Wie bei Gasen ändert sich der Druck mit der Temperatur nach dem Gay-Lussacschen Gesetz, d. h. die Druckänderungen sind proportional den Temperaturänderungen, und der Proportionalitätsfaktor ist für alle Körper identisch, nämlich = 0,00367 (vgl. § 124).

B. Starre Körper.

§ 83. Die starren oder festen Körper sind dadurch charakterisiert, dass sie grossen Widerstand gegen Formänderung und grossen Widerstand gegen Volumänderung zeigen.

Obgleich ihr Widerstand gegen Volumänderung noch grösser ist als bei Flüssigkeiten, lässt sich doch nachweisen, dass sie kompressibel sind, und der Kompressibilitätskoeffizient bestimmen. Dies geschieht mittelst des Piezometers (§ 62). Bringen wir in das birnförmige Gefäss ein bekanntes Volumen eines festen Körpers und füllen den Rest des Gefässes mit einem bekannten Wasservolumen, und beobachten die Volumverringerung des ganzen Inhalts bei Kompression, so lässt sich die Volumabnahme des Wassers berechnen. Bringt man diese Volumverringerung von der ganzen beobachteten in Abzug, so gibt der Rest die Volumabnahme des festen Körpers. So findet man, dass auch hier die Volumabnahme v proportional dem Druck p (gemessen in Atmosphären), dem Volumen V und einem von der Substanz abhängigen Koeffizienten α ist, also $v = \alpha p V$;

$$\alpha = \frac{v}{Vp}$$

heisst der Koeffizient der Kompressibilität; er ist gleich der Verringerung der Volumeinheit durch Druckzunahme um eine Atmosphäre. Es ist nach Amagat α für

Glas	0,00000220
Kupfer	0,00000086
Messing	0,00000095
(Wasser	0,0000503).

Der Widerstand C gegen Kompression ist α umgekehrt proportional, also $C = \frac{1}{\alpha}$.

§ 84. Die festen Körper haben grossen Widerstand gegen Formänderung. Die einfachste Formänderung ist die sog. Schiebung oder Scherung, durch welche (Fig. 74) der Körper abcd in die Form a b e f übergeführt wird; wir können uns den Körper in ∞ dünne horizontale Schichten zerteilt denken, von welchen jede etwas gegen die vorige nach rechts verschoben wird, dann kommt obige Formänderung zu stande. Einer solchen Schiebung setzt also der Körper Widerstand entgegen, es ist eine Kraft nötig, um ihn so zu deformieren. Man nennt solche tangential an der Oberfläche angreifenden Kräfte: scherende Kräfte.

Es ist leicht einzusehen, dass die erforderliche Kraft proportional ist dem Querschnitt Q des Körpers, proportional der Strecke c e = s, um welche die oberste Schicht verschoben wird, umgekehrt proportional zur Höhe a c = b (denn bei doppelter Höhe ist für

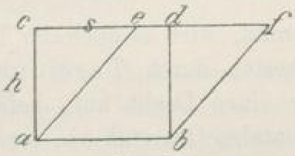

Fig. 74.

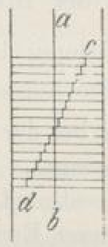

Fig. 75.

gleiches s jede Schicht nur halb so weit zu verschieben), endlich proportional einem Koeffizienten k, der von der speziellen Substanz abhängt, also Kraft $= m\,g = k\,\frac{s}{h}\,Q$. k ist gleich der Kraft für $s = h = 1$ und $Q = 1$, d. h. der Widerstand gegen Schiebung ist gleich der Kraft, welche nötig ist, um bei einem Würfel von der Seitenlänge 1, dessen untere Fläche festgehalten wird, die obere Fläche um die Länge 1 zu verschieben. Die Dimension von k ergibt sich so: $k = \frac{m\,g}{Q}\,\frac{h}{s} = \frac{m\,g}{L^2}$. So ist nach Wertheim für

Eisen	$k = 6706$	$\frac{\text{Kilogrammgewicht}}{\text{Quadratmillimeter}}$
Gussstahl	$k = 7458$	„
Kupfer	$k = 3672$	„
Glas	$k = 2346$	„

Diese Zahlen sind nicht nach absolutem Maß gemessen, wie man sieht, sondern so, wie es in der Technik üblich ist, wo das Kilogramm als Krafteinheit dient (§ 18). k heisst Schiebungskoeffizient.

§ 85. Die Schiebung wird ganz rein beobachtet bei der Torsion oder Drillung. Wenn wir einen Stab oder Draht mit kreisförmigem Querschnitt haben, und ziehen auf seiner Oberfläche eine gerade Linie ab (Fig. 75) parallel der Axe, so verwandelt sich dieselbe bei Torsion in eine Schraubenlinie dc; diese Form würde aber auch entstehen, wenn wir uns den Stab in ∞ dünne Scheiben zerlegt denken, und jede gegen die vorige um ein kleines Stück verschoben, gedreht würde. Haben wir einen Draht von der Länge l, dem Radius r, halten das eine Ende fest, drehen das andere um den Winkel w, so ist nach der Theorie von Poisson das Drehungsmoment D der nötigen Kraft oder auch der Kraft, welche der Draht der Drehung entgegengesetzt: $D = \frac{\pi}{2} k \frac{r^4}{l} w$. Nach dieser Gleichung hat Werthheim k bestimmt, indem er ein bekanntes Drehungsmoment wirken liess und w maß.

Da k bei der Torsion vorkommt, wird es auch der Torsionsmodul genannt. k wird am besten durch Torsionsschwingungen bestimmt: Hängen wir einen Draht auf, befestigen an seinem unteren Ende einen horizontalen Querstab ab, tordieren den Draht und lassen ihn dann los, so beginnen Schwingungen; die Kraft D treibt den Draht in die untordierte Lage zurück, hier kommt er mit einer gewissen Geschwindigkeit an, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite drillt, bis der sich entwickelnde Widerstand die Geschwindigkeit vernichtet hat; dann kehrt die Bewegung um u. s. w. Die Schwingungen verlaufen nun genau wie Pendelschwingungen: die Kraft D ist, wie obige Gleichung zeigt, proportional zu w, der Ablenkung, sie folgt also demselben Gesetz, welches wir beim Pendel fanden (§ 34). Daher ist die Schwingungsdauer unabhängig von dem Drehungswinkel und sie muss demselben Gesetze folgen, welches wir für Pendel fanden (§ 54):

$$T = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Direktionskraft}}},$$

wobei die Direktionskraft gleich der für die Ablenkung $w = 1$ wirkenden Kraft $D = D_1$ ist, also $T = \pi \sqrt{\frac{S}{D_1}}$. Wir lassen daher den Balken ab Querschwingungen machen und beobachten

$$T = \pi \sqrt{\frac{S}{D_1}};$$

dann hängen wir in a und b gleiche Gewichte q an, wodurch S um eine bekannte Grösse P vermehrt wird (vgl. § 55), und beobachten

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{S+P}{D_1}}.\quad \text{Daraus folgt } S = P\,\frac{T^2}{T_1^{\,2} - T^2} \text{ und dann:}$$

$$\frac{\pi^2 S}{T^2} = D_1 = \frac{\pi}{2}\,k\,\frac{r^4}{l},\ \text{also } k = \frac{2\pi S l}{r^4 T^2}.$$

§ 86. Die Grössen C und k, welche den Widerstand gegen elastische Deformationen, d. h. gegen Volumänderung und gegen Formänderung messen, sind die fundamentalen Elastizitätskoeffizienten jeder Substanz. Sie hängen offenbar beide von den anziehenden und abstossenden Kräften zwischen den Molekeln ab, sie können daher auch nicht von einander unabhängig sein. Die Theorie von Poisson gibt $5k = 3C = h$, wenn wir $3C = h$ nennen [1]).

§ 87. Die elastischen Deformationen, welchen wir in der Praxis begegnen, sind meist gleichzeitige Form- und Volumänderungen. Der wichtigste Fall ist der der Verlängerung durch Zug. Wird ein an dem einen Ende befestigter Draht am anderen Ende belastet durch angehängte Gewichte, so dehnt er sich aus; und zwar ist die Verlängerung l proportional der Länge L des Drahtes, dem angehängten Gewichte P, einem von der Substanz abhängigen Koeffizienten $\frac{1}{E}$, endlich umgekehrt proportional dem Querschnitt Q, also $l = \frac{1}{E}\,\frac{PL}{Q}$, oder $E = \frac{L}{l}\,\frac{P}{Q}$. E heisst der Elastizitätsmodul der Substanz. Für $Q = 1$ und $l = L$ wird $E = P$, d. h. der Elastizitätsmodul ist gleich dem Gewicht, welches einen Draht von der Einheit des Querschnitts um seine eigene Länge verlängern würde, vorausgesetzt, dass eine solche Verlängerung möglich und das obige Gesetz so weit gültig wäre. Dies ist aber nicht der Fall; es zeigt sich, dass nur bis zu einer kleinen Be-

[1]) Zur Theorie der Elastizität, die sich nur mit Hülfe von höherer Mathematik behandeln lässt, vergleiche: Lamé, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1866. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, Leipzig 1862. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Leipzig 1876. W. Thomson, Elasticity, Encycl. Brit. Vol. 7, 1880. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, Leipzig 1885. Poisson, Mémoires de l'académie 8.

lastung l proportional zu L ist und mit Wegnehmen des Gewichtes wieder verschwindet; man spricht daher von einer Elastizitätsgrenze, bis zu welcher das Gesetz gilt. Bei grösserer Belastung tritt dauernde Verlängerung auf, bei noch etwas grösserer reisst der Draht. Das zum Zerreissen nötige Gewicht für einen Draht von der Einheit des Querschnitts heisst dessen Tragfähigkeit p.

Die Dimension von E ist: $E = \frac{L}{l}\frac{P}{Q} = \text{Kraft}\ [L^{-2}]$.

Folgende Tabelle gibt einige Zahlen für den Elastizitätsmodul E, die Tragfähigkeit p und die Elastizitätsgrenze G, alles gemessen in Kilogrammgewicht und Millimeter:

	E	p	G
Blei	1 800	2	0,2
Eisen	19 000	60	30
Stahl	21 000	80	35
Glas	7 000	1	—
Kupfer	12 400	40	12
Messing	9 000	60	—
Platin	17 000	30	20
Silber	7 300	29	11
Fichte	560	2	—
Buche	980	4	2
Tanne	1 110	4	2

Die Zahlen sind nur angenähert richtig, da sie sehr von der Oberfläche und Reinheit der Substanzen abhängen. E nimmt mit wachsender Temperatur ab; nur bei Eisen und Stahl wächst es, wenigstens bis zu 200°.

Mit der Verlängerung ist eine Verkleinerung des Querschnitts, eine Querkontraktion d und eine Aenderung des Volumens verbunden. Das Verhältnis $\frac{d}{l} = \mu$ ist eine in der Elastizitätstheorie wichtige Grösse. Nach Poisson ist $E = \frac{3hk}{h+k}$ und $\mu = \frac{h-2k}{2(h+k)}$. Setzt man hier $h = 5k$ (§ 86), so folgt $\mu = \frac{1}{4}$. Die Poissonsche

Theorie geht aber von nicht ganz sicheren Hypothesen aus, und die Versuche ergeben, dass μ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegt. Letzterer Wert würde aus Poissons Formel folgen, für Substanzen, bei welchen $k = 0$, welche also keinen Widerstand gegen Schiebung haben; diesem Fall kommt z. B. Leimgallert nahe.

§ 88. Ein zweiter wichtiger Fall ist der der Biegung. Haben wir einen Stab, welcher an dem einen Ende fest, z. B. eingemauert, ist, dessen anderes Ende belastet wird, so biegt er sich. Ist der Querschnitt rechteckig, die Breite B, die Höhe H, die Länge L, ist E der Elastizitätsmodul, P das biegende Gewicht, so ist die Senkung des freien Endes, der sog. Biegungspfeil $\lambda = \frac{4\,P\,L^3}{E\,B\,H^3}$.

Also auch hier ist die Deformation λ proportional der wirkenden Kraft P; ein solcher Stab muss daher, wenn er verbogen, dann

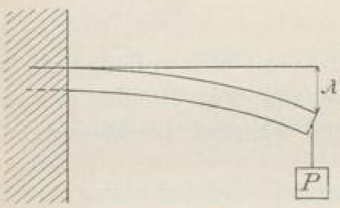

Fig. 76.

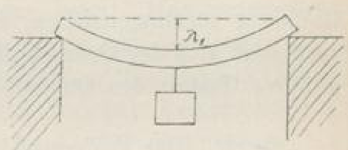

Fig. 77.

losgelassen wird, Schwingungen ausführen, deren Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitüde ist, gerade wie beim Pendel und beim tordierten Draht.

Liegt ein Balken an beiden Enden frei auf und wird in der Mitte belastet (Fig. 77), so ist das dasselbe, als ob wir den Balken in der Mitte festhielten, dagegen beide Enden mit der halben Kraft in die Höhe zögen; der Biegungspfeil jeder Hälfte, λ_1, der identisch mit der Durchbiegung des ganzen Balkens ist, ist also

$$\lambda_1 = \frac{4\,\frac{P}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^3}{E\,B\,H^3} = \frac{1}{16}\,\lambda.$$

Ist endlich der Stab an beiden Enden eingemauert, in der Mitte belastet (Fig. 78), so nimmt jedes Viertel die Gestalt an, als ob sein eines Ende festgehalten, das andere mit $\frac{1}{2}$ P nach oben oder unten gezogen würde. Die Senkung λ_2 der Mitte ist dabei doppelt so gross als die Senkung jedes Viertels, also

$$\lambda_2 = 2 \,.\, \frac{4\,\frac{P}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^3}{E B H^3} = \frac{1}{64}\,\lambda.$$

Der Vorgang bei der Biegung ist ein sehr komplizierter: die konvexe Seite des Balkens wird gedehnt, die konkave komprimiert; dazwischen muss also eine Schicht liegen, welche die ursprüngliche Länge beibehält, sie wird neutrale Schicht genannt. Die gedehnte Seite muss sich gleichzeitig in der zur Dehnung senkrechten

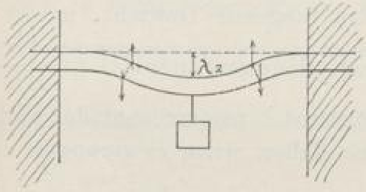

Fig. 78.

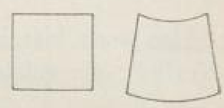
Fig. 79.

Richtung zusammenziehen, die verkürzte muss sich verlängern. So verändert sich der Querschnitt sehr bedeutend; Fig. 79 gibt die ungefähre Gestalt des Querschnitts vor und während der Biegung.

§ 89. Der Widerstand gegen Biegung wird bei vielen Apparaten benutzt; es seien folgende erwähnt:

1. Wagen, von der Form der Fig. 80. a b c ist eine starke gebogene Feder aus Stahl; hält man sie an c, hängt an a Gewichte an, so biegt sie sich auf; die Verbiegung, welche an der Teilung a d abgelesen wird, ist proportional der wirkenden Kraft, dem angehängten Gewicht. In ähnlicher Weise werden Federn benutzt, um Kräfte, z. B. Zugkräfte, zu messen; man nennt sie dann Dynamometer.

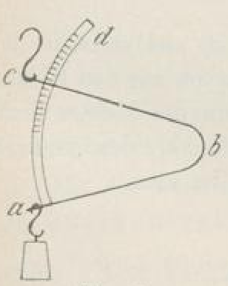

Fig. 80.

2. Federwagen: Hängt man an eine Spiralfeder Gewichte, so verlängert sie sich; es findet dabei sowohl Torsion als Biegung des Drahtes statt; da aber diese beiden Deformationen proportional der wirkenden Kraft sind, ist die Verlängerung proportional dem Gewicht und letzteres kann aus ersterer bestimmt werden.

3. Uhrfedern: Bei transportablen Uhren, den Taschenuhren, Chronometern, kann man nicht die Eigenschaft des Pendels benutzen, dass es in immer gleichen, von der Amplitüde unabhängigen Zeiten eine Schwingung ausführt, da dasselbe vertikal hängen muss. Man gebraucht hier eine spiralig aufgerollte, sehr dünne Feder, deren eines Ende am Gehäuse, deren anderes an der Axe eines kleinen Schwungrades, der sog. Unruhe, befestigt ist. Dreht man daher das Rad, so wird die Feder auf- oder zugewickelt, verbogen; lässt man nun das Rad los, so dreht die Spannung der Feder es zurück, aber infolge der Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus, so dass die Feder nun in entgegengesetztem Sinn verbogen wird u. s. w. So entstehen Schwingungen der Unruhe, die mit Hülfe eines Echappements (Anker- oder Cylinderechappements) auf das Ablaufen des Uhrwerks ebenso regulierend wirken, wie die Schwingungen eines Pendels.

§ 90. In der Technik berücksichtigt man besonders die Festigkeit, d. h. die Kraft, welche bei einer Deformation von einem Körper noch ausgehalten werden kann. Man unterscheidet: absolute Festigkeit bei Beanspruchung auf Zerreissen; rückwirkende Festigkeit beim Zerdrücken (z. B. bei Pfeilern, Säulen); relative Festigkeit beim Biegen; Festigkeit der Torsion beim Drillen (z. B. bei Axen von Zahnrädern). Die Festigkeit ist sehr abhängig von der inneren und Oberflächenbeschaffenheit der Körper.

Wenn wir z. B. einen Stab biegen, so wird die konvexe Seite verlängert, die Molekeln kommen dadurch hier in weitere Entfernung, als ihrer normalen Lage entspricht, so dass sie schliesslich nicht mehr zusammenhalten, und an irgend einer schwächeren Stelle ihre Trennung, d. h. Bruch des Stabes, eintritt.

Wenn wir im stande sind, in der obersten Schicht die Molekeln im ungebogenen Zustande des Stabes in grössere Nähe zu bringen, als der normalen Lage entspricht, so werden wir den Stab stärker biegen können, bevor sie in die zum Bruch nötige Entfernung gelangen, der Stab wird weniger leicht brechen. Das können wir in der That in vielen Fällen durch plötzliches Abkühlen: wenn wir ein Stahlstück glühend machen, es dann langsam abkühlen lassen, so findet durch sein ganzes Innere eine gleichmässige Annäherung der Molekeln statt; tauchen wir aber den glühenden Stahl in eine Flüssigkeit, so wird die äusserste Schicht plötzlich abgekühlt, und hier kommen die Molekeln in die der geringen Temperatur entsprechende Lage. Allmählich aber wird auch das Innere kalt, auch hier nähern sich die Molekeln; das ist aber nur möglich, indem sich auch die Oberfläche noch zusammenzieht, so dass sich hier die Molekeln dadurch in einer unnormalen grösseren Nähe befinden. Dadurch wird aber der Stahl fester und man bezeichnet dies Verfahren bekanntlich als Härten. Ein nachträgliches Erhitzen und langsames Abkühlen, das sog. Anlassen, macht den harten Stahl wieder weicher.

Auch Glas kann man auf diese Art widerstandsfähiger machen, und vor zwei Jahrzehnten ist Hartglas vielfach hergestellt. Die Oberfläche befindet sich aber dabei in unnormalem Zustand der Spannung, die Teilchen sind zu nah und suchen sich zu entfernen; entfernt man einige Teilchen der Oberfläche, z. B. durch Ritzen, so zerfällt der Zusammenhang der ganzen Oberfläche, das Hartglas verwandelt sich in einen Haufen kleinster Glassplitterchen. Mehrfach sind Gefässe aus Hartglas auch von selbst in dieser Weise explodiert, und daher hat man ihre Fabrikation wieder aufgegeben.

§ 91. Die Elastizität spielt eine Hauptrolle beim Stoss von Körpern. Seien zwei Kugeln gegeben, deren Massen M und m, welche sich in gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit U und u bewegen. Die Geschwindigkeit U der hinteren Kugel sei grösser, so dass sie die vordere einholt, mit ihr zusammenstösst; wie ist die Bewegung der Kugeln nach dem Stoss?

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Kugeln seien ganz unelastisch (z. B. aus feuchtem Thon oder weichem Wachs); dann platten sich beim Stoss beide Kugeln ab infolge des Druckes der hinteren. Diese verliert eine Bewegungsmenge, die vordere gewinnt sie, nach dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§ 52); schliesslich haben beide Kugeln die gleiche Endgeschwindigkeit v, mit der sie sich gemeinsam fortbewegen. Da die hintere Kugel ihre Geschwindigkeit von U in v ändert, verliert sie die Bewegungsmenge $M(U-v)$, ebenso gewinnt die andere $m(v-u)$; also ist:

$$M(U-v) = m(v-u); \quad v = \frac{MU + mu}{M + m} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

2. Seien die Kugeln vollkommen elastisch. Auch dann platten sich die Kugeln ab, die vordere gewinnt $m(v-u)$, die hintere ver-

liert $M(U-v)$, bis ihre Geschwindigkeiten gleich sind und gleich v. Nun kommt aber die durch die Abplattung entwickelte elastische Kraft zur Geltung, welche die Kugeln auseinandertreibt, also die vordere noch mehr beschleunigt, die hintere noch mehr verzögert; und zwar müssen dabei die Bewegungsmengen um dieselbe Grösse geändert werden, welche die Abplattung hervorgebracht hatte, also um $M(U-v)$ und $m(v-u)$. So bekommen die Kugeln die Endgeschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned} U^1 &= U - 2(U-v) = 2v - U \\ \text{und} \quad u^1 &= u + 2(v-u) = 2v - u \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die gleichen Formeln gelten natürlich auch, wenn die Kugeln sich entgegenkommen, nur haben dann U und u entgegengesetztes Vorzeichen.

Wir wollen noch einige Spezialfälle betrachten:

1. Sind die Kugeln gleich gross, $M = m$, so wird (1):

$$v = \frac{m(U+u)}{2m} = \frac{U+u}{2}, \quad \text{also (2):} \quad U^1 = u, \quad u^1 = U,$$

d. h. die Endgeschwindigkeit jeder Kugel ist gleich der Anfangsgeschwindigkeit der anderen, sie tauschen beim Stoss ihre Geschwindigkeiten aus.

2. Ist die gestossene Masse m sehr gross, so können wir M dagegen vernachlässigen; dann wird (1)

$$v = \frac{mu}{m} = u, \quad \text{also (2):} \quad U^1 = 2u - U, \quad u^1 = 2u - u = u,$$

d. h. die gestossene Kugel ändert ihre Geschwindigkeit nicht, die stossende springt zurück, mit einer relativen[1]) Geschwindigkeit $U-u$.

Ist in diesem Falle die gestossene Kugel noch in Ruhe, $u = 0$, so wird $U^1 = -U$, $u^1 = 0$, d. h. die stossende Kugel fliegt mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher sie ankam. Dies gilt z. B. für die Billardkugel und die Bande, welche wir als grosse ruhende Kugel betrachten können.

---

[1]) Unter relativer Bewegung versteht man die Ortsveränderung eines Körpers gegen einen bestimmten anderen, den man sich in Ruhe denkt, nicht aber gegen einen im absoluten Raum festen Punkt. Die relative Bewegung erhalten wir daher, wenn wir der wahren Bewegung die Bewegung des Vergleichskörpers negativ hinzufügen, wodurch dieser in Ruhe kommt. — In Wahrheit beobachten wir immer nur relative Bewegungen, da ein uns als ruhend erscheinender Punkt noch an der Bewegung der Erde teilnimmt.

3. Ist die gestossene Masse sehr klein gegen die stossende, so können wir $m = 0$ setzen; dann wird (1) $v = U$, also (2): $U^1 = U$, $u^1 = 2U - u$; ist in diesem Falle endlich noch $u = 0$, so erhalten wir $U^1 = U$, $u^1 = 2U$.

Es sei mit Rücksicht auf spätere Anwendungen ganz besonders auf den Unterschied zwischen den Fällen 2. und 3. hingewiesen: stösst die kleinere Masse gegen die grössere, so kehrt sich die Bewegungsrichtung der stossenden Masse um; stösst dagegen die grössere Masse gegen die kleinere, so behält die stossende Masse ihre Bewegungsrichtung bei.

Bisher haben wir angenommen, die Kugeln bewegten sich in derselben Linie, welche sich durch ihre Mittelpunkte im Momente der Berührung legen lässt. Der allgemeinere Fall ist der des schiefen Stosses, welcher sich ebenso einfach erledigen lässt: Seien in Fig. 81 m und M die Kugeln im Momente der Berührung, $ca = U$ und $c_1 b = u$ ihre Geschwindigkeiten, welche mit der Centralen die Winkel w und w_1 bilden. Wir zerlegen sie in Komponenten senkrecht und parallel der Centralen; $U_1 = U \sin w$ und $U_2 = U \cos w$, und $u_1 = u \sin w_1$, $u_2 = u \cos w_1$. Die Komponenten U_1 und u_1 wirken beim Stosse nicht mit, sie bewirken nur eine kleine Verschiebung der Abplattungsflächen an einander während des Stosses; sie werden also auch nicht verändert. Die Komponenten U_2 und u_2 dagegen verhalten sich gerade so wie beim centralen Stosse U und u. Ist z. B. $M = m$, so werden die Komponenten der Endgeschwindigkeit:

$$U_1{}^1 = U \sin w \qquad u_1{}^1 = u \sin w_1$$
$$U_2{}^1 = u_2 = u \cos w_1 \qquad u_2{}^1 = U_2 = U \cos w.$$

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten u und U etwa gleich, so tritt beim schiefen Stoss eine Aenderung derselben ein, denn

$$U_1{}^1 = u \sin w \qquad u_1{}^1 = u \sin w_1$$
$$U_2{}^1 = u \cos w_1 \qquad u_2{}^1 = u \cos w.$$

Ist vor dem Stoss die eine Kugel in Ruhe, $u = 0$, und ist $M = m$, so werden die Endgeschwindigkeiten

$$U_1{}^1 = U \sin w \qquad u_1{}^1 = u_1 = 0$$
$$U_2{}^1 = u_2 = 0 \qquad u_2{}^1 = U_2 = U \cos w.$$

Also die stossende Kugel M bewegt sich nur in der Abplattungsfläche, die gestossene m nur senkrecht dazu; die Kugeln prallen unter rechtem Winkel aus einander.

Ist endlich die gestossene ruhende Kugel sehr gross gegen die stossende (Bande und Kugel), so haben wir

$U_1{}^1 = U \sin w$, $U_2{}^1 = -U \cos w = U \cos(\pi - w)$, $u_1{}^1 = u_2 = 0$,

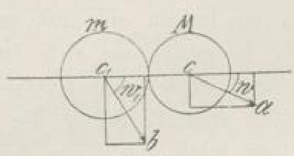

Fig. 81.

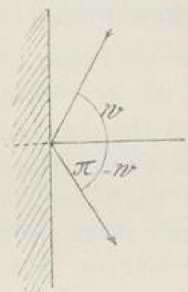

Fig. 82.

d. h. die stossende Kugel springt mit der gleichen Geschwindigkeit zurück, unter demselben Winkel gegen das Lot, unter welchem sie ankam, aber auf der anderen Seite des Lotes (Fig. 82).

§ 92. Lassen wir auf einen Körper eine Kraft wirken, welche ihn deformiert, biegt, drillt oder verlängert, so findet man, dass, nachdem die erste gesetzmässige Deformation schnell eingetreten ist, die Deformation noch in demselben Sinne sehr langsam weiter geht. Hängen wir z. B. an einen Draht ein Gewicht, so finden wir den Draht sofort verlängert; bestimmen wir seine Länge aber nach einer Stunde oder nach einem Tage wieder, so finden wir, dass er sich noch fortdauernd, aber immer langsamer verlängert. Nehmen wir das Gewicht wieder ab, so zieht sich der Draht sofort zusammen, aber eine sehr langsame, sehr kleine Verkürzung dauert noch lange an. Man nennt diese Erscheinung **elastische Nachwirkung**, sie kann manchmal die elastischen Vorgänge sehr komplizieren.

§ 93. Es sind noch einige Thatsachen zu besprechen, welche auf der Wirkung der Molekularkräfte beruhen:

1. Die **Härte**, d. h. der Widerstand der Körper gegen Ritzen, gegen das Herausreissen einzelner Teilchen aus der Oberfläche oder das Eindringen zwischen dieselben. Die Härte ist eine wenig definierbare Eigenschaft, da sie von der Beschaffenheit der Oberfläche, Kohäsion, Elastizität, Geschwindigkeit des ritzenden Körpers

abhängt. Wenn ein Körper einen zweiten ritzt, wird ersterer als der härtere bezeichnet; aber die Geschwindigkeit spielt eine wichtige Rolle: eine Messingscheibe wird auf der Drehbank von Stahl geschnitten; geben wir aber der Messingscheibe sehr grosse Umdrehungsgeschwindigkeit, so schneidet sie in die Stahlwerkzeuge ein.

Man hat trotzdem verschiedene Stufen der Härte unterschieden: Diamant ist der härteste Körper, Talk der weichste.

2. Adhäsion von Körpern an einander. Bringt man zwei möglichst ebene Platten zusammen, so halten sie sich mit einer gewissen Kraft fest, um so fester, je enger sie sich berühren. Diese Kraft rührt nicht nur davon her, dass beim Entfernen die Luft nur langsam zwischen die Platten strömt, daher der äussere Luftdruck sie zusammenpresst, sondern auch von einer Anziehung an den Berührungspunkten. Die Berührung in vielen Punkten wird meist verhindert durch Rauhigkeit der Oberfläche, Politur vermehrt daher die Adhäsion. Weiter sind gewöhnlich die Oberflächen der festen Körper mit einer sehr dünnen Schicht verdichteter Gase überzogen, welche Schicht ebenfalls die Berührung hindert. Es lassen sich aber Glasplatten so eben polieren, dass sie erwärmt (wodurch die Gasschichten verringert werden) an einander gedrückt kaum mehr zu trennen sind.

Die Adhäsion wird viel grösser zwischen festen und flüssigen Oberflächen, weil wegen der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen hier eine Berührung in sehr viel mehr Punkten stattfindet. Darauf beruht alles Löten und Leimen, indem man die geringe Adhäsion zweier fester Oberflächen verwandelt in die grosse Adhäsion zwischen festen und flüssigen Flächen, welche letztere erst nachträglich fest werden.

3. Die Reibung wird die Kraft genannt, welche die Bewegung eines Körpers auf einem anderen zu hindern sucht, wenn keine anderen Kräfte dieser Bewegung widerstehen. Auch diese Kraft hängt von verschiedenen nicht kontrollierbaren Umständen ab, namentlich von der Rauhigkeit der Flächen, der Geschwindigkeit der Bewegung u. s. w. Man unterscheidet wälzende Reibung und gleitende Reibung. Erstere ist vorhanden, wenn ein Körper über den anderen fortrollt, wobei immer neue Punkte zur Berührung kommen; sie ist viel kleiner als die gleitende Reibung, weshalb man zum Transport schwerer Massen erstere herzustellen sucht durch Unterlegen von Walzen, Benutzung von Wagen u. s. w.

Gleitende Reibung ist vorhanden, wenn ein Körper auf dem anderen so bewegt wird, dass stets dieselbe Fläche des ersteren den zweiten berührt. Es hat sich gezeigt, dass für harte Körper diese Reibung ungefähr 1. proportional dem Gewicht, 2. unabhängig von der Grösse der Fläche, 3. unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Sie wird verringert durch Schmiermittel, was auf der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen beruht.

§ 94. Eine der wichtigsten Folgen der Kohäsionskräfte ist die Krystallisation. Die kleinsten Teilchen der Körper, die Molekeln, werden ihre Anziehungskräfte am reinsten zur Geltung bringen können, wenn sie noch beweglich sind, d. h. wenn der feste Körper sich bildet, indem Flüssigkeit erstarrt oder das Lösungsmittel verdampft. Während dabei einzelne Körper das Bestreben zeigen, regellos geformte Massen zu bilden, entstehen bei anderen gesetzmässig eben begrenzte Krystalle; erstere zeigen im Innern keine Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen, keine Struktur, sie heissen amorph; letztere verhalten sich nach verschiedenen Richtungen verschieden, sie werden krystallinisch genannt. Wir können uns über das verschiedene Verhalten folgende Vorstellung machen: Ein Molekel kann nach allen Richtungen die gleiche Anziehungskraft ausüben (wie z. B. die Massenanziehung einer homogenen Kugel beschaffen ist), oder die Anziehungskräfte können nach verschiedenen Richtungen verschieden sein (wie z. B. bei einem Ellipsoid). Je nachdem werden sich die Molekeln in durchweg gleichem Abstand lagern oder in verschiedenen Abständen, etwa so, dass in der Richtung der grössten Kraft die Molekelschichten des Körpers am dichtesten folgen, in der Richtung der kleinsten Kraft am weitesten entfernt sind. Je nach der Grösse der Kräfte und nach dem Winkel zwischen dem Maximum und Minimum werden sich gesetzmässig gelagerte Schichten bilden, durch deren Lage denn auch die äussere Form des Krystalls bedingt ist.

Diese verschiedene Struktur nach verschiedenen Richtungen macht sich nicht nur in der äusseren Form geltend, sondern noch in vielen anderen Hinsichten; es sei folgendes erwähnt: 1. die Elastizität der Krystalle, ihr Widerstand gegen Biegung oder Verlängerung ist nach verschiedenen Richtungen verschieden; 2. die Härte ist verschieden; 3. die Spaltbarkeit ist verschieden; es ist leicht ersichtlich, dass die Schichten, zwischen denen die Anziehungskraft kleiner, sich leichter trennen lassen als andere; 4. die Wärme und Elektrizität wird verschieden gut geleitet nach verschiedenen Richtungen; 5. die Richtungen verhalten sich gegen Lichtstrahlen verschieden.

Betrachtet man die Krystalle, indem man die gegenseitige Lage der Flächen ins Auge fasst, so findet man gewisse Hauptrichtungen, in Bezug auf welche die sich gegenüberliegenden Flächen symmetrisch sind. Solche Richtungen nennt man krystallographische Axen. Je nach der Zahl der Axen, ihrer Länge und den Winkeln zwischen ihnen unterscheidet man sechs verschiedene Axensysteme, nämlich:

1. Das reguläre System mit drei zu einander rechtwinkeligen Axen von gleicher Länge; die einfachste Krystallform dieses Systems ist das reguläre Oktaeder.

2. Das quadratische oder zwei- und einaxige System, mit drei rechtwinkeligen Axen, von welchen zwei gleiche Länge haben. Die Grundform ist das Quadratoktaeder.

3. Das hexagonale oder drei- und einaxige System; es hat drei gleiche Axen in einer Ebene, welche Winkel von 60° bilden, und eine vierte auf jenen senkrechte Axe. Grundform ist die reguläre sechsseitige Doppelpyramide.

4. Das rhombische oder ein- und einaxige System mit drei rechtwinkeligen Axen, alle von verschiedener Länge.

5. Das monoklinische oder zwei- und eingliederige System, bei welchem zwei Axen nicht senkrecht zu einander, die dritte aber senkrecht auf ihrer Ebene ist.

6. Das triklinische oder ein- und eingliedrige System, bei welchem alle drei Axen ungleich lang sind und nicht senkrecht zu einander stehen.

Häufig wachsen einzelne Flächen bei der Entstehung des Krystalls stärker als ihre Nachbarn, so dass sie diese verdecken. Man nennt dies Hemiëdrie. So entsteht durch Ueberwuchern von vier Seiten aus dem Oktaeder das Tetraeder.

In der Regel krystallisiert jede chemische Verbindung in einer bestimmten Form, mitunter aber in mehreren, was man Dimorphismus nennt.

Aehnlich zusammengesetzte Molekeln krystallisieren häufig in derselben Form: Isomorphismus.

§ 95. Damit Krystalle sich rein ausbilden können, ist Langsamkeit des Prozesses und Ruhe erforderlich. Die Ausscheidung wird erleichtert durch Ansatzpunkte, welche durch irgend welche feste Körper, z. B. die Wände des Gefässes, am besten aber durch einen Krystall derselben Art gebildet werden. Manchmal kann bei völliger Ruhe ohne passende Ansatzpunkte die Krystallbildung ganz verhindert werden: von essigsaurem oder schwefligsaurem Natron lässt sich z. B. eine heiss gesättigte Lösung abkühlen, ohne dass sie auskrystallisiert; wird sie dann aber erschüttert oder ein kleiner Krystall hineingeworfen, so verwandelt sich in wenigen Sekunden die ganze Flüssigkeit in einen Haufen von Krystallen. Eine solche Lösung nennt man übersättigt. Ebenso lässt sich Wasser im Vakuum bis weit unter 0^0 abkühlen, ohne zu erstarren, eine Erschütterung bringt es aber sofort zum Gefrieren; man spricht von überkältetem Wasser.

C. Gasförmige Körper.

§ 96. Gase haben mit den Flüssigkeiten die Eigenschaft gemein, dass sie einen geringen Widerstand gegen Formänderung haben; sie unterscheiden sich von jenen dadurch, dass sie auch einen kleinen Widerstand gegen Volumänderung haben. Man nennt sie daher auch wohl kompressible oder expansible Flüssigkeiten.

Die Gase sind der Schwere unterworfen. Das lässt sich leicht mit Hülfe der Wage nachweisen. Nehmen wir einen Ballon mit Hahn, aus welchem wir mit Hülfe der später (§ 107) zu beschreibenden Luftpumpen das Gas entfernen können, wiegen wir den Ballon mit irgend einem Gase gefüllt und ausgepumpt, so gibt die Gewichtsdifferenz das Gewicht des Gases. Bestimmen wir auch noch das Volumen des Ballons, indem wir ihn mit Wasser gefüllt wiegen, so können wir das Gewicht von 1 *cbcm* des Gases, d. h. sein spezifisches Gewicht finden.

Die atmosphärische Luft ist kein einfaches Gas, sondern ein Gasgemisch; sie besteht aus 78 bis 78,5 Teilen Stickstoff, 20,5 bis 21 Teilen Sauerstoff, etwa 1 Teil Argon, daneben noch Spuren von Kohlensäure, Wasserdampf und anderen Verunreinigungen. Gewöhnlich wird die Dichte der Gase nicht auf Wasser bezogen, sondern auf Luft, d. h. es wird das Verhältnis zwischen dem spezifischen Gewicht des Gases und der Luft gegeben.

Das spezifische Gewicht einiger Gase bei 0^0 und unter dem