# Einige neue Lehrsätze

von

**Dr. F. Heinen.**

1. Lehrsatz. Zieht man in der Ebene einer Ellipse durch irgend einen Punkt P zwei Geraden mit irgend zweien conjugirten Durchmessern derselben parallel, welche der Ellipse in vier Punkten begegnen, bestimmt alsdann, indem man jene Geraden als Coordinaten-Axen annimmt, für je zwei dieser Durchschnittspunkte einen neuen Punkt so, daß seine Coordinaten das m fache der Summe der respektiven Coordinaten eines solchen Punkten-Paares betragen (wo m jede beliebige, für alle Punkte aber dieselbe Zahl bezeichnet): so liegen die sämmtlichen sechs so bestimmten Punkte nebst dem Punkte P im Allgemeinen stets auf einer und derselben Hyperbel.

Der Mittelpunkt C der Hyperbel liegt auf der Verbindungslinie des Punktes P mit dem Mittelpunkte M der Ellipse und zwar in einer Entfernung von P, welche gleich m. PM ist. Zieht man ferner durch C zwei neue Geraden den erwähnten Durchmessern der Ellipse parallel, so sind dieselben conjugirte Durchmesser der Hyperbel und haben mit denen der Ellipse dasselbe Verhältniß. Bezeichnet man endlich die Durchschnittspunkte auf der einen durch P gezogenen Geraden mit 1 und 2, auf der anderen mit 3 und 4, die neu bestimmten Punkte mit 1—2, 1—3, 1—4, 2—3, 2—4, 3—4, und verbindet den Punkt 1—2 mit 3—4, 1—3 mit 2—4 und 1—4 mit 2—3, so sind diese Geraden sämmtlich Diameter der Hyperbel.

Es seien nämlich 2A, 2B die zugeordneten Durchmesser der Ellipse, P zum Anfangspunkt der Coordinaten, und die mit den

Durchmessern parallelen Geraden als Coordinaten-Axen angenommen. Sind dann $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten von M, so ist die Gleichung der Ellipse:

$$A^2(y-\beta)^2+B^2(x-\alpha)^2=A^2B^2 \quad \text{(I.)}$$

Ihre Durchschnittspunkte mit der Axe der Abscissen sind also:

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & x=\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}, & y=o \\ 2. & x=\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}, & y=o \end{array}\right\} \text{(M.)}$$

und mit der Axe der Ordinaten:

$$\begin{array}{lll} 3. & x=o & , y=\beta+\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2} \\ 4. & y=o & , y=\beta-\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2} \end{array}$$

Nimmt man das m fache dieser Coordinaten und addirt die respektiven von je zweien, so erhält man als Coordinaten der neuen Punkte

$$\text{(N.)}\quad \begin{array}{lll} 1-2: & x=2m\alpha & , y=o \\ 1-3: & x=m\left(\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}\right), & y=m\left(\beta+\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2}\right) \\ 1-4: & x=m\left(\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}\right), & y=m\left(\beta+\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2}\right) \\ 2-3: & x=m\left(\alpha-\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}\right), & y=m\left(\beta+\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2}\right) \\ 2-4: & x=m\left(\alpha-\frac{A}{B}\sqrt{B^2-\beta^2}\right), & y=m\left(\beta-\frac{B}{A}\sqrt{A^2-\alpha^2}\right) \\ 3-4: & x=o & y=2\,m\,\beta \end{array}$$

Alle diese Punkte liegen aber, wie man ohne Schwierigkeit sich überzeugt, auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung ist:

$$\text{(II.)}\quad A^2(y-m\beta)^2-B^2(x-m\alpha)^2=m^2A^2\beta^2-m^2B^2\alpha^2$$

Dieser Kegelschnitt ist also im Allgemeinen eine Hyperbel, mit zweien zugeordneten Durchmessern, welche denen der Ellipse parallel sind. Die Coordinaten ihres Mittelpunktes sind $m\alpha$ und $m\beta$; mithin liegt derselbe auf PM, in einer Entfernung von P $=$ m. PM.

Beziehen wir diese Hyperbel auf ihren Mittelpunkt und setzen zu dem Ende in II $x+m\alpha$ statt x und $y+m\beta$ statt y, so erhalten wir $A^2y^2-B^2x^2=m^2A^2\beta^2-m^2B^2\alpha^2$. Setzen wir $m^2A^2\beta^2-m^2B^2\alpha^2=D^2$, so ergibt sich für die beiden zugeordneten Durchmesser $2A^1$, $2B^1$ der Hyperbel

$$A^{1\,2} = \frac{D^2}{B^2}$$

$$B^{1\,2} = \frac{D^2}{B^2}$$

mithin verhält sich

$$A^1 : B^1 = A : B$$

Daß die Geraden, welche durch 1—2 und 3—4, 1—3 und 2—4, 1—4 und 2—3 Diameter sind, beweist man am einfachsten, wenn man die resp. Coordinaten von 1—2 und 3—4, 1—3 und 2—4, 1—4 und 2—3 addirt und davon die Hälfte nimmt; man erhält alsdann stets für die Coordinaten der Mitten dieser Verbindungslinien $m\,\alpha$ und $m\,\beta$, oder die Coordinaten des Mittelpunktes der Hyperbel.

## Zusätze.

1. Für den Fall, daß $m = \frac{1}{2}$ ist, wird die Gleichung II auch durch die Coordinaten $x = \alpha$, $y = \beta$, d. h. die Coordinaten des Mittelpunktes M der Ellipse befriedigt. Die Punkte 1—2, 1—3, 1—4, 2—3, 2—4, 3—4 sind alsdann die Mitten der die Punkte 1, 2, 3, 4 verbindenden 6 Sehnen und die Hyperbel geht in dem Falle außer durch diese Mitten und den Punkt P auch durch den Mittelpunkt der Ellipse.

2. Ist $m = \frac{1}{3}$, so sind die durch die Punkten-Paare bestimmten neuen Punkte die Schwerpunkte von je dreien gleichen Gewichten, welche in P und den Punkten 1, 2, 3, 4 wirken, wenn stets eines unter denselben das Gewicht in P ist. Denn die Coordinaten des Schwerpunktes X, Y dreier in den Punkten $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ wirkender gleicher Gewichte sind bekanntlich:

$$X = \tfrac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$Y = \tfrac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3)$$

und nimmt man für $x_1$, $y_1$ und $x_2$, $y_2$ nach einander zwei der obigen Coordinaten der Punkte 1, 2, 3, 4; für $x_3$, $y_3$ aber die Coordinaten von P: $x = o$, $y = o$, so erhält man offenbar die Gleichungen (N.), wenn man in diesen $m = \frac{1}{3}$ setzt. — Vier der gedachten Punkte fallen alsdann mit den Schwerpunkten der 4 um P herumliegenden Dreiecke zusammen, deren Grundlinien die Sehnen zwischen den Punkten 1, 3; 1, 4; 2, 3; und 2, 4; sind.

3. Sind die durch P gezogenen Geraden den gleichen Diametern der Ellipse parallel, so ist der secundäre Kegelschnitt eine

gleichseitige Hyperbel. Dasselbe findet statt, wenn der ursprüngliche Kegelschnitt ein Kreis ist. Denn in beiden Fällen wird I

$$(y-\beta)^2 + (y-\alpha)^2 = A^2$$

und II

$$(y-m\beta)^2-(x-m\alpha)^2=m^2(\beta^2-\alpha^2)$$

4. Liegt der Punkt P auf einer der beiden Geraden, welche durch die Mitten der vier die Endpunkte der conjugirten Durchmesser der Ellipse verbindenden Sehnen und deren Mittelpunkt gehen, und der Kürze wegen Mittellinien genannt werden mögen, so erhält man für den secundären Kegelschnitt keine Hyperbel sondern zwei Geraden, von welchen die eine die Mittellinie, auf welcher der Punkt P liegt, selbst ist, die andere aber der andern Mittellinie parallel ist. Denn für eine Ellipse auf ihren Mittelpunkt und zwei zugeordnete Durchmesser bezogen,

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$$

sind die Coordinaten der Endpunkte dieser Durchmesser

$$x=o,\ y=\pm B$$
$$x=\pm A,\ y=o,$$

also die der Mitten der diese Punkte verbindenden vier Sehnen

$$x=\pm \tfrac{1}{2} A,\ y=\pm B,$$

mithin die Gleichungen der Mittellinien

$$Ay - Bx = o$$
$$Ay + Bx = o$$

Liegt also P auf einer derselben, so ist $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B}$;
mithin wird die Gleichung II in dem Falle

$$A^2(y-m\beta)^2 - B^2(x-m\alpha)=o$$

oder, wenn man berücksichtigt daß $A\beta=\alpha B$ ist,

$$(Ay + Bx - 2Am\beta)\ (Ay - Bx)=o$$

Die Geraden, welche die in Rede stehenden Punkte enthalten, sind also

$$\text{(m)}\qquad Ay+Bx - 2Am\beta = o$$

oder auch

$$\text{(n)}\qquad Ay+Bx - 2Bm\alpha = o$$

und

$$\text{(p)}\qquad Ay-Bx = o.$$

Aus m und p, n und p folgt für die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes

$$y = m\,\beta$$
$$y = m\,\alpha,$$

welcher also in einer Entfernung von P = m. PM liegt.

Hat man statt der Ellipse einen Kreis und setzt man $m = \frac{1}{2}$, so gewinnt man folgenden geometrischen Satz.

„Stehen die Diagonalen **E F**, **G H** eines Kreisviereckes auf einander senkrecht und halbirt die Verbindungslinie ihres Durchschnittspunktes **P** mit dem Mittelpunkte **M** des Kreises den Winkel **GPE** der Diagonalen, so geht **MP** auch durch die Mitten **I**, **K** der diesem Wirkel und seinem Scheitelwinkel gegenüberstehenden Seiten und es liegen die Mitten der Diagonalen **R**, **S** mit den Mitten **L**, **N** der andern Seiten in gerader Linie."

Geometrisch ergibt sich der Beweis also:

Zieht man **MR** und **MS**, so ist weil $\angle RPM = MPS$ und $RPS = RMS = 1R$ ist, $MR = RP = MS$, also $FE = GH$, $RE = SG$, folglich $PG = PE$ und $PF = PH$, mithin $PM \perp GE$ und $PM \perp FH$, daher geht **PM** durch **I** und **K**. Da ferner **RPSM** ein Quadrat ist, so geht **RS** durch die Mitte von **MP** und steht auf **PM** senkrecht, mithin ist $RS \parallel GE$; aber **RL** und **SN** sind auch $\parallel GE$, also liegen **L**, **R**, **S**, **N** in gerader Linie.

2. Lehrsatz. Zieht man durch irgend einen Punkt P in der Ebene einer Hyperbel zwei Geraden zweien zugeordneten Durchmessern derselben parallel, welche sowohl der Hyperbel als ihren Assymptoten in vier Punkten begegnen, bestimmt alsdann, indem man jene Geraden als Coordinaten-Axen annimmt, für je zwei Durchschnittspunkte auf den Assymptoten einen neuen Punkt so, daß seine Coordinaten das m fache der Summe der respektiven Coordinaten eines solchen Punkten-Paares beträgt, (wo m jede beliebige, für alle Punkten-Paare aber dieselbe Zahl bezeichnet): so liegen die sämmtlichen so bestimmten neuen Punkte stets auf einer und derselben Ellipse.

Der Mittelpunkt **O** der Ellipse liegt auf der Linie **PM**, welche **P** mit dem Mittelpunkt **M** der Hyperbel verbindet, in einer Entfernung von **P**, welche $= m . PM$ ist. Zieht man ferner durch C zwei neue Linien jenen Durchmessern der Hyperbel parallel, so sind dieselben conjugirte Durchmesser der Ellipse und haben mit jenen dasselbe Verhältniß. Bezeichnet man endlich mit 1 und 2, 3 und 4 die respektiven Durchschnittspunkte der durch **P** gezogenen Geraden mit der Hyperbel, durch $1^1$ und $2^1$, $3^1$ und $4^1$ die respekt. Durchschnittspunkte derselben Geraden mit den Assymptoten, die nun bestimmten Punkte einerseits mit 1—2, 1—3, 1—4, 2—3, 2—4, 3—4, andrerseits mit $1^1$—$2^1$, $1^1$—$3^1$, $1^1$—$4^1$, $2^1$—$3^1$, $2^1$—$4^1$, $3^1$—$4^1$ und verbindet den Punkt 1—2 mit 3—4, 1—3 mit 2—4, 1—4 mit 2—3, so wie den Punkt $1^1$—$2^1$ mit $3^1$—$4^1$, $1^1$—$3^1$, $2^1$—$4^1$, $1^1$—$4^1$ mit $2^1$—$3^1$ durch Geraden, so sind diese sämmtlich Diameter der Ellipse.

Sind nämlich $2A$, $2B$ zwei conjugirte Diameter der Hyperbel, die durch **P** ihnen parallel gezogenen Geraden zu Coordinaten-Axen angenommen und die Coordinaten von **M**: $\alpha$, $\beta$, so ist die Gleichung der Hyperbel:

$$\text{I.} \quad A^2 (y-\beta)^2 - B^2 (x-\alpha^2) = - A^2 B^2$$

und die Gleichung ihres Assymptoten-Systems:

$$\text{II.} \quad A^2 (y-\beta)^2 - B^2 (x-\alpha)^2 = 0$$

Die Durchschnittspunkte der Hyperbel mit den Axen sind also

$$\text{(M.)} \quad \begin{array}{lll} 1. & x=\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}, & y=0 \\ 2. & x=\alpha-\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}, & y=0 \\ 3. & x=0 & , y=\beta+\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2} \\ 4. & x=0 & , y=\beta-\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2} \end{array}$$

Das m fache der Summe der Coordinaten von je zweien dieser Punkte gibt für die Coordinaten der neuen Punkte

$$\text{(N)} \quad \begin{array}{ll} 1\text{—}2: x=2m\alpha & , y=0 \\ 1\text{—}3: x=m\left(\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}\right), & y=m\left(\beta+\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2}\right) \\ 1\text{—}4: x=m\left(\alpha+\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}\right), & y=m\left(\beta-\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2}\right) \\ 2\text{—}3: x=m\left(\alpha-\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}\right), & y=m\left(\beta+\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2}\right) \\ 2\text{—}4: x=m\left(\alpha-\frac{A}{B}\sqrt{B^2+\beta^2}\right), & y=m\left(\beta-\frac{B}{A}\sqrt{\alpha^2-A^2}\right) \\ 3\text{—}4: x=0 & , y=2m\beta. \end{array}$$

Ausdrücke, welche man sowie die vorigen (M) aus den im vorigen Satze angeführten unmittelbar durch Vertauschung von B mit $B\sqrt{-1}$ erhalten konnte.

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Assymptoten mit den durch P gezogenen Geraden sind:

$$\begin{array}{llll} 1^1: x = \alpha + \frac{A}{B}\cdot\beta, & y = 0. & & \\ 2^1: x = \alpha - \frac{A}{B}\cdot\beta, & y = 0. & & (P.) \\ 3^1: x = 0, & y = \beta + \frac{B}{A}\cdot\alpha. & & \\ 4^1: x = 0, & x = \beta - \frac{B}{A}\cdot\alpha. & & \end{array}$$

Als Coordinaten der neuen Punkte, welche durch diese auf die angegebene Weise bestimmt werden, hat man:

$$\begin{array}{lll} & 1^1 - 2^1: x = 2\,m\,\alpha, & y = 0 \\ & 1^1 - 3^1: x = m\left(\alpha + \frac{A}{B}\cdot\beta\right), & y = m\left(\beta + \frac{B}{A}\cdot\alpha\right) \\ & 1^1 - 4^1: x = m\left(\alpha + \frac{A}{B}\cdot\beta\right), & y = m\left(\beta - \frac{B}{A}\cdot\alpha\right) \\ & 2^1 - 3^1: x = m\left(\alpha - \frac{A}{B}\cdot\beta\right), & y = m\left(\beta + \frac{B}{A}\cdot\alpha\right) \\ (Q) & 2^1 - 4^1: x = m\left(\alpha - \frac{A}{B}\cdot\beta\right), & y = m\left(\beta - \frac{B}{A}\cdot\alpha\right) \\ & 3^1 - 4^1: x = 0, & y = 2\,m\,\beta. \end{array}$$

Die Coordinaten der Punkte $1^1-2^1$ und $3^1-4^1$ in (Q) sind dieselben, wie die unter (N.) angeführten der Punkte $1-2$ und $3-4$, wie vorauszusehen war. Man hat also 10 verschiedene Punkte, welche sämmtlich auf einer Ellipse liegen, deren Gleichung

**III.** $A^2(y-m\beta)^2 + B^2(x-m\alpha)^2 = m^2A^2\beta^2 + m^2B^2\alpha^2$ ist.

Ganz auf dieselbe Weise wie beim vorigen Satze überzeugt man sich, daß ihr die oben beigelegten Eigenschaften zukommen.

## Zusätze.

1. Wenn $m = \frac{1}{2}$, oder $= \frac{1}{3}$ gesetzt wird, so gelangt man zu Resultaten, welche mit den beim vorigen Satze angeführten analog sind.

2. Ist die Hyperbel eine gleichseitige, so ist der secundäre Kegelschnitt, welcher durch die 10 Punkte geht, ein Kreis [1]), wenn die durch P gezogenen Geraden den Axen der Hyperbel parallel sind; sind sie aber zweien andern, nicht rechtwinklichen Durchmessern parallel, so ist er eine Ellipse, deren gleiche Durchmesser diesen Durchmessern der Hyperbel parallel sind.

In diesem Falle hat man nämlich für I

$$(y-\beta)^2 - (x-\alpha)^2 = -A^2$$

für II:

$$(y-\beta)^2 - (x-\alpha)^2 = o$$

und für III:

$$(y-m\beta)^2 + (x-m\alpha)^2 = m(\alpha^2 + \beta^2)$$

welche letztere Gleichung bekanntlich, je nachdem die Coordinaten-Axen rechtwinklich oder nicht sind, die Gleichung eines Kreises oder einer Ellipse ist.

3. Hat man zwei Geraden, welche sich in einem Punkte P schneiden, so sind ihre Gleichungen

$$A(y-\beta) + B(x-\alpha) = o$$
$$A^1(y-\beta) + B^1(x-\alpha) = o$$

in denen A, B, $A^1$, $B^1$ die von den Geraden auf den Axen abgeschnittenen Stücke und $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten von P bezeichnen. Nimmt man an, es sei $\frac{A}{B} = -\frac{A^1}{B^1}$ so wird das System dieser Geraden durch die Gleichung

$$A^2 (y-\beta)^2 - B^2 (x-\alpha)^2 = o$$

dargestellt, welche mit der obigen Gleichung II identisch ist. Man könnte daher für zwei solcher Geraden, welche für jedes Axen-System offenbar leicht zu construiren sind, einen allgemeinen Lehrsatz aufstellen, welcher sich nach dem Obigen leicht aussprechen lassen würde. Wir wollen hierbei nicht verweilen, sondern statt dessen den folgenden speciellen Fall näher betrachten.

3. *Haben zwei gleichschenkelige rechtwinkelige Dreiecke* (fig. 2) BAC, DEC *einen spitzen Winkel* C, *gemein, so daß dadurch ein vollständiges Viereck*

---

[1]) Dieser besondere Fall ist zum Theil, ohne nämlich die Durchschnittspunkte mit den Assymptoten zu beachten und wenn $m = \frac{1}{2}$ oder $m = \frac{1}{3}$ gesetzt wird, von mir bereits in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XVI. S. 174. aufgestellt und später von Herrn Dr. Bauer in demselben Journal Bd. XVIII. S. 208 in dieser Beschränkung bewiesen worden.

CBFD entsteht, wo F den Durchschnittspunkt von BA und DE bezeichnet, und halbirt man sowohl die Hypotenusen BC, DG der Dreiecke BAC, DEC in G, H, als die Hypotenusen BF, DF der Dreiecke BFE, DAF in N, L, als endlich die Diagonalen FC, DB, EA in J, K, M, beschreibt alsdann mit der Hälfte der letztern ME, (welche die Spitzen der rechten Winkel E, A verbindet) aus ihrer Mitte M einen Kreis, so geht dieser durch die sämmtlichen genannten Halbirungspunkte. Ferner sind die Geraden GN, IK, LH welche die respektiven Mitten verbinden, sämmtlich Durchmesser des Kreises.

Nimmt man nämlich AB, AC als Coordinaten-Axen an, und bezeichnet die Coordinaten von E mit $\alpha, \beta$, so ist die Gleichung

von BC: $\quad y - \beta + x - \alpha = 0$

von DE: $\quad (y - \beta) - (x - \alpha) = 0$

also die ihres Systems

$$(y - \beta)^2 - (x - \alpha)^2 = 0$$

Die Coordinaten der Mitten G, H, I, K, L, N erhält man demnach aus den Gleichungen (Q.), wenn man in diesen $m = \frac{1}{2}$ und $A = B$ setzt, und ebenso findet man aus III die Gleichung eines Kreises

$$(y - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (x - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$$

welchem, wie man sich nach dem Frühern leicht überzeugen kann, die angegebenen Eigenschaften zukommen.

Wir bemerken nur noch, daß auch der Punkt O, in welchem der Kreis die Diagonale DB nochmals schneidet, mit F, C in gerader Linie liege. Denn es ist die Gleichung

von F C: $\quad (\alpha + \beta) y + (\beta - \alpha) x = \beta^2 - \alpha^2$

von D B: $\quad (\alpha - \beta) y + (\alpha + \beta) x = \alpha^2 - \beta^2$

aus welchen man für das $x^1$ ihres Durchschnittspunktes

$$x^1 = \frac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

findet, woraus sich dann, wenn man beachtet, daß die Gleichungen von F C und DB gegenseitig in einander übergehen, wenn man in ihnen $\alpha$ mit $\beta$ und zugleich x mit y vertauscht, unmittelbar für $y^1$

$$y^1 = \frac{\alpha(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ergibt. Diese Coordinaten aber leisten, wie man sich durch Substitution sogleich überzeugt, der Gleichung des Kreises Genüge.

Fügen wir nun zu diesem interessanten geometrischen Satze nach einem elementaren Beweis.

Zieht man EG, AH, AL, EN, so sind, da die Dreiecke DEC, BAC, DAF, FEB rechtwinklich und gleichschenklich sind, die Winkel AGE, AHE, ALE und ANE alle rechte, mithin geht der Kreis, der mit ME beschrieben wird, durch G, H, L und N. — Fällt man nun von M auf AB eine senkrechte MS, so ist $AS = \frac{1}{2} AN$ und, da $DK = KB$, $DL = LF$, mithin $KL \parallel BF$ ist, so steht MS in Q auf KL senkrecht. Da aber $KL \perp DA$ und die Senkrechte von L auf $DA = \frac{1}{2} FA$ ist, so ist

$$QL = SA - \tfrac{1}{2} AF$$

$$= \frac{NA}{2} - \frac{AF}{2}$$

$$= \frac{FN}{2}$$

$$= \frac{LK}{2}.$$

mithin Q die Mitte von KL, folglich $KM = ML = ME$. Fällt man ebenso von M auf AG eine Senkrechte MV so ist $AV = \frac{1}{2} AG$, und, da $LI \parallel DC$ ist, so steht MV auch senkrecht in R auf LI. Da aber L die Mitte von DF und $LI \parallel DC$ ist, so geht die Linie LR durch die Mitte W von FA; es ist also $LW = \frac{1}{2} DA$, und da $WR = AV$ ist, so folgt hieraus

$$LR = LW + WR$$

$$= \tfrac{1}{2} AD + \tfrac{1}{2} AG$$

$$= \frac{DG}{2}$$

$$= \frac{LI}{2},$$

$$\text{indem } IL = \frac{DC}{2} = DG \text{ ist;}$$

mithin ist $MI = ML = ME$. Der Kreis der mit ME beschrieben wird, geht also auch durch K und I.

Ferner geht NG durch M, weil $NAG = R$ ist; IK durch M, weil $KL \parallel BA$ also senkrecht auf LI ist; endlich LH durch M, weil $HI \parallel BA$ also senkrecht auf LI ist. Weil KI und NG endlich Durchmesser sind, so ist Bogen KN = Bogen GI, und, da die Sehnen $LN \parallel DB$ oder $\parallel OK$ ist, so ist Bogen OL = Bogen KN, mithin auch Bogen OL = Bogen GI, folglich Sehne

LG || der Sehne OI; es ist aber auch FI oder FC || LG (da L, G die Mitten DF, DC sind), folglich bildet OFI eine einzige Gerade.

3. Lehrsatz. Hat man eine Reihe concentrischer Kegelschnitte derselben Art, in deren jedem ein Paar zugeordneter Durchmesser dieselbe Lage und ein unveränderliches Verhältniß haben, und man zieht durch irgend einen Punkt in ihrer gemeinsamen Ebene zwei Geraden mit jenen Durchmessern parallel, welche jedem der Kegelschnitte in vier Punkten begegnen, bestimmt alsdann, indem man jene Parallelen als Coordinaten-Axen annimmt, für je zwei der Durchschnittspunkte auf demselben Kegelschnitte einen neuen Punkt so, daß seine Coordinaten das m fache der Summe der Coordinaten eines solchen Punkten-Paares betragen, so liegen alle neuen Punkte, welche man auf diese Weise für die einzelnen Kegelschnitte erhält, nebst dem Punkte P stets auf einem und demselben Kegelschnitte. Waren die primären Kegelschnitte sämmtlich Hyperbeln, so ist der secundäre Kegelschnitt, welcher durch die einzelnen Punkte geht, stets eine Ellipse; waren jene Ellipsen, so ist der secundäre im Allgemeinen eine Hyperbel, statt deren man indessen, wenn der Punkt P auf einer der Mittellinien der zugeordneten Durchmesser liegt, (s. Lehrs. 1. Zus. 4.) zwei auf einander senkrechte Geraden erhält. Im Uebrigen sind die Beziehungen des secundären zu den primären Kegelschnitten ganz dieselben wie die bei den Sätzen 1 und 2 erwähnten.

Denn betrachtet man die Gleichung II in dem ersten der obigen Lehrsätze und die Gleichung III in dem zweiten derselben so erhält man durch die Division mit $A^2$

aus II

$$(y - m\beta)^2 - \frac{B^2}{A^2}(x - m\alpha)^2 = m^2\beta^2 - m^2\frac{B^2}{A^2} \cdot \alpha^2$$

und aus III

$$(y - m\beta)^2 + \frac{B^2}{A^2}(x - \alpha)^2 = m^2\beta^2 + m^2\frac{B^2}{A^2}\alpha^2$$

als die Gleichung des secundären Kegelschnittes, wenn man nur die Durchschnittspunkte der durch P gezogenen Geraden mit einem der primären Kegelschnitte betrachtet, je nachdem die primären

Kegelschnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind. Diese Gleichungen aber bleiben unverändert, so lange nur m, $\alpha$, $\beta$ und das Verhältniß $\frac{A}{B}$ unverändert bleiben, also erhält man für alle Kegelschnitte stets denselben secundären Kegelschnitt.

Zusatz. Ohne bei andern den obigen analogen Folgerungen zu verweilen, wollen wir doch folgenden interessanten Fall namhaft machen.

„Zieht man in der Ebene einer Reihe concentrischer Kreise durch irgend einen Punkt P zwei senkrechte Geraden, und verbindet ihre Durchschnittspunkte auf den einzelnen Kreisen durch Sehnen, so liegen die Mitten aller dieser Sehnen, die Mitten der Geraden selbst und das Centrum der Kreise M im Allgemeinen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der Mitte von PM liege, und deren Axen jenen Geraden parallel sind. In dem Falle, daß die durch P gezogenen Geraden vom Mittelpunkte M gleichweit abstehen, erhält man statt der gleichseitigen Hyperbel zwei auf einander senkrechte Geraden.

Düsseldorf im August 1841.