Programm

der

Realschule erster Ordnung

zu Düsseldorf,

mit welchem

zu den öffentlichen Prüfungen

am 27., 28. und 29. August 1868

im

Namen des Lehrer=Collegiums

ergebenst einladet

der

Director Dr. Franz Heinen.

Inhalt.

Düsseldorf,

Hofbuchdruckerei von Voß & Comp.

Ueber ein mechanisches Problem Joh. Bernoulli's.

Gelegentlich wurde meine Aufmerksamkeit auf ein Problem gelenkt, das Joh. Bernoulli aufgestellt hat. Es findet sich in seinen gesammelten Werken* Tom. IV. pag. 248 und lautet: Determinare curvam, quam describit corpus inclusum in tubo, qui in plano horizontaliter uniformiter movetur circa aliquem axem in ipso tubo sumptum. Supponitur corpus moveri posse sine ulla frictione. Interessant erschien mir dieses Problem zunächst wegen der Art und Weise, auf welche B. zu seiner Lösung gelangt; dann aber auch wegen des Charakters der sich ergebenden Bahnlinie und ihrer in die Augen springenden Beziehungen zur logarithmischen Spirale. Die Lösung, welche B. mit den damaligen Hülfsmitteln der Infinitesimalrechnung und der analytischen Mechanik giebt, beruht auf einer Reihe geistreicher Combinationen und scharfsinniger Schlüsse und fusst insbesondere auf einem eigens zu diesem Zwecke aufgestellten Lemma, das indess kaum von allgemeinerem Interesse ist. Er findet die Polargleichung der Trajectorie, wie folgt:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

Diese Gleichung ist bezogen auf den Drehpunkt der Röhre als Pol und auf die Anfangslage derselben als Fundamentallinie; x bezeichnet den Radiusvector; a ist der willkürliche Radius eines um den Pol beschriebenen Kreises, und die Variabele z giebt den auf der Peripherie dieses Kreises genommenen Bogen an, welcher dem Winkel entspricht, den die veränderliche Lage der Röhre mit der Fundamentallinie bildet; $\frac{z}{a}$ ist also das Mass dieses Winkels. Die Substitution von $z = 0$, welche dem Beginne der Bewegung entspricht, liefert für den Radiusvector den Werth 1, und in der That wird von B. vorausgesetzt, dass die anfängliche Entfernung des bewegten Körpers vom Drehpunkte gleich der Einheit sei. Für den Fall, dass diese Entfernung $= b$ genommen wird, findet sich bei B. die Gleichung:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + b^2 e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

welche aber für $z = 0$ den Werth $x = \frac{1}{2}(1 + b^2)$ liefert, also offenbar unrichtig ist. Der Fehler ist eine Folge der Vernachlässigung der Integrationsconstanten.

Die von B. gestellte Aufgabe erhält eine wesentliche Verallgemeinerung, wenn man annimmt, dass die Drehung der Röhre nicht in der Horizontalebene, sondern in der Weise Statt findet, dass sie um eine senkrechte Axe einen geraden Kegel beschreibt; obige Aufgabe ist dann der besondere Fall, wo der Winkel, den die Röhre mit jener senkrechten Axe bildet, einem Rechten gleich ist. Um die Aufgabe in der allgemeinsten Form hinzustellen, könnte man dann noch eine Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers voraussetzen, die z. B. durch ein vorangegangenes Herabfallen desselben in der Röhre entstanden wäre. Bei dem jetzigen Standpunkte der rationellen Mechanik, welche hinreichende Hülfsmittel zur systematischen Lösung dynamischer Aufgaben bietet, ist es leicht, B.'s Problem auch in jener allgemeinern

* Johannis Bernoulli Opera Omnia. Lausannae et Genevae MDCCXLII.

Form zu lösen. Der Umstand, dass die Linie doppelter Krümmung, die sich in der verallgemeinerten Aufgabe als Bahn des Beweglichen ergiebt, in nicht minder inniger Beziehung zur logarithmischen Spirale steht, sowie die Einfachheit des Gesetzes, welches für die Geschwindigkeit des bewegten Körpers in seiner Bahn aufgestellt werden kann, liessen es mir nicht unpassend erscheinen, die angestellten Berechnungen an dieser Stelle mitzutheilen.

Erweiterung des Problems und Lösung desselben.

Will man, von den oben angedeuteten Gesichtspunkten ausgehend, dem Probleme B.'s eine allgemeinere Fassung geben, so dürfte sich dasselbe zweckmässig, wie folgt, aussprechen lassen:

„Eine der Schwerkraft unterworfene Kugel von unendlich kleinem Durchmesser befindet sich in einer cylindrischen Röhre von demselben Durchmesser. Welche Bahn beschreibt die Kugel und nach welchen Gesetzen erfolgt ihre Bewegung, wenn die Axe des Cylinders einen geraden Kegel um eine lothrechte Linie beschreibt, wenn ferner für die Kugel die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der Cylinderaxe und für ihren Mittelpunkt die Entfernuug R_0 von der Spitze des Kegels vorausgesetzt und endlich von der Reibung zwischen der Kugel und der Röhre abgesehn wird.“

Wenden wir uns zur Lösung dieser Aufgabe, so ist zunächst klar, dass wir die Kugel, da ihr Durchmesser unendlich klein ist, als einen materiellen Punkt betrachten können, der in seiner Bewegung in der Weise beschränkt wird, dass er gezwungen ist, auf der Axe der Röhre zu bleiben, während diese den Kegel beschreibt. Die Lage des Punktes kann also von den ihn etwa angreifenden Kräften nur insofern verändert werden, als sie ihn in der Richtung der Cylinderaxe fortzubewegen streben. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Bahnlinie, welche der bewegte Punkt beschreibt, eine Spirale ist, welche in dem Mantel des von der Röhrenaxe erzeugten geraden Kegels liegt. Die Bestimmung dieser räumlichen Curve erfordert 2 Gleichungen, von denen des obigen Umstandes halber die eine durch die Gleichung des Kegels repräsentirt werden kann. Als zweite Gleichung lässt sich dann am zweckmässigsten die Gleichung für die Projection der Curve doppelter Krümmung auf eine durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene bestimmen. Setzt man die Geschwindigkeit, mit der die Röhre gedreht wird, als bekannt voraus, so lässt sich die Lage der Röhrenaxe für jede beliebige Zeit t sofort finden, und zur Bestimmung der Lage des bewegten Punktes würde es also genügen, seine Eutfernung R von der Spitze des Kegels als Function der Zeit auszudrücken. Die erwähnte Projection der Trajectorie ist ihrerseits auch eine Spirale, deren Gleichung wir deshalb auf Polarcoordinaten beziehn werden; es ist dann klar, dass der Radiusvector r dieser Curve die Projection von R ist. Die Bestimmung von R als Function der Zeit wird uns also auch zur Aufstellung jener Gleichung führen können. Die Entfernung des Beweglichen von der Spitze des Kegels ist nun aber lediglich durch diejenigen Kräfte bedingt, deren Richtung in die Cylinderaxe fällt, während alle Kräfte, deren Richtung senkrecht darauf ist, durch den Widerstand der Wände der Röhre vernichtet werden. Wir werden also alle an dem materiellen Punkte wirkenden Kräfte nach den angegebenen Richtungen in Seitenkräfte zerlegen und haben dann nur diejenigen Componenten in Rechnung zu bringen, welche in die Cylinderaxe fallen. Der Aufgabe gemäss ist die bewegte Kugel der Schwerkraft unterworfen, als deren Mass $g = 9,81^m$ gelten soll; sei nun α der constante Winkel, welchen die Erzeugungslinie mit der Axe des geraden Kegels bildet, so ist ersichtlich, dass die in der Richtung der Cylinderaxe genommene Componente der Schwerkraft $= g.\cos\alpha$ ist. Weiter ist nun in Betracht zu ziehn, in wiefern die Circulation des Cylinders sich an der Bewegung des Punktes in der Richtung der Röhrenaxe betheiligt. In Folge jener Bewegung des Cylinders wird aber der Punkt in jeder seiner Lagen mit gleichförmiger Geschwindigkeit Kreise zu beschreiben suchen, deren Radien die auf die Kegelaxe gefällten Perpendikel, und deren Mittelpunkte die Fusspunkte der letztern sind. Allgemein werden die Radien dieser Kreise durch $R \sin\alpha$ ausgedrückt. Die gleichförmige Bewegung der Cylinderaxe können wir nun so auffassen, dass wir sagen, die durch jene und die feste senkrechte Axe gelegte Ebene drehe sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die letztere. Bezeichnen wir dann den Neigungswinkel des in der Einheit der Zeit beschriebenen Raumwinkels, also die Winkelgeschwindigkeit, mit w, so ergiebt sich für die Geschwindigkeit, mit der der bewegte Punkt die betrachteten Kreise beschreibt der Ausdruck: $v =$

$w \,.\, R \,.\sin\alpha$; denn offenbar verhalten sich diese Geschwindigkeiten, da die ganzen Kreise in gleichen Zeiten beschrieben werden, wie die Radien, und für den Kreis, dessen Radius $= 1$, ist $v = w$. In Folge dieser Kreisbewegungen nun wird der Punkt das Bestreben haben, mit einer der Centrifugalkraft entsprechenden Geschwindigkeit sich von der Kegelaxe zu entfernen. Als Mass für diese beschleunigende Kraft gilt bekanntlich das Quadrat der Geschwindigkeit in der Bahn dividirt durch den Radius derselben, hier also $w^2 R \,.\sin\alpha$. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass wir diesen Ausdruck mit $\sin\alpha$ multipliciren müssen, um die hier in Rechnung zu bringende Componente der Centrifugalkraft zu erhalten. Da nun die Schwere und die Centrifugalkraft die einzigen Kräfte sind, welche den Voraussetzungen gemäss den Körper sollicitiren können, so ergiebt sich zur Bestimmung von R sofort die folgende Gleichung:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = g \,.\, \cos\alpha + w^2 \sin\alpha^2 \,.\, R \,.$$

Die Integration dieser Differenzialgleichung liefert:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = 2\, g \cos\alpha\, R + w^2 \sin^2\alpha\, R^2 + C$$

Die Constante C bestimmt sich hier durch die Erwägung, dass $\frac{dR}{dt}$ d. i. die Geschwindigkeit in der Richtung der Röhrenaxe für $R = R_0$ der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleich werden muss. Demnach ist

$$C = v_0^2 - 2\, g \cos\alpha \,.\, R_0 - w^2 \sin^2\alpha\, R_0^2$$

Die obige Gleichung gewinnt daher folgende Gestalt:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2$$

woraus nach Trennung der Veränderlichen folgt:

$$dt = \frac{dR}{\sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2}}$$

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha} \int \frac{dR}{\sqrt{R^2 - R_0^2 + \frac{2\, g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha}(R - R_0) + \frac{v_0^2}{w^2 \sin^2\alpha}}}$$

Die Integration dieses Integrals von der Form:

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a\, x + b}}$$

liefert aber:

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ \sqrt{R^2 - R_0 + \frac{2\, g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha}(R - R_0) + \frac{v_0^2}{w^2 \sin^2\alpha}} + R + \frac{g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha} \right\} + C =$$

$$\frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2} + w^2 \sin^2\alpha\, R + g \cos\alpha \right\} + C'$$

Da aber $R = R_0$ der Anfangslage entspricht, also für diesen Werth von R die Zeit t verschwinden muss, so hat man:

$$C' = -\frac{1}{w \sin\alpha}\, l \left\{ w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \cos\alpha \pm w \sin\alpha\, v_0 \right\}$$

Daher:

$$t = \frac{1}{w \sin\alpha}\, l\, \frac{\pm\, w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2} + w^2 \sin^2\alpha\, R + g \cos\alpha}{w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \cos\alpha \pm w \sin\alpha \,.\, v_0}$$

Gemäss der Bedeutung von log. nat. folgt hieraus die Gleichung:

$$e^{w \sin\alpha\, t}(w^2 \sin^2\alpha\, R_0 + g \,.\, \cos\alpha \pm w \sin\alpha \,.\, v_0) - (w^2 \sin^2\alpha\, R + g \,.\, \cos\alpha) =$$
$$\pm\, w \sin\alpha \sqrt{w^2 \sin^2\alpha\, (R^2 - R_0^2) + 2\, g \cos\alpha\, (R - R_0) + v_0^2}.$$

Qnadrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so findet man nach gehöriger Reduction und zweckmässiger Umformung R als Function der Zeit, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} R = \frac{1}{2}\Big\{ & e^{w \sin \alpha\, t}\left(R_0 + \frac{g \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right) + e^{-w \sin \alpha\, t} \\ & \left(R_0 + \frac{g\,.\cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \mp \frac{v_0}{w \sin \alpha}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}\Big\{\left(R_0 + \frac{g\,.\cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha}\right) \\ & \left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t}\right) \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha\, t}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \end{aligned}\right\} \ldots (1.)$$

Es wäre nun zunächst zu untersuchen, ob in diesem Ausdruck das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist. Da man aber α immer $< 90^0$, ferner v_0 positiv, d. h. in der Richtung der Cylinderaxe von der Spitze des Kegels aus genommen, voraussetzen darf, so ist klar, dass die Entfernung des Punktes von der Spitze des Kegels immer wachsen muss. Die rechte Seite in (1) muss also unter den angegebenen Beschränkungen für alle Werthe der Constanten R_0, v_0 und w einen Ausdruck ergeben, der $> R_0$ ist. Bestimmt man nun aber diese Constanten so, dass

$$R_0 = \frac{v_0}{w\,.\sin \alpha} - \frac{g\,.\cos \alpha}{w^2\,.\sin^2 \alpha}$$

so reducirt sich die Gleichung (1) auf die folgende:

$$R = \frac{1}{2}\,.\,\frac{v_0}{w \sin \alpha}\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t} \pm e^{w \sin \alpha\, t} \mp e^{-w \sin \alpha\, t}\right) + R_0 - \frac{v_0}{w \sin \alpha}\,.$$

Je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen genommen werden, erhält man hieraus:

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - 1\right) \text{ und}$$

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t}\left(e^{-w \sin \alpha\, t} - 1\right).$$

Da aber w, sin α und t immer positiv zu nehmen sind, so ist $e^{w \sin \alpha\, t} > 1$, dahingegen $e^{-w \sin \alpha\, t} < 1$. Nur das obere Vorzeichen liefert also für R einen Werth, der $> R_0$ ist, und es sind also in (1) die oberen Vorzeichen zu nehmen. Nunmehr ist es leicht, mit Hülfe von (1) die gesuchte Gleichung für die Projection der Bahnlinie auf eine durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene zu bestimmen. Die Polarcoordinaten dieser ebenen Curve seien r und ϑ; als Pol werde der Drehpunkt und als Fundamentallinie die Projection der Anfangslage der Cylinderaxe genommen. Dann ist ersichtlich, dass

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}\,;\ R_0 = \frac{r_0}{\sin \alpha}$$

Die Substitution dieser Werthe in (1) führt sogleich zu der Gleichung (2), welche r als Function der Zeit ausdrückt:

$$\left.\begin{aligned} r = \frac{1}{2}\Big\{ & e^{w \sin \alpha\, t}\left(r_0 + \frac{g \cot \alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-w \sin \alpha\, t}\,. \\ & \left(r_0 + \frac{g\,.\cot \alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cot \alpha}{w^2} \\ = \frac{1}{2}\Big\{ & \left(r_0 + \frac{g\,.\cot \alpha}{w^2}\right)\left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t}\right) \\ & + \frac{v_0}{w}\left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha\, t}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cot \alpha}{w^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Um nun noch ϑ als Function von t zu erhalten, darf man nur noch erwägen, dass der Leitstrahl r, als Projection der Cylinderaxe, sich ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung und mit derselben Winkelgeschwindigkeit w um den Pol dreht; dann ist einleuchtend, dass

$$\vartheta = w\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Qnadrirt man beide Seiten dieser Gleichung, so findet man
zweckmässiger Umformung R als Function der Zeit, wie folgt:

$$R = \frac{1}{2} \Big\{ e^{w \sin \alpha\, t} \left(R_0 + \frac{g \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha} \right) + e^{-w \sin}$$

$$\left(R_0 + \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} \mp \frac{v_0}{w \sin \alpha} \right) \Big\} - \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \Big\{ \Big(R_0 +$$

$$\left(e^{w \sin \alpha t} + e^{-w \sin \alpha t} \right) \pm \frac{v_0}{w \sin \alpha} \left(e^{w \sin \alpha t} - e^{-w \sin \alpha} \right.$$

Es wäre nun zunächst zu untersuchen, ob in diesem Ausdruc
zu nehmen ist. Da man aber α immer $< 90^0$, ferner v_0 positiv, d. h.
von der Spitze des Kegels aus genommen, voraussetzen darf, so ist klar,
von der Spitze des Kegels immer wachsen muss. Die rechte Seite in
benen Beschränkungen für alle Werthe der Constanten R_0, v_0 und w ein
ist. Bestimmt man nun aber diese Constanten so, dass

$$R_0 = \frac{v_0}{w \,.\, \sin \alpha} - \frac{g \,.\, \cos \alpha}{w^2 \,.\, \sin^2 \alpha}$$

so reducirt sich die Gleichung (1) auf die folgende:

$$R = \frac{1}{2} \,.\, \frac{v_0}{w \sin \alpha} \left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t} \pm e^{w \sin} \right.$$

$$+ R_0 - \frac{v_0}{w \sin \alpha} \,.$$

Je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen genommen we

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t} \left(e^{w \sin \alpha\, t} - 1 \right)$$

$$R = R_0 + \frac{v_0}{w \sin \alpha\, t} \left(e^{-w \sin \alpha\, t} - 1 \right.$$

Da aber w, sin α und t immer positiv zu nehmen sind, so ist e
$e^{-w \sin \alpha\, t} < 1$. Nur das obere Vorzeichen liefert also für R einen
sind also in (1) die oberen Vorzeichen zu nehmen. Nunmehr ist es leicht,
Gleichung für die Projection der Bahnlinie auf eine durch die Spitze des
zu bestimmen. Die Polarcoordinaten dieser ebenen Curve seien r und ϑ
und als Fundamentallinie die Projection der Anfangslage der Cylinderaxe
dass

$$R = \frac{r}{\sin \alpha} \; ; \; R_0 = \frac{r_0}{\sin \alpha}$$

Die Substitution dieser Werthe in (1) führt sogleich zu der Gleichung (2), welche r als Function der Zeit ausdrückt:

$$\left.\begin{aligned} r = \frac{1}{2} \Big\{ & e^{w \sin \alpha\, t} \left(r_0 + \frac{g \cot \alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w} \right) + e^{-w \sin \alpha\, t} \,. \\ & \left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w} \right) \Big\} - \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} \\ = \frac{1}{2} \Big\{ & \left(r_0 + \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} \right) \left(e^{w \sin \alpha\, t} + e^{-w \sin \alpha\, t} \right) \\ & + \frac{v_0}{w} \left(e^{w \sin \alpha\, t} - e^{-w \sin \alpha\, t} \right) \Big\} - \frac{g \,.\, \cot \alpha}{w^2} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Um nun noch ϑ als Function von t zu erhalten, darf man nur noch erwägen, dass der Leitstrahl r, als Projection der Cylinderaxe, sich ebenfalls mit gleichförmiger Bewegung und mit derselben Winkelgeschwindigkeit w um den Pol dreht; dann ist einleuchtend, dass

$$\vartheta = w\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ch jetzt t eliminiren, und so gelangt man zu der nachstehenden Gleichung, er Bahnlinie, auf Polarcoordinaten bezogen, darstellt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\cot \alpha}{w^2}\Big)\left(e^{\sin\alpha\,.\,\vartheta} + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\right) \\ .\,\vartheta - e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\Big)\Big\{-\frac{g\,.\cot\alpha}{w^2}\,. \\ \left(r_0 + \frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta} \\ \frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\Big)\Big\{-\frac{g\,.\,\cot\alpha}{w^2}\,. \end{array}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

ı einer Erörterung dieser Gleichung und der Construction der durch sie zur vollständigen Lösung der Aufgabe nur noch übrig, einen allgemeinen t zu gewinnen, mit welcher der materielle Punkt seine Bahn beschreibt. so kann man v als Funktion von R, r, ϑ oder t ausdrücken. Am einwir v als Funktion von r auffassen; derselbe ist deshalb um so eher ausn Gleichungen leicht ist, durch passende Elimination von r die Beziehungen Veränderlichen zu ermitteln. Betrachtet man den Punkt in irgend einer }eschwindigkeit: die eine $= \frac{d\ R}{dt}$ in der Richtung der Cylinderaxe, die der Tangente des durch seine Lage gehenden, zur Axe senkrechten ungen stehen mithin auf einander senkrecht und es ist daher:

$$v^2 = \left(\frac{d\ R}{d\ t}\right)^2 + w^2\,r^2\,.$$

$$w^2 \sin^2 \alpha\,(R^2 - R_0^{\ 2}) + 2\ g\,.\,\cos\alpha\,(R - R_0) + v_0^{\ 2}$$

ıer, dass

$$r = R\,.\,\sin\alpha$$

$$- r_0^{\ 2}) + 2\ g\,.\,\cot\alpha\,(r - r_0) + v_0^{\ 2} + w^2\,r^2$$

$$2\ r^2 - r_0^{\ 2} + \frac{2\,g\,.\,\cot\alpha}{w^2}\,(r - r_0) + \frac{v^2}{w^2}\ .\ .\ .\ (5)$$

...n und Untersuchung der Bahncurve.

Behufs Untersuchung der Bahnlinie, deren Gleichung wir im vorigen Abschnitte gefunden haben, erscheint es zweckmässig, vom Besondern zum Allgemeinen fortzuschreiten, also zunächst gewisse ausgezeichnete Fälle und dann erst die Gleichung in ihrer allgemeinsten Form zu betrachten. Am nächsten liegt der Gedanke, die Gleichung auf den Fall anzuwenden, welcher der von B. gestellten Aufgabe entsprechen würde. Man hat zu diesem Ende in (4) nur

$$\alpha = 90^0\ ;\ v_0 = 0$$

zu substituiren, wodurch man erhält:

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

$$\text{oder } r = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right), \text{ wenn } r_0 = 1 \text{ genommen wird.}$$

Die letzte Gleichung entspricht genau der in der Einleitung S. 1 angeführten und von B. gefundenen Gleichung; denn es leuchtet ein, dass $\vartheta = \frac{z}{a}$ ist. Die Gleichung (6) hingegen zeigt uns, Aus (2) und (3) lässt sich jetzt t eliminiren, und so gelangt man zu der nachstehenden Gleichung, welche die Horizontalprojection der Bahnlinie, auf Polarcoordinaten bezogen, darstellt:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\Big\{\left(r_0 + \frac{g\,.\cot\alpha}{w^2}\right)\left(e^{\sin\alpha\,.\,\vartheta} + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\right) \\ &\qquad + \frac{v_0}{w}\left(e^{\sin\alpha\,.\,\vartheta} - e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cot\alpha}{w^2}\,. \\ &= \frac{1}{2}\Big\{e^{\sin\alpha\,.\,\vartheta}\left(r_0 + \frac{g\,.\cot\alpha}{w^2} + \frac{v_0}{w}\right) + e^{-\sin\alpha\,.\,\vartheta} \\ &\qquad \left(r_0 + \frac{g\,.\cot\alpha}{w^2} - \frac{v_0}{w}\right)\Big\} - \frac{g\,.\cot\alpha}{w^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Sieht man vorläufig von einer Erörterung dieser Gleichung und der Construction der durch sie dargestellten Curve ab, so bleibt zur vollständigen Lösung der Aufgabe nur noch übrig, einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu gewinnen, mit welcher der materielle Punkt seine Bahn beschreibt. Bezeichnen wir dieselbe mit v, so kann man v als Funktion von R, r, ϑ oder t ausdrücken. Am einfachsten wird der Ausdruck, wenn wir v als Funktion von r auffassen; derselbe ist deshalb um so eher ausreichend, als es mit Hülfe der obigen Gleichungen leicht ist, durch passende Elimination von r die Beziehungen zwischen v und einer der andern Veränderlichen zu ermitteln. Betrachtet man den Punkt in irgend einer Lage, so hat er eine doppelte Geschwindigkeit: die eine $= \frac{d\,R}{dt}$ in der Richtung der Cylinderaxe, die andere $=$ w r in der Richtung der Tangente des durch seine Lage gehenden, zur Axe senkrechten Durchschnittskreises; beide Richtungen stehen mithin auf einander senkrecht und es ist daher:

$$v^2 = \left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)^2 + w^2\,r^2\,.$$

Auf S. 3 fanden wir:

$$\left(\frac{d\,R}{dt}\right)^2 = w^2 \sin^2\alpha\,(R^2 - R_0{}^2) + 2\,g\,.\cos\alpha\,(R - R_0) + v_0{}^2$$

Berücksichtigt man ferner, dass

$$r = R\,.\sin\alpha$$

so erhält man:

$$v^2 = w^2\,(r^2 - r_0{}^2) + 2\,g\,.\cot\alpha\,(r - r_0) + v_0{}^2 + w^2\,r^2$$

$$v = w\sqrt{2\,r^2 - r_0{}^2 + \frac{2\,g\,.\cot\alpha}{w^2}(r - r_0) + \frac{v^2}{w^2}} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Construction und Untersuchung der Bahncurve.

Behufs Untersuchung der Bahnlinie, deren Gleichung wir im vorigen Abschnitte gefunden haben, erscheint es zweckmässig, vom Besondern zum Allgemeinen fortzuschreiten, also zunächst gewisse ausgezeichnete Fälle und dann erst die Gleichung in ihrer allgemeinsten Form zu betrachten. Am nächsten liegt der Gedanke, die Gleichung auf den Fall anzuwenden, welcher der von B. gestellten Aufgabe entsprechen würde. Man hat zu diesem Ende in (4) nur

$$\alpha = 90^0\,;\; v_0 = 0$$

zu substituiren, wodurch man erhält:

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\text{oder } r = \frac{1}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right), \text{ wenn } r_0 = 1 \text{ genommen wird.}$$

Die letzte Gleichung entspricht genau der in der Einleitung S. 1 angeführten und von B. gefundenen Gleichung; denn es leuchtet ein, dass $\vartheta = \frac{z}{a}$ ist. Die Gleichung (6) hingegen zeigt uns, dass an Stelle der von B. für den allgemeinern Fall, dass $r_0 = b$ ist, gefundenen Gleichung:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + b^2 e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

die folgende zu setzen ist:

$$x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

Diese liefert in der That für $z = 0$ den Werth $x = b$, was den Voraussetzungen entspricht. Die Gleichung (6) enthält nicht die Constante der Winkelgeschwindigkeit; wie also auch diese sich ändert, die Bahn des Punktes bleibt dieselbe, so lange die Anfangslage nicht verändert wird. Dieselbe Gleichung liefert $r = 0$ für den Fall, dass $r_0 = 0$ genommen wird. Wenn daher der Punkt beim Beginne der Bewegung sich im Drehpunkte befindet, so reducirt sich die Bahn auf diesen Punkt, d. h. es findet gar keine Bewegung statt. Dieser Umstand stimmt genau damit überein, dass in diesem Falle die Centrifugalkraft verschwindet und die Wirkung der Schwerkraft durch die horizontale Lage der Röhre vernichtet wird. Aus der Gleichung

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right)$$

ist ersichtlich, dass r mit ϑ ins Unendliche wächst, dass ferner zu jedem reellen Werthe von ϑ ein reeller Werth von r und zwar nur ein einziger existirt; die Curve ist demnach eine Spirale. Positive und negative, wenn nur absolut gleiche Werthe von ϑ liefern denselben Werth für r, woraus folgt, dass die Curve zwei congruente Aeste hat, wovon der eine den positiven, der andere den negativen Werthen von ϑ entspricht. Der bewegte Körper beschreibt natürlich immer nur einen der beiden Aeste, je nachdem die Drehung in dem einen oder andern Sinne erfolgt.

Für die Construction der Curve ist der bequemste Weg, den auch B. vorschlägt, durch die Gleichung selbst gegeben. Construirt man nämlich die Curve, deren Gleichung

$$r = r_0\, e^{\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

ist und sucht die zu demselben, einmal positiv, einmal negativ genommenen, Winkel ϑ gehörigen Radienvectoren, so findet man den Radiusvector der gesuchten Curve zu demselben positiven oder negativen Werthe von ϑ als das arithmetische Mittel jener beiden Werthe von r.

Die Curve nun, um deren Construction es sich zunächst handeln würde, ist als logarithmische Spirale hinlänglich bekannt. Aus Gleichung (6) und (7) erkennt man sofort, dass die beiden Curven den Punkt gemein haben, welcher der Anfangslage des bewegten Körpers entspricht. Aus der Gleichung (7) ist ferner ersichtlich, dass r mit positivem ϑ ins Unendliche wächst, mit negativem ϑ hingegen kleiner wird, um sich für $\vartheta = -\infty$ der Null zu nähern. Die logarithmische Spirale macht also von dem Punkt ($\vartheta = 0$; $r = r_0$) aus nach derSeite der positiven ϑ eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol, von dem sie sich stets weiter entfernt, während sie nach der Seite der negativen ϑ in einer ebenfalls unendlichen Zahl von Windungen dem Pole fortwährend näher kommt, ohne ihn jedoch zu erreichen. Zu den bekannten Eigenschaften dieser Curve gehört ferner, dass ihre Tangente einen constanten Winkel mit dem Radiusvector bildet. In unserm Falle ist dieser Winkel $= 45^0$; denn bezeichnet man denselben mit ω, so ist:

$$\cot\omega = \frac{1}{r}\,\frac{d\,r}{d\vartheta} = \frac{1}{r_0\, e^{\vartheta}} \cdot r_0\, e^{\vartheta} = 1.$$

Eine weitere Eigenschaft dieser Spirale, die zugleich für die Construction derselben einen Anhaltspunkt bietet, ist nicht minder bekannt und leicht nachweisbar. Wenn nämlich ϑ in arithmetischer Progression zunimmt, so wächst der Radiusvector in geometrischer Progression und zwar so, dass e^{δ} der Quotient der letztern ist, während δ die Differenz der arithmetischen Reihe darstellt. Setzt man also ϑ der Reihe nach $= 0, \delta, 2\,\delta \ldots$ so wird $r = r_0 , r_0\, e^{\delta} , r_0\, e^{2\,\delta} \ldots\ldots$

In Fig. 1 stelle nun die Curve CABE die logarithmische Spirale dar, welche der Gleichung (7) entspricht. C sei der Pol und C X die Fundamentallinie, so dass $C\,A = r_0$ ist. Es ist dann leicht, beliebig viele Punkte der Bahnlinie auf dem oben bezeichneten Wege zu finden. Macht man zum Beispiel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB'$, verlängert CB um $Bm = CB'$ und halbirt endlich Cm, so ist M ein Punkt der Trajectorie; durch Wiederholung der Construction ergeben sich in gleicher Weise die Punkte N und Q. Die dem negativen Curvenaste angehörenden, entsprechenden Punkte sind M', N', Q', wenn $CM' = CM$, $CN' = CN$ und $CQ' = CQ$ gemacht wird.

Bei A gehn die Curvenäste in einander über und haben hier eine gemeinsame Tangente, welche auf dem Radiusvector senkrecht steht, so dass also $\sphericalangle T'AX$ von tt', der Tangente der logarithmischen Spirale halbirt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Gleichung

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$$

wenn wir darin aus Gleichung (6)

$$r = \frac{r^0}{2}\left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}\right) \text{ und } \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r_0}{2}\left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}\right)$$

substituiren. Es wird dann

$$\cot \omega = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}} = \frac{e^{2\vartheta} - 1}{e^{2\vartheta} + 1}$$

Dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht $\cot \omega = 0$, also $\omega = 90^0$. Allgemein wächst $\cot \omega$ mit ϑ ununterbrochen und nähert sich der Grenze 1, so dass also der Neigungswinkel der Tangente innerhalb der Grenzen $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ von 90^0 bis 45^0 abnimmt, ohne den letztern Werth zu überschreiten. Wenn $\vartheta = \infty$ genommen wird, so läuft also die Tangente der Bahnlinie mit derjenigen der logarithmischen Spirale parallel, und aus den Gleichungen der beiden Curven ist ersichtlich, dass man dann den Radiusvector der Trajectorie als die Hälfte desjenigen der logarithmischen Spirale ansehn kann. Aus der Formel für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - r\,\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}}$$

gewinnt man durch Substitution der Werthe von r, $\frac{dr}{d\vartheta}$ und $\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}$ aus (6) die Gleichung:

$$\rho = \frac{(2\,r^2 - r_0^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,(r^2 - r_0^2)}.$$

Dem Werthe $r = r_0$ entspricht für den Krümmungshalbmesser der Werth $r = \infty$. Im Punkte A ist demnach die Krümmung der Curve unendlich klein. Der Krümmungshalbmesser ist ein Minimum, die Krümmung also am stärksten für den Werth von r, welcher sich aus der Gleichung $\frac{d\rho}{dr} = 0$ ergiebt.

Setzt man aber

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{12\,r\,(r^2 - r_0^2)\,(2\,r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} - (2\,r^2 - r_0^2)^{\frac{3}{2}}\,4\,r}{4\,(r^2 - r_0^2)^2} = 0$$

so folgt:

$$3\,(r^2 - r_0^2) = 2\,r^2 - r_0^2$$
$$r = r_0\,\sqrt{2}$$

Die Curvengleichung liefert hierzu:

$$\vartheta = l(1 + \sqrt{2}) = 0{,}8813736.$$

Dieser ausgezeichnete Punkt der Curve entspricht also den obigen Coordinaten; der Neigungswinkel seines Radiusvectors ist demnach wenig grösser, als $\frac{\pi}{4}$. Von diesem Punkte an, in welchem der Krümmungshalbmesser den Minimalwerth

$$\rho = \frac{3\,r_0\,\sqrt{3}}{2}$$

erreicht hat, nimmt ρ wieder zu und wird die Krümmung ununterbrochen schwächer. Diese Bemerkungen über die durch Gleichung (6) dargestellte Curve mögen genügen. Setzt man in (4) nur $\alpha = 90^0$, ohne v_0 verschwinden zu lassen, so erhält man die Gleichung:

$$r = \frac{1}{2} \left\{ r_0 \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Eine sehr einfache Form nimmt diese Gleichung an, wenn die Constanten derselben so bestimmt werden, dass

$$r_0 = \frac{v_0}{w} .$$

Dann erhält man nämlich

$$r = r_0 \, . \, e^{\vartheta} ,$$

und in diesem Falle ist also die oben besprochene logarithmische Spirale selbst die Bahn des bewegten Körpers.

Nimmt man endlich noch an, dass die Kugel beim Beginne der Bewegung im Drehpunkt sich befinde und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 habe, so hat man in (8) $r_0 = 0$ zu setzen und erhält:

$$r = \frac{v_0}{2w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Hier findet also, wie man im Voraus erwarten durfte, im Gegensatz zu dem auf S. 6 betrachteten Falle eine Bewegung Statt. Zur Construction der Curve mit obiger Gleichung lässt sich die Spirale

$$r = \frac{v_0}{w} \, . \, e^{\vartheta}$$

in ähnlicher Weise verwenden, wie oben die Gleichung (7) zur Construction von (6) benutzt wurde. Diese Spirale geht durch den Pol und hat in diesem Punkte die Fundamentallinie zur Tangente. Denn es ist:

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}$$

woraus folgt

$$\cot \omega = \infty \, , \text{ also } \omega = 0 \, , \text{ wenn } \vartheta = 0$$
$$\cot \omega = 1 \, , \text{ also } \omega = 45^0 , \text{ wenn } \vartheta = \infty \, .$$

Nunmehr ist sofort ersichtlich, wie man die Curve der allgemeinen Gleichung (8) construiren kann, nachdem man vorher in der angegebenen Weise die Construction der Gleichungen (6) und (9) ausgeführt hat. Diese neue Spirale durchschneidet, wie die zuerst betrachtete, die Fundamentallinie in der Entfernung r_0 vom Pole, ihre Tangente ist aber in diesem Punkte nicht senkrecht zur Fundamentallinie, sondern bildet mit ihr einen Winkel, der von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit und von den übrigen Constanten des Problems abhängig ist. Man findet nämlich:

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r_0 \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right)}{r_0 \left(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta} \right) + \frac{v_0}{w} \left(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} \right)} .$$

$$\cot \omega = \frac{v_0}{w \, r_0} , \text{ wenn } \vartheta = 0.$$

In den bisher betrachteten Fällen war die Bahnlinie selbst eine ebene Curve; jetzt werden wir solche Fälle ins Auge zu fassen haben, in welchen die Drehung der Röhre nicht mehr in der Horizontalebene Statt findet, sondern dieselbe, wie es in der verallgemeinerten Aufgabe vorgesehn, einen geraden Kegel beschreibt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man in (4) $\alpha < 90^0$ voraussetzt. Die Trajectorie ist dann eine räumliche Curve, zu deren Construction ihre Projection auf die Horizontalebene dienen kann. Was den Gang der Untersuchungen betrifft, so erscheint es zweckmässig, zunächst die Projection der Bahnlinie als ebene Curve in ähnlicher Weise, wie dies oben geschehn, zu construiren und zu betrachten, und hiernach die Neigungsverhältnisse der Tangente an die räumliche Curve selbst zu erörtern. Um auch hier wieder von besondern Fällen auszugehn, werde zunächst vorausgesetzt, dass der bewegte Körper keine Anfangsgeschwindigkeit habe. Man erhält dann durch Substitution von $v_0 = 0$ aus (4) die folgende Gleichung, welche die Projection der Bahnlinie darstellt:

$$r = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2}\right)\left(e^{\sin \alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin \alpha \cdot \vartheta}\right) - \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Setzt man hierin noch $r_0 = 0$, so ist

$$r = \frac{g \cdot \cot \alpha}{2\, w^2}\left(e^{\sin \alpha \cdot \vartheta} + e^{-\sin \alpha \cdot \vartheta}\right) - \frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Also auch in dem Falle, dass der bewegte Körper beim Beginne der Bewegung sich im Drehpunkte befindet, erfolgt eine Bewegung desselben. Wenn auch in diesem Punkte die Centrifugalkraft verschwindet, so gilt dies an dieser Stelle nicht von der Schwere, welche vielmehr den Körper in der Richtung der Cylinderaxe forttreibt und so gleichsam seine Bewegung einleitet, während derselbe im weiteren Verlaufe seiner Bahn auch den Einwirkungen der Centrifugalkraft unterworfen ist. — Da $\alpha < 90^0$ gesetzt ist, so sind $\cot \alpha$ und $\sin \alpha$ immer positiv, und es lässt sich also

$$\frac{g \cdot \cot \alpha}{w^2} = \mu \; ; \; \sin \alpha = \nu$$

setzen, wo μ und ν positive Grössen sind. Dann gewinnt die Gleichung (11) die einfachere Form

$$r = \frac{\mu}{2}\left(e^{\nu \vartheta} + e^{-\nu \vartheta}\right) - \mu \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung ist sofort ersichtlich, dass die durch sie dargestellte Curve durch den Pol geht und um denselben eine unendliche Anzahl von Windungen macht, indem sie sich gleichzeitig immer weiter von ihm entfernt. Die Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der Gleichung (6) weist darauf hin, dieselbe in ähnlicher Weise zu behandeln. Demnach haben wir zu ihrer Construction eine Curve zu Hülfe zu nehmen, deren Gleichung:

$$r = \mu \cdot e^{\nu \vartheta}$$

ist. Diese Gleichung stellt aber eine logarithmische Spirale dar von allgemeinerer Form, als die früher untersuchte. Die oben charakterisirten Eigenschaften gelten auch für diese Spirale; nur ist zu bemerken, dass der constante Winkel, den ihre Tangente mit dem Radiusvector bildet, nicht $= 45^0$ ist. Denn bezeichnet man denselben mit ω, so ist

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{\mu\,\nu \cdot e^{\nu \vartheta}}{\mu\, e^{\nu \vartheta}} = \nu$$

und da $\nu = \sin \alpha \begin{smallmatrix} < 1 \\ > 0 \end{smallmatrix}$, so wird ω zwischen den Grenzen 45^0 und 90^0 liegen.

In Fig. 2 sei Q M O M′ Q′ die logarithmische Spirale, welche durch obige Gleichung dargestellt wird. Dieselbe durchschneidet die Fundamentallinie C X in der Entfernung $C\,O = \mu$ vom Pole. Trägt man nun zu beiden Seiten der C X paarweise gleiche Winkel an und wiederholt dieselbe Construction, wie oben, so erhält man die Punkte m′, n′, q′, welche einer Curve angehören, deren Gleichung

$$r = \frac{\mu}{2}\left(e^{\nu \vartheta} + e^{-\nu \vartheta}\right)$$

sein würde. Beschreibt man jetzt noch mit C O einen Kreis um C, welcher die Radienvectoren in den Punkten h, h′, h″ schneidet, und trägt endlich die Strecken m′ h, n′ h′, q′ h″ von C aus auf den entsprechenden Leitstrahlen ab, so ist ersichtlich, dass die so erhaltenen Punkte der Gleichung (12) entsprechen.

Auch diese Kurve hat zwei congruente Aeste, deren Verlauf in der Figur angedeutet ist. Ist q″ ein Punkt des positiven Curvenastes, so ist q‴ der entsprechende Punkt des negativen Astes, wenn C q″ = Cq‴ gemacht wird.

Zur Ergänzung dieser Construction müsste noch gezeigt werden, dass die Punkte m′, n′, q′ ausserhalb des mit C O um C beschriebenen Kreises fallen und die zu bildenden Differenzen also positiv sind. Dies folgt aber aus der schon oben erwähnten Eigenschaft der logarithmischen Spirale, wonach die

Radienvectoren in geometrischer Proportion stehn, wenn die Winkel in arithmetischer Proportion wachsen. Aus diesem Gesetze ergeben sich nachstehende Proportionen:

$$CM : CO = CO : CM'$$
$$CN : CO = CO : CN'$$
$$CQ : CO = CO : CQ'$$

Da nun aber in jeder stetigen Proportion die mittlere Proportionale kleiner ist, als die halbe Summe der beiden andern Glieder, so ist:

$$CO < \frac{CM + CM'}{2} \text{ d. i.} < Cm'$$
$$CO < \frac{CN + CN'}{2} \text{ d. i.} < Cn'$$
$$CO < \frac{CQ + CQ'}{2} \text{ d. i.} < Cq'.$$

Für den Neigungswinkel der Tangente an die Curve, ergiebt sich aus (12):

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)\nu}{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - 2}.$$

Dieser Ausdruck nimmt zwar für $\vartheta = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, jedoch erhält man durch Differenziation des Zählers und Nenners den Quotienten $\frac{\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)\nu}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}}$, welcher für $\vartheta = 0$ unendlich wird. Zu dem Werthe $\vartheta = 0$ gehört also $\cot \omega = \infty$ und $\omega = 0$ d. h. die Fundamentallinie ist Tangente an beide Curvenäste. Im Unendlichen nähert sich $\cot \omega$ der Grenze ν, und die Tangente läuft dann parallel mit derjenigen der logarithmischen Spirale. — Die oben construirte Curve ist die Projection der Trajectorie in dem Falle, dass der Körper sich beim Beginne der Bewegung in der Spitze des Kegels befindet. Diese Curve selbst führt zur Construction der allgemeineren Gleichung (10), welche durch obige Abkürzungen die nachstehende Form erhält:

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (13)$$

In Fig. 2 werde wiederum $AC = r_0$ genommen, und die Curve $EDAD'E'$ stelle die logarithmische Spirale dar, deren Gleichung

$$r = r_0 e^{\nu\vartheta}$$

ist. Macht man dann $Bb = CB'$, $Dd = CD'$ und $Ee = CE'$ und halbirt Cb, Cd und Ce in den Punkten b', d', e', so ist, wenn man noch die Winkel mCX, nCX, qCX mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 bezeichnet,

$$Cb' = \frac{r_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_1} + e^{-\nu\vartheta_1}\right); \ Cd' = \frac{r_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_2} + e^{-\nu\vartheta_2}\right);$$
$$Ce' = \frac{r_0}{2}\left(e^{\nu\vartheta_3} + e^{-\nu\vartheta_3}\right)$$

und daher

$$CF = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_1} + e^{-\nu\vartheta_1}\right) - \mu; \ CG = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_2} + e^{-\nu\vartheta_2}\right) - \mu;$$
$$CH = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta_3} + e^{-\nu\vartheta_3}\right) - \mu$$

sobald man $b'F = hm'$, $d'G = h'n'$ und $e'H = h''q'$ macht. So also sind F, G, H als Punkt der gesuchten Curve gefunden und ist es leicht, auch den congruenten negativen Curvenast zu construiren.

Um auch für diese Curve den Neigungswinkel der Tangente gegen den Radiusvector zu berechnen, hat man in

$$\cot \omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta}$$

folgende Werthe zu substituiren:

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu$$

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{\nu\,(r_0 + \mu)}{2}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\cot \omega = \frac{\nu\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)}{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}$$

Setzt man hierin $\vartheta = 0$, so wird $\cot \omega = 0$ und $\omega = 90^0$.

Im Punkte A steht also die Tangente wiederum senkrecht auf der Fundamentallinie.

Die beiden zuletzt gegebenen Constructionen genügen, um sofort erkennen zu lassen, in welcher Weise die Gleichung (4) zu behandeln ist, welche die Projection der Bahnlinie im allgemeinsten Falle des Problems darstellt. Hier mögen deshalb nur wenige kurze Andeutungen Platz finden. Durch Einführung der Constanten μ und ν gewinnt die Gleichung (4) die Form:

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Diese Gleichung kann mit Hülfe der Curve, welche der Gleichung (12) entspricht, und der logarithmischen Spirale von der Gleichung

$$r = \frac{v_0}{w}\, e^{\nu\vartheta}$$

leicht construirt werden. Diese Spirale schneidet die Fundamentallinie in der Entfernung r_0 vom Pole und wenn ω wiederum den Neigungswinkel der Tangente bezeichnet, so ist

$$\cot \omega = \frac{\nu \cdot v_0}{r_0 \cdot w}, \text{ wenn } \vartheta = 0;$$

$$\cot \omega = \nu, \quad \text{wenn } \vartheta = \infty.$$

Durch eine zweckmässige Bestimmung der Constanten, lässt sich auch der Gleichung (14) eine sehr einfache Form geben. Setzt man nämlich

$$r_0 + \mu = \frac{v_0}{w}$$

so erhält man

$$r = (r_0 + \mu)\, e^{\nu\vartheta} - \mu \text{ oder}$$

$$r = \frac{v_0}{w}\, e^{\nu\vartheta} - \left(\frac{v_0}{w} - r_0\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{v_0\,\nu}{w} \cdot e^{\nu\vartheta} \text{ und daher wiederum}$$

$$\cot \omega = \frac{\nu \cdot v_0}{r_0 \cdot w}, \text{ wenn } \vartheta = 0;$$

$$\cot \omega = \nu, \quad \text{wenn } \vartheta = 0.$$

Durch die in diesem Abschnitte gegebenen und angedeuteten Constructionen sind alle in der Gleichung (4) begriffenen Fälle erschöpft, und es ist damit der Weg gezeigt, wie man in jedem einzelnen Falle zur graphischen Darstellung der auf die Horizontalebene projicirten Bahnlinie gelangen kann. Zu jedem Punkte der Horizontalprojection ergiebt sich auf einfache Weise der entsprechende Punkt der räumlichen Trajectorie.

Die folgenden Untersuchungen nun sollen sich auf die Neigungsverhältnisse der Tangente an die räumliche Curve selbst beziehn und werden also über den Verlauf der letztern weitern Aufschluss geben.

Wenn man den geraden Kegel, den die Cylinderaxe erzeugt, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezieht, und zwar so, dass seine Spitze als Ursprung, seine Axe als positive Z-Axe, die Projection der Anfangslage der Röhre auf die durch die Spitze des Kegels gelegte Horizontalebene als X-Axe und die in der Horizontalebene darauf errichtete Senkrechte als Y-Axe genommen wird, so ist die Gleichung des Kegels:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

worin $a = \mathrm{tag}\,\alpha$ d. i. gleich der trigonometrischen Tangente der halben Kegelöffnung zu setzen ist. Es sei nun (Fig. 3) M ein Punkt der Curve und CD und CF die Geraden, in welchen eine durch M und die Axe CZ gelegte Ebene die Kegeloberfläche schneidet. Ist dann ferner TT′ die Tangente an die Bahnlinie im Punkte M, so ist klar, dass dieselbe in der durch M an die Kegeloberfläche gelegten Tangentialebene liegen muss. Fällt man nun noch von M das Perpendikel MA auf die Axe und errichtet in der durch M gelegten Horizontalebene die Senkrechte EE′ auf MA, so geht die Berührungsebene der Kegeloberfläche durch die Gerade EE′ und die Erzeugungslinie CD; mit diesen beiden Linien liegt also TT′ in derselben Ebene.

Die Neigungswinkel der TT′ zu den drei durch C gelegten Coordinatenaxen sollen nun durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnet werden; dann ist nach bekannten Formeln:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{V};\ \cos\beta_1 = \frac{\frac{dy}{dx}}{V};\ \cos\gamma_1 = \frac{\frac{dz}{dx}}{V}$$

wenn wir abkürzend $V = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ setzen. Die hier vorkommenden Differenzialquotienten sind zu entnehmen aus den beiden Gleichungen der Bahncurve, nämlich aus:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$r = \frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Die erste liefert bei der Differenziation nach x:

$$x + y\,.\,\frac{dy}{dx} = a^2 z\,\frac{dz}{dx},\ \text{oder}\ \frac{dz}{dx} = \frac{x + y\,\frac{dy}{dx}}{a^2 z}.$$

$\frac{dy}{dx}$ muss aus der Gleichung (16) gefunden werden; diese Gleichung ist aber auf Polarcoordinaten bezogen, und es ist desshalb nöthig, mit Hülfe der Gleichungen

$$x = r\,.\,\cos\vartheta;\ y = r\,.\,\sin\vartheta$$

$\frac{dy}{dx}$ durch die Variabeln r, ϑ und ihre Differenzialquotienten auszudrücken. Differenziirt man zu dem Ende die letzten Gleichungen nach ϑ, so hat man:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \cos\vartheta\,\frac{dr}{d\vartheta} - r\,.\,\sin.\,\vartheta;\ \frac{dy}{d\vartheta} = \sin\vartheta\,\frac{dr}{d\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta.$$

und hieraus erhält man durch Division:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\vartheta\,.\,\frac{dr}{d\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta}{\cos\vartheta\,\frac{dr}{d\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta}.$$

In dem Dreiecke ACM ist nun $AM = AC\,.\,\mathrm{tag}\,\alpha = AC\,.\,a$. Aus der Figur ist aber klar, dass $AM = CM' = r$ und $AC = z$ ist, woraus $r = a\,.\,z$ folgt. Nunmehr erhält man für $\frac{dz}{dx}$ folgenden Ausdruck:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r\,.\,\cos\vartheta\left(\cos\vartheta\,.\,\frac{dr}{d\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta\right) + r\sin\vartheta\left(\sin\vartheta\,\frac{dr}{d\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta\right)}{a\,r\left(\cos\vartheta\,.\,\frac{dr}{d\vartheta} - r\sin\vartheta\right)};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{a\left(\cos\vartheta\,\frac{dr}{d\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta\right)}.$$

Die so gefundenen Werthe für $\frac{d\,y}{d\,x}$ und $\frac{d\,z}{d\,x}$ substituire man nun in die obigen Formeln, so wird

$$V = \frac{\sqrt{\left(\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta\right)^2 + \left(\sin\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2}}{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) + r^2}}{\cos\vartheta\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta} = \frac{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}}{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta}\,.$$

Die Formeln für die Cosinus der Neigungswinkel gestalten sich demnach, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{\cos\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} - r\,.\,\sin\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\cos\vartheta - \sin\vartheta\,\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}\\
\cos\beta_1 &= \frac{\sin\vartheta\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta} + r\,.\,\cos\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\sin\vartheta + \cos\vartheta\,\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}\\
\cos\gamma_1 &= \frac{\frac{1}{a}\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2\frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Die Werthe für r und $\frac{d\,r}{d\,\vartheta}$ sind aus Gleichung (16) zu entnehmen, woraus man berechnet:

$$\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{r_0 + \mu}{2}\,.\,\nu\left(e^{\nu\,\vartheta} - e^{-\nu\,\vartheta}\right) + \frac{v_0\,\nu}{2\,w}\left(e^{\nu\,\vartheta} + e^{-\nu\,\vartheta}\right).$$

Um nun die Winkel zu erhalten, welche die Tangente im Ausgangspunkte der Curve mit den Axen bildet, hat man nur $\vartheta = 0$, $r = r_0$ zu setzen, welchen Werthen $\frac{d\,r}{d\,\vartheta} = \frac{v_0\,.\,\nu}{w}$ entspricht. Dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{v_0\,.\,\nu}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2\,w^2}{v_0^2}}}\,.\\
\cos\beta_1 &= \frac{r_0\,w}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{r_0^2\,w^2}}}\,.\\
\cos\gamma_1 &= \frac{v_0\,.\,\nu}{a\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + \frac{r_0^2\,w^2}{v_0^2}}}\,.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, in welcher Weise die Neigung der Tangente zu den Coordinatenaxen durch die Constanten der Aufgabe bedingt ist. Vergleichen wir dieselbe mit der S. 11 gefundenen Formel: $\cot \omega = \frac{\nu \cdot v_0}{r_0 \cdot w}$, welche sich auf die Tangente der projicirten Bahnlinie bezieht, so ergiebt sich, dass in dem hier betrachteten Punkte der Curve der Verlauf derselben von dem Werthe des Bruches $\frac{r_0\ w}{v_0}$ abhängt. Je grösser dieser letztere ist, desto grösser ist der Winkel, den die Tangente der projicirten Curve mit dem Radiusvector macht, desto grösser ist ferner der Winkel, den die Tangente an die Bahnlinie selbst mit der X-Axe und mit der Z-Axe bildet, während ihre Neigung gegen die Y-Axe kleiner wird, wenn der Werth jenes Bruches zunimmt. Ausserdem ist natürlich die Neigung dieser Tangente noch abhängig von der Constanten $\nu = \sin \alpha$, also von der Grösse der Kegelöffnung. Um dieselben Betrachtungen auf die besondern Fälle anzuwenden, auf welche sich die Gleichungen (12) und (13) beziehen, hat man im letzteren Falle nur $v_0 = 0$ zu setzen. Dann ergiebt sich:

$$\cos \alpha_1 = 0\,; \quad \cos \beta_1 = 1\,; \cos \gamma_1 = 0 \quad \text{oder}$$
$$\alpha_1 = 90^0; \qquad \beta_1 = 0; \qquad \gamma_1 = 90^0.$$

Die Tangente ist also dann der XY-Ebene parallel und steht senkrecht zur X-Axe; sie fällt demnach zusammen mit der Tangente des durch den Anfangspunkt gehenden horizontalen Durchschnittskreises der Kegeloberfläche. Diese Bemerkung gilt aber nur so lange, als r_0 nicht verschwindet, da in letzterm Falle, welcher durch Gleichung (12) repräsentirt wird, sämmtliche Werthe jener Cosinus die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Um auch hier die Neigungswinkel zu bestimmen, benutzt man am passendsten die in (17) an zweiter Stelle gegebenen Umformungen. Es handelt sich dann um die Bestimmung von

$$\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - 2}{\nu\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)} = \frac{0}{0}\,,\ \text{wenn}\ \vartheta = 0\,.$$

Durch Differenziation des Zählers und des Nenners erhält man:

$$\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}}{\nu\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)} = 0,\ \text{wenn}\ \vartheta = 0\,.$$

Somit liefern die obigen Formeln:

$$\cos \alpha_1 = \nu = \sin \alpha\,; \ \cos \beta_1 = 0;\ \cos \gamma_1 = \frac{\nu}{a} = \cos \alpha\,.$$
$$\text{oder}\ \alpha_1 = 90^0 - \alpha\,; \qquad \beta_1 = 90^0; \quad \gamma_1 = \alpha\,.$$

In dem Falle also, wo beim Beginne der Bewegung der materielle Punkt in der Spitze des von der Cylinderaxe beschriebenen Kegels liegt, wird in diesem Anfangspunkte die Erzeugungslinie Tangente der Bahncurve sein.

Die Formeln (17) sind nicht geeignet im Allgemeinen Aufschluss über die Neigungsverhältnisse der Tangente und dadurch über den Verlauf der Curve zu geben, insbesondere sind sie unbrauchbar für $\vartheta = \infty$, weil $\cos \infty$ und $\sin \infty$ unbestimmte Ausdrücke sind. Deshalb soll aus obigen Formeln eine neue entwickelt, nämlich der Winkel berechnet werden, den die Tangente mit der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugungslinie des Kegels bildet. Sind α_2, β_2, γ_2 die Neigungswinkel der Erzeugungslinie zu den Axen und versteht man unter R das Stück der erstern, welches zwischen dem betrachteten Punkte und der Kegelspitze liegt, so ist:

$$\cos \alpha_2 = \frac{x}{R}\,;\ \cos \beta_2 = \frac{y}{R}\,;\ \cos \gamma_2 = \frac{z}{R}\,.$$

Drückt man nun x, y, z durch r und ϑ aus und berücksichtigt, dass $R = \frac{r}{\sin \alpha}$, so wird:

$$\cos \alpha_2 = \sin \alpha \,.\, \cos \vartheta;\ \cos \beta_2 = \sin \alpha \,.\, \sin \vartheta;\ \cos \gamma_2 = \cos \alpha \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Bezeichnet man noch mit δ den Winkel, den die Tangente mit der Erzeugungslinie bildet, so ist bekanntlich:

$$\cos \delta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2\,.$$

Setzt man hierin die bezüglichen Werthe aus (17) und (19) ein, so findet man nach gehöriger Reduction:

$$\cos\delta = \frac{\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{a}\right)\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{\nu} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} + r^2}} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} + \left(\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\right)^2}}.$$

Entwickelt man hieraus den Werth von $\operatorname{tag}\delta$, so erhält man den einfachern Ausdruck:

$$\operatorname{tag}\delta = \nu \cdot \frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}.$$

Der Neigungswinkel δ ist also abhängig von dem Werthe des Bruches $\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}$; dieser letztere wird aber im allgemeinen Falle des Problems $= \frac{r_0 \cdot w}{v_0\,\nu}$ und demnach $\operatorname{tag}\delta = \frac{r_0\,w}{v_0}$, wenn $\vartheta = 0;\ r = r_0$ gesetzt wird.

Aus (18) hat man $\cos\beta_1 = \frac{r_0\,w}{\sqrt{v_0^2 + r_0^2\,w^2}}$, woraus man findet $\cot\beta_1 = \frac{r_0\,w}{v_0}$; demnach ergänzen sich die Winkel β_1 und δ zu 90^0, und in der That muss der Annahme gemäss die Y-Axe auf der durch den Anfangspunkt der Curve gezogenen Erzeugungslinie senkrecht stehn. Wendet man die Formel auf die beiden zuletzt betrachteten besondern Fälle an, so ergiebt sich:

1) Wenn $\vartheta = 0;\ r = r_0;\quad v_0 = 0$, so ist $\operatorname{tag}\delta = \infty,\ \delta = 90^0$.
2) Wenn $\vartheta = 0;\ r = r_0 = 0;\ v_0 = 0$, so ist $\operatorname{tag}\delta = 0;\ \delta = 0$.

Beide Resultate stimmen mit den obigen genau überein.

Wir haben früher gefunden, dass die Tangente an die Projection der Bahnlinie sich im Unendlichen einer Grenzlage nähert; ein Gleiches lässt sich deshalb auch für die Bahnlinie selbst vermuthen. Setzt man aber $\vartheta = \infty$, so wird, wenn man, dem allgemeinsten Falle entsprechend, die Werthe für r und $\frac{d\,r}{d\,\vartheta}$ aus (14) entnimmt:

$$\operatorname{tag}\delta = \nu \cdot \frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}} = \frac{\frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - \mu + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)}{\frac{r_0 + \mu}{2}\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right) + \frac{v_0}{2\,w}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right)}.$$

Durch Division mit $e^{\nu\vartheta}$ und dadurch, dass man $e^{-\nu\vartheta}$ und $e^{-2\nu\vartheta}$ als verschwindend klein betrachtet, was für $\vartheta = \infty$ gestattet ist, erhält man: $\operatorname{tag}\delta = 1;\ \delta = 45^0$.

Bevor man nun schliessen dürfte, dass, während ϑ von 0 bis ∞ zunimmt, der Winkel δ in dem einen der eben erwähnten besondern Fälle von 0 bis 45^0 wächst, in dem andern aber von 90^0 bis 45^0 abnimmt, wäre die Frage zu entscheiden, ob nicht δ innerhalb jenes Intervalles einen ausgezeichneten Maximal- oder Minimalwerth hat. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, muss der Ausdruck für $\operatorname{tag}\delta$, nachdem man darin $v_0 = 0$ gesetzt hat, mit Rücksicht auf ein Maximum oder Minimum untersucht werden. Die erwähnte Substitution führt aber zu folgender Gleichung:

$$\operatorname{tag}\delta = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}},$$

woraus man durch Differenziation erhält:

$$\frac{d\,(\operatorname{tag}\delta)}{d\,\vartheta} = \frac{\nu\left(\frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - 4\right)}{\left(e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}\right)^2} = 0.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $\vartheta = \infty$, dann aber auch durch den Werth von ϑ, welcher aus der Gleichung:

$$\frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}\left(e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta}\right) - 4 = 0$$

hervorgeht. Hieraus berechnet man

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} \,.\, l\, \frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}.$$

Wenn $r_0 = 0$ gesetzt wird, so reducirt sich diese Gleichnng auf $\vartheta = 0$. In dem oben bezeichneten Intervalle liegt also nur dann ein ausgezeichneter Werth für δ, wenn r_0 nicht verschwindet. Aus dem Umstande, dass $\operatorname{tag}\delta = \infty$, wenn $\vartheta = 0$, lässt sich schliessen, dass $\operatorname{tag}\delta$ für den obigen Werth von ϑ ein Minimum wird, und ist es deshalb nicht nöthig, den zweiten Differenzialquotienten zu untersuchen. Es ist nun leicht, die diesem ausgezeichneten Punkte der Curve entsprechenden Werthe von r und δ zu berechnen, und man findet:

$$r = \frac{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}{\mu}; \operatorname{tag}\delta = \frac{\sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{r_0 + \mu} < 1 \,;\, \delta < 45^0$$

Während also ϑ von 0 bis $\frac{1}{\nu}\, l\, \frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}$ wächst, nimmt $\operatorname{tag}\delta$ von ∞ bis zu einem Minimum ab, welches kleiner als 1 ist. Es muss also zwischen jenen Werthen von ϑ ein anderer liegen, der $\operatorname{tag}\delta = 1$ macht. Dieser Werth muss sich ergeben aus der Gleichung:

$$\operatorname{tag}\delta = \frac{e^{\nu\vartheta} + e^{-\nu\vartheta} - \frac{2\,\mu}{r_0 + \mu}}{e^{\nu\vartheta} - e^{-\nu\vartheta}} = 1.$$

Löst man diese Gleichung nach ϑ auf, so erhält man:

$$\vartheta = \frac{1}{\nu}\, l\, \frac{r_0 + \mu}{\mu},$$

mit welchem Werthe $r = \frac{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}{2\,\mu}$ correspondirt. Zur bessern Uebersicht folgt hier eine Zusammenstellung der zuletzt gefundenen Resultate:

I. Fall. $(v_0 = 0;\ r_0 = 0)$

$$\operatorname{tag}\delta = 0;\ \delta = 0, \text{ wenn } \vartheta = 0.$$
$$\operatorname{tag}\delta = 1;\ \delta = 45^0, \text{ wenn } \vartheta = \infty.$$

II. Fall. $(v_0 = 0;\ r_0 > 0)$

$$\operatorname{tag}\delta = \infty; \quad \delta = 90^0, \text{ wenn } \vartheta = 0.$$
$$\operatorname{tag}\delta = 1; \quad \delta = 45^0, \text{ wenn } \vartheta = \frac{1}{\nu}\, l\, \frac{r_0 + \mu}{\mu}.$$
$$\operatorname{tag}\delta = \frac{\sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{r_0 + \mu}; \quad \delta < 45^0, \text{ wenn } \vartheta = \frac{1}{\nu}\, l\, \frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu}.$$
$$\operatorname{tag}\delta = 1; \quad \delta = 45^0, \text{ wenn } \vartheta = \infty.$$

In dem Falle also, wo die Kugel sich beim Beginne der Bewegung in C (Fig. 3) befindet, fällt in diesem Punkte die Tangente der Bahn mit der Erzeugungslinie des Kegels zusammen; in allen folgenden Punkten ist die Tangente gegen die Erzeugungslinie geneigt; ihr Neigungswinkel wird immer grösser und nähert sich im Unendlichen der Grenze 45⁰, so dass hier die Tangente den Winkel CME halbirt und mit der Geraden MH zusammenfällt. Diese Verhältnisse ändern sich wesentlich, wenn die Anfangslage der Kugel nicht in C, sondern in einen andern Punkt der Röhrenaxe fällt. Dann läuft die Tangente im Anfangspunkte der XY-Ebene parallel und steht auf CD senkrecht, fällt also mit EE', der Tangente des Durchschnittskreises, zusammen; mit wachsendem ϑ nimmt die Neigung der Tangente zu der EE' zu, sie fällt schliesslich mit MH zusammen und nimmt für einen endlichen Werth von ϑ die Grenzlage MG ein; von diesem Punkte an wird die Neigung zu EE' wieder kleiner, und im Unendlichen fällt die Tangente abermals in die Lage von MH.

Es lässt sich erwarten, dass für die Tangente an die projicirte Bahncurve ähnliche Verhältnisse Statt finden, wie bei der räumlichen Curve, und dass insbesondere den in obiger Hinsicht ausgezeichneten Punkten der letztern in gleicher Weise ausgezeichnete Punkte der erstern entsprechen. Diese Voraussetzung wird durch eine einfache Rechnung bestätigt, und es ergeben sich, wenn $r_0 > 0$, folgende zusammengehörige Werthe:

$$\vartheta = 0; \qquad \operatorname{tag} \omega = \infty .$$

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} \; l \, \frac{r_0 + \mu}{\mu} ; \qquad \operatorname{tag} \omega = \frac{1}{\nu} .$$

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} \; l \, \frac{r_0 + \mu + \sqrt{(r_0 + \mu)^2 - \mu^2}}{\mu} ; \quad \operatorname{tag} \omega < \frac{1}{\nu} .$$

$$\vartheta = \infty ; \qquad \operatorname{tag} \omega = \frac{1}{\nu} .$$

Erörterungen über die Geschwindigkeit.

Gemäss den auf S. 5 über die Bahngeschwindigkeit des Körpers gemachten Bemerkungen ist:

$$v^2 = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + w^2 r^2 .$$

Da aber

$$R = \frac{r}{\nu} \text{ und } \vartheta = w\,t$$

so hat man:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d\,r}{d\,t} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d\,r}{d\,\vartheta} \cdot \frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \frac{w}{\nu} \, \frac{d\,r}{d\,\vartheta} .$$

Durch Substitution dieses Werthes folgt:

$$v = w \sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2} .$$

In Fig. 4 möge nun die Ebene der Zeichnung mit der durch den Punkt M gelegten Tangentialebene an den Kegel zusammenfallen, CD Erzeugungslinie, EE′ Tangente des Durchschnittskreises, also Perpendikel auf CD und TT′ Tangente der Bahnlinie sein. Fällt man dann von der Spitze des Kegels die Senkrechte CQ auf TT′ und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte mit EE′ so wird $CS = \frac{CM}{\sin CSM}$. Nun ist aber $CM = R$ und $\sin CSM = \cos SMQ = \sin \delta$, und daher

$$CS = p = \frac{R}{\sin \delta} .$$

Auf S. 15 fanden wir aber

$$\cos \delta = \frac{\frac{1}{\nu} \, \frac{d\,r}{d\,\vartheta}}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}} , \text{ woraus folgt } \sin \delta = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}} .$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$r = \nu \, . \, R \text{ und } v = w \sqrt{\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}$$

so erhält man: $\sin \delta = \frac{R \, . \, w\,\nu}{v}$. Demgemäss wird:

$$p = \frac{v}{w\,\nu} \text{ und } v = w\,\nu \, . \, p .$$

Auf Grund dieser Gleichung lässt sich für die Geschwindigkeit, mit der die Kugel die Bahn durchläuft, folgendes Gesetz aufstellen:

„Die Geschwindigkeiten der Kugel in beliebigen Punkten der Bahn verhalten sich, wie die Perpendikel, welche von der Spitze des Kegels auf die Tangenten der Bahnlinie gefällt werden, wenn man dieselben bis zum Durchschnitte mit denjenigen Geraden verlängert, welche im Berührungspunkte der Tangenten auf der Erzeugungslinie senkrecht stehn und mit letztern Linien in einer Ebene liegen.“

Dasselbe Gesetz gilt auch für die Geschwindigkeit, mit welcher die Projection des materiellen Punktes auf die XY-Ebene die in dieser Ebene liegende Projection der räumlichen Bahnlinie durchläuft; insbesondere aber findet es auch Anwendung auf den speciellen Fall, der durch B.'s Problem gegeben ist. Bezeichnet nämlich wieder ω den Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvector macht, so findet man leicht:

$$p = \frac{r}{\sin\,\omega}\,.$$

Da aber $\cot\,\omega = \frac{1}{r}\,.\,\frac{d\,r}{d\,\vartheta}$, woraus $\sin\,\omega = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}}$ folgt, so hat man:

$$p = \sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}\,.$$

Nun ist aber:

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + w^2\,r^2} = w\sqrt{\left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2 + r^2}\,.$$

Daher erhält man ähnlich, wie oben:

$$p = \frac{v}{w} \text{ und } v = w\,.\,p\,.$$

Schliesslich mögen noch kurz die Beziehungen berührt werden, welche zwischen der Geschwindigkeit und der Richtung der Tangente bestehn. Es ist früher erörtert worden, dass die Geschwindigkeit v in der Richtung der Tangente MT' (Fig. 4) sich aus zwei zu einander rechtwinkligen Seitengeschwindigkeiten $\frac{dR}{dt}$ und $w\,r$ zusammensetzt, deren Richtungen mit den Geraden ME' und MD zusammenfallen. Die Tangente TT' wird also mit CD den kleinern Winkel bilden, wenn $\frac{dR}{dt} > w\,r$, dagegen mit EE', wenn $w\,r > \frac{dR}{dt}$. Ueberdies ist, wenn $MA = \frac{dR}{dt}$ und $AB = w\,r$ angenommen wird

$$\operatorname{tag}\,\delta = \frac{AB}{AM} = \frac{w\,r}{\frac{dR}{dt}} = \nu\,.\,\frac{r}{\frac{d\,r}{d\,\vartheta}}\,.$$

Diese Formel stimmt genau mit dem auf Seite 15 für $\operatorname{tag}\delta$ entwickelten Ausdrucke überein.

Bericht über die Realschule und die Vorschule

während des Schuljahres 18⁶⁷|68.

I. Lehrverfassung.

Das Lehrer-Collegium der Realschule bestand aus: dem Director Dr. Heinen, den Classen-Ordinarien und Oberlehrern Dr. Honigsheim, Dr. Stammer, Dr. Czech und Dr. Rothert, den Classen-Ordinarien und ordentlichen Lehrern Dr. Eddelbüttel, Dr. Mieck, Dr. Wirtz, Erk und Schröter, den ordentlichen Lehrer Herrn Viehoff, den provisorischen Lehrern Dr. Hölscher und Dr. Heuer, dem katholischen Religionslehrer Schulinspector Fuß, dem evangelischen Religionslehrer Deußen und den beiden Zeichenlehrern Professor Conrad und Wolff.

Außerdem waren an der Realschule als Probe-Candidaten beschäftigt: Dr. Hegert bis Ostern und Dr. Jansen seit Herbst v. J.

An der Vorschule der Realschule unterrichteten außer den beiden genannten Religionslehrern die Herren Duckweiler in der obern (ersten), Störling in der mittlern (zweiten) und Steinhoff in der untern (dritten) Classe.

A. Unterricht in der Vorschule.

Dritte Classe. Classenlehrer: **Steinhoff.**

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Die wichtigsten Abschnitte aus der Glaubens- und Sittenlehre nach dem Katechismus der Erzdiöcese Köln. Fuß.

b. für die evangelischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte nach Zahn. Einige Sprüche, Liederverse und Schriftstellen memorirt. Deußen.

2. Biblische Geschichte. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Auswahl passender Geschichten aus dem alten und neuen Testamente. Einübung von Gebeten. Steinhoff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Combinirt mit Classe I. und II. Geschichten des alten und neuen Testaments. Störling.

3. Rechnen. 5 St. Einfache Uebungen in den 4 Species im Zahlenkreis von 1—100 nach Richter und Grönings I. Theil. —

4. Deutsch. 11 St. 1. Abtheilung. Die Lesestücke in Büscher's erstem Lesebuche wurden gelesen und besprochen, einzelne memorirt. Abschreiben mit Berücksichtigung der Silbentrennung. Dictirübungen. — 2. Abtheilung. Lesen und Schreiben nach der Schreiblesemethode.

5. Schreiben. 4 St. Die deutschen Schriftformen nach Erk's Schrifttafel.

6. Singen. 2 St. Leichte einstimmige Lieder, nach dem Gehöre eingeübt.

Zweite Classe. Classenlehrer: **Störling.**

1. Religionslehre. 2 St. Combinirt mit Classe III.

2. Biblische Geschichte. 2 St. a. Für die katholischen Schüler. Auswahl von neutestamentlichen Geschichten mit Rücksicht auf das Kirchenjahr; dazwischen alttestamentliche Geschichten nach Schumacher. Duckweiler.

b. Für die evangelischen Schüler. Combinirt mit Classe III.

3. Rechnen. 7 St. Kopfrechnen im Zahlenkreise bis 1000 nach Richter und Grönings II. Theil. Die Anfänge des Schriftrechnens.

4. Deutsch. 11 St. Sämmtliche Lesestücke aus Lüben und Nacke II. Theil wurden gelesen, besprochen und theilweise nacherzählt; einzelne Gedichte wurden memorirt.

Abschreibe-Uebungen, Dictate über Regeln der Orthographie, wöchentlich ein Aufsätzchen erzählenden Inhalts. Störling

5. Schönschreiben. 5 St. Die Buchstaben des kleinen und großen Alphabets, einzeln und in Verbindung, nach der Schrifttafel von Erk.

6. Gesang. 2 St. Ein- und zweistimmige Lieder, nach dem Gehöre eingeübt.

Obere Classe. Classenlehrer: **Duckweiler.**

1. Religionslehre. 2 St. Combinirt mit Classe III.

2. Biblische Geschichte. 2 St. Combinirt mit Classe II.

3. Rechnen. Winter 6, Sommer 5 St. a. Kopfrechnen im Zahlenkreise bis 1000, Multiplication und Division bis 10,000. b. Schriftrechnen im unbegrenzten Zahlenraume mit benannten und unbenannten ganzen Zahlen nach Richter und Grönings II. Theil.

4. Deutsch. Winter 13, Sommer 12 St. Leseübungen mit Uebungen im Nacherzählen des Gelesenen aus Lüben und Nacke III. Theil. Declamiren auswendig gelernter Gedichte. Vielfache orthographische Uebungen und Dictate. Das Leichtere aus der Wort- und Wortbildungslehre, so wie Belehrungen über den einfachen Satz nach Schwenk's Hülfsbuch. Kleinere Aufsätze, meist erzählenden Inhalts.

5. Geographie. Im Sommer 2 St Allgemeine Vorkenntnisse. Uebersicht der Land- und Wassermassen auf der Erde.

6. Schönschreiben. 4 St. Die deutschen und englischen Schriftformen nach Erk's Schriftformentafel.

7. Gesang. 2 St. Singen ein- und zweistimmiger Lieder nach dem Gehöre.

Gymnastische Uebungen. Sämmtliche Schüler der Vorschule turnten im Sommersemester Samstag Nachmittags von 6—7 Uhr unter Leitung ihrer Lehrer. Die Uebungen bestanden in Frei- und Ordnungsübungen, für die obere Classe in leichteren Geräthübungen.

B. Unterricht in der Realschule.

Sexta, in zwei parallele Cötus getheilt.

(Ordinarien: von Sexta A. **Erk,** von Sexta B. **Schröter.**)

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des A. T. nach Schumacher's „Kern der h. Geschichte." Erklärung des apostolischen Glaubensbekenntnisses nach dem Katechismus der Erzdiözese Köln.

In beiden Cötus Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des A. T., außerdem des N. T., soweit es der Anschluß an das Kirchenjahr erforderte.

In beiden Cötus Deußen.

2. Rechnen. 4 St. Die vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen und Brüchen, Maße und Gewichte. Die Zeitrechnung, Resolviren und Reduciren mit Brüchen. Einfache Regeldetri nach der Schlußrechnung. Viele schriftliche Aufgaben aus Schellen's Rechenbuch wurden gelöst, in jeder Stunde wurde die Hälfte der Zeit auf das Kopfrechnen verwandt.

In beiden Cötus Schröter.

3. Geographie. 3. St. Allgemeine Vorbegriffe. Uebersicht der Land- und Meeresräume; Topographie von Europa und speciell von Deutschland, nach Daniel's Leitfaden. In Sexta A. Erk, in Sexta B. Schröter.

4. Deutsch. 4 St. Der einfache Satz und in Verbindung damit das Wichtigste aus der Wortformenlehre, eingeübt an geeigneten Stücken des Lesebuchs von Hopf und Paulsiek I., 1. Abtheilung. 2 St. Wöchentliche Correctur von Dictaten und leichten Aufsätzen erzählenden Inhalts. 1 St. Leseübungen und Declamiren auswendig gelernter Gedichte. 1 St.

In Sexta A. Erk, in Sexta B. Schröter.

5. Latein. 9. St. Formenlehre nach Scheele's Vorschule I., §. 1—25 (mit Ausschluß von §. 22). Uebersetzung der Uebungsstücke. Memoriren der Vocabeln. Schriftliche Arbeiten in und außer der Schule.

In Sexta A. Rothert, in Sexta B. Heuer.

6. Zeichnen. 2 St. Freies Handzeichnen von geraden Linien, geradlinigen und krummlinigen Figuren, einfachen Blattformen und Verzierungen, mit Bleistift gezeichnet nach Vorzeichnungen auf der Schultafel. In beiden Cötus Wolff.

7. Schönschreiben. 4. St. Die deutschen und englischen Schriftformen, in genetischer Folge nach den an der Schultafel vom Lehrer vorgeschriebenen und erklärten Mustern eingeübt. In Sexta A. Erk, in Sexta B. Schröter.

8. Gesang. a. IV. (unterste) Abtheilung, Sexta A. und B. combinirt. 1 St. Das Wichtigste aus der Elementarlehre des Gesanges, stets mit bezüglichen praktischen Uebungen. Einübung von Liedern aus Erk und Greef's „Sängerhain I".

Schröter.

b. III. Abtheilung, aus Schülern der V. A. und B. bestehend; 1 St. Wiederholung und Erweiterung der Elementarlehre des Gesanges. Einübung von Liedern aus „Sängerhain" I.

c. II. Abtheilung, aus Schülern der IV. A. und B. sowie der III. A. und B. bestehend; 1 Stunde. Neben Wiederholung des in den vorhergehenden Abtheilungen Durchgenommenen Einübung von Liedern aus „Sängerhain" I.

d. I. Abtheilung, aus den geübteren Schülern aller Classen bestehend; 1 St. Einübung vierstimmiger Gesänge aus „Sängerhain" II. und III. sowie aus Erk's „Frischen Liedern" I. und II.

Erk.

Quinta, in zwei parallele Cötus getheilt.

(Ordinarien: in Quinta A. **Dr. Wirtz**, in Quinta B. **Dr. Hölscher**.)

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des N. T. nach Schumacher's „Kern der h. Geschichte." — Von den Geboten, der Gnade und den Gnadenmitteln nach dem Katechismus der Erzdiözese Köln. In beiden Cötus Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2. St. Biblische Geschichte des N. T. Wiederholungen aus dem A. T. nach Zahn. — Einige Sprüche und Kirchenlieder memorirt. In beiden Cötus Deußen.

2. Rechnen. 4 St. Wiederholung der Bruchrechnung, Regeldetri in Brüchen, Rechnung mit Decimalbrüchen, mit Ausschluß der Division. Vielfache Uebungen im schriftlichen und Kopfrechnen. In Quinta A. Viehoff, in Quinta B. Jansen.

3. Naturgeschichte. 2 St. Im Winter: Die Classe der Säugethiere und zum Theil die der Vögel, speciell betrachtet. Im Sommer: Erläuterung der Pflanzentheile, insbesondere der Blüthe; die Classen des Linnéschen Systems; Beschreibung häufig vorkommender Pflanzen. In beiden Cötus Viehoff.

4. Geographie. 2 St. Erweiterung der allgemeinen Vorbegriffe; Oceanographie und Inseln aller Meere Topische Geographie von Asien, Afrika, Amerika und Australien. Wiederholung der topischen Geographie von Europa, nach Daniel's Leitfaden. Uebungen im Kartenzeichnen. In Quinta A. bis Weihnachten Hegert, dann Erk; in Quinta B. Hölscher.

5. Deutsch. 4. St. Wiederholung des einfachen Satzes nebst ausführlicherer Behandlung der Wortformenlehre; der zusammengesetzte Satz. Neben schriftlichen Uebungen Analysiren geeigneter Stücke des Lesebuchs von Hopf und Paulsiek I., 2. Abtheilung. 2. St. Correctur wöchentlicher Aufsätze. 1 St. Declamiren auswendig gelernter Gedichte. 1 St. In Quinta A. Erk, in Quinta B. Schröter.

Freie Redeübungen in Quinta A. bis Weihnachten Hegert, dann Eddelbüttel; in Quinta B. Hölscher.

6. Latein. 5 St. Nach der Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre wurde die unregelmäßige nach Scheele II. durchgenommen und durch mündliches und schriftliches Uebersetzen der betreffenden Stücke des Buches eingeübt; hierauf wurden die Fabeln und Erzählungen des Anhangs übersetzt und theilweise auswendig gelernt. Wöchentliche Pensa, mit denen indeß häufig Probearbeiten abwechselten. In Quinta A. Honigsheim, in Quinta B. Hölscher.

7. Französisch. 7 St. Die Formenlehre nach Plötz' Elementarbuch I. Cursus bis zum sechsten Abschnitt. Mündliche und größtentheils auch schriftliche Uebersetzung der zugehörigen Uebungsstücke. Retrovertiren in's Französische, Memoriren von Vocabeln. Seit Weihnachten wöchentlich ein Pensum. In beiden Cötus Wirtz.

8. Zeichnen. 2 St. Freies Handzeichnen von geschmackvollen Verzierungen, in vergrößertem Maßstabe auf der Schultafel vorgezeichnet; Linearzeichnen geometrischer Constructionen, architektonischer Glieder, Postamente und Gefäße nach gegebenen Maßverhältnissen, nebst Angabe der Schattenlinien, mit Feder und Tusche gezeichnet, nach Vorzeichnungen auf der Schultafel. In beiden Cötus Wolff.

9. Schönschreiben. 2 St. Wiederholung des in Sexta Durchgenommenen. Die Geübteren schrieben deutsche und lateinische Denksprüche aus Büchern oder aus dem Gedächtnisse, mit Benutzung der Schriftformentafel von Erk. In Quinta A. Erk, in Quinta B. Schröter.

10. Gesang, s. Sexta.

Quarta, in zwei parallele Cötus getheilt.

(Ordinarien: in Quarta A. **Dr. Eddelbüttel**, in Quarta B. **Dr. Mieck**.)

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Erklärung des apostolischen Glaubensbekenntnisses. Wiederholung der biblischen Geschichte des A. T. In beiden Cötus Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Die messianischen Weissagungen des A. T. Leben und Lehre des Heilandes nach dem Evangelium Matthäi. Die fünf Hauptstücke des kleinen lutherischen Katechismus. Memoriren geeigneter Bibelstellen und einzelner Kirchenlieder im Anschluß an das Kirchenjahr. In beiden Cötus Eddelbüttel.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 2 St. Lehre von den Parallelen, Dreiecken und Parallelogrammen; Constructions-Aufgaben. Spieker, Lehrb. der ebenen Geometrie, Abschnitt I—IV.

b. Algebra. 2 St. Die vier Rechnungsarten mit einfachen, zusammengesetzten und gebrochenen Buchstaben-Ausdrücken. Heis, Aufgaben-Sammlung §§. 1—25. In Quarta A. Stammer, in Quarta B. Viehoff.

3. Rechnen. 2 St. Fortsetzung der Lehre von den Decimalbrüchen. Französisches Maß- und Gewichtssystem. Prozent- und Zins-Rechnung. Berechnung der Flächeninhalte. Schellen's Aufgaben I. §§. 29—33, II. §§. 16—20, 28—35. In Quarta A. Czech, in Quarta B. Viehoff.

4. Naturgeschichte. 2 St. Im Winter wurde zunächst über die Organe des menschlichen Körpers und ihre Functionen das Nöthige durchgenommen; dann die Wasservögel und Reptilien speciell betrachtet. Im Sommer: Eintheilung des Pflanzenreichs nach dem natürlichen System; Charakteristik bedeutender einheimischer Familien; Erweiterung der Kenntniß einheimischer Gewächse; außerdem Einleitung in die Naturgeschichte der Insecten. In Quarta A. Czech, in Quarta B. Jansen.

5. Geschichte. 3 St. Geschichte des Alterthums, besonders der Griechen und Römer, nach dem Grundriß von Pütz. In beiden Cötus Heuer.

6. Geographie. 2 St. Die Staaten von Süd-, Ost- und Nord-Europa, ferner Frankreich und Oesterreich, nach Daniel's Leitfaden. Erweiterung der geographischen Grundlehren. Kartenzeichnen. In beiden Cötus Czech.

7. Deutsch. 3 St. Aus Hopf und Paulsiek's Lesebuch für Quarta wurden Musterstücke gelesen, erklärt und wiedererzählt, sowie Gedichte zum Declamiren auswendig gelernt. Im Anschluß an die alle drei Wochen abgelieferten schriftlichen Arbeiten und die lateinische Grammatik wurden Hauptpunkte der Wort- und Satzlehre behandelt. In Quarta A. Eddelbüttel, in Quarta B. Mieck.

8. Latein. 5 St. Einübung der Casuslehre nach Scheele II. und kurze Wiederholung der Formenlehre nach Scheele I. Alle acht Tage ein Pensum, häufige Extemporalia. In Quarta A. Eddelbüttel, in Quarta B. Mieck.

9. Französisch. 6 St. Aus Plötz' II. Cursus wurden die Uebungsstücke bis §. 46 übersetzt. Die deutschen Stücke wurden theils mündlich, theils schriftlich ins Französische übersetzt. Einübung der unregelmäßigen Zeitwörter und Memoriren von Vocabeln. Aus Ahn's Lesebuch wurden ausgewählte Stücke übersetzt und theilweise retrovertirt; einige wurden cursorisch gelesen. Einige Gedichte wurden auswendig gelernt. Wöchentliche Pensa. In Quarta A. Wirtz, in Quarta B. Mieck.

10. Zeichnen. 2 St. Zeichnen von Verzierungen, Blumen, Früchten, Landschaften, Thieren ꝛc. theils in Contouren, theils vollständig schattirt nach leichten Vorlagen. Linearzeichnen geometrischer Constructionen; die Entwickelung und Auseinanderlegung der Oberflächen von Körpern in die horizontale Ebene. In beiden Cötus Wolff.

11. Schönschreiben. 1 St. Wiederholung der Schriftformen beider Currentschriftarten. Schreiben größerer Sätze aus dem Gedächtnisse oder aus Büchern, mit Benutzung der Schriftformentafel. In beiden Cötus Erk.

12. Gesang, s. Sexta.

Tertia, in zwei parallele Cötus getheilt.

(Ordinarien: in Tertia A. Dr. Stammer, in Tertia B. Dr. Czech.)

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Von den Geboten, der Gnade und den Gnadenmitteln. — Wiederholung der biblischen Geschichte des N. T. In beiden Cötus Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Alttestamentliche Abschnitte, besonders aus den Psalmen, den Büchern Jos., Jer., Hesek., Daniel gelesen, erklärt und theilweise memorirt. — Das Evangelium Matth. theilweise gelesen; eingehender erklärt und memorirt die Bergpredigt. Einige Kirchenlieder gelernt. In beiden Cötus Deußen.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 3 St. Die Lehre vom Kreise, von der Gleichheit der Figuren, von der Proportionalität der Linien, von der Aehnlichkeit und der Ausmessung der Figuren. Spieker Abschnitt VI—XII.

b. Algebra. 1 St. Ausziehung der Quadratwurzel aus Buchstaben-Ausdrücken, Zerfällung in Factoren, gemeinschaftlicher Theiler ꝛc. Gleichungen des 1. Grades mit 1 und 2 Unbekannten. Heis §§. 26—33. 51. 61—65. In Tertia A. Stammer, in Tertia B. Biehoff.

3. Rechnen. 2 St. Theilbarkeit der Zahlen, größter gemeinschaftlicher Theiler ꝛc. — Vervollständigung der Lehre von den Decimalbrüchen. — Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aus Zahlen. — Zins-, Discont-, Termin-, Vertheilungs-, Mischungs-, Kettenrechnung. — Berechnung der Körperinhalte. — Heis §§. 27. 28. 50. 52. — Schellen II. §§. 20—25; 36—42. In Tertia A. Stammer, in Tertia B. Czech.

4. Naturwissenschaft. 2 St. Im Winter: Einleitung in die Krystallographie und Mineralogie; Erläuterung wichtiger und allgemein verbreiteter Mineralien. Im Sommer: Verschiedenes aus der Physik, besonders Mechanik, in elementarer und propädeutischer Behandlung. Lösung leichter Aufgaben. In beiden Cötus Czech.

5. Geschichte. 2 St. Deutsche Geschichte nach Kohlrausch bis zum Ende des dreißigjährigen Krieges, hierauf brandenburgisch-preußische Geschichte nach Pütz. In Tertia A. im Winter Hegert, im Sommer Heuer; in Tertia B. Heuer.

6. Geographie. 2 St. Die deutschen Staaten nebst der Schweiz, Belgien, Holland und Dänemark, nach Daniel's Leitfaden. Erweiterung der geographischen Grundlehren. Kartenzeichnen. In beiden Cötus Czech.

7. Deutsch. 3 St. Aus Hopf und Paulsiek's Lesebuch für III. wurden ausgewählte poetische und prosaische Stücke gelesen, erklärt und theils zu wörtlichen, theils zu freien Vorträgen benutzt. Wiederholungen aus dem ganzen Gebiete der Grammatik, Lautlehre, Wortlehre, Satzlehre. Vorläufiges über die Verslehre. Aufsätze alle 3 Wochen. In beiden Cötus Hölscher.

8. Latein. 5 St. Kurze Wiederholung der Formen- und Casuslehre, Einübung der Moduslehre nach Scheele II. Gelesen wurde Caesar de bello Gallico lib. I. Alle acht Tage ein Pensum. Häufige Extemporalia. In Tertia A. Eddelbüttel, in Tertia B. Heuer.

9. Französisch. 4 St. Aus Plötz' II. Cursus wurden nach Wiederholung der wichtigeren Abschnitte des Pensums der Quarta die §§. 50—70 theils mündlich, theils schriftlich übersetzt. Die betreffenden Regeln wurden zum Theil in französischer Sprache gelernt. Im Winter diente zur Lectüre Charles XII. B. 1 u. 2 (zum Theil), im Sommer ausgewählte Stücke aus Paganel, histoire de Frédéric le Grand; dabei beständige Uebungen im Retrovertiren. Wöchentliche Pensa. In Tertia A. Mieck, in Tertia B. Hölscher.

10. Englisch. 4 St. Fölsing's Lehrbuch für den elementaren Unterricht diente als Grundlage, und es wurden daraus sämmtliche Uebungsstücke theils mündlich, theils schriftlich übersetzt und retrovertirt. Als Lesebuch diente Lüdeking I. Theil, und es wurden daraus gelesen und theilweise retrovertirt die Vorübungen und Erzählungen, die historischen Stücke mit Auswahl, mit steter Hinweisung auf die Regeln der Aussprache. Seit Weihnachten wöchentliche Pensa. In Tertia A. Mieck, in Tertia B. Hölscher.

11. Zeichnen. 2 St. Linearzeichnen. Zeichnen von geometrischen Figuren als Uebung zum Maschinenzeichnen, von Tangenten an gegebene Kreise, von Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln und excentrischen Curven. Abwechselnd Freihandzeichnen.

In beiden Cötus Conrad.

12. Gesang, s. Sexta.

Secunda (Cursus 2 Jahre.) Ordinarius: Dr. Rothert.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Lehre von der Kirche Jesu Christi; Geschichte derselben. Nach Martin's Religionshandbuch. Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2. St. Geschichte der Kirche von ihrer Stiftung bis auf Karl den Großen. — Neuere Kirchengeschichte. — Der erste Brief Joh. gelesen, erklärt und theilweise memorirt. — Einige Kirchenlieder gelernt. Deußen.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 2 St. Wiederholung und Erweiterung der Planimetrie nebst Uebungsaufgaben; die Transversalen des Dreiecks. — Stereometrie mit Ausschluß der runden Körper.

b. Algebra. 2 St. Die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit 1 und 2 Unbekannten. Eingekleidete Aufgaben. — Diophantische Aufgaben. — Anwendung der Algebra auf Geometrie. — Heis §§. 61—73; 77—79; 107. Stammer.

3. Praktisches Rechnen. 1 St. Münz-, Wechsel-, Arbitrage-Rechnung. Wöchentlich eine häusliche Arbeit.

Stammer.

4. Naturwissenschaft. a. Physik. 2 St. Die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Die Gesetze vom Gleichgewichte und der Bewegung fester und flüssiger Körper. Viehoff.

b. Chemie. 2 St. Die Metalloide und ein Theil der leichten Metalle nebst den wichtigern Verbindungen unter steter Berücksichtigung der chemischen Technologie. Stammer.

c. Naturgeschichte. St. Im Winter: Elemente der Anatomie; Naturgeschichte der wirbellosen Thiere mit gegliederten Beinen und der Eingeweidewürmer. Im Sommer: die Grundlehren der Pflanzen-Anatomie; Erweiterung der Systemkunde und der Kenntniß einheimischer Pflanzen; die Lehre von den Hauptorganen der Pflanze und ihren Functionen; Uebungen im Bestimmen phanerogamischer Gewächse nach Grosse (Taschenbuch der Flora von Nord- und Mitteldeutschland). — In beiden Semestern auch Demonstrationen mit dem Mikroskop. Czech.

5. Geschichte. 2 St. Geschichte der alten Welt, besonders der Griechen bis zum Tode Alexanders des Großen und der Römer bis auf Augustus. Zur Wiederholung des Vortrags diente den Schülern das kleinere Handbuch von Pütz.

Honigsheim.

6. Geographie. 1 St. Allgemeine Geographie; Asien und Australien; Repetition von Deutschland. Kartenzeichnen.

Rothert.

7. Deutsch. 3. St. Schillers Gedichte in Auswahl, dazu Erläuterungen; darnach die Belagerung von Antwerpen; schließlich die Jungfrau von Orleans und einige kleinere Lesestücke. Uebungen im Definiren und Disponiren. Freie Vorträge und Declamationen. Monatliche Aufsätze. Rothert.

8. Latein. 4 St. Syntax nach Siberti (mit Ausnahme der Casuslehre); dazu alle 14 Tage Exercitien oder Extemporalien. Lectüre Caes. b. G. IV. und der größere Theil von II. Stücke aus Ovid; 70 Verse wurden memorirt. Rothert.

9. Französisch. 4 St. Aus dem Manuel von Plötz wurden in 2 wöchentlichen Stunden die Abschnitte aus Fénélon, Bernardin de Saint-Pierre, Le Sage, Jeannot et Colin von Voltaire, Thiers und einzelne poetische Abschnitte aus Corneille und Racine übersetzt und theils retrovertirt, theils (besonders die dichterischen Stücke) auswendig gelernt. Grammatik nach Plötz II., §. 70 bis zum Schlusse; gelegentliche Wiederholung früherer Theile der Grammatik. Als Unterrichtssprache diente vorzugsweise die französische selbst. Erlernen von Vocabeln aus Plötz vocabulaire. Alle 14 Tage ein Pensum aus Probst, bisweilen dafür Classenarbeiten. Honigsheim.

10. Englisch. 3 St. Gelesen wurden mehrere Abschnitte aus Schütz: Historical Series III. (Ancient History). Die Hauptregeln aus Fölsing's wissenschaftlicher Grammatik der englischen Sprache wurden durchgenommen und an den betreffenden Uebungsstücken mündlich, sowie durch alle 14 Tage einzuliefernde Pensa schriftlich eingeübt. Auswendiglernen von Vocabeln und Gedichten. Häufige Probearbeiten. Rückübersetzungen und daran geknüpfte Sprechübungen. Im letzten Halbjahr wurden in Obersecunda drei freie Arbeiten gemacht. Eddelbüttel.

11. Zeichnen. 2 St. a. Unter-Secunda. Wintersemester: Linearzeichnen. Zeichnen von Cycloiden, Epicycloiden, Hypocycloiden; die ersten Elemente der Verzahnungen der Räder. Projectionszeichnen, an der Schultafel vorconstruirt. Abwechselnd Freihandzeichnen. Sommersemester: Linearzeichnen. Die verschiedenen Schrauben und Räder. Abwechselnd Freihandzeichnen.

b. Ober-Secunda. Wintersemester: Die Perspective, Fortsetzung des Projectionszeichnens der verschiedenen Räder, sowie anderer Maschinentheile mit Angabe der Schatten. Abwechselnd Freihandzeichnen. Conrad.

12. Gesang. s. Sexta.

Prima. (Cursus 2 Jahre.) Ordinarius: Dr. Honigsheim.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Das Werk der Vollendung des Menschen. Sittenlehre. Nach Martin's Religionshandbuch. Fuß.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Kirchengeschichte von der Reformation bis auf unsere Zeit. Glaubenslehre. Einige Kirchenlieder memorirt. Hauptstellen aus dem Briefe an die Römer gelesen. Deußen.

2. Mathematik. 3—4 St. Sätze von geometrischen Oertern, über Transversalen, Aehnlichkeitsaxen, Chordalen und Polaren. Die verschiedenen Berührungsaufgaben (Apollonisches Problem). Construction algebraischer und trigonometrischer Ausdrücke und Lösung bezüglicher Aufgaben. Aus der analytischen Geometrie: Gleichungen der Geraden im Allgemeinen, von solchen, die parallel und senkrecht sind, die durch gegebene Punkte und durch den Durchschnittspunkt gegebener Geraden gehen; Winkel zweier Geraden, Entfernung zweier Punkte und eines Punktes von einer Geraden. Gleichungen des Kreises, von Secanten, Tangenten, Chordalen. Analytische Beweise für Sätze der Planimetrie über geometrische Oerter. Gleichungen und Constructionen der Ellipse, Hyperbel, Parabel, ihrer Tangenten, Subtangenten u. s. w. Zugeordnete Durchmesser. Asymptoten der Hyperbel. Anwendungen auf die Physik. Inhalt der Ellipse, der Parabel- und Hyperbel-Segmente. Aus der Algebra: Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Binomial-Coeffizienten, Permutationen, Combinationen, Variationen; Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Binom mit ganzen, gebrochenen und negativen Exponenten. Grenzen von Variabeln; die Differenzreihen. — Die logarithmischen und trigonometrischen Reihen. Berechnung der Zahl e und π. Anfänge der Differenzial-Rechnung. Heinen.

3. Naturlehre. a. Mechanik und Physik. 4—3 St. Fallgesetze. Central- und schwingende Bewegung. Mathematisches und physisches Pendel. Lehre vom Stoße. Wellenbewegung. Lehre vom Schalle und vom Lichte, mit theils mathematischer, theils experimentaler Begründung. — Einiges aus der populären Astronomie. Heinen.

b. Chemie. 2 St. Organische Chemie mit besonderer Berücksichtigung der Technologie, der Physiologie und des täglichen Lebens. Ausführlich wurden behandelt folgende Abschnitte: Einleitung, Elementar-Analyse; die Kohlenhydrate; Proteinsubstanzen, Gährung und Fäulniß, Grundzüge der chemischen Vorgänge im thierischen Organismus; die leimgebenden Substanzen; die wichtigsten Alkohole und damit zusammenhängenden Substanzen; Fette und Seifen; Producte der trocknen Destillation; Farbstoffe; Gerberei.

Praktische Arbeiten im Laboratorium. 2 St. Anfertigung von Präparaten, Anstellung von Versuchen, leichte qualitative Analysen. Stammer.

4. Geschichte. 2 St. Geschichte der neuern Zeit von Maximilian I. bis zum Jahre 1815; der Zeitraum bis zum Regierungsantritt Friedrichs des Großen wurde mehr übersichtlich, der folgende ausführlicher behandelt. Gelegentliche Wiederholungen aus der alten Geschichte. Lehrbuch: Pütz. Honigsheim.

5. Geographie. 1 St. Im Sommer Repetition aus der physikalischen und politischen Geographie. Rothert.

6. Deutsch. 3 St. Mittheilungen aus der neueren Literatur. Gelesen wurden außerdem Göthe's Iphigenie und Hermann und Dorothea und Schiller's Wallenstein. Monatliche Aufsätze. Freie Vorträge. Rothert.

7. Latein. 3 St. Liv. lib. XXI, cap. 1—57. und ausgewählte Abschnitte aus lib. XXII; Virg. Aen. lib. I. Aus ersterm wurde eine größere Rede, aus letzterm wurden etwas über 100 Verse auswendig gelernt. Honigsheim.

8. Französisch. 4. St. Molière's Misanthrope, so wie die meisten geschichtlichen Stücke aus dem Manuel von Plötz. (Mignet, Thiers, Voltaire, Ségur, Montesquieu, Fénélon, Barante u. a.) wurden gelesen, in französischer Sprache erklärt und der Inhalt von den Schülern frei wiedergegeben. An die Lectüre knüpften sich biographische und literarhistorische Notizen über die Verfasser der Stücke. Uebersetzung des größten Theils von Schillers „Neffe als Onkel." Erlernen von Vocabeln und Gesprächen aus Plötz vocabulaire. Alle 4 Wochen ein Aufsatz oder bisweilen eine größere Uebersetzung, s. u. Häufige Extemporalien. Honigsheim.

9. Englisch. 3 St. Gelesen wurden: Shakspere's Richard II. sowie ausgewählte Stücke aus Herrig's Class. Authors. Repetition und Erweiterung der Grammatik; Einführung in die Synonymik und Stilistik. Aus dem deutschen Lesebuch von Mager III. wurden einzelne historische Abschnitte mündlich übersetzt. An die Uebersetzungen wurden Sprechübungen geknüpft. Außer häufigen Dictaten wurden alle 4 Wochen freie Aufsätze abwechselnd mit größeren Uebersetzungen angefertigt. Die Themata zu den schriftlichen Arbeiten s. u. Eddelbüttel.

10. Zeichnen. 3 St. Unter-Prima. Linearzeichnen. Die architektonischen Säulenordnungen. (2 St.) Freihandzeichnen nach Vorlegeblättern, befähigte Schüler nach Holz- und Gypsmodellen. (1 St.)

Ober-Prima. Die geometrische Schattenlehre, Fortsetzung des architektonischen und Maschinenzeichnens. (2 St.) Freihandzeichnen, w. o. (1 St.) Conrad.

11. Gesang, s. Sexta.

Gymnastische Uebungen.

Dieselben fanden während des Sommersemesters für die Realschüler in zwei getrennten Abtheilungen, für Quinta A. und B. und Sexta A. und B. Montags und Donnerstags, für die übrigen Klassen Dienstags und Freitags von 6—7½ Uhr, statt.

Die Uebungen bestanden in Frei- und Ordnungs-Uebungen; auch wurden einfachere militairische Evolutionen ausgeführt. Das Gerätheturnen wurde fleißig geübt. Es nahmen an diesen Uebungen 265 Schüler Theil, welche in 20 Riegen vertheilt waren.

Den Unterricht ertheilte der Lehrer Schröter, und hatten die Herren Dr. Eddelbüttel und Wolff die Mitbeaufsichtigung.

Uebersichts-Tabelle über die Vertheilung des Unterrichts an der Realschule. W. im Winter. S. im Sommer.

Lehrer.	Prima.	Secunda.	Tertia A.	Tertia B.	Quarta A.	Quarta B.	Quinta A.	Quinta B.	Sexta A.	Sexta B.	Zahl der Lectionen jedes Lehrers.
Dr. Heinen, Director.	Mathematik und Physik. 8 W. 7 S.										8 W. 7 S.
Dr. Honigsheim, Oberlehrer, Ordinarius von I.	Geschichte 2. Französisch 4. Latein 3.	Geschichte 2. Französisch 4.					Latein 5.				20.
Dr. Stammer, Oberlehrer, Ordinarius von III. A.	Chemie 4.	Chemie 2. Mathematik u. prakt. Rechnen 5.	Mathematik 4. Rechnen 2.		Mathematik 4.						21.
Dr. Czech, Oberlehrer, Ordinarius von III. B.		Zoologie und Botanik 2.	Naturwiss. 2. Geographie 2.	Naturwiss. 2. Geographie 2. Rechnen 2.	Naturgesch. 2. Geographie 2. Rechnen 2.	Geographie 2.					20.
Dr. Rothert, Oberlehrer, Ordinarius von II.	Deutsch 3. Wiederholungen a. d. Geogr. 1 S.	Deutsch 3. Latein 4. Geographie 1.							Latein 9.		20 W. 21 S.
Dr. Eddelbüttel, ordentlicher Lehrer, Ordinarius von IV. A.	Englisch 3.	Englisch 3.	Latein 5.		Deutsch 3. Latein 5. Ev. Religionslehre 2.		Freie Redeübungen. 1 St. seit Weihnachten.				22.
Dr. Mieck, ordentlicher Lehrer, Ordinarius von IV. B.			Französisch 4. Englisch 4.			Französisch 6. Deutsch 3. Latein 5.					22.
Viehoff, ordentlicher Lehrer.		Physik 2.		Mathematik 4.		Mathematik 4. Rechnen 2.	Rechnen 4. Naturgesch. 2.	Naturgesch. 2.			20.
Dr. Hölscher, provis. Lehrer, Ordinarius von V. B.			Deutsch 3.	Französisch 4. Englisch 4. Deutsch 3.				Freie Redeübungen 1. Latein 5. Geographie 2.			22
Dr. Heuer, provis. Lehrer.			Geschichte 2 im S.	Latein 5. Geschichte 2.	Geschichte 3.	Geschichte 3.				Latein 9.	24.
Dr. Wirtz, ordentl. Lehrer, Ordinarius von V. A.					Französisch 6		Französisch 7.	Französisch 7.			20.
Erk, ordentlicher Lehrer, Ordinarius von VI. A.	Gesang aller Classen, mit Ausnahme von Sexta A. und B. in 3 Abtheil., jede mit 1 Stunde.				Schreiben 1. Gesang 1.	Schreiben 1.	Schreiben 2. Geographie 2 seit Weihnachten Deutsch 4. Gesang 1.		Geographie 3. Deutsch 4. Schreiben 4		24.
Schröter, ordentlicher Lehrer, Ordinarius von VI. B.	Turnen aller Classen, in 2 Abtheilungen, jede zweimal $1\frac{1}{2}$ Stunden.							Deutsch 4. Schreiben 2.	Rechnen 4. Gesang 1.	Rechnen 4. Geographie 3. Deutsch 4. Schreiben 4.	26. (6).
Fuß, Schulinspector, kath. Religionslehrer.	Religionslehre 2.	Religionslehre 2.	Religionslehre 2.		Religionslehre 2.		Religionslehre 2.		Religionslehre 2.		12.
Deußen, ev. Religionslehrer.	Religionsl. 2.	Religionsl. 2.	Religionslehre 2.				Religionslehre 2.		Religionslehre 2.		10.
Conrad, Prof., Zeichenlehrer.	Zeichnen 3.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.							9.
Wolff, provis. Zeichenlehrer.					Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	Zeichnen 2.	12.
Dr. Hegert, Probe-Candidat.			Geschichte 2 im W.				Geographie 2 bis Weihnachten Freie Redeübungen bis Weihnachten 1.				5 W.
Dr. Jansen, Probe-Cand.						Naturgesch. 2.		Rechnen 4.			6.
Zahl der Stunden der Classen außer Gesang und Turnen	32.	32.	32.	32.	32.	32.	31.	31.	28.	28.	

Themata zu den freien schriftlichen Arbeiten.

A. Deutsch. In Prima.

1. Coriolan vor Rom. 2a. Vergleich der drei Balladen: Harald von Uhland, Althessische Sage von Dingelstedt und Barbarossa von Geibel. b. Friedrichs des Zweiten Verdienste um Deutschland. 3a. Werther und Macbeth oder principiis obsta. b. Die drei Lieder aus dem ersten Act des Tell. 4. Der große Kurfürst und Ludwig XIV. 5. Das Mittelmeer als Vermittler der Cultur. 6. Thut Iphigenie Recht, das Leben des Bruders auf's Spiel zu setzen? 7. Die wesentlichsten geographischen Bedingungen für die Entstehung und Entwickelung der Städte. 8. Es siegt immer und nothwendig die Begeisterung über denjenigen, der nicht begeistert ist. (Fichte.) 9a. Das Charakteristische der Klopstock'schen Poesie. b. Selbstgewählte Reisebeschreibung in Briefform. 10. Karl V. in St. Just. 11. Götz als Bild eines mittelalterlichen Ritters.

In Secunda.

1. Jeder ist seines Glückes Schmied. 2. Das Leben eine Seereise. 3a. Lob der Tanne. b. Geld ist ein guter Diener, aber ein schlechter Herr. 4a. Die Stürme ein Bild der menschlichen Leiden. b. Schule und Leben. 5a. Erinnerung und Hoffnung. b. Es ist besser das geringste Ding von der Welt zu thun, als eine halbe Stunde unthätig sein. (Göthe.) 6a. „Denn die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand." (Schiller.) b. Ein Fischerbegräbniß. 7a. Was ist Mitleid? b. Nutzen der Kreuzzüge. 8. Classenarbeit: Arbeit und Fleiß, das sind die Flügel, So tragen über Strom und Hügel. (Fischart). 9. Die Schuld der Jungfrau von Orleans. 10a. Spaziergang an einem Herbsttage. b. Strom und Menschenleben. 11a. Vertheidigung Heinrichs des Löwen zu Chiavenna, 1176. b. Poesie und Prosa.

B. Französisch.

1. Aristomène dans le Céada. 2. Clovis, roi des Francs. 3. Expédition de Darius contre les Scythes. 4. Mort de Wallenstein (thème). 5. Bataille de Marathon. 6. Jeunesse de Napoléon. 7. Importance de la seconde guerre punique. 8. Mort de Gustave-Adolphe (thème). 9. Discours d'Annibal à ses soldats, 1re partie. 10. Seconde partie du même sujet. 11. Les guerres de Charlemagne contre les Saxons. 12. Prise de la Bastille (thème).

C. Englisch.

1. William of Orange's accession to the Crown of England. (Transl.) 2. The battle of Muehlberg. 3. The invasion of England by the Duke of Monmouth. 4. The reduction of Valenciennes (Transl.) 5. The battle of Fehrbellin. 6. Events leading to the outbreak of the North-American war of Independence. 7. Shakspere's Life. (Transl.) 8. Richard II. 9. The same. 10. An account of Shakspere's works. (Transl.) 11. The Great Elector's attempts of rendering his State a maritime power.

II. Chronik der Schule.

Verfügungen des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums.

28. September 1867. a. Bei Einsendung von Zeugnissen für Probanden ist auch das Prüfungszeugniß derselben pro fac. doc. urschriftlich mit einzusenden. b. Die schriftliche wie die mündliche Abiturienten-Prüfung hat innerhalb der beiden letzten Monate des Schulsemesters stattzufinden. c. Anträge auf Unabkömmlichkeits-Atteste für Lehrer bei Mobilmachung sind auf die dringendsten Fälle zu beschränken. d. Die Angabe der Lehrpensa für das Schuljahr ist spätestens 14 Tage nach dem Anfang desselben einzusenden. — 12. October. Betreffend die starke Frequenz der Secunda. — 13. Dez. Daß Schüler im Namen ihrer Classe einen Ausdruck der Theilnahme bei einem Todesfall oder Anderes dergleichen in Zeitungen veröffentlichen, ist nicht zu dulden. — 4. Juni 1868. Eine Verpflichtung zur Prüfung von Aspiranten eines öffentlichen Dienstes, für welchen es eines Maturitätszeugnisses nicht bedarf, ist nur in den Fällen vorhanden, auf welche die Instruction vom 23. März 1846 Anwendung findet. — 11. Juni. Auf verschiedene zum Theil neue Bestimmungen der Militair-Ersatzinstruction für den Norddeutschen Bund vom 26. März d. J. wird verwiesen.*) — 12. Juni. Lehrer, welche an der diesjährigen Jubiläumsfeier der Universität Bonn Theil zu nehmen wünschen, sind für die dazu erforderliche Zeit zu beurlauben. — 26. Juni. Der Candidat des höheren Schulamts Spölgen wird zur Abhaltung des Probejahrs an der hiesigen Realschule zugelassen. — 29. Juli. Auf besonderen Bericht wird genehmigt, daß der Schluß des laufenden Schuljahrs an der hiesigen Realschule am 29. August, der Anfang des künftigen dagegen am 4. October c. stattfindet. —

*) Unter diesen Bestimmungen sind von Wichtigkeit für die Schüler unserer Anstalt:

1. Die Berechtigung zum einjährig-freiwilligen Dienst darf nicht vor vollendetem 17. Lebensjahre und muß bei Verlust des Anrechts spätestens bis zum 1. Februar des Kalenderjahrs nachgesucht werden, in welchem das 20. Lebensjahr vollendet wird.

Das neue Schuljahr begann am 2. October mit der Prüfung der bedingt versetzten Realschüler. An demselben Tage fand die Anmeldung der neuen Schüler der Vorschule, am folgenden der Wiederbeginn des Unterrichts derselben und die Prüfung der neu aufzunehmenden Realschüler statt und am 4. October der Wiederbeginn des Unterrichts der Realschule.

Am 22. März beging die Anstalt in gewohnter Weise mit Festrede und Gesang die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs in ihrer Aula im Kreise von Gönnern und Freunden. Die Festrede, welche Herr Oberlehrer Dr. Rothert hielt, verbreitete sich über den nationalen Gehalt von Göthe's Hermann und Dorothea.

Am 10. Mai empfingen 32 jüngere Schüler, von ihrem Religionslehrer Herrn Schulinspector Fuß in besonderen Unterrichtsstunden vorbereitet, unter Mitbetheiligung ihrer älteren Mitschüler und der katholischen Lehrer der Anstalt, die erste h. Communion.

Das Curatorium der Realschule ist unverändert geblieben. Es besteht aus dem Herrn Oberbürgermeister Hammers als Vorsitzendem, den Herren Gemeindeverordneten Alb. Jung, Mücke, Dr. med. Reinartz, ferner den Herren Adv. Justizrath Stiesberg, Rentner Walbröhl, Dechanten und Ehrendomherrn Joesten, Pfarrer Natorp und dem Berichterstatter.

Der katholische Religionslehrer Herr Fuß, bis dahin Kaplan der Andreaspfarre, vertauschte das letztere Amt mit dem neu creirten eines städtischen Schulinspectors für die katholischen Elementarschulen unter Fortsetzung seines Wirkens an der Realschule. Ueber diesen Tausch freut sich die Anstalt nicht weniger herzlich, als die Freunde des gedachten städtischen Schulwesens. Je dankbarer sie der Unverdrossenheit und aufopfernden Liebe eingedenk war, mit welcher Herr Fuß seit einer Reihe von Jahren mit den Obliegenheiten seines bisherigen Amtes zugleich die eines Religionslehrers an der Realschule wahrnahm, und je inniger sie des Segens sich erfreute, der auf seinem Wirken ruhte, um so mehr mußte sie, zumal mit der Erweiterung der Anstalt die Mühewaltung für dieselbe wesentlich zugenommen hatte, an die immer mehr wachsende Wahrscheinlichkeit mit Besorgniß denken, daß der würdige Seelsorger zu einem anderweitigen Wirkungskreis berufen werden möchte, welcher den Verlust desselben für die Anstalt nach sich ziehen könnte, und sie schätzt sich daher glücklich, daß sein jetziges städtisches Amt zu einem Wechsel und somit auch zu einer solchen Besorgniß weniger Grund gibt.

Ueber die früheren Lebensverhältnisse des seit dem Anfange dieses Schuljahrs an der Realschule angestellten ordentlichen Lehrers Herrn Hugo Viehoff ist Folgendes zu berichten:

Hugo Viehoff, am 13. Januar 1840 zu Emmerich geboren, besuchte bis zum Herbste 1857 das Gymnasium seiner Vaterstadt, studirte dann $3^1/_2$ Jahre zu Bonn Mathematik und Naturwissenschaften und war gleichzeitig Mitglied des dortigen naturwissenschaftlichen Seminars. Nach Ablegung des Staatsexamens trat er am 1. Januar 1862 das Probejahr am Gymnasium zu Trier an und wurde im Juni desselben Jahres mit der commissarischen Verwaltung einer Lehrerstelle an der dortigen Realschule betraut. Nachdem er dann im Herbste 1865 behufs Erfüllung seiner Militairpflicht auf 1 Jahr beurlaubt worden, erfolgte im Winter $18^{66}/_{67}$ seine definitive Anstellung an der genannten Anstalt. Am 1. October 1867 wurde er als ordentlicher Lehrer an die hiesige Realschule berufen.

Außer Herrn Dr. Heuer ward Herrn Dr. Hölscher im Herbste v. J. eine ordentliche Lehrerstelle provisorisch übertragen.

Herr Candidat Spölgen trat am 1. Juli das Probejahr an.

Die beiden unter Aufsicht der Herren Erk und Schröter stehenden Silentien wurden im Ganzen von durchschnittlich 100 Schülern besucht.

Botanische Excursionen wurden an freien Nachmittagen von Dr. Czech und Dr. Jansen mit den Quartanern gemacht, theils in den Hofgarten, theils in den neuen und den alten botanischen Garten, sowie in die Umgegend der Stadt. Auch wurden die Schüler zur Anlegung von Herbarien angehalten.

Als Ordner verdienen folgende Schüler eine löbliche Erwähnung: Schede, Goecke und Clören in II, Heinen und Branscheidt in III.A, Bockmühl und Welk in III.B, Schmitz und Seringhaus in IV.A, Havenith und Meinhold in IV.B, Molitor und Siebert in V.A, Furthmann und Küpper in V.B, Pöling und Förster in VI.A, Gregoor und Bings. in VI.B.

Der Kassenbestand der Schüler-Bibliothek betrug beim Beginn des Schuljahres 4 Thlr. 11 Sgr. 10 Pf. Dazu kam als Ertrag der in üblicher Weise in den einzelnen Klassen angestellten Sammlung: in I. 1 Thlr. 10 Sgr., in II. 6 Thlr. 8 Sgr. 6 Pf.,

---

2. Ausnahmsweise kann der durch die versäumte rechtzeitige Anmeldung verloren gegangene Anspruch durch Resolution der Ersatzbehörden 3. Instanz wieder verliehen werden, wenn der betheiligte Militairpflichtige noch nicht an einer Loosung Theil zu nehmen verpflichtet war oder vermöge seiner Loosnummer disponibel geblieben ist. Im letzteren Falle muß der diesfällige Antrag vor der zweiten Aushebung, bei welcher der Militairpflichtige zu concurriren hat, formirt sein. — Die bezüglichen Gesuche sind an die zuständige Kreis-Ersatzcommission zu richten.

3. Der Prüfungscommission sind bei der Meldung einzureichen: a. ein Geburtszeugniß (Taufschein); b. ein Einwilligungsattest des Vaters, beziehungsweise Vormunds; c. ein Unbescholtenheitszeugniß, welches für Realschüler vom Director auszustellen ist.

4. Von der persönlichen Gestellung vor die Prüfungscommission zur Darlegung der wissenschaftlichen Qualification sind entbunden die Schüler der Realschulen erster Ordnung aus den beiden obersten Classen, gleichviel ob diese Classen in sich getrennte Abtheilungen haben oder nicht, die Secundaner jedoch nur, wenn sie mindestens **ein** Jahr der Classe angehört, an allen Unterrichtsgegenständen Theil genommen, sich das Pensum gut angeeignet und sich **gut** betragen haben. Die Zeugnisse hierüber sind von der Lehrerconferenz festzustellen.

III.a 3 Thlr. 14 Sgr. 5 Pf., III.b 4 Thlr. 9 Sgr., IV.a 3 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf., IV.b 3 Thlr. 5 Sgr., V.a 3 Thlr. 12 Sgr. 6 Pf., V.b 4 Thlr. 14 Sgr. 1 Pf.; zusammen waren also 34 Thlr. 2 Sgr. 10 Pf. zu verwenden. Davon erhielt der Buchbinder Nick für das Einbinden theils neuer Bücher, theils (82) älterer, deren Einbände beschädigt oder verdorben waren, im Ganzen 14 Thlr. 6 Pf. Für die übrigen 20 Thlr. 2 Sgr. 4 Pf. wurden die unten angeführten Werke angeschafft; die genauere Rechnungsablage wird im Programm des nächsten Jahres erfolgen.

Ferien hatte die Anstalt 1. im Herbste v. J., einschließlich der Versetzungs- und Aufnahme-Prüfungstage, vom 29. August bis 4. October, also 36 Tage; 2. Weihnachten 10 Tage, 3. Ostern und Pfingsten zusammen 24 Tage.

Für den Aula-Fonds, bestimmt zur Unterstützung dürftiger und würdiger Realschüler, insbesondere solcher, welche nach Absolvirung der Schule zu ihrer weiteren Ausbildung eine höhere Lehranstalt besuchen,*) sind seit dem vorigjährigen Berichte bis zum 1. Juli d. J. durch fernern Verkauf der Schrift „Bendemanns Wandgemälde" und an Eintrittsgeldern im Ganzen eingegangen 55 Thlr. 27 Sgr. 6 Pfg. Dagegen wurde aus diesem Betrage verausgabt für die Herausgabe von die Wandgemälde betreffenden Affichen**) (Druck, Cartonirung und zum Theil Einrahmung unter Glas und Versendung derselben), Mühewaltung des Pförtners u. a. kleinere Posten im Ganzen 22 Thlr. 20 Sgr. 6 Pf., so daß für den Fond noch erübrigt wurden 33 Thlr. 7 Sgr. An Zinsen flossen demselben aus dem Jahre 1867 zu 14 Thlr. 15 Sgr. und aus dem Jahre 1868 bis zum 15. Mai d. J. 23 Thlr., im Ganzen also an Zinsen 37 Thlr. 15 Sgr. Da gegenwärtig kein unterstützungsbedürftiger Zögling der Anstalt zu seiner weiteren Ausbildung eine auswärtige höhere Lehranstalt besucht, dagegen die Schulbücher-Bibliothek für arme Schüler, welche keinen Zuschuß aus städtischen Mitteln hat, in Folge der Ausdehnung der Anstalt einer Vermehrung dringend bedarf, und in nächster Zeit die Kosten für eine zweite Auflage der oben gedachten Schrift zu bestreiten sind, so wird mit höherer Genehmigung der erwähnte Zuwachs des Fond's von im Ganzen 70 Thlr. 22 Sgr. in diesem Jahre ausnahmsweise zu den beiden letztgenannten Zwecken verwandt werden.

III. Statistische Nachrichten.

Die Schülerzahl im Ganzen betrug in diesem Schuljahre a. in der Realschule 412, in der Vorschule 211, also zusammen 623. Im Wintersemester war dieselbe a. in der Realschule 390, und zwar 9 in I, 45 in II, 24 in III.a, 32 in III.b, 41 in IV.a, 43 in IV.b, 45 in V.a, 47 in V.b, 59 in VI.a, 54 in VI.b; b. in der Vorschule 165, nämlich 69 in der oberen, 57 in der mittleren und 39 in der unteren Classe. Im Sommersemester zählte a. die Realschule 361 Schüler, davon 8 in I., 37 in II., 24 in III.a, 32 in III.b, 36 in IV.a, 40 in IV.b, 40 in V.a, 45 in V.b, 54 in VI.a, 53 in VI.b. b. die Vorschule 205 Schüler, nämlich 76 in der oberen, 67 in der mittleren, 62 in der untern Classe.

Von der Gesammtzahl der Realschüler waren 198 katholischer, 188 evangelischer Confession, 26 israelitischen Glaubens, 177 über 14 Jahr zu Anfang des Schuljahrs, 41 auswärtige, 9 Ausländer. Von der Gesammtzahl der Vorschüler waren 113 katholischer, 91 evangelischer Confession, 7 israelitischen Glaubens, 7 auswärtige. Aufgenommen wurden in der Realschule im Winter 105 Schüler, im Sommer 12, in der Vorschule im Winter 50, im Sommer 37 Schüler.

IV. Lehrmittel.

Es sind hinzugekommen:

1. Für Mathematik und Physik.

Aus den etatsmäßigen Schulmitteln: Eine Leydener Flasche. Eine Laterne mit Beleuchtungslinse, Hohlspiegel, verengbarer Spalte und verschiebbarer Röhre. Ein Hygroskop von August. Ein Schwefelkohlenstoff-Prisma. Eine Geislersche Röhre zum Reiben für electr. Licht in verdünnter Luft. Zwei Glasröhren, eine vollkommen luftleere und eine lufthaltige für den Nichtdurchgang des electr. Funkens durch das Vacuum. Eine desgleichen für das Leuchten des Quecksilbers in der Luftleere bei der Reibung. Eine Lane'sche Flasche. Eine electr. Schelle. Eine Pile-bouteille mit Chrom. Ein Platintiegel. Verschiedene Glaswaaren als Pulverflaschen, Bechergläser u. dgl. —

Von den vorigjährigen Abiturienten schenkte Albert Wenker 5 Thlr. und Anton Fliegelskamp einen Friedrichsd'or für das physikalische Kabinet.

2. Für Chemie.

A. Durch Schenkung: Von Herrn Kaufmann Hagedorn ein Schirm aus lackirtem Eisenblech.

B. Durch Ankauf: Im Laboratorium wurde eine Gasleitung angelegt, um das Gas zum Beleuchten der Räume und bei den praktischen Arbeiten als Heizmaterial zu benutzen; die nöthigen Bunsen'schen Brenner und Stative wurden angeschafft.

---

*) Ausführlichere Mittheilungen hierüber finden sich im Programm vom vorigen Jahre.

**) Der Verleger der Düsseldorfer Zeitung, Herr Stahl, hat fortwährend die dankenswerthe Freundlichkeit, eine die Wandgemälde betreffende Anzeige unentgeltlich von Zeit zu Zeit in seinem Blatte erscheinen zu lassen.

3. Für Naturgeschichte.

Durch Schenkung: von Herrn Consul Krumbügel hierselbst eine ausgestopfte Rohrdommel; von Herrn Maler Litschauer die Säge eines Sägefisches und neuseeländische, mit Haifischzähnen besetzte Wurfwaffen; von Herrn Kaufmann Seelig in Amsterdam ein sogenannter Schiffshalter (Echeneis), ein Tukanschnabel und einige Meeres-Algen; von Herrn Oberlehrer Dr. Czech Dechen's geognostische Uebersichtskarte von Rheinland-Westphalen; von Herrn Weitgand eine große reife Baumwollenkapsel. Von Schülern der Anstalt: von Müller (abgegangen aus II.) mehrere Mineralien und eine Clymenia; von Eichmann (II.) einige Steinnüsse oder Elfenbeinfrüchte (Phytelephas); von Bockmühl (III.) ein Büschel Getreideähren, incrustirt im Sprudelstein von Karlsbad; von Simons II. (IV.) sammtglänzender Schwefelkies von Gelsenkirchen; von Mayrhofer (abgegangen aus IV.) einige Rankenfüßer und Meeres-Algen; von Pfundt (V.) Eckzähne des Ebers; von Adolf (V.) ein Stück Malachit.

Durch Ankauf: Gypsabgüsse des männlichen und weiblichen Schädels, sowie der Vorder- und Hinterhand vom Gorilla-Affen; ferner photographische Abbildungen der Köpfe aller Menschen-Racen, geographisch geordnet nach v. Baer's Sammlung in Petersburg.

4. Zur Schulbibliothek.

A. Durch Schenkung: Von dem Königlichen Provinzial-Schulcollegium: Verhandlungen der Schlesischen Gymnasial- und Realschul-Directoren. — Von dem Berichterstatter: Uhlhorn, über einen neu erfundenen Tachometer. — Von Herrn Dr. Stammer: Allgemeine Literaturzeitung von Wiedemann. — Von dem hiesigen Oberbürgermeisteramte: Scheller, lat. Handlexicon; Neigebauer, Volksschulwesen in Preußen; Schmid, das Naturzeichnen; Wappen und Titel des Preuß. Königshauses; von Schorn, die Autorschaft des Fechters von Ravenna; Hocker, die Stammsagen der Hohenzollern und Welfen; Spieß, Turnkunst u. a. — Von Herrn Buchhändler Gestewitz: Shakspere by Charles Knight.

B. Durch Ankauf, zum Theil als Fortsetzungen: Wiese: Verordnungen und Gesetze für die höheren Schulen in Preußen, I. und II. — Schmid, Encyclopädie des Erziehungswesens, Lief. 58—60. — Tyndall, die Wärme als eine Art der Bewegung. — Müller, Lehrbuch der Geometrie für Handwerker-Fortbildungsschulen. — Kellner, praktischer Lehrgang für den deutschen Sprachunterricht, 3 Bände. — Kellner, ausgewählte Musterstücke. — Fortschritte der Physik, XXI, 1. 2. — Lacomblet, Archiv f. Niederrhein. — Poggendorff's Annalen 1867. — Stiehl, Centralblatt 1867. — Külp, Experimentalphysik IV. — Aus dem Leseverein der Schule: Magazin für die Litteratur des Auslandes 1867. — Herrig, Archiv für die neuern Sprachen. — Grunert, Archiv für die Mathematik und Physik. — Zarncke, litt. Centralblatt. — Andree, Globus (geog. Zeitschrift).

5. Zur Schülerbibliothek.

A. Durch Schenkung: Rom und Carthago (Spamerscher Verlag); Hirt und Maler; Lebensbilder; Robinson — geschenkt von M. Glaser, Bertram, Al. Moritz und Klein, sämmtlich Schülern der Quinta B.

B. Durch Ankauf: Hartwig, Gott in der Natur, 3 Exemplare. — Schauenburg, Reisen in Afrika (Fortsetzung). — Das neue Buch der Erfindungen (Spamerscher Verlag) V. Bd. — Vogel, deutsche Geschichte. — Deutsche Geschichten für die Kinderstube, herausgegeben unter Mitwirkung von C. Vogel, 1. und 2. Bdchn. — Die neue Welt, Leipzig (Spamerscher Verlag). — Hoffmann, wilde Scenen in Südafrika. — K. Fr. Beckers Erzählungen aus der alten Welt, herausgegeben von Eckstein, 1. 2. 3. Theil. — Die ostasiatische Inselwelt von Friedmann (Spamerscher Verlag). — Silberblicke von Horn, 1 Sammlung. — Germania von Dielitz. — Reisebilder von Kutzner. — Teutonia von Dielitz (Fortsetzung der Germania).

6. Zu den Schulbüchern für unbemittelte Schüler.

Durch Schenkung: Von dem Secundaner Pütz: Hopf und Paulsiek f. III; Paganel, Frédéric le grand; Scheele II; Deharbe, gr. Katech. u. a. — Von dem abgehenden Primaner Severin: Probst, Uebungsbuch; Heis, Algebra; Spieß, Uebungsbuch für III; Scheele II u. a. — Von dem abgehenden Secundaner Braun: Turner, engl. Wörterbuch; Atlas von Lichtenstern und Lange; Franklin's life u. a. — Von dem Abiturienten Fliegelskamp: Liv. lib. I—VI; Deharbe, Katechismus; Hopf und Paulsiek für VI; desgl. für IV und III; Siberti, lat. Gramm.; Caes. ed. Kraner; Schellen, Rechenbuch u. m. a. Von der Riegel'schen Buchhandlung in Postdam: 3 Ex. von Spieker, eb. Geom. Von demselben Werke schenkte die Buchhandlung von Nädelen: 6 Ex.; die von de Haen: 2 Ex.; eben so viele die von Gestewitz und P. Mischel. — Von der Herbig'schen Buchhandlung in Berlin: Plötz, Manuel d. l. litt. fr.

Da der Raum nicht erlaubt, die sämmtlichen Geschenke einzeln aufzuführen, so wollen wir wenigstens nicht versäumen, den genannten sowie den ungenannten Gebern an dieser Stelle unsern aufrichtigsten Dank auszusprechen. Gleichen Anspruch auf denselben haben die Herren Othmer und Wildförster hierselbst, welche uns für die öffentlichen Gesangaufführungen schon seit mehreren Jahren einen Concertflügel aus ihrem reichen Lager in freundlichster Weise zur unentgeltlichen Benutzung überlassen.

V. Unterricht für Handwerker.

1. Sonntags, von 9—12 Uhr, Zeichnen in 3 getrennten Classen. Lehrer: die Herren Professor Conrad, Inspector Holthausen und Maler Kost. Schülerzahl bei Herren Conrad im Winter 54, im Sommer 42, bei Herrn Holthausen im Winter 50, im Sommer 39, bei Herrn Kost im Winter 82, im Sommer 60.

2. An Wochentagen im Winter Lehrer: Die Herren Duckweiler, Steinhoff und Störling. Drei getrennte Classen, jede mit zweimal zwei Unterrichtsstunden. Abends 6—8 Uhr

I. Classe. 18 Schüler. Erklärung gemeinnütziger Schriften nach Form und Inhalt. Anweisung zur Anlegung von Geschäftsbüchern. Kurze Geschäftsaufsätze. Uebungen im bürgerlichen Rechnen. Anfänge der Geometrie. Duckweiler.

II. Classe. 20 Schüler. Lesen, Rechnen, Dictate von Anzeigen, Quittungen u. dgl. Steinhoff.

III. Classe. 20 Schüler. Kopf- und Tafelrechnen, Schreiben und Lesen. Störling.

Die Gesammtzahl der Schüler in den Zeichenclassen betrug daher im Winter 186, im Sommer 131, der Schüler im Abendunterricht 58.

Uebersicht der öffentlichen Prüfungen in der Aula der Realschule.

Donnerstag den 27. August.

I. Vorschule.

Vormittags { 8—10 Uhr. Untere und mittlere Classe.
10—11½ Uhr Obere Classe.

II. Realschule.

Nachmittags von 3—6 Uhr.

Sexta A. { Latein, Rothert.
Deutsch, Erk.

Sexta B. { Geographie, Schröter.
Latein, Heuer.

Quinta A. { Französisch, Wirtz.
Geographie, Erk.

Quinta B. { Rechnen, Schröter.
Latein, Hölscher.

Freitag den 28. August.

Vormittags von 8—12 Uhr.

Quarta A. { Deutsch, Eddelbüttel.
Geschichte, Heuer.

Quarta B. { Mathematik, Viehoff.
Französisch, Mieck.

Tertia A. { Mathematik, Stammer.
Englisch, Mieck.

Tertia B. { Mathematik, Viehoff.
Geographie, Czech.
Englisch, Hölscher.

Nachmittags von 3—6 Uhr.

Secunda { Naturgeschichte, Czech.
Geschichte, Honigsheim.
Latein, Rothert.

Prima { Mathematik, Heinen.
Latein, Honigsheim.
Chemie, Stammer.

Die Zeichnungen und Schönschriften liegen Donnerstag den 27. und Freitag den 28. August, Mittags von 12—1 Uhr, im Zeichensaale neben der Aula zur Einsicht offen.

Samstag, den 29. August, Vormittags von 9 Uhr an:

Redeübung.

Gesang: Preis und Anbetung unserm Gott! Musik von Rinck.

Lupp VIa. Die Sieger von Vogl.
Massau Vb. Die große Grete von Gisb. von Vincke.
Böhmer IVb. Alexander Ypsilanti von Wilh. Müller.
Hoffmeister IIIb. Die Alte von Husum von Kath. Diez.
Th. Goecke II. Mort d'Iphigénie par Racine.

Gesang: Sandwirth Hofer, nach einer Volksweise vierstimmig von L. Erk.

W. Müller Va. Die Landwehr von H. Viehoff.
Dahlmann II. Gründung der preuß. Landwehr. (Eigene Arbeit.)
Fiset VIb. Der Diener und der rothe Wein von A. Voß.
Dimmers IVb. L'âme du licencié par le Sage.
Kirrkamm IIIa. Des Deutschritters Ave von Geibel.
Rethel I. Eloge de Charlemagne. (Eigene Arbeit.)

Gesang: Herr, Deine Güte ꝛc. ꝛc., Motette von Grell.

Vormann VIa. Die Wahrsagerin von E. Götze.
Kaiser Vb. Der Trunk aus dem Stiefel von Pfarrius.
Köhler IVa. L'aveugle et le perclus par Florian.
Maaßen VIb. Die Herberg zum güldenen Ring von Scherenberg.
Woothke I. The great Elector's attempts to establish a navy. (Eigene Arbeit.)

Gesang: Der Schnitter Tod von Louise Reichardt, vierstimmig von L. Erk.

Seringhaus IVa. Der Räuber und das Crucifix von Prutz.
Breit II. Retribution by Southey.
Köppe Va. Die Knödel von Rückert.
Spatz IIIa. Le roi des aunes par Deschamps.
Albers und Kaulen I. Göthe's Iphigenie Act II, Scene I.
Ansoul I. Ueber Göthe's Iphigenie. (Eigene Arbeit.)

Schlußgesang: Singet dem Herrn ꝛc., nach B. Klein, vierstimmig von Fr. Erk.

Nach dem Schlußgesange begeben sich die Schüler in ihre Classen, um ihre Zeugnisse zu empfangen und über ihre Versetzungsfähigkeit in höhere Classen das Nähere zu vernehmen.

Montag den 5. October, Morgens von 8 Uhr an, Prüfung der bedingt versetzten Realschüler. An demselben Tage von 10—12 Uhr Anmeldung der in die Vorschule aufzunehmenden Schüler; am folgenden Wiederbeginn des Unterrichts in derselben.

Dienstag den 6. October, Morgens von 8 Uhr an Anmeldung, von 9½ Uhr an Prüfung der neu aufzunehmenden Realschüler, welche sich zu dem Ende mit Zeugnissen ihrer bisherigen Lehrer und mit Schreibmaterialien zu versehen und wo möglich in Begleitung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter einzufinden haben. Die Unterbringung auswärtiger Schüler hiesigen Orts in Kost und Logis bedarf der Genehmigung des Directors. — Am folgenden Tage Wiederbeginn des Unterrichts.

Ferienunterricht wird im Schulgebäude während 3 Wochen ertheilt:

1) Für die Schüler der 3 Classen der Vorschule Morgens von 8—10 Uhr von den Herren Duckweiler, Steinhoff und Störling;
2) der beiden untern Classen der Realschule Morgens von 9—12 Uhr von den Herren Dr. Mieck, Erk und Schröter;
3) der mittleren Classen Morgens von 9—12 Uhr von den Herren Dr. Eddelbüttel und Viehoff.

Das von den Theilnehmenden zu entrichtende Honorar beträgt für die Schüler der Vorschule 1 Thlr., für die der unteren Classen der Realschule 1½ Thlr., für die der mittleren Classen 2 Thlr.

Nachschrift. 20. August. Nachmittags 3 Uhr. **Die Anstalt hat eben die hohe Ehre und Freude gehabt, Se. Majestät unseren allverehrten König in ihren Räumen zu sehen, in deren Aula Allerhöchst derselbe „Bendemanns Wandgemälde," einer eingehenden Besichtigung würdigte und mit lebhaftem Interesse von den Einzelheiten derselben Kenntniß zu nehmen geruhte.**

Dr. Heinen,
Director.

Fig. I.

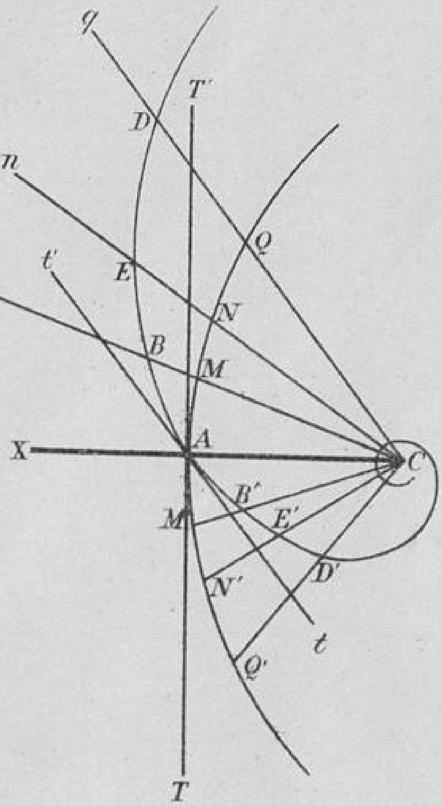

Fig. II.

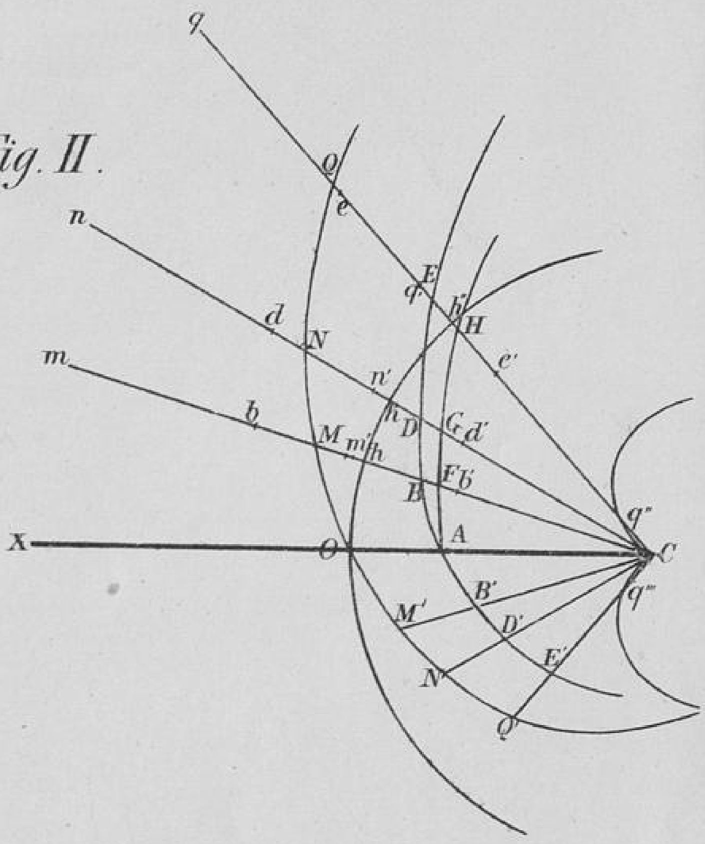

Fig. III.

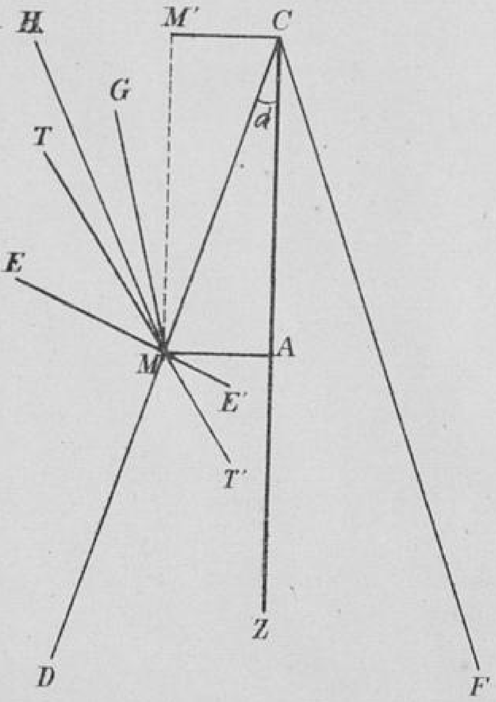

Fig. IV.