klein, folglich muß ihre kinetische Energie groß sein, d. h. sie bewegen sich an dieser Stelle schnell. Fern von der Sonne, im Aphel, ist es natürlich umgekehrt. Daraus folgt ohne weiteres, daß ihre Verbindungslinien mit der Sonne, die Radii vectores, in gleichen Zeiten gleiche Flächen durchmessen (zweites Gesetz von Kepler).

B. Gesetze der festen Körper.

§ 16. **Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften.** Für manche Betrachtungen ist es nötig, mehrere Kräfte durch eine einzige zu ersetzen und umgekehrt. Dies geschieht nach folgenden Grundsätzen:

1) Es handelt sich zunächst um zwei Kräfte, die an einem Punkte angreifen. Entweder haben sie genau die gleiche oder genau die entgegengesetzte Richtung. Im ersten Falle können sie ersetzt werden durch eine Kraft gleich ihrer Summe, im zweiten durch eine Kraft gleich ihrer Differenz. Zwischen diesen Extremen liegen noch viele andere Möglichkeiten, wenn nämlich die Kräfte miteinander einen Winkel bilden. In Punkt A (Fig. 3) greifen z. B. die Kräfte AB und AC an. Dann ist die Wirkung die gleiche, wie wenn allein die Kraft AD angegriffen hätte. AD heißt die Resultante, AB und AC die Komponenten. Die Resultante läßt sich nun leicht finden: sie ist die Diagonale des Parallelogramms, zu dem sich die ursprünglichen Kräfte vervollständigen lassen (Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte). In gleicher Weise kann man beliebig viele Kräfte zu einer vereinigen, indem man nacheinander immer zu je zwei derselben die Resultante konstruiert. Umgekehrt läßt sich jede Kraft in zwei oder beliebig viele Komponenten zerlegen.

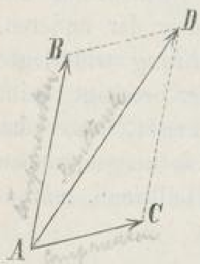

Fig. 3.

2) Die Resultante zweier nicht paralleler Kräfte, die an verschiedenen Punkten angreifen, findet man, wenn man die Kräfte in ihrer eigenen Richtung verschiebt, bis sie sich schneiden, und dann wieder das Parallelogramm der Kräfte konstruiert.

3) Die Resultante paralleler Kräfte kann nur auf einem Umwege gefunden werden.

Um z. B. die Resultante der an AB (Fig. 4) angreifenden parallelen Kräfte P und Q zu finden, denke man sich auf A und B die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte E und E^1 wirkend, wodurch ja der Bewegungszustand des Systems nicht geändert wird. Aus AE und AP ergibt sich die Resultante AC, aus BQ und BE^1 die Resultante BD. Verschiebt man nun AC und BD in ihrer eigenen Richtung, bis sie sich in F schneiden, und zerlegt sie dort wieder in zwei Kräfte, so daß GF und FH gleich und parallel AE und BE^1 sind, so ist die in F angreifende Resultante erstens parallel P und Q, und, da FJ und FL in einer Richtung wirken, auch gleich der Summe von P und Q. Diese Resultante läßt sich nun in ihrer eigenen Richtung so weit verschieben, daß ihr oberes Ende auf AB fällt. MN ist dann die gesuchte Größe.

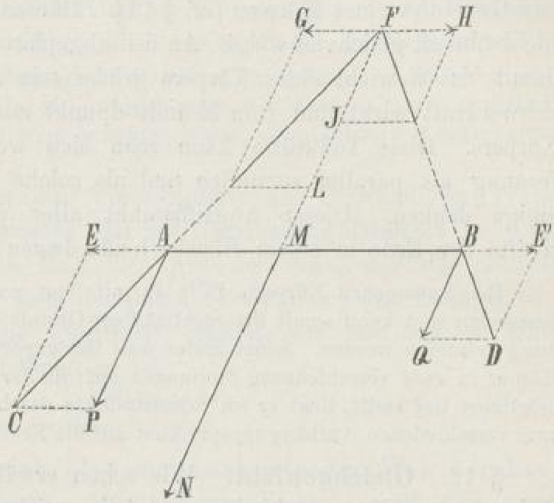

Fig. 4.

Zwei (und natürlich auch beliebig viele) parallele, gleichgerichtete Kräfte lassen sich also ersetzen durch eine Resultante, die gleich ihrer Summe ist und dieselbe Richtung hat wie sie. M heißt Mittelpunkt der parallelen Kräfte und ist von der Richtung der parallelen Kräfte ganz unabhängig.

4) Wenn parallele Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen angreifen, so läßt sich eine Resultante nur finden, wenn sie verschieden groß sind. Zwei gleichgroße, parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte lassen sich nämlich nicht zu einer einzigen vereinigen. Sie bewirken eine Drehung des Körpers, an dem sie angreifen, und heißen ein Kräftepaar.

§ 17. **Schwere und Schwerpunkt.** Alle Körper sind der Schwere unterworfen. Damit bezeichnet man die Kraft, mit der sie von der Erde angezogen werden. Diese Kraft denkt man sich im Mittelpunkt der Erde lokalisiert. Ein nicht unterstützter Körper fällt also in der Richtung nach dem Erdzentrum. Diese Richtung heißt vertikal, die dazu senkrechte Ebene horizontal. Die Größe der Schwerkraft (gravitas) wird gemessen durch die Beschleunigung g, die sie einem fallenden Körper erteilt; dieselbe ist identisch mit der Geschwindigkeit desselben am Ende der ersten Sekunde (9,81 m). Da nach dem Gravitationsgesetze die Anziehung zwischen zwei Körpern um so größer wird, je kleiner die Entfernung ist, so muß g um so größer sein, je näher ein Körper dem Erdzentrum ist. Das Produkt aus Masse und Beschleunigung durch die Schwerkraft, mg, heißt nun das Gewicht eines Körpers [cf. § 11]. Daraus folgt, daß ein Körper nicht überall gleichviel wiegt. An den abgeplatteten Polen wird g und damit das Gewicht eines Körpers größer sein als am Äquator. Die Schwerkraft wirkt nun vom Erdmittelpunkt aus auf alle Teilchen des Körpers. Diese Teilkräfte kann man sich wegen der großen Entfernung als parallel vorstellen und als solche in einem Punkte vereinigt denken. Dieser Angriffspunkt aller parallelen anziehenden Kräfte der Erde in einem Körper heißt dessen Schwerpunkt.

Bei homogenen Körpern fällt er mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammen und kann somit bei regelmäßiger Gestalt des Körpers durch Rechnung gefunden werden. Sonst findet man ihn experimentell: Man hängt den Körper in zwei verschiedenen Stellungen auf; da der Schwerpunkt sich immer möglichst tief stellt, liegt er im Schnittpunkte der beiden Lote, die von den zwei verschiedenen Aufhängungspunkten auf die Erdoberfläche gefällt werden.

§ 18. **Gleichgewicht.** Wie schon erwähnt, ist ein Körper in Ruhe, wenn die verschiedenen auf ihn wirkenden Kräfte sich aufheben. Man nennt den Zustand der Ruhe auch Gleichgewicht, besonders wenn eine der wirkenden Kräfte die Schwerkraft ist. Man unterscheidet nun drei Arten des Gleichgewichts:

1) Indifferentes oder neutrales Gleichgewicht, wenn Schwerpunkt und Unterstützungspunkt zusammenfallen (z. B. bei Rädern) oder wenn der Schwerpunkt stets senkrecht über dem Unterstützungspunkte liegt (z. B. bei Kugeln). Die Folge hiervon ist, daß der Körper bei jeder Verschiebung in der neuen Lage verharrt. Da also der Schwerpunkt in derselben Entfernung vom Erdmittelpunkt bleibt, bleibt auch die potentielle Energie des Körpers gleich groß. Mit anderen Worten, die Arbeit (gegen die Schwerkraft) ist hier bei der Verschiebung = 0 [cf. § 12]. In Wirklichkeit ändert die Reibung etc. dieses Resultat. Trotzdem bleibt ein Rad und eine Kugel sehr leicht beweglich.

2) Stabiles Gleichgewicht: Hierbei ist ein Körper so aufgehängt, daß der Schwerpunkt unter den Unterstützungspunkt fällt. Macht man eine Verschiebung, so kehrt der Körper in die ursprüngliche Lage zurück. Das beste Beispiel hierfür ist das Pendel. Beim stabilen Gleichgewicht liegt also das Schwergewicht so tief wie möglich, die potentielle Energie ist somit ein Minimum.

3) Labiles Gleichgewicht: ist dadurch charakterisiert, daß der Schwerpunkt senkrecht über dem Unterstützungspunkt liegt,

und daß der geringste Anstoß genügt, um den Körper in einen neuen Gleichgewichtszustand, nämlich den stabilen, überzuführen (z. B. ein auf die Spitze gestelltes Pendel). Anders ausgedrückt, die potentielle Energie ist hier ein Maximum. Übrigens ist auch der Mensch im labilen Gleichgewicht. Daher fallen kleine Kinder und Bewußtlose hin.

Für gewisse Betrachtungen, z. B. in der Physiologie, ist noch das sogenannte dynamische Gleichgewicht aufgestellt worden. Darunter versteht man denjenigen Zustand einer bewegten Masse, wenn ebensoviel hinzukommt wie fortgeht.

§ 19. **Maschinen** sind Vorrichtungen zur Umwandlung (Transformation) von Energietomen oder zur Übertragung derselben an einen andern Ort. Für alle Maschinen gilt der Satz, daß die Arbeitsleistung der Kraft P stets der durch Überwindung der Last Q verrichteten Arbeitsleistung gleich ist. Macht man also mittelst einer Maschine eine Verschiebung, so ist

$$Ps = Qs'$$

$$P : Q = s' : s.$$

Die Kraft verhält sich also zur Last wie der Weg der Last zum Wege der Kraft. Mit anderen Worten heißt dies, daß niemals eine Maschine, ohne daß von außen Energie zugeführt wird, selbsttätig Kräfte erzeugen kann, daß also ein Perpetuum mobile unmöglich ist [vgl. § 15]. Wenn daher auch durch Maschinen eine kleine Kraft eine große Last überwinden kann, so muß sie dafür einen um so größeren Weg zurücklegen. Die Arbeit bleibt also stets dieselbe.

Auch die Organismen, die auf den ersten Blick als selbständige Kräftequellen erscheinen könnten, sind ja von den zugeführten Spannkräften, der Nahrung etc., durchaus abhängig.

Im Folgenden sollen nur die einfachen Maschinen besprochen werden.

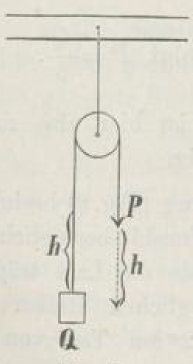

Fig. 5.

§ 20. Die **Rolle** ist eine kreisförmige Scheibe, die um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist, und an ihrem Umfange Seile etc. aufnehmen kann. Es gibt feste und bewegliche Rollen.

a) Bei der festen Rolle (Fig. 5) ist die Achse befestigt. Verschiebt man die Kraft P um die Strecke h, so wird die Arbeit Ph geleistet. Die Last Q geht

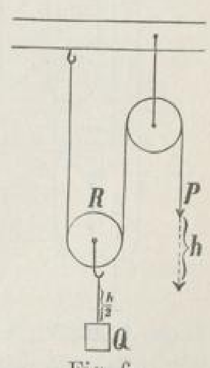

Fig. 6.

um ebensoviel in die Höhe, erfordert also die Arbeit Qh. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn $Ph = Qh$ oder $P = Q$ ist.

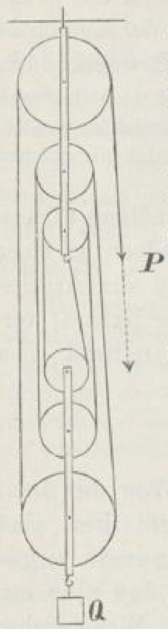

Fig. 7.

Das heißt, die angewandte Kraft ist ebensogroß wie die Last. Die feste Rolle dient also nicht zur Kraftersparnis, sondern nur, um die Richtung der Kraft zu ändern, bezw. die Reibung zu vermindern.

b) Bei der beweglichen Rolle (Fig. 6) ist auch die Achse beweglich. Verschiebt man die Kraft P um h, so wird die Arbeit Ph geleistet. Diese Verschiebung h verteilt sich nun auf beide Schnüre der beweglichen Rolle R. Q wird also nur um $\frac{h}{2}$ gehoben, somit die Arbeit $Q\frac{h}{2}$ geleistet. Gleichgewicht besteht, wenn

$$Ph = Q\frac{h}{2} \text{ oder } P = \frac{Q}{2} \text{ ist.}$$

Um die Last zu heben, ist also nur die halbe Kraft nötig. Freilich muß sie den doppelten Weg wie die Last zurücklegen.

§ 21. Der **Flaschenzug** ist eine Kombination von festen und beweglichen Rollen.

a) Der gewöhnliche Flaschenzug (Fig. 7) besteht aus einer Anzahl fester und ebensoviel beweglicher Rollen, die durch ein Seil verbunden sind, das immer von einer festen zu der entsprechenden beweglichen Rolle geht. Verschiebt man P um h, so wird die Arbeit Ph geleistet. Dann wird Q nur um den sovielten Teil von h gehoben, als Rollen vorhanden sind. In Fig. 7 herrscht also Gleichgewicht, wenn

$$Ph = Q\frac{h}{6} \text{ ist. Daraus folgt } P = \frac{Q}{6}.$$

Um die Last zu heben, ist hier also nur der sechste Teil der Kraft nötig.

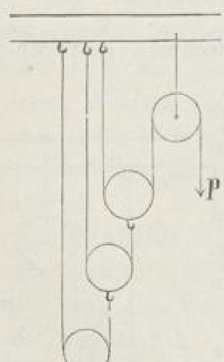

Fig. 8.

b) Der Potenzflaschenzug (Fig. 8) besteht aus einer festen und einer Anzahl beweglicher Rollen, von denen die unterste die Last trägt. Verschiebt man bei n beweglichen Rollen P um h, so wird Q um den 2^nten Teil von h gehoben.

Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn

$$Ph = Q\frac{h}{2^n} \text{ ist; daraus folgt } P = \frac{Q}{2^n}.$$

Also zum Heben der Last ist nur ein Teil der Kraft nötig, welcher der sovielten Potenz von 2 entspricht, als bewegliche Rollen vorhanden sind. In Fig. 8 wäre somit nur der 2^3 = achte Teil der Kraft nötig.

§ 22. Das **Wellrad** (Fig. 9) besteht aus einer Walze, der sogenannten Welle, vom Radius r, die um ihre Achse drehbar ist, und aus einem mit ihr fest verbundenen Rade vom Radius R, das oft auch gezähnt ist. Die Kraft P greift am Umfange des Rades an, die Last Q am Umfange der Welle. Verschiebt man nun P um H, so bewegt sich auch das Rad um den Bogen H, die damit verbundene Welle um den Bogen h. Q wird also um h gehoben. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$PH = Qh \text{ ist.}$$

Nun verhalten sich aber die Bogen H und h wie die entsprechenden Radien. Es ist also

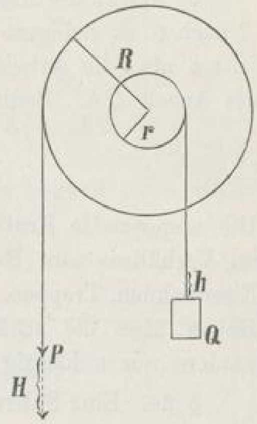

Fig. 9.

$$PR = Qr$$

$$P = \frac{r}{R}Q.$$

Zur Hebung der Last ist daher nur ein Bruchteil der Kraft nötig, der um so geringer ist, je größer das Rad und je kleiner die Welle ist. Dieselbe Wirkung erzielt man natürlich, wenn man zwei verschieden große Räder durch Ketten oder Riemen verbindet, bezw. sie mittelst Zähne ineinandergreifen läßt.

§ 23. **Schiefe Ebene** heißt eine gegen den Horizont geneigte Ebene, die zum Heben von Lasten dient (Fig. 10). AB heißt die Basis (b), BC die Höhe (h), AC die Länge (l) der schiefen Ebene. Die Last Q soll heraufgezogen werden:

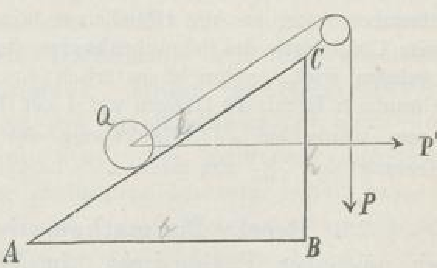

Fig. 10.

a) durch eine der schiefen Ebene parallele Kraft P. Wird Q von A nach C gezogen, so legt P den Weg l zurück, leistet also die Arbeit Pl.

Die Last wird dabei um BC gehoben, also die Arbeit Qh geleistet. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$Pl = Qh$$
$$P : Q = h : l.$$

Die aufgewandte Kraft ist also um so geringer, je kleiner die Höhe im Verhältnis zur Länge, d. h. je weniger steil die Ebene ist.

b) Wirkt die Kraft P^1 parallel zur Basis, so legt sie, um Q von A nach C zu bringen, in ihrer eigenen Richtung den Weg AB zurück, leistet also die Arbeit $P^1 b$. Die Hebung der Last erfordert wieder die Arbeit Qh. Bedingungen des Gleichgewichts:

$$P^1 b = Qh$$
$$P^1 : Q = h : b.$$

Die angewandte Kraft ist also um so geringer, je kleiner die Höhe im Verhältnis zur Basis ist. Diese Gesetze kommen bei Straßen, Eisenbahnen, Treppen, Rampen etc. zur Anwendung. Die Arbeit beim Heben über die schiefe Ebene ist natürlich unabhängig vom Weg, sondern nur abhängig von dem Gewicht der Last und der Höhe (Qh).

§ 24. Eine **Schraube** kann man sich dadurch entstanden denken, daß eine schiefe Ebene um einen Zylinder gewickelt wird. Bei der Schraubenspindel sind die Windungen erhaben; die Schraubenmutter ist ein Hohlzylinder mit entsprechenden Vertiefungen. Nach den Gesetzen der schiefen Ebene verhält sich hier die Kraft zur Last wie die Höhe einer ganzen Windung (Ganghöhe) zum Umfang der Schraube. Es wird also um so mehr Kraft gespart, je flacher die Schraubengänge sind.

Unter anderm dient die Schraube zu feinen Dickenmessungen als Mikrometerschraube: Wird der oberste Teil der Schraube, der sogenannte Schraubenkopf, einmal ganz herumgedreht, so bewegt sich die Spindel in der Schraubenmutter um die Höhe einer Windung, die bekannt ist. Eine teilweise Umdrehung des Schraubenkopfes, deren Größe an einer Kreiseinteilung abgelesen wird, entspricht natürlich einem Bruchteil dieser Höhe. Eine Schraube z. B. mit 10 Gängen auf 1 cm Höhe, also mit einer Ganghöhe von 1 mm würde bei $\frac{1}{100}$ Umdrehung des Schraubenkopfes eine Bewegung (Messung) von $\frac{1}{100}$ mm machen.

§ 25. **Hebel.** Ein mathematischer Hebel ist eine Linie, die sich um einen Punkt dreht. In Wirklichkeit gibt es nur einen physischen Hebel, d. i. eine unbiegsame, um eine feste Achse drehbare Stange, an der Kräfte angreifen. Der Punkt der Achse, um den die Drehung erfolgt, heißt Unterstützungspunkt, Drehungspunkt oder Hypomochlion; von ihm gehen die Hebelarme aus. Beim zweiarmigen Hebel (Fig. 12) greifen Kraft und Last auf verschiedenen Seiten des Unterstützungspunktes an, wirken aber nach derselben Richtung. Beim einarmigen Hebel (Fig. 11) greifen sie auf derselben Seite an, wirken aber nach entgegengesetzten Richtungen. Beim Winkelhebel bilden die Hebelarme einen Winkel.

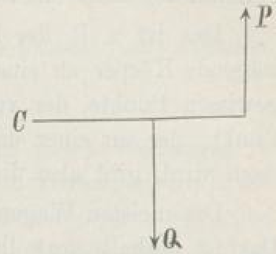

Fig. 11.

Um die Gleichgewichtsbedingungen am Hebel zu finden, werde (Fig. 12) die Kraft P um h verschoben, dann wird Q um h' gehoben.

Nach der Verschiebung hat der Hebel die Lage $A'CB'$. Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$Ph = Qh' \text{ oder}$$
$$P : Q = h' : h.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $A'CD$ und $B'CE$ folgt nun

$$h' : h = B'C : A'C$$
$$= BC : AC.$$

Bezeichnet man AC mit p und BC mit q, so ist

$$P : Q = q : p$$

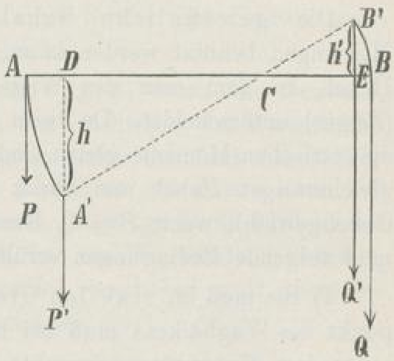

Fig. 12.

d. h. Kraft und Last verhalten sich umgekehrt wie ihre Hebelarme. Aus der Gleichung folgt ferner unmittelbar:

$$P \cdot p = Q \cdot q.$$

Das Produkt aus angreifender Kraft und ihrem senkrechten Abstand vom Drehungspunkte (Hebelarm) heißt nun statisches Moment oder Drehungsmoment. Mithin ist Gleichgewicht am Hebel vorhanden, wenn die entgegengesetzt wirkenden statischen Momente gleich sind. Bei mehreren angreifenden Kräften muß die Summe der statischen Momente gleich sein. Es folgt, daß eine kleine Kraft, die am langen Hebelarm angreift, einer großen am kurzen Arm angreifenden das Gleichgewicht hält.

Angewandt wird der Hebel vielfach, z. B. als Schere, ein einarmiger Hebel als Nußknacker, als Hebebaum, ein Winkelhebel beim Klingelzuge etc. Eine der wichtigsten Formen des Hebels ist die

§ 26. **Wage.** Nur die wenigsten Wagen dienen dazu, wie man vermuten könnte, das Gewicht der Körper direkt zu bestimmen, d. h. das Produkt aus Masse und Beschleunigung durch die Schwerkraft, mg [§ 17].

Das ist z. B. der Fall bei der Federwage. Hier wird der zu wägende Körper an eine Feder gehängt, die er natürlich bis zu einem gewissen Punkte, der von seiner Schwere abhängt, ausdehnt. Dieser Punkt, der an einer dahinter angebrachten empirischen Skala abgelesen wird, gibt also direkt das Gewicht des Körpers an.

Die meisten Wagen dienen dagegen zur Massenvergleichung. Das ist deshalb vorteilhaft, weil ja, wie erwähnt, g und damit das Gewicht der Körper an verschiedenen Orten nicht ganz gleich ist. Wenn nun auf der gewöhnlichen Hebelwage zwei Körper m und m' sich das Gleichgewicht halten, so ist $mg = m'g$. Dadurch wird also g eliminiert, und es ist $m = m'$.

Die gewöhnliche Schalenwage, die zu den subtilsten Messungen benutzt werden kann, ist ein zweiarmiger, gleicharmiger Hebel, an dem man den Wagebalken, die Schalen und die Zunge (Zeiger) unterscheidet. Da beim Hebel Gleichgewicht herrscht, wenn die statischen Momente gleich sind, also $Pp = Qq$ ist, so besteht beim gleicharmigen Hebel und somit auch bei der Wage, wo $p = q$ ist, Gleichgewicht, wenn $P = Q$, Kraft gleich Last ist. Eine gute Wage muß folgende Bedingungen erfüllen:

1) Sie muß im stabilen Gleichgewicht sein, d. h. der Schwerpunkt des Wagbalkens muß bei horizontaler Lage desselben senkrecht unter dem Unterstützungspunkte liegen.

2) Sie muß richtig sein, d. h. beide Arme des Wagbalkens müssen in einer Ebene liegen, gleiche Länge und gleiche statische Momente haben; die Wagschalen müssen ferner gleich schwer sein und genau horizontal stehen.

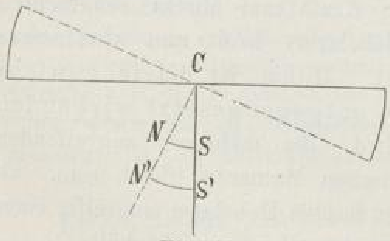

Fig. 13.

3) Sie muß empfindlich sein, d. h. sie muß bei einem kleinen Übergewicht auf der einen Seite einen gewissen Ausschlag geben. Als Maß der Empfindlichkeit nimmt man gewöhnlich den Ausschlag an, den eine Mehrbelastung von 0,001 g bewirkt.

Die Empfindlichkeit ist um so größer,

a) je näher der Schwerpunkt dem Unterstützungspunkte liegt. Es sei (Fig. 13) C der Unterstützungspunkt, S der Schwerpunkt. Durch ein Übergewicht rechts nehme die Wage die punktierte Stellung ein. Dann beschreibt S den Weg SN. Ein in S' liegender Schwerpunkt müßte bei demselben Ausschlag den größeren Weg $S'N'$ beschreiben, wozu natürlich eine größere Belastung nötig ist;

b) je länger die Wagbalken sind: denn dadurch wachsen ja die statischen Momente;

c) je leichter Wagbalken und Wagschalen sind.

Zu genauen Resultaten ist das Mittel aus vielen Wägungen zu nehmen, Temperatur und Barometerstand zu berücksichtigen, sowie das gefundene Gewicht auf den leeren Raum zu reduzieren [cf. § 51]. Sind die Wagbalken nicht genau gleich lang, so umgeht man diesen Fehler durch Tarieren. Hierbei kommt die zu wägende Substanz auf die eine Schale, auf die andere legt man z. B. Schrotkugeln, bis die Zunge auf dem 0-Punkte der Skala steht. Dann ersetzt man die Substanz durch Gewichte, bis die Zunge wieder auf 0 steht. Wenn zwei Größen (Substanz und Gewichte) einer dritten (den Schrotkugeln) gleich sind, sind sie untereinander gleich.

Sehr wichtig sind die Brückenwagen, wozu die Dezimal-, Zentesimalwagen etc. gehören. Nicht das ist hierbei das Wesentliche, daß durch 10 oder 100 mal kleinere Gewichte der Last das Gleichgewicht gehalten wird; das ist ja leicht zu erreichen, wenn der Hebelarm des Gewichts 10 oder 100 mal länger gemacht wird als der der Last; sondern die Hauptsache ist, daß die Wagschale („Brücke") für die Last stets mit sich selbst parallel verschoben wird, mag der Körper in der Mitte oder am Rande liegen.

Es ist nämlich (Fig. 14) $ab : ac = ef : ed$ konstruiert, z. B. $= 1 : 4$. Durch die Belastung Q geht h und dadurch auch f ein bestimmtes Stück n herunter, folglich d 4 mal soviel; ebenso auch der mit d verbundene Punkt c; b und der damit verbundene Punkt g wieder um n. g und h werden also gleichmäßig um n verschoben, bewegen sich mithin parallel zur früheren Ebene.

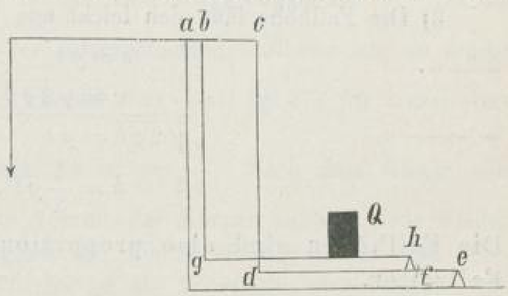

Fig. 14.

Wir kommen nun zu den speziellen Bewegungen.

§ 27. Fallgesetze.

1) Der freie Fall ist eine durch die Anziehungskraft der Erde gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Die Geschwindigkeit ist am

Anfang $= 0$, am Ende der ersten Sekunde $g = 9{,}81$ m, am Ende der zweiten Sekunde $2g$, nach t Sekunden tg.

$$v = gt.$$

Es sind also die Fallgeschwindigkeiten proportional den Fallzeiten. Diese Formel geht unmittelbar aus der Definition der Beschleunigung $g = \frac{v}{t}$ hervor [§ 10].

2) Die Fallgeschwindigkeit läßt sich auch aus der durchfallenen Strecke (Höhe) berechnen.

Um einen Stein vom Gewicht mg auf ein Dach von der Höhe h zu bringen, ist eine Arbeit mgh (Kraft mal Weg) nötig. Die potentielle Energie des Steins ist natürlich auch $= mgh$, da nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie keine Kraft verschwunden oder zugekommen sein kann. Fällt der Stein dieselbe Höhe herab, so verwandelt sich die potentielle Energie in die entsprechende, gleichgroße, kinetische Energie $\frac{1}{2} mv^2$. Also

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2} v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

d. h. die Fallgeschwindigkeiten sind also auch proportional den Quadratwurzeln aus den Fallhöhen.

3) Die Fallhöhe läßt sich leicht aus 1) und 2) finden.

$$v = gt$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$\sqrt{2gh} = gt$$

$$h = \frac{1}{2} gt^2.$$

Die Fallhöhen sind also proportional den Quadraten der Fallzeiten.

Alle Fallgesetze sind nur für den luftleeren Raum streng gültig. In Wirklichkeit hat der Widerstand der Luft und das spezifische Gewicht großen Einfluß auf die Fallgeschwindigkeit.

§ 28. Beim **Fall über die schiefe Ebene** kann man sich die auf den Körper M einwirkende Schwerkraft g, in Fig. 15 dargestellt durch mh, in die beiden Komponenten mf und me zerlegt denken, von denen erstere parallel AC, letztere senkrecht dazu gerichtet ist. Da me durch den Widerstand der Unterlage AC aufgehoben wird, kommt für die Fortbewegung von M nur $mf = g'$ in Betracht. Fällt M von C nach B, so ist $v = \sqrt{2gh}$ [§ 27]; fällt es von C nach A, so ist $v' = \sqrt{2g'.AC}$. Da nun $g' = g.\sin\alpha$ und $AC = \frac{h}{\sin\alpha}$ ist, so folgt daraus $v' = v$, d. h. die Endgeschwindigkeit bezw. Wucht ist beim Falle von C nach A dieselbe wie beim Falle von C nach B, also von der Neigung der schiefen Ebene ganz unabhängig. Dagegen dauert natürlich die Fallbewegung um so länger, je mehr die Ebene geneigt ist.

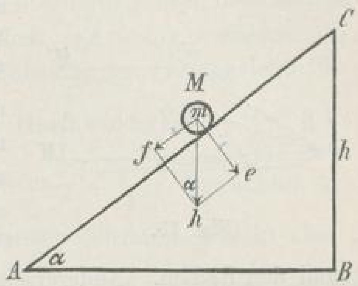

Fig. 15.

§ 29. Bei der **Wurfbewegung** erhält der Körper eine willkürliche Anfangsbeschleunigung und wird dann der Wirkung der Schwerkraft überlassen. Die Wurfbewegung ist geradlinig, wenn der Körper senkrecht auf- oder abwärts geworfen wird. Im letzten Falle wirkt die Summe von Anfangsgeschwindigkeit c und Fallgeschwindigkeit gt [§ 27], im ersten die Differenz. Hier muß also ein Zeitpunkt kommen, wo der Körper frei in der Luft schwebt, um bald darauf zu fallen. Dieser Punkt ist erreicht, wenn die aufwärts gerichtete Geschwindigkeit $v = c - gt$ gleich Null geworden ist, wenn also $c = gt$ ist. Dann ist die Dauer des Aufstieges $t = \frac{c}{g}$. Da die Wurfhöhe identisch mit der entsprechenden Fallhöhe ist, so ergibt sie sich, wenn man in die Formel $h = \frac{1}{2} g t^2$ [§ 27] für t den eben gefundenen Wert $\frac{c}{g}$ einträgt: sie ist $= \frac{c^2}{2g}$. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie kommt der Körper auf der Erde wieder mit derselben Geschwindigkeit an, die er anfangs hatte. Bei allen anderen Richtungen des Wurfes ist die Wurfbahn eine Parabel, als Resultante der die Anfangsrichtung bedingenden Kraft und der Schwerkraft.

§ 30. Bei der **drehenden Bewegung** ist zu unterscheiden: 1) die lineare Geschwindigkeit, d. i. der Weg, den der Körper in gegebener Zeit zurücklegt; 2) die sog. Winkelgeschwindigkeit, d. i. der Winkel, der in einer gegebenen Zeit vom Radius beschrieben wird. Zwei Körper M und m (Fig. 16) bewegen sich im Abstande R und r (dieser Abstand heißt Radius oder Radius vector) um den festen Punkt C. Bei gleicher Winkelgeschwindigkeit, d. h. um den Winkel α in gleicher Zeit zu durchmessen, muß der entferntere Körper M natürlich eine größere lineare Geschwindigkeit haben. Die linearen Geschwindigkeiten sind also bei gleicher Winkelgeschwindigkeit direkt proportional den Radien. Andererseits sind die Winkelgeschwindigkeiten bei gleicher linearer Geschwindigkeit umgekehrt proportional den Radien. Bedeutet w Winkelgeschwindigkeit, v lineare Geschwindigkeit, r den Radius, so ist

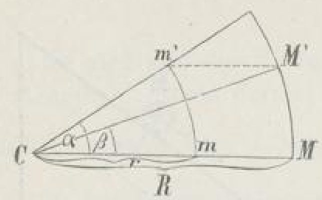

Fig. 16.

$$w = \frac{v}{r}$$

$$v = w\,r.$$

Daraus folgt $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 w^2$. Da mr^2, das Produkt aus Masse und dem Quadrat des Radius, Trägheitsmoment heißt, so ist also die kinetische Energie (Wucht) direkt proportional dem Trägheitsmoment. Das Trägheitsmoment kommt besonders im Schwungrad der Maschinen zur Anwendung, bei dem die größte Masse an der Peripherie, also möglichst weit von der Drehungsachse angebracht ist. Es dient dazu, um den gleichmäßigen Gang der Maschine zu erhalten und ihr über die sog. toten Punkte fortzuhelfen.

Eine wichtige Form der drehenden Bewegung ist

§ 31. die **Zentralbewegung**, bei der ein Körper in Kreisen, Ellipsen etc. sich um einen Punkt bewegt. Sie heißt gebunden, wenn der Körper mit demselben verbunden ist, wenn also z. B. ein Gewicht an einem Seil herumgeschwungen wird, anderenfalls frei, wie z. B. die Bewegung der Planeten um die Sonne. Eine kreisförmige Bewegung setzt nun das fortwährende Bestehen einer Kraft voraus, da ohne diese nach dem Trägheitsgesetz [§ 7] der Körper geradlinig in der Richtung der Tangente fortfliegen würde. So würde sich z. B. (Fig. 17) eine Masse m, welche die Geschwindigkeit v besitzt, in der Zeiteinheit von A nach B bewegen. Da sie in Wirk-

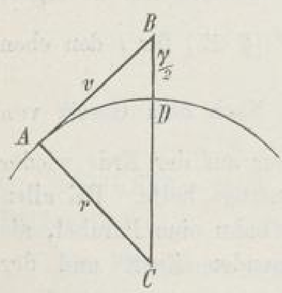

Fig. 17.

lichkeit aber nach D gelangt, so muß eine nach dem Zentrum hin gerichtete Kraft, die sogenannte Zentripetalkraft[1] auf sie eingewirkt und ihr eine gleichförmige Beschleunigung nach dem Zentrum hin erteilt haben, die in der Zeiteinheit von 0 bis γ wächst. Der von m unter dem Einflusse dieser Beschleunigung zurückgelegte Weg BD entspricht daher einer mittleren Geschwindigkeit $\frac{\gamma}{2}$ [cf. § 14]. Es ist nun $r^2 + v^2 = \left(r + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = r^2 + r\gamma + \frac{\gamma^2}{4}$. Betrachtet man die Bewegung während eines sehr kleinen Zeitraums, rückt also D dicht an A heran, so wird $BD = \frac{\gamma}{2}$ so klein, daß $\frac{\gamma^2}{4}$ unberücksichtigt bleiben kann. Es ist also $\gamma = \frac{v^2}{r}$, und

$$\text{die Zentripetalkraft } m\gamma = \frac{mv^2}{r}.$$

Um die Zentripetalkraft auch durch die Winkelgeschwindigkeit auszudrücken, benutzt man die Formel $w = \frac{v}{r}$. Dann ist $w^2 = \frac{v^2}{r^2}$, $\frac{v^2}{r} = rw^2$. Mithin

$$F = mrw^2.$$

Der Zentripetalkraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, ist die Zentrifugalkraft[2]), die also strebt den Körper vom Zentrum zu entfernen. Auf ihr beruht es z. B., daß man an scharfen Kurven leicht aus dem Wagen geschleudert wird, daß man in einer Flüssigkeit suspendierte feste Bestandteile leicht von dieser trennen kann (z. B. Urinzentrifuge), daß aus einem mittelst einer Schnur schnell im Kreise bewegten Glase Wasser nichts ausfließt etc. Auf ihr beruht auch die Abplattung der Erde an den Polen und die Anhäufung der größten Masse am Äquator. Die Zentrifugalkraft ist natürlich der Schwerkraft entgegengerichtet, da diese ja zentripetal wirkt, sie muß sie also schwächen. Auch aus diesem Grunde folgt, daß g am Äquator kleiner ist als an den Polen [§ 17].

§ 32. **Keplers Gesetze** über die Bewegung der Planeten:

1) Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2) Die Radii vectores beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächen [cf. § 15].

---

[1] *peto* sich nach einer Richtung hin bewegen.

[2] *fugio* fliehen.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnachsen.

§ 33. **Pendel.** Ein Pendel[1]) ist ein Körper, der um eine horizontale Achse schwingen kann (physisches Pendel). Die Pendelgesetze sind zunächst für das mathematische Pendel abgeleitet, das man sich als punktförmige Masse an einem gewichtslosen Faden befestigt denkt.

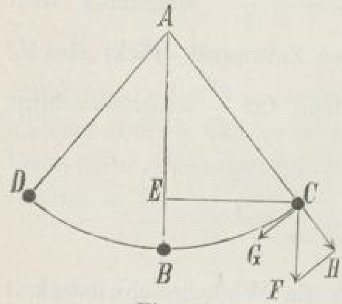

Fig. 18.

Wird das Pendel AB (Fig. 18) aus der Gleichgewichtslage gebracht, so schwingt es etwa bis C, bleibt stehen, schwingt dann umgekehrt über den Ruhepunkt B hinaus bis D und wieder zurück usf. Ein mathematisches Pendel, das aber nicht wirklich existiert, wäre somit ein Perpetuum mobile, insofern es, einmal in Gang gebracht, sich selbst in Bewegung erhielte. Man nennt nun AB die Länge des Pendels (l), die Entfernung aus der Gleichgewichtslage EC bezw. $\angle BAC$ die Schwingungsweite (auch Elongation oder Amplitude), und die Zeit, in der es den Weg $BCBDB$, d. i. eine ganze Schwingung, beschreibt, Schwingungsdauer (T).

Die Kraft, welche das Pendel von C zurückführt, ist die Schwerkraft, dargestellt durch CF. Diese läßt sich in zwei Komponenten zerlegen: CH, welche durch die Festigkeit des Fadens kompensiert wird, und die für die Pendelbewegung allein in Betracht kommende $CG = FH$. Aus den ähnlichen Dreiecken FCH und AEC folgt $HF : CF = EC : AC$; mithin $HF = \frac{CF \cdot EC}{AC}$. Hierbei stellt CF die Schwerkraft dar, gemessen durch g, AC die Pendellänge, EC die Amplitude. Da die beiden ersten Größen konstant sind, folgt also als erstes Pendelgesetz:

Die Intensität der Pendelschwingung ist direkt proportional der Schwingungsweite, d. h. die Geschwindigkeitsänderung, also die Beschleunigung bezw. Verzögerung, der Pendelbewegung (nicht die Geschwindigkeit!) ist am größten an den Umkehrungspunkten, am kleinsten, wenn der Pendel die Ruhelage passiert.

[1] *pendulus* herabhängend.

Das zweite Pendelgesetz, dessen mathematische Ableitung zu weit führen würde, lautet:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Daraus folgt:

a) Die Schwingungszeit ist proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge (GALILEI), umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung durch die Erdanziehung.

b) Die Schwingungszeit ist unabhängig von der Schwingungsweite (falls sie 5^0 nicht übersteigt) und von dem Gewichte des Pendels (GALILEI, NEWTON).

Diese Formel ist sehr wichtig. Wenn von den 3 Größen T, l, g zwei bekannt sind, läßt sich ja ohne weiteres die dritte finden. So kann man z. B. die Länge eines Sekundenpendels, d. h. eines Pendels, dessen Schwingungszeit 1 Sekunde beträgt, berechnen, wenn g (= Fallbeschleunigung, Intensität der Schwerkraft) bekannt ist. Andererseits kann man aus der Schwingungsdauer eines Pendels von bekannter Länge (und zwar kommt hier die sogenannte korrespondierende Pendellänge in Betracht) g an den verschiedenen Orten der Erde finden.

Ein physisches Pendel kann man sich aus vielen, verschieden langen mathematischen Pendeln zusammengesetzt denken, deren Schwingungsdauer — vorausgesetzt, daß sie für sich schwingen — teils größer, teils kleiner wäre als die Schwingungsdauer der analogen Punkte der Pendelstange; denn diese schwingen wegen ihrer starren Verbindung natürlich alle gleichmäßig mit einer mittleren Geschwindigkeit. Es wird nun einen Punkt der Pendelstange geben, der so schwingt wie ein gleich langes mathematisches Pendel. Dieser Punkt heißt Schwingungs(mittel)punkt. Seine Entfernung vom Unterstützungspunkt heißt reduzierte oder korrespondierende Länge des physischen Pendels. Vertauscht man Schwingungspunkt und Unterstützungspunkt, so wird die Schwingungszeit nicht geändert (HUYGENS). Ein Pendel, das dafür eingerichtet ist, indem die Pendelstange zwei Schneiden zum Aufhängen des Pendels besitzt, die ihre Schärfe einander zukehren, heißt Reversionspendel. Durch Verschiebung von Gewichten, die an der Pendelstange angebracht sind, kann man nun erzielen, daß das Pendel gleich schwingt, mag es nun um die eine oder die andere Schneide schwingen. Ein solches Reversionspendel dient daher zur experimentellen Bestimmung der korrespondierenden Pendellänge, die eben dem Abstand der beiden Schneiden entspricht.

Da die Schwingungszeit eines Pendels von seiner Länge abhängt, alle Körper aber durch Wärme ausgedehnt werden, so gibt es sogenannte Kompensationspendel, bei denen die Pendelstange aus 2 Metallen von verschiedener Ausdehnungsfähigkeit so zusammengesetzt ist, daß keine Längenveränderung stattfindet.

Von den vielen Anwendungen des Pendels sei hier nur das Echappement der Pendeluhren besprochen. An der Welle *W* (Fig. 19) ist ein Gewicht *P* aufgewunden, das durch seinen Fall die Welle dreht. Um die Beschleunigung durch das Gewicht in eine gleichmäßige Geschwindigkeit zu verwandeln, greift der an der Pendelstange befestigte Doppelhaken *hh'* in das mit der Welle *w* verbundene Zahnrad ein, so dass das Rad, und damit auch die Welle, bei jeder Doppelschwingung nur um einen Zahn vorrücken kann. Zugleich wird aber auch die Reibung, welche die Pendelbewegung allmählich vernichten würde, kompensiert, indem das Pendel jedesmal einen kleinen Stoß bekommt, wenn der Haken aus dem Zahnrad herausgeht.

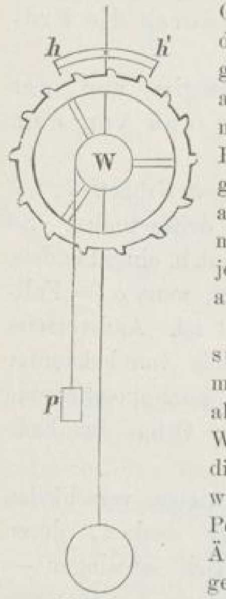

Fig. 19.

Erwähnt sei noch der Foucault'sche Pendelversuch. Foucault zeigte nämlich, daß ein sehr langes, mit möglichst geringer Reibung aufgehängtes, schweres Pendel allmählich scheinbar seine Schwingungsebene ändert. In Wirklichkeit beruht dies auf der Achsendrehung der Erde, die somit hierdurch zum ersten Male direkt nachgewiesen wurde. An den Polen würde die scheinbare Drehung der Pendelebene innerhalb von 24 Stunden 360° betragen; am Äquator ist sie = 0, an anderen Orten dem Sinus der geographischen Breite proportional.

§ 34. **Elastizität**[1] heißt die Eigenschaft eines Körpers, nach einer Deformation die ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen. Doch versteht man darunter auch den Widerstand gegen eine Formveränderung (s. u.) Alle elastischen Körper — und dazu gehören in gewissem Sinne auch Gase und Flüssigkeiten — sind im Pendelgleichgewicht. Es gilt also der Satz: Die Elastizität ist proportional der Intensität der deformierenden Kraft. Nach den einwirkenden Kräften unterscheidet man Zug-, Druck-, Biegungs-, Drehungs-(Torsions-)Elastizität. Ein Körper heißt vollkommen elastisch, wenn er nach Aufhören der Kraft seine frühere Gestalt wieder vollkommen annimmt, z. B. Kautschuk. Im Gegensatz dazu steht z. B. Wachs. Elastische Wirkung findet aber stets nur bis zu einer gewissen Grenze, der Elastizitätsgrenze, statt. Wird die einwirkende Kraft zu groß, so nimmt der Körper dauernd eine andere Form an, er wird zertrümmert, reißt etc. Unter Größe der Elasti-

[1] ἐλαστής der Treiber, von ἐλαύνω treiben, stoßen.

zität versteht man dagegen die Kraft, die nötig ist, um eine bestimmte Formveränderung herbeizuführen, also z. B. um einen Körper von 1 qmm Durchmesser um seine eigene Länge zu dehnen, vorausgesetzt, daß er nicht reißt. Das Maß dafür heißt Elastizitätsmodul.[1] Kautschuk hat also, entgegen der gewöhnlichen Ausdrucksweise, eine vollkommene, aber kleine Elastizität. Der reciproke Wert des Elastizitätsmoduls ist der Elastizitätskoeffizient. Er gibt an, um welchen Bruchteil der Länge ein Körper von 1 qmm Querschnitt durch 1 kg gedehnt wird. Er mißt also, genauer ausgedrückt, die Dehnbarkeit. Der Elastizitätskoeffizient des Kautschuks ist z. B. groß.

§ 35. **Bewegungshindernisse.** Die Bewegungsfähigkeit der Körper findet wesentliche Einschränkungen durch die verschiedenen Bewegungshindernisse. Vor allem gehört hierzu die Reibung, die durch die Unebenheiten zweier sich gegeneinander verschiebender Körper bedingt ist. Sie ist, abgesehen vom Drucke, um so größer, je rauher die Oberflächen sind; darum schmiert man die der Reibung ausgesetzten Teile mit Öl, Fett etc. ein. Man unterscheidet gleitende Reibung, bei der immer dieselben Teile eines Körpers betroffen sind, und rollende Reibung, bei der die Berührungsfläche wechselt. Im allgemeinen ist letztere geringer; daher setzt man z. B. Wagen auf Räder und wendet beim Transport schwerer Gegenstände Rollen an. Die Reibung ist z. B. Ursache davon, daß soviel vom Nutzeffekt der Maschinen verloren geht. Andererseits ist es ihr zu danken, daß eine Lokomotive einen Zug fortbewegt; überwiegt nämlich die Schwere des Zuges die Reibung der Lokomotivräder, so drehen diese sich nur auf derselben Stelle um ihre Achse. Reibung findet auch zwischen den kleinsten, unsichtbaren Teilchen der Körper statt, sogenannte innere Reibung, die besonders bei Flüssigkeiten und Gasen eine wichtige Rolle spielt. — Ein Bewegungshindernis ist ferner der Widerstand des Mediums. Derselbe wächst mit der Dichte desselben, sowie mit der Geschwindigkeit und der Oberfläche des bewegten Körpers.

C. Gesetze der flüssigen Körper.

§ 36. **Grundeigenschaften der Flüssigkeiten.**[2] Flüssige Körper haben zwar ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Gestalt, da ihre Teilchen leicht gegeneinander verschieblich sind. Man kann

[1] *modulus* kleines Maß.

[2] Im folgenden sind die Flüssigkeiten im engeren Sinne (tropfbaren Flüssigkeiten) gemeint; die gasförmigen Flüssigkeiten sind im nächsten Abschnitt behandelt.