong$ $\triangle$ aid, so ist $\angle$ had $= \angle$ ida $= \angle$ cam, welches das bekannte Gesetz der Spiegelung ist: „daß der reflectirte Strahl in der Einfalls-

*) Nimmt man 0,000000001″ als Zeiteinheit an, so ist di ungefähr = 0,988 pr. Fuß.

ebene liegt und gegen den Spiegel denselben Neigungswinkel hat, wie der einfallende Strahl."

2.) Liegt aber der leuchtende Punkt nicht unendlich weit, so wird die Wellenfläche, wenn sie auf den Spiegel stößt, noch nicht als eben betrachtet werden können; sie ist eine sphärische und schreitet in Form von concentrischen Kugelschalen fort. Der leuchtende Punkt c (fig. 3.) liege bei dieser Voraussetzung in der Ebene des Papiers (die zugleich Einfallsebene sein mag) und die von c aus vorrückende Welle treffe zur Zeit t zuerst in a auf den Spiegel, dessen Durchschnitt mit der Einfallsebene mn sei. Wir untersuchen wieder nur die Vorgänge in der Einfallsebene. In der folgenden Zeiteinheit schreite die Welle mit einer Geschwindigkeit s fort und sie treffe den Spiegel in a'. Am Ende der Zeiten $t+2$, $t+3$ wird dann die erste Welle um 2s, 3s vorgerückt sein und den Spiegel resp. in a'' und a''' getroffen haben. Es werden also die zwischen a und a''' angeregten Aetherteilchen Mittelpunkte von neuen sphärischen Wellen, die am Ende der Zeit $t+3$ die Radien resp. 3s, 2s, s, o haben. Diese neuen Wellen werden alle von einer Kugelfläche umhüllt, die also die Wellenfläche des reflectirten Lichtes ist. Um dieses für die Durchschnittskreise der Wellen mit der Einfallsebene zu zeigen und zugleich den Mittelpunkt des Berührungskreises analytisch zu bestimmen, nehmen wir mn als die X Axe, eine von c auf mn gefällte Senkrechte als Y Axe, O als Anfangspunkt des Coordinaten-Systems; setzen $ca=\varrho$, $co=\mu$: so sind die Gleichungen der ursprünglichen Wellenkreise zu den Zeiten:

$$
\begin{aligned}
&t\ldots\ldots.(y-\mu)^2+x^2=\varrho^2\\
&t+1\ldots.(y-\mu)^2+x^2=(\varrho+s)^2\\
&t+2\ldots.(y-\mu)^2+x^2=(\varrho+2s)^2\\
&t+3\ldots.(y-\mu)^2+x^2=(\varrho+3s)^2.
\end{aligned}
$$

Setzt man $y=o$, so geben diese Gleichungen als Werthe von x

$$
\left.\begin{aligned}
Oa &= \sqrt{\varrho^2-\mu^2}\\
Oa' &= \sqrt{(\varrho+s)^2-\mu^2}\\
Oa'' &= \sqrt{(\varrho+2s)^2-\mu^2}\\
Oa''' &= \sqrt{(\varrho+3s)^2-\mu^2}
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

Der Kürze wegen setzen wir für diese Werthe resp. a, a', a'', a'''. —

Es sind die Gleichungen der reflectirten Wellenkreise

$$
\text{um}\left\{\begin{aligned}
&a\ \ldots.\ y^2+(x-a)^2=(3s)^2\\
&a'\ldots.\ y^2+(x-a')^2=(2s)^2\\
&a''\ldots.\ y^2+(x-a'')^2=s^2
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

Soll ein Kreis diese letzteren drei Kreise berühren, so müssen die Bedingungen erfüllt werden, daß die Centralen gleich den Differenzen der Radien sind. Es seien die Coordinaten des Mittelpunktes eines solchen Berührungskreises $x_1 y_1$, sein Radius R, so ist seine Gleichung im Allgemeinen

$$(y-y_1)^2+(x-x_1)^2=R^2 \qquad (3)$$

Die Centralen sind zwischen den Kreisen

$$(3) \text{ u. } (2,a) \ldots \sqrt{y_1{}^2+(a-x_1)^2}$$
$$(3) \text{ u. } (2,a') \ldots \sqrt{y_1{}^2+(a'-x_1)^2}$$
$$(3) \text{ u. } (2,a'') \ldots \sqrt{y_1{}^2+(a''-x_1)^2}$$

Für den Contact des Kreises (3) mit den Kreisen (2) haben wir also folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_1{}^2+(a-x_1)^2&=(R-3s)^2\\ y_1{}^2+(a'-x_1)^2&=(R-2s)^2\\ y_1{}^2+(a''-x_1)^2&=(R-s)^2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Diese drei Gleichungen reichen hin zur Bestimmung von x_1 y_1 R. Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so gelangt man zu zwei Gleichungen vom ersten Grade zwischen x_1 und R, aus denen sich, wenn man für a, a', a'' deren Werthe aus den Gleichungen (1) setzt, durch einfache Reduction ergibt

$$R=\varrho+3s \text{ und}$$
$$x_1=0$$

Für diese Werthe gibt die erste der Gleichungen (4)

$$y_1=-\mu \; *)$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (3) des Berührungskreises in

$$(y+\mu)^2+x^2=(\varrho+3s)^2. \qquad (5)$$

Der Mittelpunkt desselben liegt also in der Y Axe und zwar so weit unter O als c über O liegt. Da diese Gleichung (5) durch die Coordinaten von a'''

$$y=0, \qquad x=O\,a'''=\sqrt{(\varrho+3s)^2-\mu^2}$$

befriedigt wird, so geht der Kreis (5) durch den Punkt a'''. Um noch zu zeigen, daß dieser Kreis alle andern Wellenkreise um beliebige Theilchen zwischen a und a''' zur Zeit $t+3$ berührt: nehmen wir z. B. die Welle um das zur Zeit $t+\frac{1}{\varkappa}$ angeregte

*) Eigentlich $y_1=\pm\mu$: wir verwerfen aber den positiven Werth von y_1, weil die erste der obigen Centralen zwischen (3) und (2, a) eigentlich ist $\sqrt{(o-y_1)^2+(a-x_1)^2}$ und also $y_1{}^2$ in der ersten der Gleichungen (4) entstanden ist aus $(-y_1)^2$.

Aethertheilchen α, zwischen a und a' (wobei also $\varkappa < 1$ ist.) Der Wellenkreis des leuchtenden Punktes c hat zu der Zeit, wo er in α eintrifft, die Gleichung

$$(y-\mu)^2+x^2=\left(\varrho+\frac{s}{\varkappa}\right)^2, \text{ also}$$

$$\text{für } y=o, \text{ ist } x=0a=\sqrt{\left(\varrho+\frac{s}{\varkappa}\right)^2-\mu^2}$$

Der Wellenkreis um α hat zur Zeit $t+3$ einen Radius $=\frac{s(3\varkappa-1)}{\varkappa}$ und die Bedingung, daß er vom Kreise (5) berührt werde, ist also:

$$\varrho+\frac{s}{\varkappa}=\varrho+3s-\frac{s(3\varkappa-1)}{\varkappa}$$

Diese wird wird wirklich erfüllt, da die letzte Gleichung eine identische ist. Der Kreis (5) berührt also zur Zeit $t+3$ alle Wellenkreise um die Aethertheilchen zwischen a und a'''. Dasselbe geschieht in jeder durch die **Y** Axe gelegten Ebene; wir gelangen daher zur Vorstellung der Gesammterscheinung, wenn wir die Ebene **YX** um die Axe **Y** drehen, wobei jener berührende Wellenkreis eine Kugelfläche beschreibt. Es ist also der geometrische Ort für die gleichzeitige Ankunft aller reflectirten Elementar-Wellen, oder es ist die Wellenfläche eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt in c' liegt (wenn $0c'=0c$). Sie scheint daher aus c' hervorgegangen zu sein; die durch a gehende Fortpflanzungsrichtung der scheinbar von c' ausgehenden neuen Aetherbewegung, oder der reflectirte Strahl ist c'ad und es ist leicht einzusehen, daß $\angle$mac$=\angle$nad woraus folgt: „der reflectirte Strahl scheint aus einem Punkte (dem optischen Bilde) zu kommen, der senkrecht unter dem leuchtenden Punkte, ebenso weit unter der spiegelnden Fläche liegt, als der leuchtende Punkt über derselben und er hat denselben Neigungswinkel gegen den Spiegel, als der einfallende Strahl.

3. Andeutungsweise wollen wir noch die vorhergehenden Constructionen anwenden auf die Reflexion des Lichtes durch parabolisch geschliffene Spiegel.

a. **Mo** sei (fig. 4.) der Durchschnitt eines solchen concaven Spiegels mit der Ebene des Papiers, welche die Einfallsebene sein mag; bp sei die Directrix, **F** der Brennpunkt. Die ebene Welle mn des mit der Axe des Spiegels parallel auffallenden Strahles ca stoße in a zuerst auf den Spiegel und schreite in der Zeiteinheit um ai fort bis di. Dann haben sich in dieser Zeit um die Aethertheilchen a, k...d Wellen gebildet, deren Halbmesser am Ende der Zeiteinheit respect. für a=ai, für k=kl, für d=o etc. sind (wenn aa', kk' dd' etc. senkrecht sind zu bp.).

Die aus den reflectirten Elementar-Wellen resultirende wirksame Hauptwelle ist die, welche jene alle gemeinschaftlich umhüllt. Um diese zu finden, ziehen wir aF, kF, dF.

Dann ist bekanntlich der Radius der Welle um a:

$$ai = aa' - dd' = aF - dF,$$

Radius der Welle um k:

$$kl = kk' - dd' = kF - dF$$

Radius der Welle um $d = o$.

Also ist für die Einfallsebene der alle Elementar-Wellenkreise berührende Wellenkreis ein aus dem Brennpunkte F mit dF beschriebener Kreis dg. Der zu ac gehörende reflectirte Strahl ist daher aF und es folgt daraus, daß ein mit der Axe des Spiegels parallel auffallender Strahl nach dem Brennpunkte reflectirt wird.

Wenn die erste Welle mn bis zur Directrix fortgeschritten ist, reducirt sich die wirksame reflectirte Welle dg auf den Brennpunkt, und bei noch weiterm Fortrücken berührt sie die Elementar-Wellen von innen.

b. Der Lichtstrahl Fa gehe (fig. 5.) vom Brennpunkte F aus und treffe den Spiegel in a, so daß ag seine Welle ist, welche in der Zeiteinheit bis dg'' fortschreite. Die zwischen a und d liegenden Aethertheilchen werden dann Mittelpunkte von neuen Wellen, und zwar ist am Ende der Zeiteinheit der Radius der reflectirten Welle um a gleich dc, der Radius der Welle um k gleich dg', und der Welle um d gleich o.

Aber zieht man durch a und d zur Directrix und zur Axe des Spiegels Parallelen, so ist:

Radius der reflectirten Welle um a:

$$dc = dF - aF = dd' - aa' = ae$$

Radius der reflectirten Welle um k:

$$dg' = dF - kF = dd' - kk' = ke' \text{ u. s. w.}$$

Die reflectirten Elementar-Wellen um die Theilchen a..k..d werden daher am Ende der Zeiteinheit zugleich von einer Ebene dm berührt, d. h. die wirksame reflectirte Welle ist die ebene Welle dm und der zu dem einfallenden Strahle Fa gehörende reflectirte Strahl ist also ae; woraus folgt: daß ein vom Brennpunkte ausgehender Strahl parallel zur Axe reflectirt wird.

c. Der Spiegel sei convex. Der Strahl ca (fig. 6.) falle parallel mit der Axe bF auf den Spiegel in a und seine ebene Welle am rücke in der Zeiteinheit weiter bis dm'. Dann werden die Aethertheilchen zwischen a und d Mittelpunkte von neuen Wellen; die Welle um a hat am Ende dieser Zeit den Radius id, die

Welle um k den Radius nd, während d seine Vibrationen erst beginnt. Aber der Radius der Welle um a:

$$id = dd' - aa' = dF - aF.$$

Der Radius der Welle um k:

$$nd = dd' - kk' = dF - kF \text{ etc.}$$

Also werden die aus a, k u. s. w. respect. mit id und nd u. s. w. beschriebenen Kreise sämmtlich von dem mit Fd aus F beschriebenen Kreise berührt; d. h. die reflectirten Elementar-Wellen um die Aethertheilchen a..k..d werden gleichzeitig von der scheinbar aus dem Brennpunkte hervorgegangenen Welle dh berührt; diese ist die wirksame reflectirte Welle. Der zu derselben gehörende, dem Strahle ca entsprechende reflectirte Strahl ist also Fae'. Woher folgt: Ein auf einen parabolisch-converen Spiegel parallel zur Are desselben auffallender Strahl wird so reflectirt, als ob er aus dem Brennpunkte käme.

Einfache Brechung des Lichtes.

In den bisher betrachteten Fällen geschah die Wellenbewegung in einem Mittel, in welchem der Aether allenthalben dieselbe Elasticität hat; geht aber eine Welle aus einem solchen Medium über in ein anderes von andrer Aetherdisposition, welches jedoch ebenfalls allenthalben gleiche Aetherelasticität hat: so ist mit diesem Uebergange eine Aenderung in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verbunden. Die Form der Wellenfläche ist in beiden Medien eine sphärische, aber die Wellen in dem einen Medium haben am Ende einer bestimmten Zeit eine größere oder geringere Ausbreitung erreicht, als die Wellen in dem andern Medium.

Dieses vorausgesetzt, sei (fig. 7.) die Ebene des Papiers die Trennungsfläche zweier Medien von genannter Beschaffenheit. Das Licht komme von einem unendlich weiten Punkte c und der einfallende Strahl ca treffe zur Zeit t die Trennungsfläche in a. aP sei das Einfallsloth, mn die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der brechenden Fläche. In diesem Augenblicke stößt die gegen ca ebene Welle auf diese Fläche, schneidet sie in af, und die Einfallsebene in ab, schreitet in der Zeiteinheit, sich selbst parallel bleibend, bis zu gde fort und erregt während dieser Zeit nach einander die zwischen a und d liegenden Aethertheilchen zu Mittelpunkten von neuen Wellen, von denen wir hier nur diejenigen näher zu verfolgen haben, welche um die in der Einfallsebene liegenden Theilchen a...d nach unten sich bilden. Diese Elementarwellen (gebrochene Wellen), weil sie sich in einem andern Medium bewegen, als die von c ausgehenden, haben eine von den letztern verschiedene, je nach der Natur des Mediums kleinere oder größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Während diese in der Zeiteinheit den Weg di = C zurücklegen, nehmen wir an, daß die

Wellen in dem brechenden Mittel die kleinere Geschwindigkeit C′ haben. Die gebrochene Welle um a hat daher am Ende der Zeit t+1 den Radius C′. Die Erörterungen über Reflexion zeigen, daß das Gesammtresultat der einzelnen, gebrochenen Elementarwellen eine ebene Welle ist, deren Durchschnitt mit der Einfallsebene man erhält, wenn man von d an den Wellenkreis um a eine Tangente dh legt. Der aus dieser neuen Wellenfläche resultirende gebrochene Strahl ist also ah. Nun ist:

$$\text{in } \triangle \text{adh} \ldots \text{ad} = \frac{\text{ah}}{\text{sin. adh}} = \frac{C'}{\text{sin. hap}}$$

$$\text{in } \triangle \text{adi} \ldots \text{ad} = \frac{\text{di}}{\text{sin. iad}} = \frac{C}{\text{sin. caP}}$$

also $\frac{\text{sin. caP}}{\text{sin. hap}} = \frac{C}{C'}$, woraus folgt:

Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene und das Verhältniß der Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels ist für dieselben zwei Medien constant, unabhängig vom Einfallswinkel. Dieses Verhältniß ist zugleich das Verhältniß der Geschwindigkeiten des Lichtes in beiden Medien.

Doppelte Brechung.

Wir gehen über zu dem S. 3 unter **II.** bezeichneten Falle, der sich auf die Wellenbewegung in denjenigen Medien bezieht, in welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach verschiedenen Richtungen verschieden ist. Hier sind die Erscheinungen, die sich beim Uebergange eines Lichtstrahls aus einem Medium von gleicher Aether-Elastizität in ein anderes der genannten Art darbieten, nicht mehr so einfach und sie werden um so complicirter, je mannigfaltiger die Geschwindigkeit nach den verschiedenen Richtungen ist. Indessen hat auch hier Fresnel's Scharfsinn fast alle Schwierigkeiten gehoben. — Es ist einleuchtend, daß bei dieser Art der Molekular-Anordnung die Wellenfläche im Allgemeinen nicht mehr eine sphärische sein kann und daß ihre Gestalt abhängig sein muß von der Größe der Aether-Elastizität oder der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach den einzelnen Richtungen. Fresnel hat nun gezeigt, daß diese Elastizität im allgemeinsten Falle nach den verschiedenen Richtungen vollkommen bestimmt ist durch die Elastizität nach drei aufeinander senkrechten von der Natur des Mediums abhängigen Richtungen. Hierauf gründet er die Construction der nach ihm genannten Elastizitäts-Fläche, indem er die Leitstrahlen derselben den Quadraten der Aether-Elastizität nach diesen Richtungen proportional setzt.*) In vielen Krystallen ist diese Elastizität und dadurch auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen vollkommen bestimmt durch die Elastizität nach zwei auf einander senkrechten Richtungen.

Solche Krystalle heißen optisch einaxige; sie allein sind Gegenstand der noch folgenden Entwickelungen. In ihnen ist die Aether-Disposition nach allen, auf einer bestimmten geraden Richtung senkrechten, Richtungen dieselbe. Diese eine Richtung heißt die optische Axe; es kommt also einem jeden Punkte des Krystalls eine solche Axe zu. Jede durch die Axe senkrecht zu einer Gränzfläche gelegte Ebene heißt Hauptschnitt. Vermöge der Art der Molekular-Anordnung können diese Krystalle in ihrem Innern nur solche Aether-Schwingungen fortpflanzen, welche entweder im Hauptschnitte oder senkrecht dagegen erfolgen. Fällt daher auf die Gränzfläche des Krystalls ein Lichtstrahl, dessen Schwingungen zum Hauptschnitte senkrecht oder parallel sind: so pflanzt der Krystall in seinem Innern diese Schwingungen unverändert fort. Fällt aber ein Strahl gewöhnlichen Lichtes auf die Gränzfläche: so zerlegt der Krystall die im Allgemeinen nach allen Richtungen Statt findenden Vibrationen des gewöhnlichen Lichtes nach den zwei Hauptrichtungen, nach denen überhaupt die Schwingungen nur existiren können, nämlich in Schwingungen senkrecht gegen den Hauptschnitt und in solche, die zu demselben parallel sind. — Der Krystall pflanzt aber beiderlei Schwingungen mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Diejenigen Vibrationen, die senkrecht zum Hauptschnitte erfolgen, werden nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt, hingegen ist diese für die im Hauptschnitt erfolgenden Vibrationen nach verschiedenen Richtungen verschieden und zwar entweder nach der Richtung der optischen Axe ein Minimum und nach der hierauf senkrechten Richtung ein Maximum, oder umgekehrt. Krystalle der erstern Art (Kalkspath) heißen negativ einaxige, der letztern Art (Bergkrystall) positive Krystalle.

Aus dem vorhergehenden ist nun ersichtlich, daß die Wellenfläche für die senkrecht gegen den Hauptschnitt erfolgenden Schwingungen eine Kugelfläche ist; dagegen ist die Wellenfläche für die im Hauptschnitte erfolgenden Vibrationen ein Umdrehungs-Ellipsoid, dessen Axe mit der optischen Axe des Krystalls zusammenfällt. — Da nun diese Krystalle die Schwingungen eines einfallenden gewöhnlichen Lichtstrahls im Allgemeinen verändern und zwar der Art, daß daraus ein Fortschreiten von zwei verschieden geformten Wellenflächen hervorgeht und nach den vorigen Huyghen'schen Constructionen jeder der beiden Wellenflächen ein Lichtstrahl entspricht: so ist die Folge davon, daß im Allgemeinen aus einem einfallenden Lichtstrahl

*) Eine ausführliche mathematische Behandlung dieser auch in rein geometrischer Beziehung interessanten Fläche hat Herr Prof. Plücker in Crelle's Journal Bd. XIX. gegeben.

im Innern des Krystalls zwei Strahlen hervorgehen, oder daß das Licht doppelt gebrochen wird. Der eine gebrochene Strahl entspricht einer sphärischen Welle; er wird also den Gesetzen der, S. 10 u. f. erörterten, Brechung folgen und man nennt ihn deshalb den gewöhnlichen Strahl (Rad. ordinarius); der andre befolgt andre Gesetze; man nennt ihn daher den außergewöhnlichen Strahl (Rad. extraordinarius); jenen wollen wir mit **Rad. o.**, diesen mit **Rad. e.** bezeichnen.

Für die folgenden Entwicklungen nehmen wir beispielsweise die negativen Krystalle, und setzen die kleinste Geschwindigkeit des Lichtes, die nach der Richtung der optischen Axe Statt findet, gleich b, die größte nach einer auf dieser Axe senkrechten Richtung bezeichnen wir mit a.

Die Construction des **Rad. o.** ist nun für alle Fälle dieselbe, wie die S. 10 angegebene Construction des einfach gebrochenen Strahles.

Die Construction des **Rad. e.** ist jener ähnlich; an die Stelle der um den Einfallspunkt mit dem Halbmesser b zu construirenden Kugelfläche substituiren wir ein Umdrehungs-Ellipsoid um denselben Punkt, dessen kleinste Halb-Axe $=$ b mit der zu diesem Punkte gehörenden optischen Axe zusammenfällt, und dessen größte Halb-Axe $=$ a also auf der optischen Axe senkrecht steht.

Allgemeine Construktion des Rad. e.

Um die Huyghen'sche Construction für jede beliebige Lage der optischen Axe gegen jede beliebige, sowohl künstliche, als natürliche, Gränzfläche anzuwenden: haben wir hauptsächlich Rücksicht zu nehmen auf die Neigung der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt und der Axe gegen die brechende Gränzfläche.

Es sei wieder (fig. 8.) die Ebene des Papiers die der brechenden Fläche des Krystalls.

Aa der einfallende Strahl.

Za das Einfallsloth.

bc die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der Gränzfläche.

Pp die Richtung der optischen Axe.

HX die Durchschnittslinie der Ebene **ZaP** (d. i. des Hauptschnittes) mit der Gränzfläche.

ao die Richtung des **Rad. o.**

ae die Richtung des **Rad. e.**

ad die Durchschnittslinie der durch das Einfallsloth und den **Rad. e.** gelegten Ebene **Zae** (die wir für die Folge die Brechungs-Ebene nennen wollen) mit der Gränzfläche.

ϑ sei der Einfallswinkel.

ϑ_1 der Brechungswinkel für den **Rad. o.**

ϑ_2 der Brechungswinkel für den Rad. e.*)

v der Neigungswinkel der optischen Axe gegen das Einfallsloth ($<$PaZ).

φ die Neigung der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt ($<$cai).

φ_1 die Neigung der Brechungsebene gegen den Hauptschnitt ($<$dai).

In der Zeiteinheit sei die ebene Wellenfläche des Strahles Aa, deren Durchschnitt mit der Einfallsebene af senkrecht zu Aa ist, in der Luft von a bis c fortgeschritten, indem sie den Weg gc = 1 zurückgelegt hat; dann haben wir

$$ac = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

Während dieser Zeit hat sich um a die elliptoidische Welle**) derart gestaltet und ausgebreitet, daß die kleine Halb-Axe in der Richtung Pp liegend gleich b und die größte Halb-Axe gleich a ist. Aus dem Vorigen folgt, daß wir, um in diesem allgemeinen Falle den Rad. e. zu construiren, durch den Punkt c eine Linie ch senkrecht zu der Einfallsebene oder also senkrecht zu der Linie ac ziehen, durch diese Linie ch eine Tangential-Ebene an das Ellipsoid legen und endlich den Berührungspunkt mit dem Punkte a verbinden müssen. Die Aufgabe, den Rad. e. zu construiren, ist also darauf zurückgeführt, den Punkt analytisch zu bestimmen, wo eine durch ch gehende Ebene das in Rede stehende Ellipsoid berührt. Nehmen wir zu dem Ende als Anfangspunkt der Coordinaten den Einfallspunkt a; als Axe der z das Einfallsloth Zz, als Axe der x die Linie HX, als Axe der y eine in a senkrecht gegen die Ebene ZX errichtete Linie aY. — Bezeichnen wir die Coordinaten des gesuchten Berührungspunktes mit $x_1\, y_1\, z_1$.

Die Gleichung eines Rotations-Ellipsoides, dessen kleinste Halb-Axe b in der Axe Z, und dessen größte Halb-Axe a in der Axe X liegt, ist einfach:

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \text{ ***)}$$

Um die Gleichung desselben Ellipsoids zu erhalten, für den Fall, daß die kleinste Axe mit der optischen Axe zusammenfällt, oder mit der Axe Z den Winkel v bildet, drehen wir die Axen Z und X in der Ebene ZaX um den Winkel v und beziehen das Ellipsoid auf das neue Coordinaten-System; dabei ändert sich y nicht; aber z und x ändern sich beziehlich in

$$z \cos v + x \sin v$$

und $$x \cos v - z \sin v.$$

*) Alle drei Winkel gerechnet von dem Einfallslothe bis zu den Strahlen.

**) Man vergleiche zur leichtern Anschauung die schematische fig. 9; der Zweck, eine Anschauung der einzelnen Construktionen zu geben, konnte nur auf Kosten der Richtigkeit in der Zeichnung einiger Linien (z. B. hc) erreicht werden.

***) s. Magnus Aufgaben u. Lehrsätze aus der analyt. Geom. des Raumes p. 250.

Die Gleichung des Ellipsoids, bezogen auf das Coordinaten-System, in welchem die Axe **Z** mit der kleinsten Axe den Winkel v bildet, wird dann nach einigen Reductionen:

$$\left.\begin{array}{l} z^2(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v) + x^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v) \\ + 2zx(a^2 - b^2)\cos v \sin v + b^2 y^2 \end{array}\right\} = a^2 b^2$$

Um abzukürzen setzen wir:

$$\left.\begin{array}{l} a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v = A \\ a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v = B \\ (a^2 - b^2)\cos v.\sin v = C \end{array}\right\} \qquad (1)$$

so wird die Gleichung des Ellipsoides:

$$A z^2 + B x^2 + 2 C x z + b^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (2)$$

Wir haben nun die Gleichung für die Ebene zu suchen, welche durch ch geht und das Ellipsoid (2) berührt. Es seien ξ und η die Coordinaten des Punktes c, so ist die Gleichung der Linie ch im Allgemeinen

$$y - \eta = \mu(x - \xi)$$

wo μ die trig. tang. des Winkels bezeichnet, den die Linie ch mit der Axe **X** bildet. Aber da ch senkrecht ist zu ac, deren Gleichung ist

$$y = x.\ \mathrm{tang}\ \varphi,$$

so haben wir die Bedingungsgleichung

$$\mu = -\frac{1}{\mathrm{tang}\varphi}$$

Die Gleichung der Linie ch wird hiernach

$$y - \eta = -\frac{1}{\mathrm{tang}\ \varphi}(x - \xi) \text{ oder}$$

$$(y - \eta)\sin\varphi + (x - \xi)\cos\varphi = o. \qquad (3)$$

Die allgemeine Gleichung einer Ebene ist:

$$\alpha z + \beta x + \gamma y + \delta = o.$$

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Coordinaten-Ebene **YX** ist:

$$\beta x + \gamma y + \delta = o; \qquad (4)$$

soll nun jene Ebene durch ch gehen, so muß die Durchschnittslinie (4) die Linie ch selbst, also muß die Gleichung (4) mit der Gleichung (3) identisch sein. Identificiren wir beide Gleichungen, so kommt

$$\frac{\beta}{\delta} = -\frac{\cos\ \varphi}{\eta\sin\varphi + \xi\cos\ \varphi}$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{\sin\ \varphi}{\eta\sin\varphi + \xi\cos\varphi}$$

und die Gleichung der durch ch gehenden Ebene wird:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi.x+\sin\varphi.y-\frac{\alpha}{\delta}(\eta\sin\varphi+\xi\cos\varphi)z\\ \quad-(\eta\sin\varphi+\xi\cos\varphi)\end{array}\right\}=0 \quad (5)$$

Unter diesen durch ch gehenden Ebenen (5) gibt es eine, die das Ellipsoid (2) berührt in dem Punkte, dessen Coord. wir mit $x_1\, y_1\, z_1$ bezeichnet haben.

Die Gleichung einer das Ellipsoid (2) in diesem Punkte berührenden Ebene ist im Allgemeinen:

$$(Az_1+Cx_1)z+(Cz_1+Bx_1)x+b^2y_1y-a^2b^2=0\ ^{*)} \quad (6)$$

Da die Ebene (5) das Ellipsoid in $x_1\, y_1\, z_1$ berühren soll, so muß ihre Gleichung (5) identisch sein mit der Gleichung (6). Identificiren wir beide Gleichungen, so erhalten wir, als Bedingungen für den Contact, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\alpha}{\delta}&=\frac{Az_1+Cx_1}{a^2b^2}\\ \frac{\sin\varphi}{\eta\sin\varphi+\xi\cos\varphi}&=\frac{b^2y_1}{a^2b^2}\\ \frac{\cos\varphi}{\eta\sin\varphi+\xi\cos\varphi}&=\frac{Cz_1+Bx_1}{a^2b^2}\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Zieht man ci parallel zu aY, so ist

$$\eta=ci=ac.\sin\varphi;\ \xi=ai=ac.\cos\varphi$$

berücksichtigen wir, daß $ac=\frac{1}{\sin\vartheta}$, so folgt nach einfacher Reduction:

$$\eta\sin\varphi+\xi\cos\varphi=\frac{1}{\sin\vartheta} \quad (8)$$

---

*) Die Gleichung einer im Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ an die Fläche 2ten Grades von der allgemeinsten Form:

$$\left.\begin{array}{l}az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz\\ \quad+2a''z+2b''y+2c''x+d\end{array}\right\}=0$$

gelegte Tangential-Ebene hat die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(az_1+c'y_1+b'x_1+a'')z+(by_1+c'z_1+a'x_1+b'')y\\ +(cx_1+b'z_1+a'y_1+c'')x+a''z_1+b''y_1+c''x_1+d\end{array}\right\}=0$$

Substituirt man für die allgemeine Gleichung des 2ten Grades die Gleichung (2) des Ellipsoids

$$Az^2+Bx^2+2Cxz+b^2y^2-a^2b^2=0,$$

so hat man zur Bestimmung der Coeff. in der allgemeinen Gleichung der Tangential-Ebene:

$$\begin{array}{llll}a=A & a'=0 & a''=0 & \\ b=b^2 & b'=C & b''=0 & d=-a^2b^2\\ c=B & c'=0 & c''=0 & \end{array}$$

Die Gleichung (5) der durch **ch** gehenden Ebene (**MN fig. 9.**) wird daher für den Fall, daß sie das Ellipsoid (2) in $x_1\,y_1\,z_1$ (Punkt e) berührt, unter Rücksicht auf die Gleichungen (7) und (8), für den Berührungspunkt selbst:

$$\cos\varphi.\,x_1+\sin\varphi.\,y_1+\frac{(A z_1+C x_1)\,z_1}{a^2\,b^2\sin\vartheta}-\frac{1}{\sin\vartheta}=0 \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (7) ergeben sich die Werthe von $x_1\,y_1\,z_1$; nämlich aus (7):

$$y_1=a^2\sin\varphi.\,\sin\vartheta$$

Um x_1 und z_1 zu bestimmen, setzen wir in Gleichung (9) die aus den Gleichungen (7) gezogenen Werthe von y_1 und x_1: so ergibt sich durch eine einfache Reduction:

$$z_1{}^2=\frac{a^2b^2\{B-a^2\sin^2\vartheta\,(B\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\}}{AB-C^2}$$

Aber aus den Gleichungen (1) folgt:

$$AB-C^2=a^2\,b^2,$$

also erhalten wir für die Coordinaten des gesuchten Berührungspunktes:

$$\text{I.}\quad z_1=-\sqrt{B-a^2\sin^2\vartheta\,(B\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}$$

$$\text{II.}\quad x_1=\frac{a^2b^2\cos\varphi\sin\vartheta}{B}+\frac{C}{B}\sqrt{B-a^2\sin^2\vartheta(B\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}\ (10)$$

$$\text{III.}\quad y_1=a^2\sin.\,\varphi\sin\vartheta$$

Durch die Gleichungen (10) ist jedesmal die Richtung und die Geschwindigkeit des **Rad. e.** gegeben. Indessen lassen sich aus denselben leicht andre Formeln herleiten, welche die Abhängigkeit des Neigungswinkels ϑ_2, des **Rad. e.** gegen das Einfallsloth, von den Winkeln φ und ϑ, und also die Richtung des **Rad. e.** unmittelbar angeben.

Zunächst zeigt die Gleichung **III.**, daß $y_1=0$, für $\varphi=0^0$ oder $\vartheta=0^0$,
woraus folgt, daß der **Rad. e.** nicht aus dem Hauptschnitte heraustritt, wenn der einfallende Strahl im Hauptschnitte liegt. *)

Um die Lagebeziehung zweier **Rad. e.**, welche von zwei beliebigen, in demselben Punkte auf den Krystall einfallenden, Strahlen herrühren, zu erkennen: bezeichnen wir die Coordinaten der Endpunkte dieser **Rad. e**, (mit Bezugnahme auf die vorhergegangene Construction) durch $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$, deren Werthe durch die

---

*) Das senkrechte Auftreffen des einfallenden Strahles, für $\vartheta=0^0$. ist nur ein spezieller Fall von dem allgemeinern bei $\varphi=0^0$.

Gleichungen (10) bestimmt werden, wenn man in dieselben nacheinander die entsprechenden Werthe von ϑ und φ einsetzt. Legt man durch jene Endpunkte und den Auffallspunkt (den Anfangspunkt der Coordinaten) eine Ebene, die also beide **Rad. e.** enthält, so ist deren Gleichung:

$$(x_2 y_1 - y_2 x_1) z + (z_2 x_1 - x_2 z_1) y + (y_2 z_1 - z_2 y_1) x = 0 \quad (11)$$

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Gränzfläche des Krystalls, der Ebene **X Y**, hat also die Gleichung:

$$(z_2 x_1 - x_2 z_1) y + (y_2 z_1 - z_2 y_1) x = 0 \quad (12)$$

Rühren nun die zwei **Rad.** e. von solchen einfallenden Strahlen her, die in derselben Einfallsebene liegen, aber ungleiche Neigung gegen das Einfallsloth haben, so finden wir die Werthe von $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$, indem wir in die Gleichungen (10) für dasselbe φ nacheinander die 2 Werthe von ϑ einsetzen. Durch Substitution dieser Coord.-Werthe in die Gleichung (12) nimmt diese nach einigen Reductionen die Form an:

$$b^2 y - B. \tang \varphi . x = 0 \quad (13)$$

Da diese Gleichung unabhängig ist vom Winkel ϑ, so folgt daraus der wichtige Satz:

Wenn mehrere in derselben Einfallsebene liegende Strahlen in demselben Punkte auf den Krystall eintreffen, so liegen auch die entsprechenden **Rad.** e. in einer und derselben Ebene, welche wir deshalb die **R.** e.-Ebene nennen wollen. *) Der Winkel ν, den diese durch a gehende in der Ebene des Papiers liegende Durchschnittslinie (13) mit der Axe **X** bildet, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\tang \nu = \frac{B}{b^2} \tang \varphi . \quad (14)$$

Die Ebene (11) gibt für ihre Durchschnittslinie mit dem Hauptschnitt, der Ebene **ZX**, die Gleichung:

$$(x_2 y_1 - y_2 x_1) z + (y_2 z_1 - z_2 y_1) x = 0 \quad (15)$$

Ziehen wir wieder die Werthe von $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ aus den Gleichungen (10) für dasselbe φ aber verschiedenem ϑ und substituiren wir dieselben in die Gleichung (15): so geht dieselbe über in die Form:

$$\frac{C}{B} . z + x = 0 \quad (16)$$

Diese Gleichung ist sowohl unabhängig von φ als von ϑ, und die durch dieselbe dargestellte Linie ist also unveränderlich und dieselbe für jedes φ und ϑ; sie verrückt sich nur durch Aenderung

---

*) Bekanntlich liegen die **Rad. o.** ebenfalls in einer und derselben Ebene; aber diese ist die Einfallsebene selbst.

des Winkels v, weil damit eine Aenderung von **C** und **B** verbunden ist.

Wir erhalten demnach folgenden Satz: die Durchschnittslinie einer **R.** e.-Ebene mit dem Hauptschnitt ist bei derselben Lage der optischen Axe dieselbe für jede Neigung der Einfallsebene und für jeden Einfallswinkel.

Während sich die Brechungsebenen aller **Rad.** o., die von allen möglichen, in demselben Punkte der Gränzfläche einfallenden Strahlen herkommen, sich sämmtlich im Einfallslothe schneiden: so haben auch alle **R.** e.-Ebenen (wenn die einfallenden Strahlen nur den Auffallspunkt gemein haben) eine im Hauptschnitt liegende gemeinschaftliche Durchschnittslinie, die wir deshalb die Axe der **R.** e.-Ebenen nennen wollen. Die Gleichung dieser Axe ist die Gleichung (16); der Winkel χ, den dieselbe mit dem Einfallslothe bildet, ist bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \chi = -\frac{C}{B},$$

und die durch die Linien (13) und (16) gehende Ebene erhält dann durch eine leichte Coefficienten-Bestimmung mittelst der Gleichung (11) die Gleichung:

$$b^2 y - C.\operatorname{tang}\varphi.z - B.\operatorname{tang}\varphi.x = o \qquad (17)$$

Fällt also ein Lichtstrahl in a auf, ist der Neigungswinkel der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt φ, so liegt sein **Rad.** e. in der durch (17) dargestellten Ebene. Dieselbe bildet mit dem Hauptschnitt im Allgemeinen einen Winkel, der, wenn wir ihn mit **V** bezeichnen, bestimmt ist durch

$$\cos V = \frac{b^2}{\sqrt{(B^2+C^2)\operatorname{tang}^2\varphi + b^4}}$$

woraus wieder hervorgeht, daß, für $\varphi = o^0$, auch $V = o^0$ ist, oder daß der **Rad.** e. für diesen Fall in dem Hauptschnitte liegt.

In fig. 9. ist **ae** **Rad.** e. des einfallenden Strahles **Aa**, **BB¹** die Axe der **R.** e.-Ebenen (16), **am** die Durchschnittslinie der zu **Aa** gehörenden **R.** e.-Ebene mit der Gränzfläche des Krystalls (13). Für die vollständige Lage-Bestimmung des **Rad.** e. wäre nun in Verbindung mit Gleichung (14) nur noch seine Neigung gegen Linie **am** ($<$ **eam**), oder gegen die Axe **BB¹** ($<$ **eaB¹**) zu ermitteln. Diese Winkel ergeben sich aus der Verbindung der Gleichungen (10) resp. mit der Gleichung (13) oder (16); indessen gibt es zur Lage-Bestimmung des **Rad.** e. noch andre Elemente. Legen wir nämlich durch **Rad.** e. und Einfallsloth eine Ebene **zea**, welche die Gränzfläche des Krystalls in **an** schneidet: so ist die Richtung des **Rad.** e. völlig bestimmt, wenn man die Winkel kennt, welche **an** mit der Axe **X** und **Rad.** e. mit dem Einfallslothe bildet. Wir haben jenen Winkel **naX** mit φ_1, diesen **eaz** mit ϑ_2 bezeichnet. Die zwischen diesen Winkeln und den Winkeln φ u. ϑ bestehenden Relationen lassen sich einfach auf folgende Weise aus den Gleichungen (10) herleiten: wir fällen in fig. 10. (wo **ae** der **Rad. e.**, **e** selbst der Berührungspunkt $x_1 y_1 z_1$ ist) von **e** auf die Ebene **YX** die Senkrechte **ep**, ziehen durch **p** zu der **Y** die Parallele **pq**, so ist

$$aq = x_1\,,\ pq = y_1\,,\ pe = -z_1$$
$$\angle\, eaz = \vartheta_2,\ \angle\, paq = \varphi_1$$

ferner:

$$z_1 = -ae.\cos\vartheta_2\,,$$
$$y_1 = ae.\sin\vartheta_2.\sin\varphi_1\,,$$
$$x_1 = ae.\sin\vartheta_2.\cos\varphi_1.$$

Setzen wir für $z_1\ y_1\ x_1$ ihre Werthe aus (10) und dividiren die zweite und dritte Gleichung durch die erste, so erhalten wir für die Bestimmung von ϑ_2 und φ_1:

$$\tan\vartheta_2 \sin\varphi_1 = \frac{a^2 \sin\varphi \sin\vartheta}{\sqrt{B - a^2\sin^2\vartheta\,(B\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}} \qquad (18)$$

$$\tan\vartheta_2 \cos\varphi_1 = \frac{a^2 b^2 \cos\varphi.\sin\vartheta}{B\sqrt{B - a^2\sin^2\vartheta\,(B\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}} + \frac{C}{B} \qquad (19)$$

Zum Schlusse wollen wir diese beiden Formeln beispielsweise auf die einzelnen Fälle beim Kalkspath, als dem Repräsentanten der negativen Krystalle, anwenden.

Setzen wir die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft (oder, welches beinahe dasselbe ist, im Leeren) = 1, so sind die Hauptdimensionen des Ellipsoids im Kalkspathe am Ende der Zeiteinheit:

$$a = 0{,}674;\quad b = 0{,}604.$$

Die optische Axe ist gegen die **natürliche** Gränzfläche um $45^0 23^1$ geneigt.

A. Die Gränzfläche sei eine natürliche Fläche des Krystalls.

Dann ist $v = 44^0 37^1$.

Aus Gleichung (1) wird $\dfrac{C}{B} = 0{,}109$

woraus folgt $\chi = 6^0 13^1$

als Neigung der Axe der **R.** e.-Ebenen gegen das Einfallsloth.

Schon früher S. 17. ist gezeigt worden und die Gleichungen (18), (19) geben es unmittelbar, daß

$$\varphi_1 = 0^0,\ \text{wenn}\ \varphi = 0^0.$$

1. Der einfallende Strahl sei senkrecht zur Gränzfläche, so ist $\vartheta = 0^0$.

Die Gleichung (19) gibt dann, da $\cos\varphi_1 = 1$ ist,

$$\tang \vartheta_2 = \frac{C}{B} = 0{,}109$$

$$\vartheta_2 = 6^0 13^1.$$

Da $\tang \chi = -\frac{C}{B}$ oder $\chi = 6^0 13^1$ war, so folgt der Satz:

Der aus dem senkrecht einfallenden Strahle hervorgehende **Rad. e.** hat die Richtung der Axe der **R. e.**-Ebenen.*)

2. Der Lichtstrahl falle im Hauptschnitt parallel mit der Fläche auf, so erreicht ϑ_2 sein Maximum. Es ist dann $\vartheta = 90^0$ also aus (19):

$$\tang \vartheta_2 = \frac{a^2 b^2}{B\sqrt{B - a^2 b^2}} + \frac{C}{B} = 0{,}935$$

$$\vartheta_2 = 43^0 5^1$$

(Winkel der totalen Reflexion für Strahlen, die im Hauptschnitt liegen).

3. Fällt der Lichtstrahl nicht im Hauptschnitt ein, so tritt der **Rad. e.** (wie die Gleichung (14) sogleich zeigt) im Allgemeinen aus der Einfallsebene heraus, und zwar um so mehr, je mehr sich der Neigungswinkel φ, der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt, einem rechten Winkel nähert. Der Winkel φ_1 hängt nämlich ab von φ und ϑ und ist bestimmt durch die aus den Gleichungen (10) gezogene Relation:

$$\tang\varphi_1 = \frac{a^2 B \sin\varphi \sin\vartheta}{a^2 b^2 \cos\varphi \sin\vartheta + C\sqrt{B - a^2 \sin^2\vartheta (B \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)}} \quad (20)$$

Wenn $\varphi = 90^0$, so nimmt diese Gleichung die einfachere Form an:

$$\tang \varphi_1 = \frac{a^2 \sin\vartheta}{C} \sqrt{\frac{B}{1 - a^2 \sin^2\vartheta}}$$

für $\vartheta = 90^0$, ergibt sich hiernach:

$$\varphi_1 = 83^0 36^1.$$

*) In dieser Beziehung findet wieder ein ähnliches Verhalten statt zwischen der Axe der **R. e.**-Ebenen und dem **Rad. e.** wie zwischen dem Einfallslothe und dem **Rad. o.** — Uebrigens gibt dieser Satz ein Mittel an die Hand, um durch den Versuch die Richtung jener Axe zu erkennen.

B. Die Gränzfläche des Krystalls sei eine künstlich geschliffene.

1. Die Gränzfläche sei senkrecht zur optischen Axe.

Es ist dann:

$$v = 0^0,$$

aus (1) $$B = b^2, \quad C = 0.$$

Also ist $\chi = 0^0$, d. h. die Axe der **R.** e.-Ebenen fällt mit dem Einfallslothe zusammen.

Aus (20) folgt:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \operatorname{tang} \varphi$$
$$\varphi_1 = \varphi$$

es tritt also in diesem Falle der **Rad** e. nicht aus der Einfallsebene.

Dann wird, da φ und also auch φ_1 immer gleich 0^0 sind, aus (19):

$$\operatorname{tang} \vartheta_2 = \frac{a^2 \sin \vartheta}{b\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \vartheta}}$$

a. Fällt der Lichtstrahl senkrecht auf, so ist $\vartheta = 0^0$, daher auch $\vartheta_2 = 0^0$:
ein senkrecht einfallender Strahl geht also ungebrochen durch und der **Rad.** e. fällt mit dem **Rad.** o. zusammen.

b. Fällt der Lichtstrahl parallel zu der Gränzfläche auf, so ist $\vartheta = 90^0$, also:

$$\operatorname{tang} \vartheta_2 = \frac{a^2}{b\sqrt{1 - a^2}} = 1{,}018; \quad \vartheta_2 = 45^0 31'$$

2. Die Gränzfläche sei parallel zur Axe geschliffen.

Für diesen Fall ist $v = 90^0$, also aus (1)

$$B = a^2, \quad C = 0, \text{ also auch } \chi = 0^0.$$

Die Gleichung (20) gibt dann:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi;$$

bei dieser Axenlage ist das Verhältniß der Tangenten der Neigungswinkel, welche die Brechungsebene (s. S. 13) und die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt bilden, constant.

a. Der Lichtstrahl falle im Hauptschnitt ein, so ist $\varphi = 0^0$, $\varphi_1 = 0^0$, also:

$$\operatorname{tang} \vartheta_2 = \frac{b^2 \sin \vartheta}{a\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \vartheta}}$$

Ein senkrecht einfallender Strahl geht auch hier ungebrochen durch, weil mit $\vartheta = 0^0$ auch zugleich $\vartheta_2 = 0^0$ ist. Ist dagegen (bei einem parallel einfallenden Strahle) $\vartheta = 90^0$, so ist:

$$\tang \vartheta_2 = \frac{b^2}{a\sqrt{1-b^2}} = 0,679$$

$$\vartheta_2 = 34^0 11^1$$

b. Die Einfallsebene sei senkrecht gegen den Hauptschnitt.

Dann ist $\varphi = 90^0$, also aus (20) auch $\varphi_1 = 90^0$ und der Rad. e. geht nicht aus der Einfallsebene.

Die Gleichung (18) gibt dann

$$\tang \vartheta_2 = \frac{a \sin \vartheta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \vartheta}},$$

setzt man $\tang \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2}}$, so ergibt sich nach kurzer Reduction:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_2} = \frac{1}{a} = 1,483.$$

Der **Rad e.** folgt also hier den Gesetzen der einfachen Brechung; es ist nämlich das Verhältniß der Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels des **Rad. e.** für jede Neigung des einfallenden Strahles constant. Wenn man beim Kalkspath von einem Brechungsexponenten spricht, so ist stets dieser letztere gemeint.