diese Verschiedenheit bezeichnen wir als Klangfarbe. Dieselbe ist bedingt durch die Gestalt der Kurve, welche den Klang darstellt. Wir können unendlich viele verschiedene periodische Kurven von gleicher Periode, d. h. Tonhöhe zeichnen, jede repräsentiert eine andere Klangfarbe. Als Beispiel mögen die Resultanten in Fig. 131, 1 und 2 dienen. Wie wir dort gesehen haben, entstehen diese Kurven durch Zusammensetzung verschiedener einfacher Sinusschwingungen, einfacher Töne. Wir können daher sagen, ein Klang sei aus verschiedenen Tönen zusammengesetzt, und je nach der Zahl und Schwingungszahl der Komponenten wird die Klangfarbe eine andere.

Es hat Fourier nachgewiesen, dass man jede beliebige periodische Funktion der Zeit mathematisch darstellen kann als eine Summe von Sinusfunktionen. Mathematisch kann man die Funktion auch noch auf viele andere Arten in periodische Summanden zerlegen; aber diese Zerlegung nach der sog. Fourierschen Reihe in Sinusschwingungen ist physikalisch allein von grösster Bedeutung, weil unser Ohr gerade diese Zerlegung ausführt. Wie wir später sehen werden, ist ein musikalisch geübtes aufmerksames Ohr im stande, aus einem Klang die einzelnen Komponenten herauszuhören; noch leichter ist dies, wenn man es mit Resonatoren versieht. — Zu bemerken ist noch, dass nach v. Helmholtz die Kurven Fig. 131, 1 und 3, keine verschiedene Klangfarbe repräsentieren; es kommt also nur auf die Komponenten an, nicht auf den Phasenunterschied zwischen ihnen.

B. Longitudinale Schwingungen.

§ 190. Wir wollen uns zunächst mit den longitudinalen Wellen beschäftigen. Die erste Frage ist die nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wir haben schon erwähnt, dass dieselbe vom Widerstand abhängt, der bei einer gewissen Deformation geleistet wird (§§ 179 und 182). Newton hat zuerst aus der Mechanik den Satz abgeleitet, dass in Gasen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional sei der Wurzel aus dem Verhältnis zwischen einer Druckänderung zu der Dichtigkeitsänderung, welche sie hervorbringt. Wächst in einem Gase der Druck von p auf $p\,(1 + x)$, so wächst nach dem Mariotteschen Gesetz die Dichte von d auf $d\,(1 + x)$; der Druckänderung $p\,x$ entspricht also die Dichteänderung $d\,x$.

Danach würde sich ergeben: $v = \sqrt{\frac{p\,x}{d\,x}} = \sqrt{\frac{p}{d}}$. Die Dichte d hängt von Druck und Temperatur ab; es ist (§ 125)

$$d = \frac{d_0\, p}{(1 + \alpha t)\, p_0}, \quad \text{also } v = \sqrt{\frac{p \cdot p_0 \cdot (1 + \alpha t)}{p \cdot d_0}} = \sqrt{\frac{p_0 (1 + \alpha t)}{d_0}}.$$

Hier bedeutet p_0 den Normaldruck, d. h. den Druck, welchen eine Quecksilbersäule von 76 *cm* Höhe ausübt, also

$$p_0 = 76 \times 13{,}6 \times g.$$

Rechnet man für atmosphärische Luft danach v aus, z. B. für $t = 0^0$, so findet man $v = 280 \frac{m}{sec}$. Diese Zahl stimmt aber durchaus nicht mit dem Experiment, welches $332{,}5 \frac{m}{sec}$ ergeben hat. Newton konnte den Widerspruch nicht aufklären, das gelang erst Laplace.

Man darf nämlich nicht das Mariottesche Gesetz zu Grunde legen, um die einer Dichtigkeitsänderung entsprechende Druckänderung zu berechnen, da dies nur für konstante Temperatur gilt; die Schallschwingungen sind aber so schnell, dass wir einen adiabatischen Prozess (§ 160) vor uns haben; infolge davon wird an den verdichteten Stellen der Druck noch stärker steigen durch Temperaturerhöhung, an den verdünnten noch mehr sinken durch Temperaturerniedrigung; daraus folgt, dass der Schall sich schneller fortpflanzen muss. Die mechanische Wärmetheorie lehrt nun, dass für solche Fälle, statt der Mariotteschen Gleichung: $\frac{p}{p_0} = \frac{d}{d_0}$ zu setzen ist $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^k$, wo k das Verhältnis der spezifischen Wärmen (§ 148) bedeutet.

Die Gleichung zeigt, dass für eine adiabatische Aenderung das Verhältnis zwischen Druckzunahme und Dichtezunahme k mal so gross ist, wie bei isothermer Aenderung. Also erhalten wir: $v = \sqrt{k \frac{p_0 (1 + \alpha t)}{d_0}}$, was mit der experimentellen Messung vorzüglich übereinstimmt. — Diese Gleichung wird viel benutzt, um aus der gemessenen Schallgeschwindigkeit k zu berechnen (vgl. § 149). Die Gleichung zeigt, dass die Schallgeschwindigkeit unabhängig vom Druck ist, was alle Versuche bestätigen, aber abhängt von der

Temperatur. Man kann für ungefähre Rechnung pro Grad Celsius eine Zunahme von 1 *m* rechnen, also bei mittlerer Temperatur die Schallgeschwindigkeit gleich 350 $\frac{m}{sec}$ nehmen.

§ 191. Die experimentelle Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in freier Luft ist sehr häufig ausgeführt, zuerst wohl von der Florentiner Akademie (1660), dann von der Pariser Akademie (1739). Im letzteren Falle fand sich für trockene Luft von 0^0: 332 $\frac{m}{sec}$. Die Versuche wurden so ausgeführt, dass in entfernten Stationen 2 Beobachter und Kanonen aufgestellt wurden. Auf der einen Station wurde ein Schuss abgefeuert, von der zweiten Station aus die Zeit gemessen, die zwischen dem Sehen des aufblitzenden Pulvers und dem Hören des Knalles verging. Dann wurde in Station 2 geschossen, in 1 beobachtet u. s. w. Die Beobachtung in entgegengesetzten Richtungen ist nötig, da sich zeigte, dass die Luftbewegung durch Wind von Einfluss ist; die ganze schwingende Luftmasse wird mit der Windgeschwindigkeit forttransportiert, so dass diese sich zur eigentlichen Schallgeschwindigkeit positiv oder negativ addiert. Nimmt man daher das Mittel aus 2 Beobachtungen, die in entgegengesetzter Richtung ausgeführt sind, so ist der Einfluss des Windes eliminiert.

Die nächste genaue Messung geschah 1822 wieder durch die Pariser Akademie, woran sich Humboldt, Gay-Lussac und Arago beteiligten; sie ergab 331,05 $\frac{m}{sec}$. Eine der sorgfältigsten Bestimmungen wurde dann 1823 durch Moll, van Beck und Kuytenbrouwer ausgeführt; es ergab sich 332,77. Ferner erhielten: Benzenberg 333,02, Bravais 332,37. Der Mittelwert dieser Bestimmung ist etwa 332,3 $\frac{m}{sec}$ für trockene Luft bei 0^0.

In den Jahren 1862 und 1863 hat dann Regnault eine grosse sehr sorgfältige Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in neugelegten Wasserleitungsröhren in Paris ausgeführt, wobei er Pistolenschüsse als Schallquelle benutzte. Er erhielt den viel kleineren Wert 330,5 $\frac{m}{sec}$. Aber die Regnaultsche Bestimmungsweise leidet an mehreren Fehlern: 1. ist die Schallgeschwindigkeit in Röhren kleiner als im freien Raume, da die schwingenden Luftteilchen sich an den Wänden reiben und die Wände einen, wenn auch kleinen Teil der durch die Dichtigkeitsänderungen hervorgebrachten Temperaturänderungen durch Leitung ausgleichen, der Prozess also nicht ganz adiabatisch ist. v. Helmholtz, dann Kirchhoff haben diesen Einfluss theoretisch untersucht; sie finden, dass die Schallgeschwindigkeit v_1 eines Tones von der Schwingungszahl n in einem Rohr vom Radius r mit der Geschwindigkeit v im freien Raum zusammenhängt nach der Gleichung

$$v_1 = v\left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi n}}\right),$$ wo γ eine Konstante bedeutet.

Diese Gleichung ist auch experimentell bestätigt worden. 2. Dürfen Pistolenschüsse nicht als Schallquelle verwendet werden; durch die ausgeschleuderten Explosionsgase entsteht eine sehr stürmische Bewegung, die mit den ∞ kleinen Schwingungen eines Tones nichts gemein hat. Theoretisch ist zuerst von Riemann nachgewiesen worden, dass dabei die Verdichtungen schneller laufen als die Verdünnungen, also sozusagen ein Branden der Wellen wie im Meere eintritt. Auch experimentell ist die Unregelmässigkeit der Fortpflanzung eines Kanonenknalles sogar in freier Luft nachgewiesen; ungleich stärker tritt der Fehler natürlich in Röhren auf[1]).

§ 192. Sehr viel schwieriger zu bestimmen ist die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten. Bei diesen wird die Gleichung: $v = \sqrt{C\frac{1}{s}}$, wo C den Widerstand gegen Volumänderung, d. h. den reciproken Wert des Kompressibilitätskoeffizienten, s die Dichte bedeutet. Für Wasser berechnet sich daraus, da $s = 1$, $C = 20\,000$ nach § 60: $v = 1418\,\frac{m}{sec}$. Colladon und Sturm haben im Genfersee Versuche angestellt, indem unter Wasser eine Glocke angeschlagen, gleichzeitig oben Pulver entzündet wurde, während ein zweiter Beobachter aus der Entfernung mit einem unter Wasser

[1]) Die neueren Geschütze geben den Kugeln eine Geschwindigkeit, welche grösser ist, als die Schallgeschwindigkeit, mehr als 500 $\frac{m}{sec}$ erreicht. Die fliegende Kugel spielt dabei die Rolle einer Schallquelle, indem sie die Luft durchbricht, und es kann daher der erste Schall einen seitlich von der Schussrichtung stehenden Beobachter viel eher erreichen, als ihn infolge der normalen Schallgeschwindigkeit der eigentliche Knall beim Abfeuern erreichen könnte.

endigenden Hörrohr beobachtete. Sie fanden 1435 $\frac{m}{sec}$. Die Methoden für andere Gase und feste Körper werden wir später (§ 196 und § 201) kennen lernen.

§ 193. Solange die Welle in demselben Medium fortgeht, bleibt sie bis auf die Intensität unverändert. Wenn sie dagegen an die Grenzfläche eines zweiten Mediums gelangt, welches andere Elasticität besitzt, so geht nur ein Teil der Welle weiter, ein anderer Teil geht in das erste Medium zurück, es tritt eine reflektierte Welle auf. Je grösser der Unterschied der Elasticitäten ist, desto stärker ist die Reflexion.

Die Reflexion findet in verschiedener Weise statt, je nachdem das zweite Medium dichter oder dünner ist als das erste. Wir können hier zum Vergleich den elastischen Stoss zweier Kugeln (§ 91) heranziehen: Stösst eine Kugel gegen eine gleiche ruhende, so gibt sie die ganze Energie ab, die zweite allein bewegt sich weiter und kann die Energie an eine dritte u. s. w. übertragen. Das ist der Fall der Fortpflanzung in einem homogenen Medium. Stösst dagegen eine Kugel gegen eine von anderer Grösse — und wir können die Molekeln an der Grenzfläche zweier Medien als solche Kugeln betrachten —, so behält die stossende Kugel einen Teil ihrer Energie. Sie dient als Wellencentrum für eine zurücklaufende Welle, während die gestossene Kugel eine weiterlaufende Welle im zweiten Medium erregt.

Ist die gestossene Kugel kleiner, so schwingt die stossende in ihrer ursprünglichen Richtung weiter, d. h. in der reflektierten Welle sind die Teilchen stets nach derselben Seite verschoben, wie in der ankommenden. Ist die gestossene Kugel aber grösser, d. h. ist das zweite Medium dichter, so prallt das stossende Teilchen zurück, es kehrt seine Bewegung um. Wenn das letzte Teilchen der ankommenden Welle sich etwa vorwärts bewegte (positive Ordinate, § 182), so bewegt es sich in der reflektierten Welle rückwärts (negative Ordinate); es entsteht eine reflektierte Welle, welche eine halbe Schwingung Phasendifferenz gegen die ankommende besitzt.

Wir wollen zunächst den ersten Fall graphisch untersuchen. Es stelle Fig. 134, 1 den an der Wand A eben ankommenden Kopf einer Welle dar; wie wir wissen, wird die weitere Bewegung dargestellt, indem wir uns die Wellenkurve allmählich nach rechts verschoben denken. Daraus erkennt man, dass das Grenzteilchen im nächsten Moment nach unten verschoben werden würde. Das Gleiche geschieht also auch in der reflektierten Welle. 2 stellt den

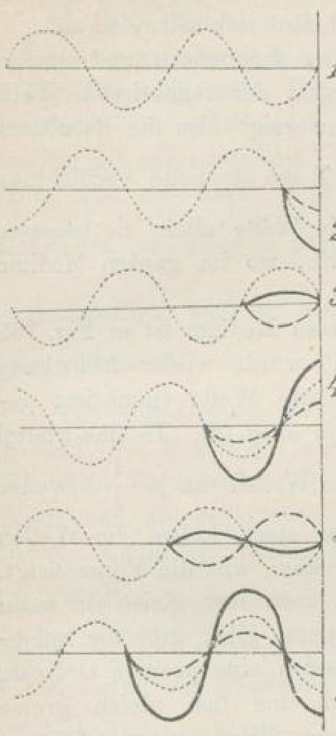

Fig. 134.

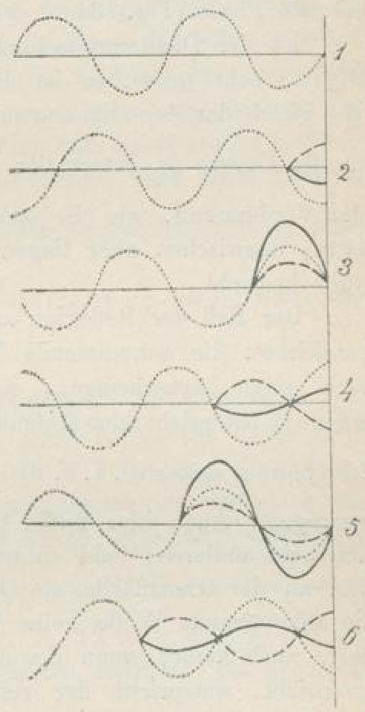

Fig. 135.

Zustand $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer später dar: die ankommende Welle hat sich um $\frac{1}{4}\lambda$ vorwärts geschoben, die reflektierte (gestrichelt gezeichnet) ist um $\frac{1}{4}\lambda$ zurückgelaufen. 3, 4, 5, 6 zeigen den Zustand je um $\frac{1}{4}$ Schwingung später; jedesmal sind die ankommende und die reflektierte Welle um $\frac{1}{4}\lambda$ in ihren Richtungen weiter gegangen.

Wie man erkennt, sind nach einiger Zeit im ganzen ersten Medium zwei Wellen vorhanden, welche nun interferieren müssen.

In Fig. 134 ist das Resultat der Interferenz ausgezogen gezeichnet; in Intervallen von je $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer haben die Wellen gleiche Phase (Fig. 134, 2, 4, 6), verstärken sich also, oder entgegengesetzte Phase (Fig. 134, 3, 5), d. h. heben sich teilweise auf.

Ist der Dichteunterschied zwischen dem ersten und zweiten Medium sehr gross, so ist die Intensität der reflektierten Welle fast gleich der der ankommenden; dann zeigt also die Resultante an der Grenze in Intervallen von $\frac{1}{2}$ T die doppelte Verdichtung und Verdünnung, wie die ankommende Welle allein sie besessen hätte, dazwischen aber liegen Momente, wo im ganzen Medium Ruhe herrscht.

Der Fall der Reflexion am dichteren Medium ist in Fig. 135 gezeichnet: die ankommende Welle (1) würde wieder Ablenkung nach unten hervorbringen, die reflektierte Welle (punktiert gezeichnet) entspricht also Ablenkung nach oben (2). Je eine viertel Schwingung später (3, 4, 5, 6) sind beide Wellen um je $\frac{1}{4}\lambda$ weiter gegangen. Auch hier findet Interferenz statt, indem die Wellen sich bald addieren, bald subtrahieren; aber wie die Figur zeigt, sind an der Grenzfläche die Ordinaten stets fast gleich 0; wenn die ankommende Welle keine Verschiebung gibt, gibt die reflektierte auch keine; wenn der ankommenden eine positive Ordinate entspricht, entspricht der reflektierten eine fast gleich grosse negative, so dass beide sich fast aufheben. Wir kommen auf diesen Fall gleich noch ausführlicher zurück.

§ 194. Die Schallwellen oder Schallstrahlen werden nach demselben Gesetz reflektiert, wie Lichtstrahlen (vgl. § 340), d. h. bei nicht senkrechtem Auffallen auf die Grenzfläche bildet der reflektierte Strahl mit dem Lot auf der Grenzfläche denselben Winkel wie der ankommende Strahl. Damit ankommende Strahlen stark reflektiert werden, muss die Grenzfläche eine ebene oder regelmässig gekrümmte Fläche sein, sonst tritt unregelmässige Reflexion nach allen Seiten, diffuse Reflexion ein. Ebenso muss der Dichteunterschied möglichst gross sein, und das zweite Medium muss überhaupt im stande sein, Schwingungen auszuführen. Starke Reflexion der in Luft fortgehenden Schallwellen nennt man Echo. Wo es störend wirkt, wie in Theatern, Konzertsälen, sucht man es zu beseitigen, indem man die Wände durch Nischen, Säulen, Pilaster uneben macht, oder nicht gespannte, daher nicht schwingungsfähige Draperien anbringt.

§ 195. Einen ganz besonders wichtigen Fall bildet die Reflexion von Luftwellen am dichteren Medium. Derselbe ist schon in Fig. 135 dargestellt, Fig. 136 gibt ihn ausführlicher, wobei die Amplitude der reflektierten Welle ebenso gross angenommen ist, wie die der ankommenden. Es ist hier eine nach rechts laufende Welle und eine durch Reflexion entstandene, nach links laufende gezeichnet, und zwar je nach $\frac{1}{8}$ Schwingungsdauer, d. h. in jeder folgenden Figur sind die beiden Wellen um je $\frac{\lambda}{8}$ nach rechts und links verschoben.

Die ankommende Welle ist punktiert, die reflektierte gestrichelt, die Resultante ausgezogen gezeichnet. Die Figur zeigt folgendes: Es entstehen Stellen K, wo fortdauernd die ankommende und die reflektierte Welle entgegengesetzte Ordinaten von gleicher Amplitude haben, sich also durch Interferenz vernichten. Diese Stellen liegen um je $\frac{\lambda}{2}$ aus einander. Dazwischen liegen Stellen B, an welchen zur Zeit 0, T, 2 T u. s. w. die positive Verschiebung ein Maximum ist, allmählich abnimmt, ein negatives Maximum wird zur Zeit $\frac{T}{2}$, $\frac{3\,T}{2}$ u. s. w., dann wieder zunimmt zum positiven Maximum. Auch diese Stellen sind je um $\frac{1}{2}\lambda$ von einander entfernt.

So haben wir in Fig. 136, 1 bei K_1, K_3, K_5 ein Druckminimum, bei K_2 und K_4 ein Druckmaximum. Infolge davon strömt die Luft, wie die Pfeile es andeuten, vom Druckmaximum K_2 nach K_1 und K_3 durch B_1 und B_2 hindurch, ebenso von K_4 nach K_3 und K_5 hin. Dadurch gleicht sich der Druck allmählich aus (Fig. 2), wird endlich überall gleich (Fig. 3). Da aber bis zu diesem Augenblick der Druck beschleunigend gewirkt hat, besitzen die Luftteilchen noch Geschwindigkeit und strömen infolge von Trägheit noch weiter. Daher beginnt nun in K_1, K_3, K_5 die Bildung eines Maximums, in K_2 und K_4 die eines Minimums; wir sehen diese in

4 oder 5 anwachsen. Da aber von 3 an die entstehende Druckdifferenz der Bewegung der Teilchen entgegenwirkt, nimmt ihre Geschwindigkeit ab, sie ist 0 geworden in 5, und nun kehrt sich die Bewegung um; die Luft strömt wieder durch B_1 bis B_4, bis

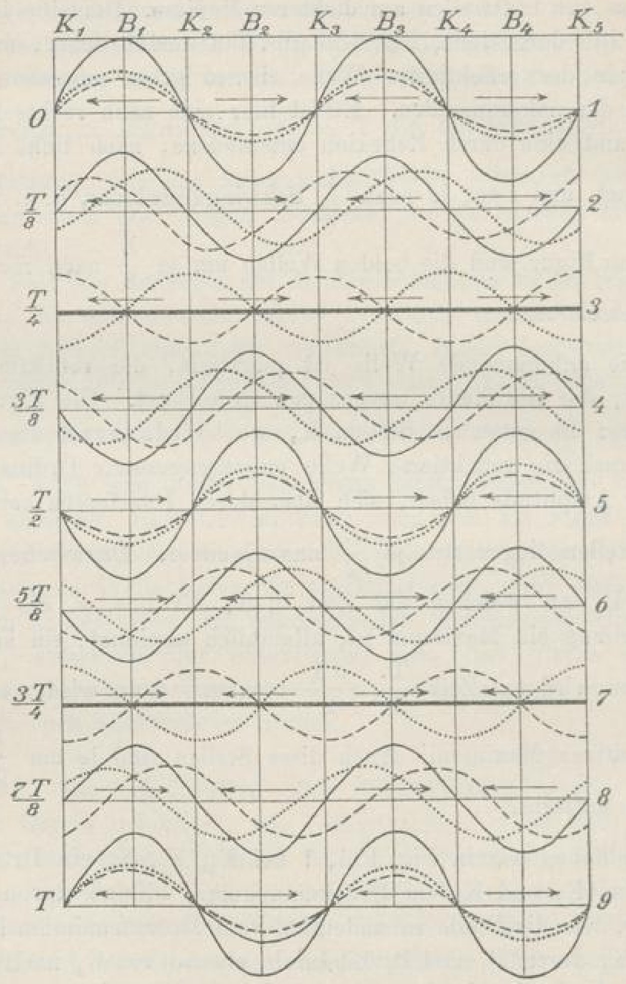

Fig. 136.

in 7 überall normaler Druck hergestellt ist, worauf infolge des Weiterströmens der Luft wegen Trägheit in K_2 und K_4 wieder ein Maximum entsteht, welches in 9 resp. 1 erreicht ist. Nun beginnt derselbe Vorgang von neuem.

Wie man sieht, zerfällt die ganze Luftmenge sozusagen in Schichten von der Dicke $\frac{\lambda}{2}$ zwischen je zwei Stellen K, und in jeder solchen Schicht strömt die Luft hin und her, aber nie aus einer Schicht in die andere. An den Stellen K findet Druckwechsel statt, aber kein Hindurchströmen, kein Geschwindigkeitswechsel. Sie heissen Knoten. An den Stellen B findet kein Druckwechsel statt, wohl aber Geschwindigkeitswechsel, sie heissen Bäuche. Die beschriebene Bewegung heisst stehende Schwingung.

Da durch die Knoten K hindurch keine Bewegung stattfindet, ist es klar, dass wir in diesen Stellen eine feste Scheidewand anbringen könnten, ohne die stehenden Schwingungen zu stören; da andererseits in den Bäuchen B kein Ueber- oder Unterdruck entsteht, so kann hier freie Kommunikation mit der äusseren, ruhenden Luft stattfinden. Findet sich daher die stehende Schwingung in einem Rohre, so kann in jedem Knoten das Rohr verschlossen sein, in jedem Bauch offen endigen oder hier ein Loch haben.

§ 196. Von Kundt ist eine für die Akustik ungemein fruchtbare Methode angegeben worden, stehende Schwingungen sichtbar zu machen. Bringt man in ein Rohr, in welchem stehende Schwingungen auf irgend eine Art erzeugt werden, leicht bewegliche Teilchen, z. B. Korkpulver, Lykopodiumsamen oder dgl., so werden sie aus den Bäuchen durch die hin und her gehenden Luftströme allmählich fortgefegt und in den Knoten angesammelt. Misst man den Abstand solcher Häufchen, so erhält man mit sehr grosser Genauigkeit die halbe Wellenlänge des betreffenden Tones. Noch zweckmässiger für genaue Messungen ist folgendes Verfahren: Man verteilt den Staub in einer Linie längs des Rohres, legt dasselbe dann so, dass diese Staublinie sich nicht an der tiefsten Stelle, sondern an der Seite befindet, der Staub also Neigung hat, herunter zu fallen. Erzeugt man jetzt die stehenden Schwingungen, so bleibt der Staub in den Knoten liegen, in den Bäuchen fällt er herunter und bildet halbkreisförmig begrenzte Figuren. Man nennt sie Kundtsche Staubfiguren. Ihre Benutzung werden wir nachher besprechen (§ 201); hier sei nur erwähnt, dass man die Schallgeschwindigkeit in der Röhre bestimmen kann, indem man die aus den Staubfiguren sich ergebende Wellenlänge mit der Schwingungszahl des Tones multipliziert. Füllt man die Röhre mit verschiedenen Gasen, so kann man auch in ihnen die Schallgeschwindigkeit ermitteln. So fand Wüllner die Geschwindigkeit in folgenden Gasen, die in Luft gleich 1 gesetzt:

Luft	Sauerstoff	Wasserstoff	Kohlenoxyd
1	0,9524	3,8123	1,0158

Kohlensäure	Stickoxydul	Ammoniak	Aethylen
0,7812	0,7823	1,2534	0,9518

§ 197. Bevor wir auf die Methoden eingehen, stehende Schwingungen zu erzeugen, wie sie bei den musikalischen Instrumenten benutzt werden, wollen wir erst näher die Bezeichnung der Töne und ihre musikalischen Beziehungen besprechen.

Wenn wir auf der Sirene oder sonst mit einem Instrument, bei welchem wir die Schwingungszahl des Tones ermitteln können, 2 beliebige Töne hervorbringen, so zeigt sich, dass ihr Zusammenklang entweder einen angenehmen oder unangenehmen Eindruck aufs Ohr macht. Je nachdem nennt man sie konsonant oder dissonant. Untersucht man, wovon Konsonanz und Dissonanz abhängen, so findet man, dass sie durch das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen, ihr sog. Intervall bedingt sind. Am weichsten klingen 2 Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 1 : 2 verhalten, den höheren nennt man die Oktave des unteren, des Grundtones oder der Prim. Dann klingen am besten die Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 2 : 3 verhalten; der höhere heisst die Quinte; dann wie 3 : 4, der höhere heisst Quart; dann 4 : 5, der höhere heisst Terz; dann 3 : 5, der höhere heisst Sexte. Schlechter endlich, aber auch noch musikalisch benutzt, sind Töne, die sich wie 8 : 9 (Sekunde) und wie 8 : 15 (Septime) verhalten. Nennen wir den Grundton C, so können wir folgende Tabelle aufstellen, welche alle genannten Töne bis zur Oktave enthält:

C	D	E	F	G	A	H	c
ut	re	mi	fa	sol	la	si	ut
Prim	Sekunde	Terz	Quart	Quint	Sext	Septime	Oktave
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

In der ersten Zeile steht die deutsche Bezeichnung des Tones, in der zweiten die italienische, in der dritten der Name des Tones in Bezug auf den Grundton, in der vierten das Intervall zwischen dem Ton und dem Grundton, oder das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen.

Die besten Konsonanzen entsprechen also den einfachsten Zahlenverhältnissen. Diese Thatsache war schon den Griechen bekannt, und ihre Erklärung hat mannigfache philosophische Spekulationen veranlasst, ist aber erst von v. Helmholtz richtig gegeben worden (§ 214).

Eine Reihe von Tönen, wie obige, zwischen Grundton und Oktave heisst Tonleiter, und die obige, aus 8 Tönen bestehend, wird die diatonische Tonleiter genannt.

Das Intervall zwischen je 2 folgenden Tönen der diatonischen Tonleiter ist in der fünften Zeile gegeben; dasselbe ist verschieden; 3mal kommt das Intervall $\frac{9}{8}$, das Intervall eines grossen ganzen Tones, vor, 2mal das $\frac{10}{9}$, das eines kleinen ganzen Tones, 2mal das $\frac{16}{15}$, das eines grossen halben Tones. Für unsere Musik werden an den Stellen, wo das Intervall einen ganzen Ton beträgt, neue Töne — also deren 5 — eingeschoben mit dem Intervall eines kleinen halben Tones $\frac{25}{24}$, so dass die Tonleiter 12 Töne enthält. Das kann nun geschehen entweder, indem man vom tieferen Ton, z. B. C, um $\frac{25}{24}$ aufwärts geht: der so gebildete Ton heisst Cis; oder indem man vom höheren um das Intervall $\frac{24}{25}$ abwärts geht; dann heisst der Ton Des. Ebenso liegt zwischen D und E: Dis oder Es, zwischen F und G: Fis oder Ges u. s. w. Die so gebildete Tonleiter heisst die chromatische.

Die Töne Cis und Des, Dis und Es u. s. w. sind nicht identisch, liegen aber sehr dicht neben einander. Ihre Unterscheidung lässt sich bei Streichinstrumenten, der Stimme u. dergl. durchführen, nicht aber bei Instrumenten mit fester Stimmung, wie das Klavier, die Orgel u. s. w. sie besitzen. Bei diesen werden nicht nur diese beiden Töne vereinigt, sondern es wird das ganze Intervall der Tonleiter in 12 ganz gleiche Teile geteilt; die Grösse dieses Intervalls x ist leicht zu finden: es muss, 12mal mit sich selbst multipliziert, das Intervall der Oktave, also 2 geben, also

$$2 = x^{12}, \quad x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463.$$

So erhält man die nach gleichschwebender Temperatur gestimmte Tonleiter mit folgenden Tönen und Schwingungszahlen, die des Grundtones $= 1$ gesetzt:

Prim	Kleine Sekunde	Grosse Sekunde	Kleine Terz
1	1,05946	1,12246	1,18921

Grosse Terz	Quart	Verminderte Quint	Quint	Kleine Sext
1,25992	1,33484	1,41421	1,49831	1,58740

Grosse Sext	Kleine Septime	Grosse Septime	Oktave
1,68179	1,78100	1,88775	2,0000

Bei dieser Tonleiter sind also eigentlich ausser den Oktaven des Grundtons alle Töne unrein gestimmt, die Konsonanzen sind nie ganz rein, aber die Stimmung ist für die praktische Benutzung die bequemste, weil man bei ihr von einer Tonart in die andere übergehen kann.

Was nun die absoluten Schwingungszahlen der Töne betrifft, so ist der tiefste musikalisch benutzte Ton der der 16füssigen Orgelpfeifen, der 16 Schwingungen in der Sekunde entspricht; er wird aber nicht selbständig, sondern nur zur Vertiefung höherer Töne gebraucht. Er heisst das zweigestrichene grosse C, $\underline{\underline{C}}$ oder Subkontra-C. Die Oktave mit 32 Schwingungen heisst das eingestrichene oder Contra-C, $\underline{C}$. 64 Schwingungen entsprechen dem grossen C, 128 dem kleinen c, 256 dem eingestrichenen kleinen c, $\bar{c}$, 512 dem zweigestrichenen $\bar{\bar{c}}$ u. s. w. Diese Stimmung, bei welcher die Schwingungszahlen der c Potenzen von 2 sind, heisst die **physikalische Stimmung**. In der Praxis wird sie nicht angewendet; hier ist vielmehr das $\bar{a}$, die Sexte von $\bar{c}$, der Ton, welcher der Stimmung zu Grunde gelegt wird. Nach der physikalischen Stimmung ist $\bar{a} = \bar{c} \cdot \frac{5}{3} = 426{,}627$; statt dessen sind für das $\bar{a}$ in verschiedenen Ländern Zahlen zwischen 430 und 450 üblich gewesen, 1885 ist auf einem internationalen Kongress zu Wien 435 als gesetzlich angenommen worden, d. h. $\bar{c} = 261$.

Zu erwähnen ist noch, dass in Frankreich halbe Schwingungen als Schwingung gezählt werden — wie auch wir es bei Pendelschwingungen thun —, dem Normal-$\bar{a}$ werden also dort 870 Schwingungen zugeschrieben.

Die Reihe der Töne, deren Schwingungszahlen der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... entsprechen, wird **harmonische Tonreihe** genannt, die höheren heissen **harmonische Obertöne** des Grundtones.

§ 198. Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der verschiedenen Methoden, stehende Schwingungen hervorzubringen. Sollen Töne musikalisch benutzt werden, so müssen sie kräftig sein und beliebig lange Zeit ausgehalten werden können. Dadurch, dass bei stehenden Schwingungen die ankommenden Wellen reflektiert werden, ihre Energie nur teilweise nach aussen verloren geht, sich also gewissermaßen summiert, werden sie musikalisch sehr brauchbar. Wir müssen nur mit dem Rohr, in welchem sie sich bilden, noch eine Quelle verbinden, welche die ankommenden Wellen fortdauernd bildet, und die nach aussen verloren gehende Energie ersetzt.

Die einfachste Art, stehende Schwingungen in einem kurzen Röhrchen zu erzeugen, ist, dass man quer über dessen Oeffnung bläst (pfeifen auf einem Schlüssel). Die Wirkung ist die, dass etwas Luft von oben in die Pfeife dringt, eine Verdichtung erzeugt wird, die nach unten läuft, reflektiert wird u. s. w. Sobald oben eine Verdünnung ist, wird von der vorbeigeblasenen Luft ein Teil eingesaugt, es entsteht wieder eine Verdichtung, die Luft wird ausgetrieben. So werden die stehenden Schwingungen unterhalten. Es bildet sich dabei eine Schwingung, ein Ton, der von der Länge des Röhrchens abhängt: ist dasselbe oben offen, unten geschlossen, so muss sich oben ein Bauch, unten ein Knoten befinden (§ 195). Dieselben müssen mindestens um $\frac{\lambda}{4}$ entfernt sein, d. h. der tiefste Ton, der entstehen kann, ist ein solcher, dass seine Wellenlänge 4mal so lang als die Länge des Röhrchens ist. Es kann sich aber auch im Innern der Pfeife noch ein Knoten bilden (Fig. 137), also am unteren Ende ein Knoten, dann ein Bauch, dann ein Knoten, in der Oeffnung ein Bauch. Die Länge der Pfeife ist dann $\frac{3}{4}\lambda$, d. h. die Wellenlänge des Tones ist $\frac{4}{3}$ von der Länge der Pfeife. Ebenso kann die Pfeife $\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$ u. s. w. der Wellenlänge des Tones sein (siehe Fig. 137). Dasselbe Röhrchen kann daher Töne geben, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie $1:3:5:7:9\ldots$ Die Pfeife gibt also ausser dem Grundton eine Reihe von harmonischen Obertönen, welche den ungeraden Zahlen entsprechen.

Ist dagegen das untere Ende auch offen, so müssen an beiden Enden Bäuche liegen. Dieselben müssen mindestens $\frac{1}{2}\lambda$ aus einander liegen, können aber auch $\frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}$ (siehe Fig. 138) entfernt sein, indem sich im Innern Knoten bilden. Das Röhrchen kann also Töne geben, deren Schwingungszahlen sich wie $1:2:3:4:5\ldots$ verhalten, also die ganze Reihe der harmonischen Obertöne. Der tiefste Ton des offenen Röhrchens ist die Oktave des tiefsten Tones des unten geschlossenen Röhrchens, denn im ersten Fall ist die Rohrlänge $\frac{\lambda}{2}$, im zweiten $\frac{\lambda}{4}$.

§ 199. Genau dieselben Verhältnisse finden wir bei den *Orgelpfeifen* wieder, nur ist hier die Art der Anregung eine etwas andere. Der durch einen Blasebalg gelieferte Luftstrom tritt zu-

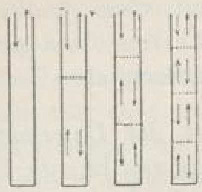

Fig. 137.

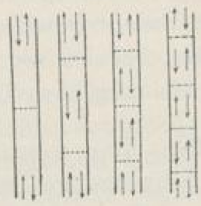

Fig. 138.

nächst in die sog. *Kammer* A (Fig. 139). Von hier kann er nur entweichen durch einen schmalen Spalt, die *Ritze* B. Strömt er aus, so trifft er in Form eines schmalen, blattförmigen Stromes gegen die *Lippe* C, wird an ihr gebrochen und kann teils in das Innere der Pfeife, teils durch das *Auge* D nach aussen gelangen. Wird nun durch die zuerst in die Pfeife dringende Luft eine Verdichtung erzeugt, so entstehen stehende Schwingungen, welche bei D einen Bauch haben. Hier strömt die Luft also bald aus, bald ein, und je nachdem wird das aus der Ritze B austretende Luftblatt bald aus der Pfeife herausgelenkt, bald hineingezogen, wodurch in den passenden Momenten jedesmal die Verdichtung verstärkt wird. So unterhält der Luftstrom die Schwingungen, welche andererseits seine Bewegung regulieren.

Fig. 139.

Die Pfeife kann oben geschlossen sein: dann haben wir eine sog. *gedackte Pfeife*. Sie kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihe der ungeraden Zahlen (siehe vorigen Paragraphen). Ist die Pfeife oben offen, so haben wir eine *offene Pfeife*; sie kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie die Reihe der ganzen Zahlen. Man kann diese verschiedenen Töne durch verschieden starkes Anblasen leicht erzeugen; je grösser der Druck der Luft im Balg, desto höhere Töne werden erzeugt.

Es sei hier gleich bemerkt, dass, wenn wir eine Pfeife anblasen, nicht einer der möglichen Töne allein entsteht, sondern daneben, wenn auch schwächer, eine ganze Anzahl der Obertöne.

Die besprochenen Erscheinungen sind nur angenähert richtig behandelt. Die Erfahrung stimmt mit dieser Rechnung um so mehr, je enger die Pfeife im Vergleich zu ihrer Länge ist. Die Bewegung an den offenen Enden ist eine unregelmässige, wodurch eine Korrektion zur Pfeifenlänge nötig wird [1]).

Ganz andere Gesetze treten daher auf, wenn die Pfeifen sehr kurz werden, bei den sog. kubischen Pfeifen; hier gehören die verschiedenen möglichen Töne nicht der harmonischen Tonreihe an.

§ 200. Eine wesentlich andere Art der Unterhaltung der stehenden Schwingungen oder der Zuführung von Energie findet sich bei der sog. chemischen Harmonika. Im Innern einer beiderseitig offenen vertikalen Röhre wird ein kleines Gasflämmchen angebracht, $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ der Röhrenlänge vom unteren Ende entfernt. Es seien in dem Rohre stehende Schwingungen, wenn auch ganz schwach vorhanden. Ueber der Flamme befindet sich irgend einer der Knotenpunkte. Im Moment, wo hier eine Verdichtung vorhanden ist, wird der Druck noch erhöht dadurch, das die Flamme die Luft erhitzt. Die Verdichtung breitet sich nach unten aus; dadurch kommt die Brenneröffnung in eine Schicht mit höherem Druck als vorher, es fliesst weniger Gas aus, die Flamme brennt viel kleiner. Während sich also im Knoten eine Verdünnung bildet, wird dies dadurch befördert, dass die Erwärmung geringer wird. Nun breitet sich die Verdünnung nach unten aus, im Knoten beginnt sich wieder eine Verdichtung zu bilden; die Verdünnung kommt an die Stelle der Brenneröffnung, das Gas strömt stärker aus, die grössere Flamme erhitzt das verdichtete Gas im Knoten u. s. w. Hier werden also die Verdichtungen und Verdünnungen auch verstärkt, aber nicht durch Zufuhr oder Entziehung neuer Luft, wie bei den Orgelpfeifen, sondern durch passende Erwärmung und Abkühlung. Die Flamme gerät dabei in Vibrationen, brennt abwechselnd hoch und niedrig, allerdings in so schnellem Wechsel, dass man es mit dem Auge nicht erkennen kann. Betrachtet man aber ihr Bild in einem schnell rotierenden spiegelnden Prisma, so erscheinen ihre zeitlich nach einander vorhandenen Formen räumlich neben einander und man sieht eine Reihe von Flammenzacken (§ 218).

[1]) Siehe Versuche darüber von Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) 23 und 31. Die Theorie ist gegeben durch v. Helmholtz, Crelles Journ. 57.

Damit die Flamme kräftig wirke, muss sie sich an geeigneter Stelle befinden und von passender Grösse sein. Die Flamme kann nur schon vorhandene Schwingung verstärken, nicht sie erzeugen; es sind aber in einem Luftraum immer alle möglichen Bewegungen ganz schwach vorhanden, so dass die Flamme gewöhnlich sofort das Tönen hervorruft. Macht man aber die Flamme etwas kleiner oder grösser, als günstig ist, so beginnt das Tönen nicht von selbst; sobald man aber dann in der Nähe des Rohres den richtigen Ton angibt, wodurch auch im Rohre die Schwingungen kräftig entstehen, genügt auch die schwächere Flamme und das Rohr beginnt zu tönen.

Es gibt noch eine Reihe anderer Arten, stehende Schwingungen zu erzeugen; sie beruhen auf Transversalschwingungen fester Körper, wir werden sie später besprechen.

§ 201. Feste Körper können ebenfalls longitudinale Schwingungen ausführen, da sie ebenfalls Widerstand gegen Volumänderung besitzen. Jede durch den Stab laufende Welle wird dabei an den Enden reflektiert, und durch Interferenz bilden sich im Stabe stehende Schwingungen. Haben wir einen festen Stab, so muss derselbe irgendwo gehalten werden, damit er schwinge; er sei zunächst an den Enden frei, in der Mitte festgeklemmt. Dann ist die Mitte jedenfalls ein Knoten, denn sie kann sich nicht hin und her bewegen. Wir können den Stab zum Tönen bringen, indem wir ihn mit einem feuchten Lappen oder mit durch Kolophonium klebrig gemachtem Lappen in seiner Längsrichtung reiben. Er wird dabei vom Lappen gefasst, etwas komprimiert (wenn wir nach der Mitte hin reiben), bis sein Widerstand zu gross wird, dann springt er vorwärts, über die Gleichgewichtslage hinaus, zieht sich dann wieder zusammen. In diesem Moment fasst der Lappen wieder, verstärkt die Kompression u. s. w. Es ist klar, dass dabei die Enden des Stabes die Rolle von Bäuchen spielen, sie schwingen in der Längsrichtung des Stabes hin und her, ohne dass in ihnen Verdichtung oder Verdünnung vorhanden wäre. Der tiefste Ton, welchen der Stab geben kann, ist vorhanden, wenn nur in der Mitte ein Knoten vorhanden ist, an den Enden die nächsten Bäuche; dann ist seine Länge gleich $\frac{2\lambda}{4}$ des entstehenden Tones. Er kann

Fig. 140.

aber auch mit 2 Knoten in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge schwingen (siehe Fig. 140), wenn er hier festgehalten wird, dann ist seine Länge gleich $\frac{4}{4}\lambda$ des Tones; oder er schwingt mit 3 Knoten, dann ist er $= \frac{6}{4}\lambda$ u. s. w.

Dies wird benutzt, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in festen Körpern zu bestimmen. Ein z. B. in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Länge eingeklemmter Stab, der gerieben wird und tönt, hat nach obigem die Länge λ. Wenn wir also noch die Schwingungszahl n des entstehenden Tones bestimmen, so haben wir $v = n\lambda$. Wir können n mit der Sirene finden; besser aber benutzt man die Kundtschen Staubfiguren (§ 196): A sei (Fig. 141) der Stab, dessen eines Ende hineingeschoben ist in B, eine weitere Glasröhre, die Staub enthält, und an ihrem hinteren Ende durch einen verschiebbaren Stöpsel verschlossen ist. Reibt man den Stab, so schwingt

Fig. 141.

sein Ende hin und her, dadurch wird die Luft in B verdichtet und verdünnt, es entstehen in B stehende Schwingungen, wenn dessen Länge passend ist, d. h. wenn sich für den betreffenden Ton bei C gerade ein Knoten befindet. Wird der Stöpsel passend eingestellt, so entstehen sofort die Staubfiguren, deren Länge λ_1 dem Tone mit der Schwingungszahl n in Luft entspricht. Nun ist $n\lambda_1 = v_1 = 332{,}5$ = der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft, also $n = \frac{v_1}{\lambda_1}$, folglich wenn l die Länge des Stabes ist, $v = nl = \frac{lv_1}{\lambda_1}$.

Nach diesen und anderen Methoden haben sich folgende Geschwindigkeiten ergeben, die in Luft = 1 gesetzt:

Blei	4,3	Eisen	15,1
Gold	6,4	Messing	15,3
Silber	8,1	Glas	15,3
Kupfer	11,2	Holz	10—18

Ein longitudinal tönender Stab kann aber auch an einem Ende eingeklemmt sein, dann liegt hier jedenfalls ein Knoten, am anderen Ende ein Bauch; er gibt so den tiefsten Ton, den er überhaupt geben kann, seine Länge ist $= \frac{\lambda}{4}$. Es können aber auch im Innern noch 1, 2, 3 . . . Knoten entstehen, dann ist seine Länge gleich $\frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}$ u. s. w.

Der an beiden Enden freie und der an einem Ende eingeklemmte Stab entspricht also ganz der offenen und gedackten Pfeife.

Ein Stab kann endlich auch noch an beiden Enden gehalten werden, z. B. eine Saite, welche gerieben auch longitudinal schwingt. Dieser Fall ist indes praktisch ohne Bedeutung.

In festen Körpern hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der longitudinalen Wellen von dem Widerstand gegen Dehnung, also vom Elasticitätsmodul E ab. Wir können setzen: $v = \sqrt{\frac{E}{d}}$, so dass man den Elasticitätsmodul auch mit Hülfe der Kundtschen Staubfiguren ermitteln kann.

C. Transversale Schwingungen.

§ 202. Die festen Körper allein besitzen Widerstand gegen Formänderung, welcher transversale Schwingungen bedingt. Wir wollen solche zuerst an festen Körpern untersuchen, bei welchen eine Dimension vorherrscht, an Drähten oder Saiten. Bei denselben wird der Widerstand gegen Biegung nur dann genügend gross, wenn sie gespannt sind; also müssen beide Enden fest sein.

Die einfachste Weise, nach der eine Saite schwingen kann, ist in Fig. 142 dargestellt. Wir denken uns die Saite in der Mitte gefasst und auf die Seite gezogen. Dadurch wird sie gedehnt und verbogen, die Elasticität sucht sie zurückzuziehen. Lassen wir sie los, so kehrt sie mit wachsender Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage zurück, überschreitet infolge von Trägheit dieselbe mit abnehmender Geschwindigkeit, kehrt wieder um u. s. w. So schwingt sie zwischen den beiden Grenzlagen a und b hin und her, die Enden A und A_1 der Saiten bleiben dabei an ihrer Stelle,