

Abschnitt I.

Mechanik.

§ 12. Wenn wir möglichst leicht bewegliche Körper haben, — z. B. eine Kugel auf horizontaler polierter Platte, oder zwei gleiche Gewichte, die an einem Faden über eine leicht laufende Rolle gehängt sind —, so zeigen sie kein Bestreben, in Bewegung zu geraten, geben wir ihnen aber eine solche, so suchen sie dieselbe unverändert beizubehalten, und zwar sowohl der Grösse als der Richtung nach. Man bezeichnet diese Eigenschaft als Trägheit.

Der erste Grundsatz, den Newton in seiner Mechanik¹⁾ aufstellte, lautet:

Alle Körper besitzen Trägheit, d. h. sie haben das Bestreben, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung unverändert beizubehalten, solange keine Kräfte auf sie wirken.

Wenn in obigem Beispiel die Kugel oder die Gewichte, nachdem wir ihnen eine Bewegung erteilt haben, doch von selbst zur Ruhe kommen, so beruht das darauf, dass hier Kräfte, wenn auch sehr geringe, wirken; es ist das die Reibung an der Luft und der Unterlage oder die Axenreibung und Steifigkeit des Fadens. Je mehr wir diese widerstehenden Kräfte beseitigen können, desto vollständiger bewährt sich der Satz von der Trägheit.

§ 13. Wenn ein Körper sich bewegt, so sprechen wir von der Geschwindigkeit der Bewegung; wir verstehen darunter den Quotienten aus der in einer Zeit t durchlaufenden Strecke s , durch die Zeit t : $v = \frac{s}{t}$.

¹⁾ Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London 1686.

Die Geschwindigkeit kann entweder so beschaffen sein, dass der Körper in gleichen Zeiten immer gleiche Strecken durchläuft: dann heisst die Geschwindigkeit konstant oder gleichförmig. In diesem Fall kann in obiger Definitionsgleichung t beliebig gross sein, denn dann ist, wenn wir die in der Zeiteinheit durchlaufene

$$\text{Strecke } S \text{ nennen: } v = \frac{S}{1} = \frac{2S}{2} = \frac{3S}{3} = \dots S.$$

Wir können in diesem wichtigsten Falle Geschwindigkeit auch definieren als die in der Zeiteinheit durchlaufene Strecke.

Wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist, so heisst sie ungleichförmig oder beschleunigt (auch wenn sie langsamer wird); in diesem Falle würde der Quotient $\frac{s}{t}$ verschiedene Werte ergeben, je nachdem wir z. B. $t = 0,1 \text{ sec}$, 1 sec , 2 sec machen. Trotzdem muss in jedem Moment eine bestimmte Geschwindigkeit v existieren; wir erhalten sie, wenn wir in der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ eine so kurze Zeit t nehmen, dass innerhalb derselben die Geschwindigkeit als konstant betrachtet werden kann. Die Geschwindigkeit ist dann also gleich der in sehr kurzer Zeit durchlaufenen Strecke dividiert durch die dazu nötige Zeit.

Haben wir zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_0 , zur Zeit t_1 die v_1 , so heisst $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = a$ die Beschleunigung der Geschwindigkeit. Dieselbe ist also gleich der Geschwindigkeitsänderung dividiert durch die Zeit, in welcher diese stattgefunden hat. Auch die Beschleunigung kann konstant oder gleichförmig sein, d. h. die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten, z. B. Zeiteinheiten, sich um denselben Betrag ändern: dann kann man die Beschleunigung definieren als die Geschwindigkeitsänderung in der Zeiteinheit; oder die Beschleunigung kann ungleichförmig sein, dann ist die Beschleunigung gleich der Geschwindigkeitsänderung in sehr kurzer Zeit dividiert durch diese Zeit.

Nach dem Satz von der Trägheit (§ 12) kann eine Beschleunigung nur bei Einwirkung von Kräften vorhanden sein.

§ 14. Wir haben damit zwei neue Begriffe, Geschwindigkeit und Beschleunigung, eingeführt, und es sind diese Grössen oft zu messen; wir werden noch zahlreiche andere derartige Grössen, die zu messen sind, kennen lernen. Wir könnten für jede derselben

eine besondere Einheit beliebig festsetzen. Da aber schliesslich jede Erscheinung auf Bewegung von Masse beruhen soll, muss es auch möglich sein, sie durch die absoluten Einheiten von Länge, Masse, Zeit zu messen. Im Gegensatz zu den absoluten Einheiten bezeichnet man die übrigen als zusammengesetzte oder abgeleitete Einheiten. Dieselben lassen sich stets auf die absoluten Einheiten zurückführen. So haben wir nach der Definitionsgleichung für eine Geschwindigkeit (§ 13) $v = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$.

Bezeichnen wir allgemein eine Länge durch [L], eine Masse durch [M], eine Zeit durch [T], so ist also: $[v] = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$.

Diese Grösse nennt man die Dimension einer Geschwindigkeit; die Dimension einer abgeleiteten Grösse gibt also an, wie dieselbe sich aus den absoluten Einheiten zusammensetzt.

Für die Beschleunigung hatten wir: $a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$.

Die Differenz zweier Geschwindigkeiten ist aber wieder eine Geschwindigkeit und die Differenz zweier Zeiten eine Zeit, daher ist: $a = \frac{v}{t}$. Die Dimension der Beschleunigung ist also:

$$[a] = \frac{[v]}{[T]} = \frac{[L T^{-1}]}{[T]} = [L T^{-2}].$$

Es empfiehlt sich — und wird immer allgemeiner —, bei jeder abgeleiteten Einheit die Dimension oder die absoluten Einheiten, nach denen die Messung erfolgt ist, zur Zahlenangabe hinzuzufügen, also nicht zu schreiben z. B.: eine Geschwindigkeit ist $v = 10$, eine Beschleunigung $a = 60$, sondern: $v = 10 \frac{cm}{sec}$, $a = 60 \frac{cm}{sec^2}$. Es ist dann jeder Irrtum ausgeschlossen, und eine Umrechnung von einem System der Einheiten zu einem anderen sehr leicht. In der Technik gebraucht man sehr viel das Kilogramm, Meter, Minute als Einheiten. Fragen wir, wie gross wären obige Geschwindigkeit und Beschleunigung in technischen Einheiten, so ist die Umrechnung leicht gemacht:

$$v = 10 \frac{cm}{sec} = 10 \frac{\frac{1}{100} m}{\frac{1}{60} min} = 6 \frac{m}{min}$$

$$a = 60 \frac{cm}{sec^2} = 60 \frac{\frac{1}{100} m}{\left(\frac{1}{60} min\right)^2} = 60 \frac{3600 m}{100 min^2} = 2160 \frac{m}{min^2}.$$

Die Kenntnis der Dimension einer abgeleiteten Grösse gewährt noch den weiteren Vorteil, dass man für eine abgeleitete Grösse sofort die Einheit nach dem absoluten Maßsystem erhält, indem man für L, M, T: 1 cm, 1 g, 1 sec einsetzt. So ist, da $v = [LT^{-1}]$, die Einheit der Geschwindigkeit die, bei welcher 1 cm in 1 sec durchlaufen wird; da $a = \frac{[v]}{[T]}$, so ist die Einheit der Beschleunigung vorhanden, wenn in 1 sec die Geschwindigkeit um 1 cm wächst.

Wir wollen daher stets bei allen abgeleiteten Grössen die Dimension angeben¹⁾.

§ 15. Eins der wichtigsten Beispiele dieser beschleunigten Bewegung bieten die fallenden Körper dar; auf dieselben wirkt, wie wir sehen werden, fortdauernd eine Kraft, welche wir Schwere nennen, wodurch sie beim Fall gleichförmig beschleunigt werden. Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wird aber dadurch schnell so gross, dass es nicht möglich ist, genauere Messungen vorzunehmen. Man hat daher sog. Fallmaschinen konstruiert, bei welchen diese Schwierigkeit durch einen Kunstgriff beseitigt ist. Fig. 4 stellt eine Atwoodsche Fallmaschine neuerer Konstruktion dar: Eine Säule steht auf drei Füßen mit Stellschrauben, so dass sie vertikal gestellt werden kann. Sie trägt oben ein möglichst leichtes und leicht bewegliches Rädchen r, über welches ein möglichst dünner Faden gelegt ist, an dessen Enden zwei gleiche Gewichte q befestigt sind, welche daher in jeder beliebigen Stellung im Gleichgewicht sind. Auf das eine Gewicht q können aber kleine Gewichte von der Form p (Fig. 5) aufgelegt werden, wodurch die eine Seite schwerer wird und die Gewichte in Bewegung kommen. Das belastete Gewicht fällt dabei an einem mit Centimeterteilung versehenen Stab entlang; auf ihm lassen sich in beliebiger Höhe ein Ring a (vgl. Fig. 5, welche den obersten Teil der beiden Säulen etwas von oben gesehen in grösserem Maßstabe zeigt) und

¹⁾ Von der Litteratur über zusammengesetzte Einheiten und Dimensionen seien genannt: Herwig, *Physikalische Begriffe und absolute Maße*, Leipzig 1880. Czöglér, *Dimensionen und absolute Maße*, Leipzig 1889.

eine Platte *b* festklemmen. Durch den Ring fällt das Gewicht *q* frei hindurch, während das treibende Uebergewicht *p* wegen seiner hervorragenden Arme vom Ringe aufgefangen, also von *q* abgehoben

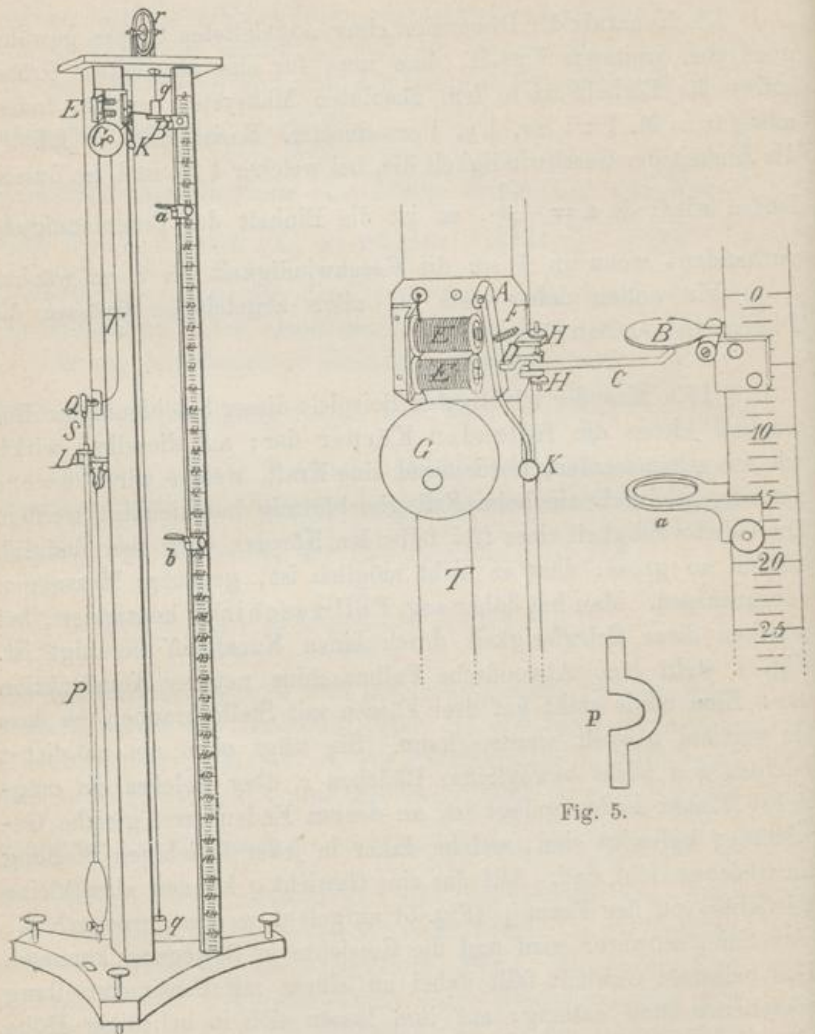


Fig. 4.

Fig. 5.

wird, welches sich nun nur infolge von Trägheit mit der erlangten Geschwindigkeit weiter bewegt. An der Säule ist noch ein Sekundenpendel *P* befestigt, welches zur Messung der Zeit dient, aber auch den Fall bei Beginn einer Sekunde einleitet. Dazu berührt die

Spitze S des Pendels bei jeder Schwingung einen federnden Stift Q. Es ist nun der Strom von ein oder zwei galvanischen Elementen durch das Pendellager L zum Pendel geführt; berührt S gerade Q, so geht der Strom von hier durch den Draht T zu einem Elektromagnet E, dann zurück zum Element. Dieser Strom wird also jede Sekunde einmal geschlossen und verwandelt für den Moment E in einen Magnet (§ 307). E gegenüber steht der drehbare Eisenanker A, der angezogen wird; an seiner Spitze ist ein Klöppel K, der gegen die Glocke G schlägt, also die Sekunden leicht zählen lässt. Das Gewicht q, mit p belastet, ruht auf einer Platte B (siehe Fig. 5), die durch ihr eigenes Gewicht herunterklappen würde, aber dadurch in die Höhe gehalten wird, dass ein Stab C unter sie geschoben wird, welcher zwischen den Spitzen H in horizontaler Ebene drehbar ist. An dem Anker A sitzt ein Haken D, welcher diesen Stab C in dem Moment, wo der Strom geschlossen wird und die Glocke ertönt, zurückzieht, so dass die Platte B herunterklappt und gleichzeitig der Fall beginnt. Durch diese Vorrichtung ist bewirkt, dass bei einem Glockenschlage der Fall beginnt, wir seine Dauer daher leicht nach Sekunden messen können.

Hierbei ist nun die Fallbewegung nur eine langsame: es wirkt nur die Schwere des Uebergewichts, welches wir p nennen wollen, während dadurch p und 2q in Bewegung gesetzt werden müssen. Sobald das treibende Gewicht p durch den Ring a abgehoben ist, wirkt überhaupt keine Kraft, sondern die Gewichte q bewegen sich nur infolge der Trägheit mit der zuletzt erreichten Geschwindigkeit konstant weiter.

Wir wollen uns nun eine bestimmte Maschine denken und an derselben Versuche machen, um die Fallgesetze abzuleiten.

Wir klemmen den Ring a bei Teilstrich 5 fest, die Platte b bei 15; dann finden wir: beim Sekundenschlag 0 beginnt der Fall, beim Schlag 1 wird das Gewicht p abgehoben, beim Schlag 2 schlägt q auf die Platte. Unter Einfluss des treibenden Gewichtes p ist also in 1 sec die Strecke $w = 5 \text{ cm}$ durchfallen; nach Abheben von p sind in der folgenden Sekunde 10 cm durchfallen. Dass nach Abheben von p konstante Geschwindigkeit vorhanden, erkennt man, indem man bei den folgenden Versuchen b auf 25, 35, 45 u. s. w. festklemmt, dann wird es beim 3., 4., 5. u. s. w. Sekundenschlag erreicht.

Wir lassen nun das treibende Gewicht 2 sec wirken: der Körper fällt in dieser Zeit um 20 cm und geht dann, wie wir finden, mit

wicht q
seiner
gehoben



erlangten
Sekunden-
aber auch
erührt die

der Geschwindigkeit 20 weiter. Fahren wir so mit Versuchen fort, so können wir die Resultate in folgender Tabelle zusammenstellen:

t	1	2	3	4	5 sec
w	5	20	45	80	125 cm
v	10	20	30	40	$50 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

Hier bedeutet t die Zahl der Sekunden, während deren das treibende Gewicht p gewirkt hat, w die in dieser Zeit durchfallene Strecke, v die dabei erlangte Geschwindigkeit. Diese Tabelle können wir auch so schreiben:

t	1	2	3	4	5
w	5×1^2	5×2^2	5×3^2	5×4^2	5×5^2
v	10×1	10×2	10×3	10×4	10×5

Daraus ergeben sich ohne weiteres die Gleichungen: $w = \beta t^2$, $v = \alpha t$, $\alpha = 2\beta$; d. h.: die Fallstrecke wächst proportional dem Quadrat der Zeit, während welcher p wirkt, die erlangte Geschwindigkeit aber proportional der Zeit.

Nun wiederholen wir dieselben Versuche mit dem treibenden Gewicht $2p$; wir finden:

t	1	2	3	4	5
v	$2 \times 5 \times 1^2$	$2 \times 5 \times 2^2$	$2 \times 5 \times 3^2$	$2 \times 5 \times 4^2$	$2 \times 5 \times 5^2$
w	$2 \times 10 \times 1$	$2 \times 10 \times 2$	$2 \times 10 \times 3$	$2 \times 10 \times 4$	$2 \times 10 \times 5$

also $w = \beta' t^2$, $v = \alpha' t$, $\alpha' = 2\beta'$; $\alpha' = 2\alpha$, $\beta' = 2\beta$.

Ebenso finden wir für $p = 3, 4, 5$ u. s. w.: $w = 3\beta t^2$, $w = 4\beta t^2$, $w = 5\beta t^2$ u. s. w., d. h. die Faktoren α' und β' sind proportional der treibenden Masse: $\alpha' = p\gamma$. Andererseits können

wir die getriebene Masse, welche $2q + p$ ist, verdoppeln, verdreifachen u. s. w., dann finden wir, dass der Faktor α oder γ der getriebenen Masse umgekehrt proportional ist; nennen wir sie M , so können wir also schreiben: $\gamma = \frac{g}{M}$, wo g eine Konstante ist, oder $\alpha = \frac{p}{M} g$, also schliesslich: $w = \frac{1}{2} \frac{p}{M} g t^2$, $v = \frac{p}{M} g t$.

Diese Gleichungen gelten nun ganz allgemein für jede Fallmaschine, wenn wir für p und M die mit der Wage ermittelten Massen einsetzen.

§ 16. Der gewöhnlich vorkommende freie Fall unterscheidet sich von dem an der Fallmaschine dadurch, dass die treibende Masse dabei identisch ist mit der getriebenen, also $p = M$; setzen wir das in unsere Formeln, so werden sie: $w = \frac{1}{2} g t^2$, $v = g t$.

Daraus folgt noch durch Elimination von t : $v = \sqrt{2g w}$.

Die Konstante g hat eine sehr wichtige Bedeutung, welche sich aus der zweiten Gleichung ergibt; wir haben für $t = 0$: $v = 0$; für $t = 1$: $v = g$; für $t = 2$: $v = 2g$ u. s. w.; d. h. beim freien Fall wächst die Geschwindigkeit pro Sekunde um g ; der fallende Körper hat eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, und die Grösse der Beschleunigung ist g . Sie wird hervorgebracht durch die Kraft der Schwere, d. h. die Anziehung der Erde, und daher heisst g die Konstante der Erdacceleration. Wir können mit der Fallmaschine g bestimmen, indem wir die Massen p und M durch die Wage bestimmen, und sie, sowie zusammengehörende Werte von w und t in die Gleichung einsetzen. Aber diese Methode ist sehr ungenau; eine genauere werden wir später (§ 57) kennen lernen, nach der sich ergibt, dass im Meeressniveau

$$g = (978,009 + 5 \sin^2 \varphi) \frac{cm}{sec^2}$$

ist, wo φ die geographische Breite bedeutet (vgl. § 29 und § 35).

§ 17. In den Gleichungen für den freien Fall kommt nichts mehr vor, was von der fallenden Masse abhinge. Daraus folgt, dass alle Körper gleich schnell fallen, ob sie gross oder klein, schwer oder leicht seien. Dem scheint die Erfahrung zu widersprechen, nach welcher ein Blatt Papier langsamer fällt als ein

Stück Metall; der Grund dieses Widerspruchs ist der, dass die Körper in Luft fallen, wobei Reibung entsteht, welche Körper von grosser Oberfläche und geringer Masse stark verzögert. Im luftleeren Raum fallen wirklich eine Feder und ein Bleistück gleich schnell.

Die Gleichung $v = \sqrt{2gw}$ zeigt, dass die Endgeschwindigkeit nur von der Fallhöhe w abhängt; sie ist also die gleiche, ob der Körper vertikal herabfällt, oder auf einer schiefen Ebene herabrutscht, oder auf irgend einem beliebigen Wege nach unten gelangt, sobald die vertikale Verschiebung die gleiche ist.

§ 18. Beim Fall, sei es an der Maschine, sei es beim freien Fall, wird die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um dieselbe Grösse beschleunigt, einerlei, ob der Körper schon eine Geschwindigkeit hat oder nicht; weiter ist die Beschleunigung proportional der treibenden Masse; jedes neu hinzukommende Gewicht p bringt wieder dieselbe Beschleunigung hervor. Das Produkt aus Masse und Beschleunigung ist also in unseren Versuchen das Konstante, es ist der reine Ausdruck der in diesem Falle wirkenden Kraft.

Der zweite Satz der Newtonschen Mechanik sagt, dass jede Kraft gemessen wird durch dies Produkt von Masse mal Beschleunigung.

Die Dimension der Kraft ist nach dieser Definition: $K = [M \cdot a] = [MLT^{-2}]$, und die Einheit der Kraft diejenige, welche der Masse 1 die Beschleunigung 1 erteilt, d. h. die, welche dem Gramm die Beschleunigung 1 cm in der Sekunde gibt. Diese Krafteinheit wird *Dyne* genannt.

Die Schwere der Masseneinheit ist danach gleich $1 \cdot g = 981$ Dynen, da sie dem Gramm in unserer Breite und im Meeresniveau eine Beschleunigung von $981 \frac{cm}{sec^2}$ erteilt.

Im gewöhnlichen Leben und namentlich in der Technik ist indessen eine andere Einheit der Kraft üblich, wie schon bemerkt (§ 6). Man nimmt als Grundeinheiten nicht Masse, Länge, Zeit, wie in der Physik, sondern Kraft, Länge, Zeit. Als Einheit der Kraft wird das Gewicht von 1 kg , als Einheit der Länge das Meter, als Einheit der Zeit die Sekunde oder Minute benutzt. Aus dieser Einheit der Kraft folgt dann auch eine Einheit der Masse so: da wir $mg = 1$ setzen, so ist $m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9,81}$, wenn wir g in Metern

rechnen, d. h. die Masse von 1 *kg* ist $\frac{1}{9,81}$ der Einheit, die Masseneinheit dieses sog. terrestrischen Maßsystems bilden 9,81 *kg*.

Wenn wir das Kilogramm im Sinne eines Gewichtes benutzen, wollen wir es als „Kilogrammgewicht“ bezeichnen.

Für die Technik ist dies System sehr bequem, weil sich dann alle Kräfte durch Gewichte messen lassen. Für die Physik ist es aber unbrauchbar, weil es von einer Einheit, der Schwere des Kilogramms, ausgeht, die nicht konstant ist, weil *g* variabel ist. Dieser Umstand kommt für die Technik nicht in Betracht, weil die Veränderlichkeit unbedeutend ist, nur 0,003 beträgt, was für alle technischen Messungen vernachlässigt werden kann, nicht aber für die physikalischen Messungen.

§ 19. Wir hatten (§ 15) die Gleichungen:

$$v = \frac{p}{M} g t, \quad w = \frac{1}{2} \frac{p}{M} g t^2.$$

Berechnen wir *t* aus der ersten Gleichung: $t = \frac{M v}{p g}$, setzen dies in die zweite ein, so folgt:

$$w = \frac{1}{2} \frac{p g}{M} \frac{v^2 M^2}{p^2 g^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} M v^2 = p g w.$$

Die beiden Größen, deren Gleichheit wir hier gefunden haben, besitzen eine wichtige Bedeutung: links steht das halbe Produkt aus bewegter Masse und Geschwindigkeitsquadrat; dies ist von Leibnitz lebendige Kraft genannt worden, in neuerer Zeit kinetische oder aktuelle Energie. Rechts steht das Produkt aus *p g*, der wirkenden Kraft, und *w*, der Strecke, durch welche die Kraft den Körper bewegt hat. Dies Produkt: Kraft mal Verschiebung in Richtung der Kraft heisst Arbeit. Unsere Gleichung sagt also aus, dass in jedem Moment des Falles die von der Kraft geleistete Arbeit gleich der gewonnenen lebendigen Kraft ist. Dies ist ein Spezialfall des wichtigen Gesetzes von der Erhaltung der Kraft oder der Arbeit, auf welches wir später ausführlich zurückkommen werden.

§ 20. Von der Fallbewegung können wir leicht zur Wurfbewegung übergehen. Wie wir gesehen haben, ist es das Kennzeichen einer Kraft, dass sie ganz unabhängig von den zufälligen

Umständen gesetzmässig wirkt, d. h. einer Masse ihre bestimmte Beschleunigung erteilt, ob dieselbe schon Geschwindigkeit besitzt oder nicht. Wenn wir daher einem Körper senkrecht aufwärts eine Geschwindigkeit durch Wurf erteilen, so wirkt die Schwere doch in unveränderter Weise. Nennen wir die Geschwindigkeit, die wir einem Körper durch Wurf erteilen, U , und rechnen sie aufwärts positiv, so gelten für die Bewegung, da die Geschwindigkeit konstant ist, die Gleichungen: $v = U$, $w = U t$, wenn die Schwere nicht wirkte. Dieselbe zieht indessen abwärts, wir müssen sie also negativ hinzufügen, und haben daher:

$$v = U - g t, w = U t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Mit wachsendem t wird daher v kleiner, endlich 0; dann ist $0 = U - g t$; $t = \frac{U}{g}$ gibt also die Zeit, während deren der Körper steigt, dann beginnt er zu fallen, da die Schwere fortdauernd wirkt. Nennen wir die grösste Höhe, die er erreicht, H , so ist sie durch die zweite Gleichung für dies $t = \frac{U}{g}$ gegeben, also:

$$w = H = U \frac{U}{g} - \frac{1}{2} g \frac{U^2}{g^2}, H = \frac{1}{2} \frac{U^2}{g}.$$

Wir können noch fragen, welche Zeit der Körper zum Fallen braucht, und mit welcher Geschwindigkeit er unten ankommt. Die Fallzeit ist die der Fallhöhe $H = \frac{1}{2} \frac{U^2}{g}$ nach dem Fallgesetze $w = \frac{1}{2} g t^2$ entsprechende, also $\frac{1}{2} \frac{U^2}{g} = \frac{1}{2} g t^2$, $t = \frac{U}{g}$; dann ergibt sich die erlangte Geschwindigkeit nach der Gleichung $v = g t$ als $v = g \frac{U}{g} = U$. Unser Körper braucht also zum Fallen dieselbe Zeit, wie zum Steigen und kommt mit der Wurfgeschwindigkeit wieder unten an; seine Bewegung ist symmetrisch zum höchsten Punkte.

§ 21. Ganz ebenso, wie beim vertikalen Wurf die Wirkung der Schwere von der gleichzeitig erteilten vertikalen Geschwindigkeit unabhängig ist, wirkt sie auch in unveränderter Weise, wenn wir dem Körper horizontale Geschwindigkeit geben, beim horizontalen Wurf. Erteilen wir einem Körper die konstante horizontale

Geschwindigkeit c , nennen die horizontale Verschiebung x , so besteht die Gleichung $x = ct$. Nennen wir die gleichzeitig infolge der Schwerkraft stattfindende vertikale Verschiebung y , so gilt dafür $y = \frac{1}{2} g t^2$. Die wahre Bewegung des Körpers, seine Bahn, ist also durch die beiden Gleichungen gegeben $x = ct$, $y = \frac{1}{2} g t^2$.

Setzen wir aus der ersten $t = \frac{x}{c}$ in die zweite, so folgt: $y = \frac{1}{2} \frac{g}{c^2} x^2$, die Gleichung einer Parabel bezogen auf den Scheitel (Fig. 6). Auch bei schrägem Wurf ergibt sich als Bahn eine Parabel. Bevor wir aber dies nachweisen können, müssen wir die Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten besprechen.

§ 22. Als Kennzeichen einer Kraft haben wir schon mehrfach erwähnt, dass sie ganz unabhängig von allen sonstigen Umständen wirkt. Ihre Wirkung wird daher auch durch eine zweite

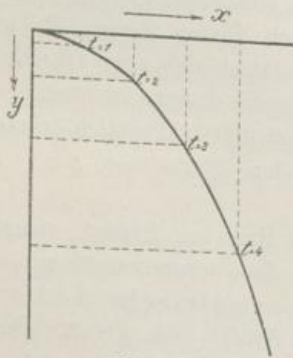


Fig. 6.

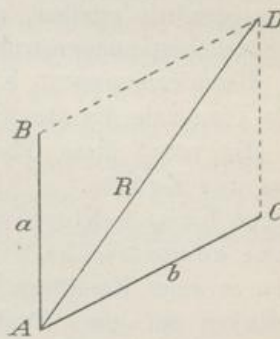


Fig. 7.

gleichzeitig vorhandene Kraft nicht verändert werden können; beide werden vielmehr ganz unabhängig von einander ihre Geschwindigkeit oder Beschleunigung hervorbringen.

Werden nun einem Massenpunkte die Geschwindigkeiten a und b erteilt, welche wir der Grösse und Richtung nach durch die Linien AB und AC darstellen (Fig. 7), so muss daher der Punkt an einen Ort gelangen, den wir finden, wenn wir uns denken, die Geschwindigkeiten würden ihm nach einander erteilt: a würde ihn

nach B führen, b von B nach D, wenn BD gleich und parallel AC ist. Der erreichte Ort ist also D, die Ecke des Parallelogramms, welches aus a und b konstruiert werden kann. Durch diese Parallelogrammkonstruktion lässt sich also der schliesslich erreichte Punkt als Endpunkt der Diagonale ermitteln. Es ist aber leicht einzusehen, dass die Diagonale auch den Weg des Punktes darstellt; denn führen wir die gleiche Konstruktion für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. . . *sec* aus, so finden wir immer einen Punkt derselben Diagonale als Endpunkt der Bahn. Unter dem gleichzeitigen Einfluss der Geschwindigkeiten a und b bewegt sich also der Punkt längs der Diagonale R mit einer Geschwindigkeit, welche durch R der Grösse und Richtung nach dargestellt ist. R kann also an Stelle von a und b treten oder umgekehrt. Man nennt R die resultierende Geschwindigkeit oder die Resultante, a und b die Komponenten. Auch Beschleunigungen können wir durch Linien von gegebener Länge und Richtung darstellen, da sie gleich Geschwindigkeitsänderungen sind; da endlich Kräfte gleich Masse mal Beschleunigung sind, können auch Kräfte durch die Beschleunigungen, welche sie der Masseneinheit erteilen, also durch Linien dargestellt werden. Obige Parallelogrammkonstruktion gestattet also zwei Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, durch eine zu ersetzen, welche sich als Diagonale des aus jenen konstruierten Parallelogramms ergibt. Man nennt diese Thatsache den Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Eine Linie, welche Grösse und Richtung besitzt, nennt man auch eine geometrische Strecke; die Zusammensetzung solcher Strecken zu einer Resultante heisst geometrische Addition.

Wirken auf einen Punkt zwei Kräfte, die gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, so wird die Resultante einfach die algebraische Summe oder Differenz der Kräfte. Sind im letzten Fall die Kräfte noch gleich gross, so wird die Resultante zu Null, man sagt, die Kräfte halten sich das Gleichgewicht.

Wir können durch geometrische Addition nun auch beliebig viele Kräfte, welche an einem Punkte angreifen, zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, sie addieren; denn haben wir z. B. (Fig. 8) die Kräfte a , b , c , d , so vereinigen wir zuerst a und b zu R_1 , dann R_1 und c zu R_2 , endlich R_2 und d zu R , welches also die Resultante aller vier Kräfte ist.

Dieselbe Konstruktion lässt sich einfacher nach Fig. 9 ausführen: man fügt alle Kräfte ihrer Grösse und Richtung nach an

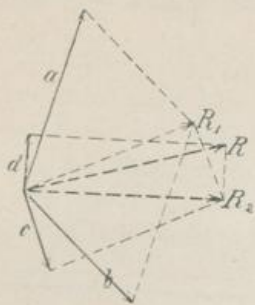


Fig. 8.

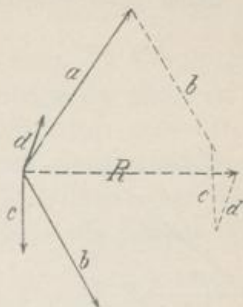


Fig. 9.

einander; dann ist die Verbindungslinie des letzten Endpunktes mit dem Anfangspunkt gleich der Resultante.

Die gleiche Konstruktion gilt auch, wenn die Kräfte nicht in einer Ebene liegen.

§ 23. Wenn wir viele Kräfte, die an einem Punkte angreifen, durch eine ersetzen können, so muss es umgekehrt auch möglich sein, eine Kraft durch zwei oder mehrere andere zu ersetzen, indem wir die Kraft als Resultante auffassen und die Komponenten für sie setzen. Besonders häufig kommt der Fall vor, dass wir die Kraft in zwei oder drei zu einander rechtwinkelige Komponenten zerlegen. Für die Zerlegung in zwei Komponenten ergeben sich, wenn wir die Resultante R , die Komponenten x und y , den Winkel zwischen R und x aber φ nennen, aus Fig. 10 ohne weiteres die Gleichungen:

$$X = R \cos \varphi, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$Y = R \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Für die Zerlegung in drei rechtwinkelige Komponenten ergibt sich ebenso, wenn wir die Komponenten x, y, z nennen und R mit ihnen die Winkel α, β, γ bildet:

$$x = R \cos \alpha,$$

$$y = R \cos \beta, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$z = R \cos \gamma,$$

Während die Aufgabe, aus mehreren Komponenten eine Resultante zu konstruieren, nur eine Lösung zulässt, ist die umge-

kehrte Aufgabe, eine Resultante in Komponenten zu zerlegen, unendlich vieler Lösungen fähig. Es müssen, um sie bestimmt zu machen, daher noch Bedingungen gegeben sein, z. B. bei der Zer-

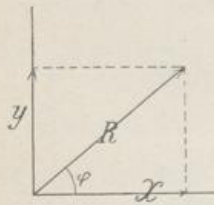


Fig. 10.

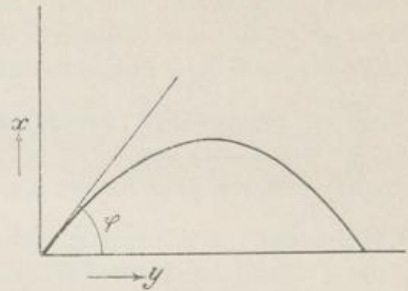


Fig. 11.

legung in der Ebene in zwei Komponenten zwei Bedingungen, z. B. die Grösse der beiden Komponenten, oder ihre Richtungen, oder Grösse und Richtung der einen.

§ 24. Wir können nun ganz allgemein den Wurf behandeln: Es werde einem Körper die Geschwindigkeit a erteilt, welche mit der horizontalen den Winkel φ bildet. Zerlegen wir die Geschwindigkeit in eine horizontale und vertikale Komponente, so sind diese $a \cos \varphi$ und $a \sin \varphi$. Nennen wir die horizontale und vertikale Verschiebung y und x , so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= a \cos \varphi \cdot t \\ x &= a \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Setzen wir den Wert von t aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so folgt als Gleichung für die Bahn:

$$x = y \operatorname{tg} \varphi - y^2 \frac{g}{2a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Dies ist aber wieder die Gleichung einer Parabel (Fig. 11), aus welcher man leicht für bestimmte Werte von a und von φ , dem Elevationswinkel, alle Grössen, z. B. Steighöhe, Wurfweite, Wurfzeit u. s. w. berechnen kann. Die Wurfweite ergibt sich z. B. für $x = 0$ zu $y = \frac{a^2}{g} \sin 2\varphi$, die Steighöhe, wenn wir berücksichtigen, dass dieselbe nur durch die vertikale Komponente $a \sin \varphi$ hervorgebracht wird, nach § 20 zu $h = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2g}$.

Beim wirklichen Wurf entsteht infolge der Reibung des geworfenen Körpers an der Luft eine etwas andere Bahn, welche man ballistische Kurve nennt.

§ 25. Wir haben gesehen, dass, wenn ein Körper eine gewisse Geschwindigkeit hat, er dieselbe infolge der Trägheit unverändert nach Grösse und Richtung beibehalten muss. Dass eine Aenderung der Richtung das Hinzukommen einer neuen Geschwindigkeit oder Beschleunigung, also das Einwirken einer Kraft erfordert, lässt sich leicht erkennen: Es habe ein Körper (Fig. 12)

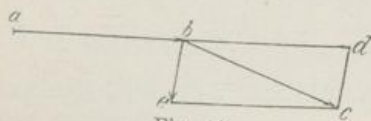


Fig. 12.

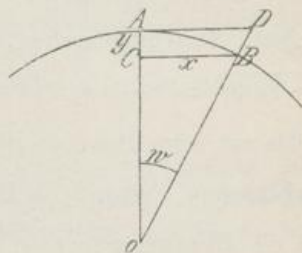


Fig. 13.

die Geschwindigkeit ab ; sie ändere ihre Richtung, so dass sie $bc = ab$ werde; dann können wir bc in zwei Komponenten zerlegen, in $bd = ab$ in Richtung von ab , und in be . Nach dem Gesetz der Trägheit würde der Körper die Geschwindigkeit bd haben; dazu muss durch Einwirkung einer Kraft die Geschwindigkeit be kommen, damit er die Resultante bc habe.

§ 26. Wir wollen davon eine Anwendung auf die Kreisbewegung machen.

Ein Massenpunkt durchlaufe den Kreis mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit w . Unter Winkelgeschwindigkeit versteht man den in der Zeiteinheit auf dem Kreise vom Radius 1 durchlaufenen Bogen; derselbe ist gleich dem zugehörigen Winkel. Wird der ganze Kreis in der Zeit T durchlaufen, so ist

$$w = \frac{\text{Kreisumfang}}{\text{Umlaufszeit}} = \frac{2\pi}{T}.$$

Aus der Winkelgeschwindigkeit w eines Körpers, der in einem Kreise mit dem Radius R umläuft, erhält man seine wahre Geschwindigkeit v , indem man w mit R multipliziert: $v = wR$.

Der Körper befinde sich in A (Fig. 13), nach der sehr kurzen Zeit t in B, so ist $\sphericalangle AOB = wt$. Ist dieser Winkel, also die Zeit t , sehr klein, so können wir AB als gerade Linie betrachten; wir zerlegen AB in zwei Komponenten, in die radiale $AC = y$ und die darauf senkrechte, also tangentielle Komponente $x = AD = CB$ (für sehr kleinen Winkel), dann ergibt Fig. 13:

$x = R \sin(wt)$, wo R gleich Radius des Kreises.

$$y = R - CO = R - R \cos(wt) = R[1 - \cos(wt)] = R[1 - \sqrt{1 - \sin^2(wt)}].$$

Ist der Winkel sehr klein, so ist der \sin gleich dem Bogen, also $x = R(wt)$, $y = R[1 - \sqrt{1 - (wt)^2}]$.

Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\sqrt{1 - (wt)^2} = [1 - (wt)^2]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} w^2 t^2 - \frac{1}{8} w^4 t^4 \dots$$

Da wt sehr klein, so ist die vierte Potenz gegen die zweite zu vernachlässigen, also: $y = R[1 - (1 - \frac{1}{2} w^2 t^2)] = \frac{1}{2} R w^2 t^2$.

So ist die Bewegung in zwei zu einander senkrechte Komponenten zerlegt: in die tangentielle $x = R wt$, und in die radiale: $y = \frac{1}{2} R w^2 t^2$. Die erste Strecke wächst proportional der Zeit,

entspricht also gleichförmiger Geschwindigkeit, die zweite wächst proportional dem Quadrat der Zeit, entspricht also gleichförmig beschleunigter Bewegung. Bei Gelegenheit der Fallgesetze haben wir aber gesehen, dass eine solche durch das dauernde Wirken einer Kraft hervorgerufen wird; wir fanden, dass der Beschleunigung g die Verschiebung $w = \frac{1}{2} g t^2$ entspricht. Vergleichen wir dies

mit unserem Fall $y = \frac{1}{2} R w^2 t^2$, so ergibt sich, dass hier $R w^2$ die Beschleunigung darstellt. Da die Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, so erhalten wir hier für die wirkende Kraft, wenn wir die Masse des umlaufenden Punktes mit m bezeichnen:

$$k = m R w^2 = \frac{4 \pi^2 m R}{T^2}, \quad \text{da } w = \frac{2 \pi}{T}.$$

Wir finden also: Damit ein Punkt m eine kreisförmige Bahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w durchlaufe, muss er eine konstante tangentielle Geschwindigkeit Rw haben, und ausserdem auf ihn eine nach dem Centrum hing gerichtete Kraft $k = m R w^2$ wirken.

Diese Kraft wird Centripetalkraft genannt, sie ist im allgemeinen durch die Festigkeit des Mittelpunkts und seiner Verbindung mit dem umlaufenden Körper ersetzt. Ohne sie würde der Körper sich vom Kreise fortbewegen in Richtung der Tangente.

Da die Kraft k nötig ist, um ihn in der Kreisbahn zu erhalten, so können wir auch sagen, der im Kreise umlaufende Körper suche sich mit der Kraft k radial nach aussen zu bewegen. Diese Kraft, welche also an Grösse gleich der Centripetalkraft ist, nennt man Centrifugalkraft.

§ 27. Zum Nachweis dieser Kraft dient die sog. Centrifugalmaschine, die im wesentlichen eine durch Schnurlauf in schnelle Rotation versetzbare Axe ist, auf welche verschiedene Apparate aufgeschraubt werden können. Es seien folgende Versuche erwähnt:

1. Wir befestigen an der Axe eine aus elastischen Metallbändern gebildete Kugel. Lassen wir sie rotieren, so greift überall die zur Rotationsaxe radiale Centrifugalkraft an, welche die Bänder

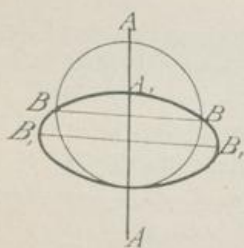


Fig. 14.

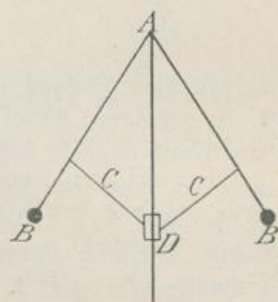


Fig. 15.

nach aussen radial zu verschieben sucht. Diese Kraft ist aber am grössten bei B, dem Aequator, weil hier der Rotationsradius am grössten ist, am kleinsten bei A, den Polen, weil hier der Radius gleich 0 wird. Infolge davon nimmt die Kugel, falls der obere Pol A (Fig. 14) nicht an der Achse befestigt ist, sondern an ihr gleiten kann, die Gestalt $AB_1A_1B_1$, die eines abgeplatteten Rotationsellipsoides an, welches um so mehr abgeplattet wird, je grösser die Winkelgeschwindigkeit ist. — Auch bei der Erde ist die Gestalt des Rotationsellipsoides durch die Drehung um die Axe entstanden, als die Erde noch flüssig war.

2. An der Axe sind mit Gelenken A (Fig. 15) zwei Arme mit schweren Kugeln B befestigt, die wieder durch Stäbe C mit einem auf der Axe gleitenden kurzen Cylinderstück D durch Gelenke verbunden sind. Dreht sich die Axe, so treibt die Centrifugalkraft die Kugeln aus einander, wodurch das Stück D gehoben wird; die Schwere sucht die Kugeln zu senken; sie stellen sich jederzeit so, dass beide Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Diese Vorrichtung, welche bei den Dampfmaschinen benutzt wird, heisst Centrifugalregulator.

3. Eine Stange SS_1 (Fig. 16) kann in Rotation versetzt werden. Auf ihr gleiten zwei Kugeln A und B, deren Masse sich wie 1:2 verhält, welche durch einen Faden C verbunden sind. Befinden

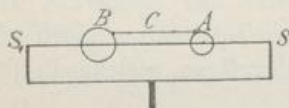


Fig. 16.

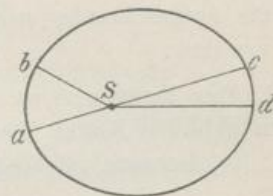


Fig. 17.

sie sich in gleichem Abstand von der Drehaxe, so sucht A nach S_1 , B nach S_1 zu gelangen; da aber die Masse von B doppelt so gross, ist auch die Kraft doppelt, beide Kugeln fliegen nach S_1 . Schiebt man sie aber so, dass ihre Rotationsradien umgekehrt den Massen sind, sich also wie 2:1 verhalten, so sind die Kräfte gleich, die Kugeln bleiben in Ruhe; entfernt man C noch mehr von der Mitte, so fliegen die Kugeln nach S.

Wenn wir ein Gemisch verschiedener Körper in rasche Rotation versetzen, so wird derjenige, der mehr Masse in der Volumeinheit besitzt, d. h. grösseres spezifisches Gewicht hat (§ 67), stärker nach aussen getrieben. Das wird technisch viel benutzt, um durch sog. Centrifugieren Körper von einander zu trennen, z. B. Butter aus der Milch abzuscheiden.

§ 28. Die Planeten bewegen sich um die Sonne in Ellipsen, deren Excentrizität aber so klein ist, dass wir sie als Kreise betrachten können. Durch diese Bewegung muss eine Centrifugalkraft entstehen, welche die Planeten von der im Centrum stehenden Sonne zu entfernen sucht. Da sie sich aber nicht entfernen,

muss von der Sonne eine Anziehungskraft auf die Planeten ausgeübt werden, welche gerade der Centrifugalkraft das Gleichgewicht hält, also ebenso gross ist, wie diese. Wir können hier also (§ 26) schreiben:

$$K = \frac{m 4 \pi^2 R}{T^2},$$

wo m die Masse des Planeten, R seinen mittleren Abstand von der Sonne, T seine Umlaufszeit bedeutet.

Nun hat Kepler aus den Beobachtungen von Tycho de Brahe drei Gesetze über die Bewegung der Planeten, die sog. Keplerschen Gesetze, abgeleitet, nämlich:

1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die vom Radiusvektor in gleichen Zeiten überstrichenen Flächen sind gleich. Durchläuft also ein Planet z. B. in einem Monat die Strecke ab (Fig. 17), in einem anderen Monat cd , so soll die Fläche Sab gleich der Fläche Scd sein. Daraus ergibt sich unter anderem, dass die Planeten sich in der Sonnennähe schneller bewegen müssen, als in der Sonnenferne; denn da $Sa < Sc$, ist $ab > cd$.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Dies letzte Gesetz sagt, dass, wenn wir die Abstände verschiedener Planeten: $R_1, R_2 \dots$, ihre Umlaufzeiten: $T_1, T_2 \dots$ nennen, die Gleichung gilt: $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \dots = C$. Die Bewegung der Planeten hängt dabei ab von der Masse der Sonne, wäre diese eine andere, so würden R und T sich ändern; wir können daher für C besser schreiben kM , wo M die Masse der Sonne bedeutet. Dadurch wird $K = \frac{m 4 \pi^2 R^3}{R^2 T^2} = \frac{m 4 \pi^2 k M}{R^2} = G \frac{M m}{R^2}$.

Die Anziehung der Sonnenmasse M auf die Planetenmasse m ist also den Massen direkt, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. Dies wichtige Gesetz über die Anziehung zweier Massen im Weltraum heisst das Newtonsche Gravitationsgesetz, die Anziehungskraft wird die allgemeine Gravitation genannt.

§ 29. Um die Erde läuft der Mond in kreisförmiger Bahn, es muss also auf ihn eine Centripetalkraft wirken, eine Anziehungskraft der Erde, welche dem Gravitationsgesetz gehorcht. Andererseits kennen wir die Anziehung der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Massen. Es liegt die Frage nahe, ob die Schwere identisch mit der allgemeinen Gravitation ist, welche Frage zuerst von Newton mit ja beantwortet wurde. Wir können sie auf folgende Weise lösen: Um die Erde kreist der Mond entsprechend dem Gravitationsgesetz, indem seiner Masseneinheit durch die Erde die Centripetalbeschleunigung $a = \frac{4 \pi^2 R}{T^2}$ erteilt wird, wo R den Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkt, T seine Umlaufzeit bedeutet. An der Erdoberfläche aber, d. h. im Abstände des Erdradius r vom Erdmittelpunkt, wird der Masseneinheit die Erdbeschleunigung g erteilt. Ist nun die Schwere identisch mit der Gravitation, so müssen nach dem Gravitationsgesetz die Beschleunigungen umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt sein, also: $a : g = r^2 : R^2$.

Diese Gleichung ist in der That befriedigt; denn $a = \frac{4 \pi^2 R}{T^2}$ lässt sich so berechnen: R = 60 r, T = 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten = 39343 × 60 Sekunden. Da $2 \pi r =$ Erdumfang = 40 000 000 m, so ist:

$$a = \frac{2 \pi r \cdot 2 \pi \cdot 60}{T^2} = \frac{40\,000\,000 \cdot 2 \pi \cdot 60}{39\,343^2 \cdot 60^2} = 0,002706 \text{ m.}$$

Aus $a : g = r^2 : (60r)^2$ folgt: $g = a \cdot 60^2 = 9,74 \text{ m}$, während experimentell (§ 16) $g = 9,78 \text{ m}$ gefunden wird.

Wir haben dadurch das wichtige Resultat, dass alle schweren Körper sich nach dem Gravitationsgesetz anziehen, d. h. mit einer Kraft, welche proportional den Massen, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist. Die irdische Schwere wird also mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt, d. h. beim Aufsteigen über das Meeresniveau, abnehmen müssen.

§ 30. Dass schwere Massen sich allgemein anziehen, ist zuerst von Cavendish (1798) nachgewiesen. Ein leichter Stab (Fig. 18) trug an seinen Enden zwei kleine Kugeln a und b; er war mit seiner Mitte m an einem dünnen, vertikal hängenden Draht befestigt. Wird er gedreht, so erfährt dabei der Draht eine Drillung,

welcher die Elastizität widersteht, so dass eine messbare Kraft zur Drehung um einen bestimmten Winkel nötig ist. Es waren ausserdem zwei schwere Bleikugeln c und d vorhanden, welche in der Lage cd auf a und b gleich stark anziehend wirken, so dass keine Drehung erfolgt. In der Stellung $c_1 d_1$ aber ist a viel näher an c_1 als an d_1 und b näher an d_1 ; daher wird der Stab ab etwas nach der Richtung $c_1 d_1$ gedreht; befinden sich die grossen Kugeln aber in c_2 und d_2 , so wird ab nach $c_2 d_2$ gedreht. Diese Drehung beobachtete Cavendish und konnte so die Anziehung konstatieren und messen.

Die Anziehung macht sich mitunter sehr störend bemerklich bei Gradmessungen auf der Erdoberfläche. Es zeigt sich nämlich,

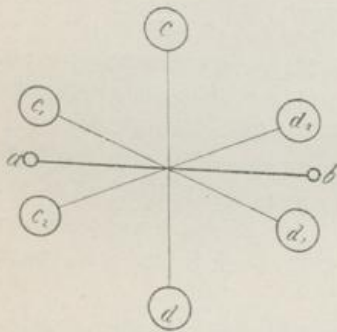


Fig. 18.

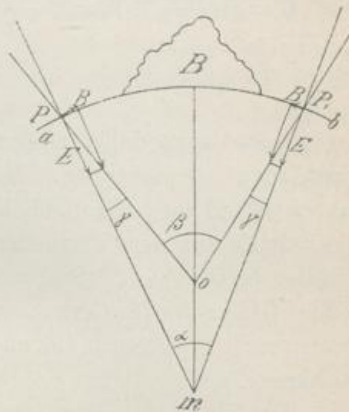


Fig. 19.

dass in der Nähe grosser Gebirgsmassen oder isolierter Berge das Lot nicht nach dem Erdmittelpunkt hinweist, sondern abgelenkt wird.

Es sei in Fig. 19 ab ein Stück eines Erdmeridians, m der Erdmittelpunkt, B ein isolierter Berg, und nördlich und südlich von ihm zwei Orte P und P_1 . Wenn wir hier zwei Lote aufhängen, so wirken auf jedes die Anziehung der Erde, E , und die Anziehung des Berges B ; die Lote stellen sich daher in die Richtung der Resultante, so dass sie sich in o schneiden würden. Sie bilden dort den Winkel β , während die Linien nach dem Erdmittelpunkt Pm und P_1m den Winkel α bilden, welcher gleich der geographischen Breitendifferenz der Orte ist. Durch den

Versuch kann man die Abweichung des Lotes, $\sphericalangle \gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$ finden.

Dieser Versuch gestattet eine sehr interessante Anwendung: man kann aus ihm die Masse der Erde, somit die mittlere Erddichte, d. h. die Masse der Volumeinheit durch Division der ganzen Masse durch das Erdvolumen berechnen. Die Figur ergibt nämlich

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B}{E}.$$

Nennen wir nun die Masse des Lotes m , die der Erde m_1 , die des Berges m_2 , den Erdradius r , den Abstand zwischen P und der Mitte des Berges s , so ist nach dem Gravitationsgesetz:

$$B = G \frac{m m_2}{s^2}, E = G \frac{m m_1}{r^2}, \text{ also } \operatorname{tg} \gamma = \frac{B}{E} = \frac{m_2 r^2}{m_1 s^2},$$

$$\text{also } m_1 = \frac{m_2 r^2}{s^2 \operatorname{tg} \gamma}.$$

Kennt man daher angenähert die Masse des Berges, m_2 , so kann man m_1 berechnen. Maskelyne führte eine solche Messung in Schottland aus und fand die mittlere Dichte gleich 5.

Auch aus den Versuchen von Cavendish ergibt sich die Erddichte: er fand 5,5. Spätere Versuche ergaben Reich: 5,49 und 5,58; Baily: 5,67; Cornu: 5,56 und 5,50. Neuere Versuche ergaben nach Poynting 5,49, nach Boys 5,53, nach Braun 5,53, nach Richarz 5,505.

Die Erddichte wurde ferner durch Jolly in folgender schönen Weise mit der Wage gemessen: Eine schwere Masse, eine Flasche mit Quecksilber, wurde gewogen, dann unter die Flasche eine grosse Bleikugel gelegt und wieder gewogen; dann erscheint die Flasche schwerer, denn im ersten Fall zieht nur die Erde an, im zweiten die Erde und die Bleikugel. Aus der Gewichtszunahme kann man das Verhältnis der Anziehungen, also, da man die Abstände kennt, das Verhältnis der Massen der Erde und der Bleikugel oder ihrer Dichtigkeiten bestimmen. So fand Jolly: 5,69. Da die mittlere Dichte der Erdkruste nur 2,7 beträgt, so muss das Erdinnere sehr viel dichter sein, mehr schwere Stoffe enthalten, als die Kruste.

§ 31. Eine wichtige Folge der Gravitation zwischen Mond und Erde beobachten wir als Flut und Ebbe: sei m (Fig. 20) der Mond, M die Erde, R der Abstand ihrer Mittelpunkte, r der

Erdradius. Dann wirkt die Anziehungskraft des Mondes in Richtung Mm , wenn wir die Kräfte nach links rechnen:

$$\text{auf die Masseneinheit in } M: K = \frac{km}{R^2},$$

$$\text{auf die Einheit in } A: \frac{km}{(R-r)^2}, \text{ auf die in } B: \frac{km}{(R+r)^2}.$$

Die Differenz der Kräfte in A und M und in M und B sind angenähert: $\frac{2kmr}{R^3} = f$, so dass wir in A, M, B die nach links wirkenden Kräfte: $K + f, K, K - f$ haben. In A und B wirkt ausserdem die Erdschwere auf die Masseneinheit mit der Kraft: in A nach rechts: $-g$, in B nach links: $+g$. So haben wir in A, M, B zusammen die Kräfte: $[-g + K + f]; K; [g + K - f]$. Sehen wir von der allen Punkten gemeinsamen Kraft K , welche die Erde als Ganzes zu verschieben sucht und welcher durch die Centrifugalkraft das Gleichgewicht gehalten wird, ab, und rechnen die Kräfte in A und B beide nach dem Mittelpunkt der Erde hin, so haben wir auf beiden Seiten $g - f$. An den Punkten C und D aber ist die Anziehung gleich g ; es erscheint also auf der dem Monde zugekehrten und auf der von ihm abgekehrten Seite die Erdanziehung verringert: infolge davon steigt hier das bewegliche Wasser höher

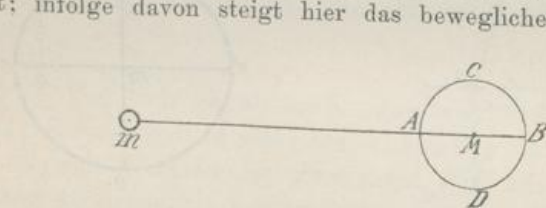


Fig. 20.

an, es entsteht die Flut, während in den Punkten C und D das Wasser tiefer steht, Ebbe vorhanden ist. Da die Erde sich in 24 Stunden einmal herumdreht, würden bei feststehendem Mond die beiden Flutwellen täglich einmal um die Erde herumlaufen; durch die Bewegung des Mondes wird aber dieser Umlauf täglich um 50 Minuten verzögert. Auch die Anziehung der Sonne bewirkt eine solche Flut; die Masse der Sonne ist sehr viel grösser als die des Mondes, dafür aber auch ihr Abstand sehr viel grösser. So bewirkt die Sonne nur halb so hohe Flut als der Mond. Wirken Sonne und Mond in gleichem Sinne, d. h. stehen sie auf derselben Seite der Erde (Neumond) oder entgegengesetzt (Vollmond), so entstehen die viel höheren sog. Springfluten.

§ 32. Wir wenden uns nun zur Besprechung der Pendel, und zwar zunächst zum Kreispendel oder konischen Pendel. Es sei ein Massenpunkt am Ende eines starren, unausdehnbaren, gewichtslosen Fadens angebracht, dessen anderes Ende wir uns an der Zimmerdecke befestigt denken. Wir haben dann ein sog. ideales oder mathematisches Pendel. Dasselbe hängt vertikal herab, weil die Schwere wirkt. Ziehen wir es aus der Gleichgewichtslage auf die Seite, so können wir es durch einen seitlichen Stoss in solche Bewegung bringen, dass der Massenpunkt einen Kreis, der Faden also einen Kegel beschreibt. Wir haben damit ein Kreispendel, dessen Bewegung unter dem Einfluss der Schwere und der Centrifugalkraft unverändert fortgehen würde, wenn nicht die Luftreibung vorhanden wäre. Es stelle in Fig. 21 a b die Gleichgewichtslage des Pendels vor, a m die abgelenkte Lage unter dem $\sphericalangle \alpha$ gegen

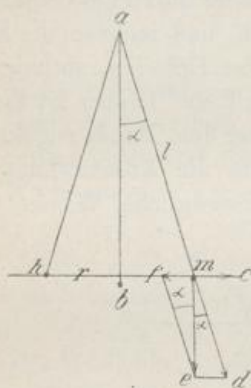


Fig. 21.

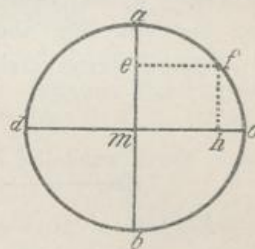


Fig. 22.

die Vertikale, m h sei der Durchmesser des Umlaufkreises mit dem Radius r, M die Masse des Punktes, l die Länge des Fadens. Es wirken auf das Pendel 2 Kräfte: die Schwere, $\overline{m e} = M \cdot g$ und die Centrifugalkraft $\overline{m c} = \frac{M \cdot 4\pi^2 r}{T^2}$, wo T die Umlaufzeit des Pendels ist. Die Schwere können wir in 2 Komponenten zerlegen: in $\overline{m d} = \frac{\overline{m e}}{\cos \alpha}$ in Richtung des Fadens und in

$$\overline{m f} = \overline{m e} \operatorname{tg} \alpha = M \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Die erste Komponente spannt nur den Faden, kommt aber für die Bewegung nicht in Betracht. Die zweite wirkt der Centrifugal-

kraft entgegen: wird r grösser, so nimmt mf zu, wie $\operatorname{tg} \alpha$, mc wie $\sin \alpha$ und bei Verkleinerung von r nehmen beide ab. Der Umlaufskreis ändert sich daher, bis $mf = mc$ ist, dann ist Gleichgewicht vorhanden und die Bewegung bleibt konstant.

$$mf = mc \text{ gibt; } Mgtg\alpha = M \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\text{oder da } r = l \sin \alpha, Mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = M, \frac{4\pi^2 l \sin \alpha}{T^2}$$

$$\text{oder } T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

$$\text{Nun ist } \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{8} - \dots$$

Ist der Winkel α , um welchen das Pendel von der Vertikalen abgelenkt ist, klein, so können wir die höheren Potenzen in der Reihenentwicklung für $\cos \alpha$ vernachlässigen und erhalten:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Wir finden somit, dass die Umlaufszeit T , die Schwingungsdauer des Pendels, unabhängig von r , der Grösse des Kreises, und von der Masse des Pendels ist, nur von seiner Länge und von g abhängt.

§ 33. Viel wichtiger als das Kreispendel ist das ebene Pendel, welches Schwingungen in einer Ebene ausführt; wir können zu ihm durch folgende Ueberlegung übergehen: Wir können die Kreisbewegung als Resultante aus zwei ebenen Schwingungen auffassen; haben wir ein ebenes Pendel, dessen schwerer Punkt in der Linie ab (Fig. 22) hin und her schwingt, und geben wir ihm in einem der Momente, wo es am meisten von der Gleichgewichtslage m abgelenkt ist, also in a oder b einen Stoss von passender Stärke senkrecht zu seiner Schwingungsrichtung, so geht die ebene Schwingung in eine Kreisschwingung über. Dasselbe wird erreicht, wenn das Pendel anfangs nach d oder irgend einem anderen Durchmesser schwingt und wir ihm einen Stoss geben, der eine zweite Schwingung senkrecht zu der ersten hervorruft. Also zwei Schwingungen, welche senkrecht zu einander stehen und so beschaffen sind, dass durch die eine der Punkt sich im Maximum der Ablenkung befindet, wenn durch die zweite die Ablenkung gerade beginnt, setzen sich zu einer Kreisbewegung zusammen.

Wenn das Pendel längs ab schwingt, so wirkt auf dasselbe in jedem Moment die Schwere, um es nach m zurückzuführen, und die Grösse der Kraft hängt nur ab von dem Abstände des Pendels von m (vgl. § 34). Läuft das Pendel im Kreise um, so wirkt auch jetzt in jedem Moment die Schwere, um es nach m zurückzuführen, und zwar sowohl bei Entfernung von Linie ab wie von dc . Befindet sich das ebene Pendel in e , das Kreispendel in f , so ist ihr Abstand von dc der gleiche, $em = fh$, also ist auch die Kraft die gleiche, welche sie nach dc zu führen strebt. Sie werden sich daher so bewegen müssen, dass stets ihr Abstand von dc derselbe bleibt, d. h. das ebene Pendel wird in derselben Zeit den Weg aem zurücklegen, wie das Kreispendel den Weg $afcb$, und die Schwingungsdauer des ebenen Pendels muss gleich der Umlaufzeit des Kreispendels sein. Diese haben wir aber schon berechnet; also finden wir die Schwingungsdauer des ebenen Pendels, d. h. die Dauer für Hin- und Rückgang auch $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Für das ebene Pendel pflegt man unter Schwingungsdauer nur die Zeit des Hin- oder Hergangs zu verstehen; dann ist $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

§ 34. Also auch die Schwingungsdauer des ebenen Pendels ist unabhängig von der Grösse des Schwingungsbogens, der sog. Amplitude, solange diese nicht sehr gross ist. Man kann dieses Gesetz auch durch folgende Ueberlegung finden:

Die Kraft, welche das Pendel in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, ist: $mg \sin \alpha$, oder für kleine α : $mg \alpha$, d. h. die Kraft ist in jedem Augenblick proportional der Ablenkung aus der Ruhelage. Die Folge davon ist, dass bei doppelter Schwingungswerte die doppelte Kraft auch die doppelte Geschwindigkeit hervorbringt und daher der doppelte Weg in derselben Zeit durchlaufen wird, wie der einfache Weg.

§ 35. Für zwei Pendel von den Längen l_1 und l_2 verhalten sich die Schwingungsdauern

$$T_1 : T_2 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} : \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$$

d. h. die Längen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungs-

dauern. Für $T = 1$ Sekunde wird $l = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $l = \frac{g}{\pi^2} = 99,3 \text{ cm}$ für die geographische Breite von 45° . Eine sehr wichtige Anwendung der Pendelgleichung ergibt sich aus: $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$; wenn wir also ein mathematisches Pendel von bekannter Länge l schwingen lassen und die Schwingungsdauer T bestimmen, so können wir daraus g für den betreffenden Punkt der Erde finden. Wie diese Bestimmung praktisch auszuführen ist, werden wir später (§ 57) sehen.

Wir können nun die Abhängigkeit von g von der geographischen Breite ableiten: Es sei in Fig. 23 die Erdkugel dargestellt mit der Axe AB . In C , unter der geographischen Breite φ , befinde sich eine Masse m ; auf dieselbe wirken zwei Kräfte: die Schwere nach dem Erdmittelpunkt, $CD = mg$, und die zur Rotationsaxe senkrechte Centrifugalkraft, $CE = m r w^2$, wenn wir mit r den Radius des betreffenden Parallelkreises bezeichnen. CE zerlegen wir in zwei Komponenten: CG und $CF = CE \cos \varphi = m r w^2 \cos \varphi$, oder da $r = R \cos \varphi$, wenn $R =$ Erdradius: $CF = m R w^2 \cos^2 \varphi$. Diese Kraft wirkt der Schwere entgegen, letztere scheint um diesen Betrag vermindert, also ist die Erdacceleration $g - R w^2 \cos^2 \varphi$, wo man noch $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ setzen kann.

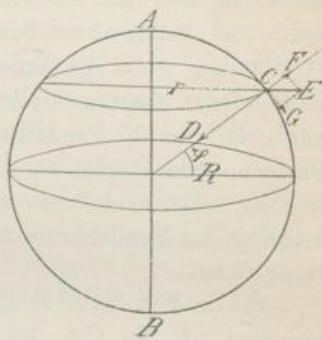


Fig. 23.

Diese Rechnung ist nur eine angenäherte. In Wahrheit setzen sich CD und CE zu einer Resultante zusammen, welche gar nicht mehr nach dem Mittelpunkt der Kugel gerichtet ist, d. h. die Schwere wirkt nicht mehr in Richtung des Kugelradius. Den Winkel zwischen der neuen Richtung der Schwerkraft und der Aequatorialebene nennt man in Wahrheit die geographische Breite.

Ferner ist die Erde keine Kugel, sondern ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (§ 27); auch dadurch wird die Rechnung modifiziert.

Versuche haben ergeben, dass man setzen kann:

$$g = (978,009 + 5 \sin^2 \varphi) \frac{cm}{sec^2},$$

wo φ die geographische Breite bedeutet.

§ 36. Eine interessante Anwendung findet das Pendel beim Foucaultschen Pendelversuch. Die Schwere sucht die Körper nur nach dem Erdmittelpunkt zu beschleunigen, sie kann nur vertikale Bewegung hervorbringen, niemals horizontale. Wenn daher ein Pendel schwingt, so geschieht dies in einer Vertikalebene, und die Schwere hat weder das Bestreben noch das Vermögen, diese Ebene zu drehen, denn eine solche Drehung würde durch Hinzukommen einer horizontalen Komponente zur Pendelbewegung erzeugt werden. Würde daher über dem Nordpol der Erde ein Pendel in Bewegung gesetzt, z. B. so, dass es etwa über dem 1. Meridian schwingt, so würde ohne Einwirkung äusserer Kräfte diese Schwingungsebene unverändert im Raume bleiben müssen. Die Erde dreht sich aber um ihre Axe. Der 1. Meridian wird also allmählich mehr und mehr abweichen von der Pendelebene, und erst nach 24 Stunden, wenn die Erde sich einmal herumgedreht hat, werden beide wieder zusammenfallen. — Da wir uns mit der Erde drehen, würde für uns die Pendelebene sich in 24 Stunden einmal zu drehen scheinen. Ein Pendel am Aequator dagegen würde durch die Erdrotation nicht beeinflusst werden. Es fragt sich, wie gross die Drehung der Pendelebene für einen Ort unter der geographischen Breite β ist.

Sei in Fig. 24 OB die Erdaxe, P der eine Pol, QQ der Aequator, A ein Ort unter der geographischen Breite β , $\sphericalangle \beta = \sphericalangle AOF$, PAF der Meridian des Ortes, AB eine Tangente an den Meridian, R der Erdradius. Es werde in einem gegebenen Moment in A ein Pendel in Bewegung gesetzt, so dass es im Meridian, also nach AB , schwingt. Einige Zeit später habe sich die Erde um den Winkel $\alpha = FOG$ gedreht, wodurch A an die Stelle C kommt. Die Tangente an dem Meridian hat jetzt die Lage CB ; die horizontale Tangente an der Pendelebene ist sich aber parallel geblieben, das Pendel schwingt nach $CD \parallel AB$. Das Pendel hat sich daher gegen den Meridian scheinbar gedreht um den Winkel $\gamma = DCB = ABC$.

Nun haben wir die Gleichungen: 1. $AC = FG \cos \beta = R \alpha \cos \beta$ und aus $\triangle ABC$ folgt: $AC = AB \gamma$; aus $\triangle ABO$ folgt: $AB = R \operatorname{tg} (90 - \beta) = R \operatorname{cotg} \beta$, also 2. $AC = \gamma R \operatorname{cotg} \beta$; aus 1. und 2.: $R \alpha \cos \beta = \gamma R \operatorname{cotg} \beta$, $\gamma = \alpha \sin \beta$, d. h. die Drehung der Pendelebene ist gleich der Drehung der Erde in der gleichen Zeit multipliziert mit dem \sin der geographischen Breite. Für Hannover z. B. ist $\beta = 52,4$; also muss die Pendeldrehung in 24 Stunden

betragen: $360^\circ \sin 52,4 = 285,2^\circ$, oder in einer Stunde $11,9^\circ$. Für Bonn beträgt der Wert $11,6^\circ$.

Dieser Versuch wurde zuerst von Foucault ausgeführt und bestätigte die Rechnung; er ist wichtig, weil er unabhängig von

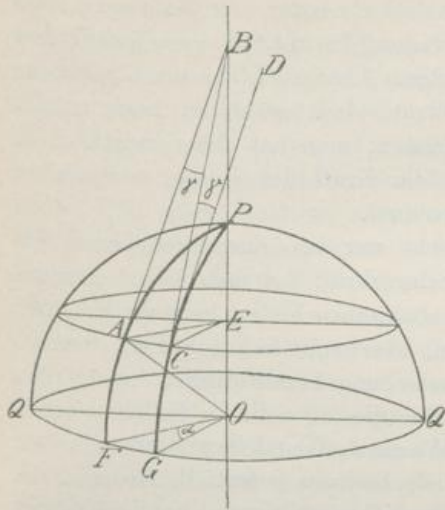


Fig. 24.

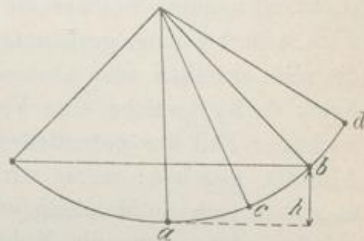


Fig. 25.

astronomischen Beobachtungen die Drehung der Erde um ihre Axe beweist, deren Existenz aus theologischen Gründen im Mittelalter lebhaft bestritten wurde.

§ 37. Betrachten wir ein schwingendes Pendel genauer, so sehen wir, dass es je nach seiner Stellung sich in ganz verschiedenen Zuständen befindet. Im tiefsten Punkte der Bahn, in der Ruhelage a (Fig. 25), wirkt keine Kraft auf dasselbe, dafür besitzt es eine Geschwindigkeit v oder kinetische Energie $\frac{1}{2} m v^2$, vermöge deren es durch a hindurchschwingt und gegen die Wirkung der Schwere aufsteigt zum Punkte b, der um h höher liegt als a. Auf dieser Strecke a b wird die Geschwindigkeit und kinetische Energie allmählich kleiner, in b ist sie gleich 0. Auf Kosten derselben ist aber nun das Gewicht mg um die Höhe h gehoben: fällt dann infolge dieser Erhebung das Pendel, so erreicht es in a wieder die frühere lebendige Kraft, während nun die Höhe $h = 0$ geworden.

Wir haben früher (§ 19) gesehen, dass kinetische Energie auf Kosten einer Arbeit erzeugt werden kann; jetzt finden wir, dass auf Kosten der kinetischen Energie ein Gewicht gehoben werden kann, und zwar so hoch, dass beim Fall gerade wieder dieselbe kinetische Energie entsteht. Diese repräsentirt also einen Arbeitsvorrat, und einen solchen nennen wir Energie. Da hier der Arbeitsvorrat in der Bewegung beruht, ist eben jene Grösse kinetische Energie genannt worden. Aber auch das um h gehobene Gewicht besitzt einen Arbeitsvorrat, denn wenn es herunterfällt, kann es uns die Arbeit mgh leisten; man hat daher mgh , d. h. Kraft mal Strecke, um welche die Kraft den Körper verschieben kann, potentielle Energie genannt.

Potentielle Energie ist nicht nur bei einem gehobenen Gewicht vorhanden, welches die Schwerkraft bewegen kann, sondern z. B. auch bei einer gespannten elastischen Feder, bei zwei Körpern, die sich anziehen oder abstossen, überhaupt in jedem Fall, wo eine Kraft da ist, welche eine Verschiebung hervorbringen kann. Ein wichtiger Fall der potentiellen Energie ist z. B. in der chemischen Affinität gegeben: wenn wir Wasserstoff und Sauerstoff mischen, so ziehen sich die Molekeln an, sie besitzen potentielle Energie, die verschwindet, wenn die Molekeln sich vereinigen, die Verbindung Wasserdampf entsteht.

Den Vorgang bei der Pendelbewegung können wir nun so beschreiben: Im höchsten Punkte besitzt das Pendel nur potentielle Energie; fällt es, so nimmt die potentielle Energie ab, während es dafür kinetische Energie erhält, die allmählich wächst. Im tiefsten Punkt ist die potentielle Energie verbraucht, die kinetische Energie ist im Maximum, und zwar ist ihr Betrag so gross, dass sie gerade wieder die vorige potentielle Energie durch Hebung des Pendels herstellen kann. Wir finden so, dass fortwährend potentielle Energie in kinetische verwandelt wird, und umgekehrt, stets aber ist die Summe beider konstant.

§ 38. Die praktisch wichtigste Anwendung findet das Pendel für die Zeitmessung. Da ein Pendel von gegebener Länge stets in der gleichen Zeit eine Schwingung ausführt, ob die Amplitude gross oder klein ist, so können wir die Zeit damit messen. Bei längerem Schwingen wird aber die Amplitude fortgesetzt kleiner, da durch die Reibung des Pendels an der Luft lebendige Kraft verbraucht wird, so dass das Pendel schliesslich stehen bleibt. Es muss also,

wenn man die Pendelschwingungen zur Zeitmessung benutzen will, eine Vorrichtung mit dem Pendel verbunden werden, welche diese kleinen Verluste ersetzt, und eine zweite, welche die Schwingungen zählt. Diese beiden Zwecke erfüllt das Uhrwerk. In betreff des ersten Punktes sei folgendes vorausgeschickt: Wenn wir einem Pendel im Punkte a (Fig. 25) einen kleinen Stoss in seiner Richtung geben, so ändern wir damit nur seine Geschwindigkeit; es schwingt etwas weiter, aber dafür schneller, die Schwingungsdauer bleibt ganz unverändert (§ 34). Wenn dagegen das Pendel auf dem Wege von a nach b in c angelangt einen Stoss erhält, so schwingt es nun auch mit grösserer Geschwindigkeit über b hinaus nach d und zurück nach a; aber da-

durch ist die Schwingungsdauer verlängert, denn es hat nicht den ganzen Weg a da mit der grösseren Geschwindigkeit durchlaufen, welche die grössere Amplitude kompensiert, sondern den Teil ac mit kleiner, den Rest c da mit grosser Geschwindigkeit. Es folgt also, dass, wenn wir die Amplitude eines Pendels durch kleine Stösse vermehren wollen, ohne die Schwingungsdauer zu ändern, diese Stösse dem Pendel in der Gleichgewichtslage gegeben werden müssen. Die Einrichtung der Pendeluhr ist folgende (Fig. 26): Das Pendel AB schwingt um die Axe B.

Mit ihm muss das Echappement CD Schwingungen ausführen; dasselbe hat zwei Zähne E und F mit schrägen Gleitflächen G und H, während die Seiten dieser Zähne Kreisbögen um B sind, so dass sie sich bei der Schwingung in sich selbst verschieben. Unter dem Echappement sitzt auf der Welle J das Steigrad K, dessen Rand mit Zähnen versehen ist; um die Welle ist ein Faden mit Gewicht L gewickelt, welcher das Rad im Sinne des Pfeils zu drehen sucht. Es kann aber diesem Zuge nicht folgen, weil sein Zahn M an F anliegt. Schwingt das Echappement in der Pfeilrichtung, so kommt bald der Zahn M an die Gleitfläche H, er kann sich dann weiter bewegen und übt gleichzeitig einen kleinen Druck gegen H, gibt also dem Echappement und Pendel

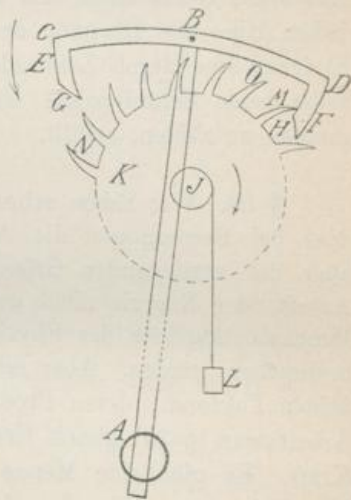


Fig. 26.

einen schwachen Stoss; das Echappement ist so konstruiert, dass das Pendel sich in diesem Moment in Ruhelage befindet. Beim Weiterschwingen des Pendels wird der Zahn M frei und das Steigrad könnte sich beliebig weiter drehen, wenn nicht inzwischen der Zahn E des Echappements sich gesenkt hätte, so dass N auf die Aussen-
 seite von E fällt und das Steigrad wieder gehemmt ist. Das Pendel kehrt nach einiger Zeit um, der Zahn N gleitet inzwischen auf E; geht das Pendel wieder durch die Ruhelage, so kommt N auf die Gleitfläche G, der Zahn kann fortgleiten, indem er dem Pendel einen Stoss gibt; aber das Steigrad wird wieder gleich gehemmt, indem nun der Zahn O durch den Zahn F festgehalten wird u. s. w. Auf diese Weise dreht sich das Steigrad ganz langsam weiter, bei jedem Hin- und Hergang des Pendels um einen Zahn. Mit dem Steigrad sind durch Zahnräder die Zeiger verbunden, so dass dasselbe beide Erfordernisse, den Gang zu erhalten und die Schwingungen zu zählen, erfüllt.

§ 39. Wir haben schon mehrfach (§ 19 und § 37) gesehen, dass bei Bewegungen die Arbeit oder Energie verwandelt wird, aber die entstehenden Grössen den verschwindenden gleich sind, Arbeit oder Energie nicht gewonnen wird. Dies entspricht einem Fundamentalgesetz der Physik, welches wir später ausführlicher besprechen werden. Aber sehr häufig sind die Fälle, in denen die beiden Faktoren, deren Produkt die Arbeit ist, verändert werden. Arbeit war (§ 19) gleich Kraft mal Verschiebung in Richtung der Kraft. Es gibt eine Menge Vorrichtungen, die sog. einfachen Maschinen, welche den Zweck haben, diese beiden Faktoren zu ändern, wie wir aber sehen werden, bleibt das Produkt, die Arbeit, ungeändert.

Die erste einfache Maschine ist der Flaschenzug; ein Faden (Fig. 27) ist an einem Ende befestigt; er geht über eine bewegliche Rolle A und dann wieder in die Höhe, oder auch über eine feste Rolle B, die nur den Zweck hat, die Richtung des Fadens zu ändern, wieder nach unten. An A hänge das Gewicht Q; dasselbe wird durch die 2 Fäden a und b getragen, jeder trägt nur $\frac{Q}{2}$, also b oder auch c ist nur durch $\frac{Q}{2}$ gespannt. Hängen wir daher an c ein Gewicht q, so ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn $q = \frac{Q}{2}$. Also das halbe Gewicht hält dem ganzen das Gleich-

gewicht. Denken wir uns aber nun die Gewichte etwas verschoben, etwa so, dass q um h sinkt, so wird der Faden c um h verlängert,

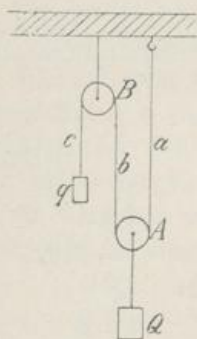


Fig. 27.

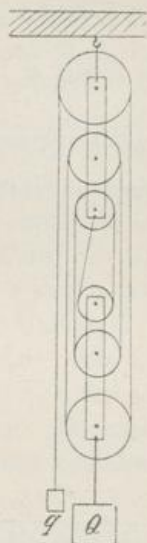


Fig. 28.

die Fäden b und a zusammen um ebensoviel verkürzt, die Fäden a und b einzeln also um $\frac{h}{2}$, und das Gewicht Q steigt um $H = \frac{h}{2}$.

Die Arbeit auf beiden Seiten hq und HQ ist also gleich, da $\frac{h}{H} = \frac{Q}{q} = 2$ ist.

Gewöhnlich hat man Kloben, indem mehrere Rollen neben oder unter einander befestigt werden (Fig. 28). Es ist leicht zu übersehen, dass für den gezeichneten Flaschenzug $\frac{h}{H} = \frac{Q}{q} = 6$ ist.

Besitzt jeder Kloben n Rollen, so ist $\frac{h}{H} = \frac{Q}{q} = 2n$.

Eine andere wenig gebrauchte Form des Flaschenzuges ist der Potenzflaschenzug: eine Schnur a geht über die bewegliche Rolle A (Fig. 29), an welcher das zu hebende Gewicht Q hängt, und ist an einer zweiten beweglichen Rolle B befestigt; über diese geht der Faden cd , der an C angeknüpft ist, über welches endlich der Faden ef geht, der dann über die feste Rolle D geleitet ist und das Gegengewicht q trägt. Hier hängt Q an a und b , b trägt

also nur $\frac{1}{2} Q$; diese Kraft zieht an B, das an c und d hängt; also trägt d nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q$; dies wird wieder von e und f getragen, also f oder g halten nur $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q = \left(\frac{1}{2}\right)^3 Q$. Gleichgewicht ist somit vorhanden, wenn $q = \left(\frac{1}{2}\right)^3 Q$. Wird q um h heruntergezogen, so verkürzt sich f + e um h, also C steigt um

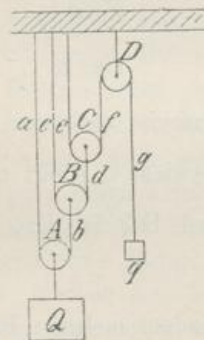


Fig. 29.

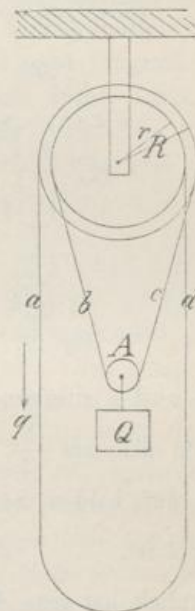


Fig. 30.

$\frac{1}{2} h$; um die gleiche Grösse wird d + c gehoben, B steigt um $\left(\frac{1}{2}\right)^2 h$, endlich A also Q steigen um $H = \left(\frac{1}{2}\right)^3 h$. Also auch hier ist $\frac{q}{Q} = \frac{H}{h} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, also $hq = HQ$. Sind n bewegliche Rollen da, so ist $\frac{q}{Q} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Die grösste Aenderung der beiden, die Arbeit bedingenden Faktoren wird durch den Differentialflaschenzug (Fig. 30)

hervorgebracht. Zwei Rollen mit den etwas verschiedenen Radien R und r sind auf derselben Axe und fest mit einander verbunden angebracht. Ihr Rand besitzt Zähne oder Vertiefungen, in welche sich die Glieder einer geschlossenen Kette legen, die daher nicht rutschen kann. Die Kette bildet, vom grossen Rade kommend, eine Schleife ad , geht um das kleine Rad und gelangt durch eine zweite Schleife bc wieder auf das grosse Rad. In dieser zweiten Schleife liegt die bewegliche Rolle A , welche die Last Q trägt, zu deren Hebung man an a in der Richtung des Pfeiles zu ziehen hat mit der Kraft q . Wir wollen annehmen, wir zögen so lange, bis das Doppelrad sich einmal umgedreht hat. Dabei wickeln sich a und b ab, c und d auf, und zwar ändern sich a und c um den Umfang $2R\pi$ des grossen Rades, b und d um den Umfang $2r\pi$ des kleinen Rades. Die Länge der Schleife bc ändert sich also um $2R\pi - 2r\pi$, also A und Q steigen um $(R - r)\pi$, während die Kraft q durch die Strecke $2R\pi$ hat wirken müssen. Da auch hier Arbeit nicht gewonnen wird, so muss die Gleichung bestehen

$$\frac{H}{h} = \frac{(R - r)\pi}{2R\pi} = \frac{q}{H}.$$

Hat z. B. der Umfang des grossen Rades 100 Zähne, der des kleinen 99, so ist $\frac{h}{H} = \frac{Q}{q} = 200$.

§ 40. Eine zweite einfache Maschine ist die schiefe Ebene: eine starre Ebene bilde mit der Horizontalen einen Winkel α (Fig. 31); auf ihr befinde sich ein Gewicht Q , welches wir uns in Form einer Walze denken, an deren Axe ein Faden befestigt ist;

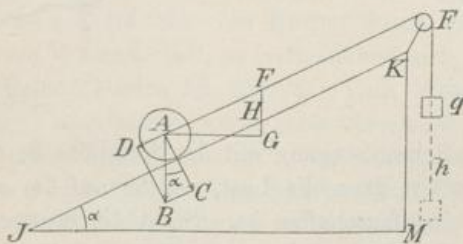


Fig. 31.

er ist über eine feste Rolle E abwärts geleitet und hier ist ein Gegengewicht q angehängt. Das Gewicht Q wirkt als Kraft senkrecht nach unten. Wir zerlegen $Q = AB$ in zwei Komponenten:

$AC = Q \cos \alpha$ senkrecht zur Ebene und $AD = Q \sin \alpha$. AC drückt nur die Last fest auf die Unterlage, kommt für ihre Bewegung aber nicht in Betracht; für Gleichgewicht muss daher $q = AD$ sein, oder $q = Q \sin \alpha$.

Wird q um h heruntergezogen, so verschiebt sich A um $AF = h$; dabei steigt aber A nur um $FG = H = h \sin \alpha$. Also auch hier ist die Arbeit auf beiden Seiten gleich; $QH = qh$. Die zur Hebung nötige Kraft q wird um so kleiner, je kleiner α , für $\alpha = 0$, für eine Horizontalebene, ist die zur Fortbewegung der Last nötige Kraft gleich 0 (wenn wir von der Reibung absehen). Nennen wir die Länge der schiefen Ebene $JK = L$, die Höhe $KM = S$, so ist auch $\sin \alpha = \frac{S}{L}$, also können wir auch schreiben

$$\frac{q}{Q} = \frac{H}{h} = \frac{S}{L}.$$

Als einen besonderen Fall der schiefen Ebene kann man die Schraube betrachten; denkt man sich um einen Cylinder, dessen Umfang $= JM$ ist, die schiefe Ebene JKM herumgewickelt, so

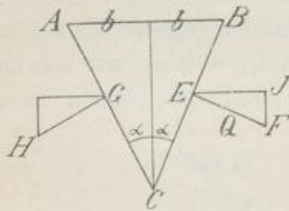


Fig. 32.

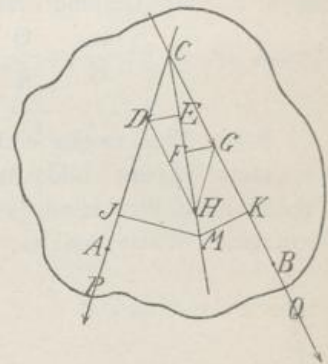


Fig. 33.

bildet JK einen Schraubengang mit der Steighöhe S ; die Schraubennutter repräsentiert dann die Last, welche auf der schiefen Ebene des Gewindes hinaufzuschaffen ist. Steht die Mutter fest, so stellt die Schraube oder der von ihr ausgeübte Druck das Gewicht vor. Der Druck, welcher durch eine Schraube mittelst einer bestimmten angreifenden Kraft hervorgebracht werden kann, wächst also proportional zum Durchmesser der Schraube, umgekehrt proportional zur Steighöhe.

Auch der Keil ist auf die schiefe Ebene zurückzuführen: Sei (Fig. 32) ABC der in ein zu spaltendes Holzstück getriebene Keil, dessen Länge $AC = BC = l$, dessen Rücken $AB = 2b$, dessen Winkel 2α sei. Der Druck des Holzes wirkt normal zum Keil, er sei dargestellt durch $Q = EF = GH$. Wir zerlegen EF — und ebenso GH — in zwei Komponenten: $JE = Q \cos \alpha$, welche nur den Keil zusammendrücken sucht, und $FJ = Q \sin \alpha$, welche den Keil hinauszutreiben strebt; soll das nicht geschehen, so muss auf den Keil eine vertikale Kraft $q = 2Q \sin \alpha$ wirken. Da $\sin \alpha = \frac{b}{l}$, so können wir auch schreiben: $\frac{q}{Q} = \frac{2b}{l}$, d. h. die nötige Kraft verhält sich zum Widerstand wie die Rückenbreite zur Länge.

§ 41. Die wichtigste einfache Maschine ist der Hebel. Unter einem Hebel verstehen wir einen festen Körper, welcher um einen Punkt drehbar ist und an welchem Kräfte angreifen, welche eine Drehung hervorzubringen suchen. Wir wollen uns zunächst den Körper als zweidimensional, als eine Ebene, vorstellen, z. B. als Brett, welches um den Punkt M (Fig. 33), etwa einen Nagel, drehbar ist. An zwei Punkten des Körpers, A und B , greifen die Kräfte P und Q in der Ebene der Zeichnung an; wir wollen untersuchen, unter welchen Umständen dieselben sich das Gleichgewicht halten, also keine Drehung hervorbringen.

Wir schicken folgende Betrachtung voraus: Wenn an einem Punkte A eines festen Körpers eine Kraft angreift, welche A um ein bestimmtes Stück in bestimmter Richtung zu verschieben strebt, so werden sämtliche Punkte des Körpers, welche in dieser Richtung liegen, um dasselbe Stück verschoben, denn anderenfalls müsste der Körper zerreißen. Wird also ein Körper durch eine in A angebrachte Kraft um P verschoben, so verschieben sich J, D, C u. s. w. auch um P . Ganz dasselbe ist aber der Fall, wenn die Kraft in J oder D oder C angebracht wäre, stets verschiebt sich die ganze Linie AC in ihrer Richtung um P . Wir schliessen daraus, dass, wenn an einem festen Körper eine Kraft angreift, wir den Angriffspunkt in Richtung der Kraft beliebig verschieben können, ohne in der Wirkung etwas zu ändern.

Das benutzen wir für unseren Fall, indem wir die Richtung von P und Q rückwärts verlängern. Da sie in derselben Ebene liegen, müssen sie sich schneiden, — falls sie nicht parallel sind, was wir vorläufig ausschliessen. Der Schnittpunkt sei C . Hier

bringen wir $P = CD$ und $Q = CG$ an; wir können daraus nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte (§ 22) eine Resultante CH bilden. P und Q werden sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre Resultante keine Drehung hervorbringt; es ist aber leicht einzusehen, dass letzteres der Fall, sobald die Resultante oder ihre Verlängerung durch den Drehpunkt M geht; denn dann wird die Resultante durch die Festigkeit dieses Punktes vernichtet.

Wir wollen annehmen, es sei Gleichgewicht vorhanden, CH gehe verlängert durch M . Dann fallen wir die Lote $MJ = p$, $MK = q$ und DE , GF . Nun ist $\triangle CED \sim \triangle CJM$, da $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, $\sphericalangle E = \sphericalangle J = 1 R$, und $\triangle CFG \sim \triangle CKM$, da $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, $\sphericalangle F = \sphericalangle K = 1 R$. Also bestehen die Proportionen:

$$p : DE = MC : P, \quad pP = DE \cdot MC \text{ und} \\ q : FG = MC : Q, \quad qQ = FG \cdot MC.$$

Es ist aber $DE = FG$ als Höhen zweier Dreiecke DCH und GCH , welche als Hälften eines Parallelogramms kongruent sind; also ist für den Fall des Gleichgewichts: $pP = qQ$.

p und q sind die Abstände der Kräfte vom Drehpunkt; man nennt sie die Hebelarme der Kräfte. Das Produkt aus Kraft mal Hebelarm, pP und qQ , heisst das statische Moment der Kraft. Wir können somit den Schluss ziehen, dass zwei Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre statischen Momente gleich sind.

Wir hatten bei Ableitung dieses Satzes den Fall ausschliessen müssen, wo die beiden Kräfte einander parallel sind, weil wir bisher nicht im stande sind, dann eine Resultante zu konstruieren. Trotzdem gilt auch dann der Satz, was sich folgendermassen beweisen lässt: Es sei (Fig. 34) M der Drehpunkt des Hebels, an welchem die parallelen Kräfte P und Q angreifen. Wir fügen in ihren Angriffspunkten, die auf einer geraden Linie durch den Drehpunkt liegen mögen, die Kraft R nach entgegengesetzten Seiten zu; dadurch wird nichts geändert, denn diese beiden Zusatzkräfte sind gleich und entgegengesetzt, heben sich also auf. Nun vereinigen wir P mit R zu P_1 , Q mit R zu Q_1 ; wir haben damit zwei nicht parallele Kräfte, die nach dem Vorigen vereinigt werden können. Im Fall des Gleichgewichts ist daher $aP_1 = bQ_1$. Nun ist aber nach der Figur: $a = p \sin \alpha$, $b = q \sin \beta$; $P_1 = \frac{P}{\sin \alpha}$, $Q_1 = \frac{Q}{\sin \beta}$. Setzen wir dies ein, so ergibt sich $pP = qQ$.

Es liegen hierbei die Hebelarme nach entgegengesetzten Richtungen vom Drehpunkt. Die statischen Momente suchen den Hebel nach verschiedenen Richtungen zu drehen; man rechnet dann aber die statischen Momente mit verschiedenen Vorzeichen. Rechnet man z. B. die, welche im Sinne des Uhrzeigers zu drehen suchen, positiv, die anderen negativ, so wäre die Bedingung des Gleichgewichts; $-pP = qQ$ oder $pP + qQ = 0$. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muss die Summe der statischen Momente gleich 0 sein.

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass dieser Satz viel allgemeiner gilt als nur für zwei Kräfte, es können beliebig viele

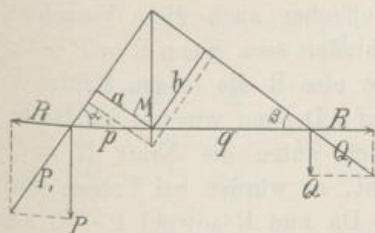


Fig. 34.

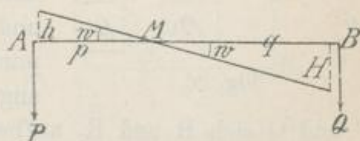


Fig. 35.

Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ mit den Hebelarmen $p_1, p_2, p_3 \dots$ vorhanden sein: sie sind im Gleichgewicht, sobald $p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3 \dots = \Sigma pP = 0$ ist.

§ 42. Dass auch durch den Hebel Arbeit nicht gewonnen wird, lässt sich so erkennen: Sei AB (Fig. 35) der Hebel mit dem Drehpunkt M, den Kräften P und Q. Bei Drehung des Hebels um den $\sphericalangle w$ sollen die Arbeiten auf beiden Seiten sein: Ph und QH. Nun ist $h = p \sin w$, $H = q \sin w$, also $Ph = Pp \sin w$, und $QH = Qq \sin w$; da nach dem Hebelgesetz $Pp = Qq$, sind also die Arbeiten gleich.

Wir haben somit gefunden, dass bei allen einfachen Maschinen, die sich im Gleichgewicht befinden, $Ph = QH$ ist; von diesen beiden Arbeiten wird die eine gewonnen, die andere verbraucht; wir werden also zweckmässig die eine negativ rechnen, daher schreiben: $Ph + QH = 0$. Dieser Satz lässt sich wieder verallgemeinern: Wenn an einem Körper beliebige Kräfte P, $P_1, P_2 \dots$ angreifen, deren Angriffspunkte sich bei einer kleinen Bewegung des Körpers um $p, p_1, p_2 \dots$ in Richtung der Kraft verschieben, so ist, falls die

Kräfte sich das Gleichgewicht halten: $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots = \Sigma Pp = 0$. Diese wichtige Gleichung führt den Namen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§ 43. Zwei Kräfte, die an einem Hebel angreifen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Resultante durch den Drehpunkt geht, d. h. wenn (Fig. 36) $Pp = Qq$. Ist der Drehpunkt nicht fest,

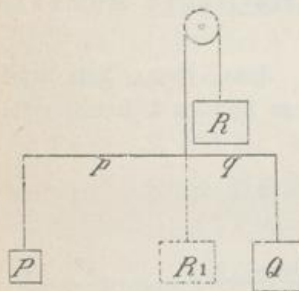


Fig. 36.

so drehen die Kräfte also nicht, aber sie verschieben den Drehpunkt und den ganzen Hebel. Bringen wir am Drehpunkt einen Faden an, der über eine Rolle geht und ein Gewicht R trägt, so wird offenbar auch diese Verschiebung verhindert sein, wenn $R = P + Q$; dann hebt also R die beiden Kräfte P und Q auf. Denken wir uns im Drehpunkt nach unten die Kraft $R_1 = R$ angebracht, so würden bei Fehlen von P und Q sich R und R_1 aufheben. Da nun R sowohl $P + Q$ als auch R_1 aufzuheben vermag, so ist $P + Q$ gleich R_1 , R_1 ist die Resultante von P und Q .

Wir sind somit im stande, auch parallele Kräfte zusammensetzen, was nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte nicht ausführbar ist: Die Resultante zweier paralleler Kräfte ist an Grösse gleich der Summe der Komponenten: $R = P + Q$; ihr Angriffspunkt ist derjenige Punkt der Verbindungslinie der Komponenten, für welchen die statischen Momente der letzten gleich sind: $pP = qQ$. Aus der Thatsache, dass wir zwei parallele Kräfte zu einer Resultante vereinigen können, folgt ohne weiteres auch die umgekehrte Möglichkeit, eine Kraft in zwei ihr parallele andere zu zerlegen. Nennen wir die gegebene Kraft R , die Komponenten, in welche wir sie zerlegen, P und Q , und die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Angriffspunkt der Kraft R : p und q , so gelten wieder die beiden Gleichungen: $P + Q = R$, $pP = qQ$. — Die Aufgabe ist aber wieder unbestimmt, solange nicht noch zwei Bedingungen gegeben sind.

§ 44. Auch wenn parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte vorhanden sind, lässt sich eine Resultante geben: Seien (Fig. 37) P und Q die gegebenen Kräfte, deren Abstand a sei. Wir

zerlegen P in zwei Komponenten R und S nach dem vorigen Paragraphen, und zwar so, dass die eine Komponente, S , am selben Punkte angreift wie Q , und ihm an Grösse gleich ist; nennen wir den Abstand zwischen R und P : b , so ist $P = R + S$, $aS = bR$; oder, wenn wir berücksichtigen, dass $S = Q$ ist:

$$P = R + Q, \quad R = P - Q$$

und
$$aQ = bR, \quad b = \frac{aQ}{R} = \frac{aQ}{P-Q}.$$

Es greifen nun an dem Körper die drei Kräfte R , Q , S an. Da aber Q und S gleich und entgegengesetzt sind und am gleichen Punkte angreifen, heben sie sich auf, es bleibt nur R übrig, welches also die gleiche Wirkung hervorbringt, wie P und Q zusammen.

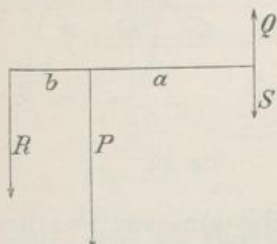


Fig. 37.

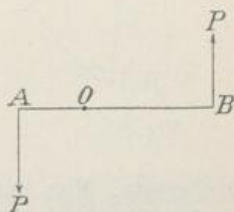


Fig. 38.

R ist also die Resultante der Komponenten P und Q . Sie ist an Grösse gleich der Differenz der Komponenten, ihre Richtung gleich der der grösseren Komponente, ihr Angriffspunkt liegt auf Seite der grösseren Kraft in einem solchen Abstände b , dass die statischen Momente der Resultante und der kleineren Komponente gleich sind für den Angriffspunkt der grösseren Komponente.

Diese Vereinigung von parallelen Kräften, mögen sie gleich oder entgegengesetzt gerichtet sein, zu einer Resultante, ist für beliebig viele Kräfte ausführbar: wir können nach den gegebenen Sätzen erst je zwei Kräfte vereinen, dann je zwei so entstandener Resultanten u. s. w.

Nur in einem Falle ist die Konstruktion einer Resultante unmöglich: wenn zwei Kräfte angreifen, welche gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 38); dann geben nämlich obige Gleichungen für die Resultante $R = P - P = 0$, für den Abstand ihres Angriffspunktes

$$b = a \frac{P}{R} = \frac{aP}{0} = \infty.$$

Es existiert also keine Resultante; die Kräfte bringen eine Drehung hervor. Man nennt zwei solche Kräfte ein Kräftepaar. Ihr statisches oder Drehungsmoment ist $P \cdot \overline{AO} + P \cdot \overline{OB} = P \cdot \overline{AB}$, wo auch der Drehungspunkt liegen möge.

§ 45. Die Hebel spielen im täglichen Leben eine grosse Rolle, eine Unzahl der gebräuchlichsten Werkzeuge beruhen auf

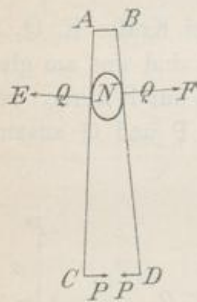


Fig. 39.

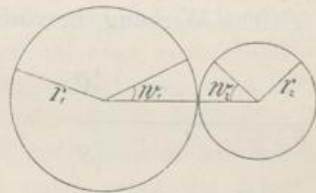


Fig. 40.

dem Hebelgesetz. Man unterscheidet dabei ein- und zweiarmige Hebel. Bei ersteren liegen Kraft und Widerstand auf derselben Seite des Drehpunktes, sind aber entgegengesetzt gerichtet.

Einen solchen einarmigen Hebel bildet z. B. die in Fig. 39 schematisch abgebildete Form eines Nussknackers: A C und B D sind durch Scharniere mit einander verbunden. Dazwischen liegt die Nuss N, während man C und D mit der Hand zusammendrückt. Die hier ausübende Kraft P verhält sich zur Festigkeit der Nuss Q wie A E : A C.

Als Beispiel des zweiarmigen Hebels, bei welchem P und Q auf verschiedenen Seiten des Drehpunktes liegen, sei die Schere, die Zange genannt. Auch die Zahnräder, Schnurläufe, Seilwellen oder Haspeln stellen Hebel vor. Seien in Fig. 40 zwei Zahnräder angedeutet mit dem Radius r_1 und r_2 , von n_1 und n_2 Zähnen. Ist die Breite des Zahnes b, so ist, — da sie bei beiden Rädern identisch sein muss, wenn sie in einander greifen sollen:

$$b = \frac{2r_1\pi}{n_1} = \frac{2r_2\pi}{n_2}, \text{ also } \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2}. \text{ Seien bei Drehung um } x \text{ die}$$

Drehungswinkel der Räder w_1 und w_2 , so ist: $w_1 = \frac{x}{r_1}$, $w_2 = \frac{x}{r_2}$,

also $\frac{w_1}{w_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Das statische Moment der Kräfte ist dabei $D_1 = kr_1$,

$D_2 = kr_2$, also für Zahnradübertragung gilt:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{w_2}{w_1}.$$

§ 46. Wir wollen nun noch einige wichtige Gleichungen für die Zusammensetzung der parallelen Kräfte ableiten. Es seien (Fig. 41) am Hebel AD zwei Kräfte P_1 und P_2 angebracht, R ihre Resultante. Dann ist nach § 42: 1) $R = P_1 + P_2$, 2) $P_1 \cdot BC = P_2 \cdot CD$.

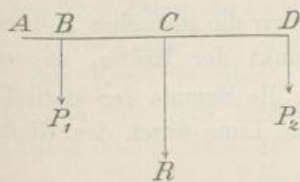


Fig. 41.

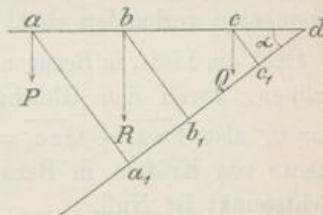


Fig. 42.

Wir wollen jetzt die Abstände nicht von C, dem Angriffspunkt der Resultante, sondern von einem beliebigen Punkte A des Hebels rechnen; wir nennen: $AB = x_1$, $AC = X$, $AD = x_2$, so wird die zweite Gleichung:

$P_1(X - x_1) = P_2(x_2 - X)$ oder $X(P_1 + P_2) = x_1 P_1 + x_2 P_2$ oder $XR = x_1 P_1 + x_2 P_2$. Sind nicht zwei, sondern beliebig viele Kräfte vorhanden, so ist ebenso

$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \Sigma P$; $XR = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots = \Sigma xP$.

Dabei können auch die Kräfte nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sein; sie sind dann nur mit verschiedenen Vorzeichen zu rechnen.

Ein zweiter wichtiger Satz ist folgender: Sind (Fig. 42) in a und c an einem Hebel zwei Kräfte P und Q angebracht, greift in b ihre Resultante R an, und ist $a_1 d$ eine beliebige gerade Linie, welche den Hebel oder seine Verlängerung schneidet unter dem $\sphericalangle \alpha$, so nennt man Paa_1 , das Produkt aus einer Kraft und dem Abstand ihres Angriffspunktes von der Linie $a_1 d$, das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die Linie $a_1 d$. Dann gilt der Satz: die Summe der statischen Momente der Kräfte P und Q in Bezug

auf $a_1 d$ ist gleich dem statischen Moment ihrer Resultante R in Bezug auf $a_1 d$: in Gleichung

$$P \overline{a a_1} + Q \overline{c c_1} = R \overline{b b_1}.$$

Der Beweis ist leicht zu geben; nach dem vorigen Satze ist:

$$P \overline{a d} + Q \overline{c d} = R \overline{b d}. \quad \text{Da } a d = \frac{a_1 d}{\cos \alpha}, \quad b d = \frac{b_1 d}{\cos \alpha}, \quad c d = \frac{c_1 d}{\cos \alpha},$$

so haben wir auch:

$$P \frac{a_1 d}{\cos \alpha} + Q \frac{c_1 d}{\cos \alpha} = R \frac{b_1 d}{\cos \alpha}, \quad \text{oder} \quad P \overline{a_1 d} + Q \overline{c_1 d} = R \overline{b_1 d}.$$

Der Satz gilt auch, wenn nicht zwei, sondern beliebig viele Komponenten vorhanden sind.

Geht die Linie, in Bezug auf welche wir die statischen Momente berechnen, durch den Gleichgewichtspunkt der Kräfte, so wird $\overline{b_1 b} = 0$, also $P \overline{a a_1} + Q \overline{c c_1} = 0$, d. h. die Summe der statischen Momente von Kräften in Bezug auf eine Linie durch den Gleichgewichtspunkt ist Null.

Der Satz bleibt offenbar auch noch richtig, wenn $a_1 d$ nicht in derselben Ebene liegt wie die Kräfte P, R, Q ; denn man kann sich z. B. $a_1 d$ um $a d$ als Axe gedreht denken, so dass es einen Kegel beschreibt; für jede Lage, die es dabei einnimmt, gilt obiger Beweis. Denken wir es uns z. B. so gedreht, dass es in einer Ebene durch $a d$ senkrecht zur Zeichnung liege. Dann brauchen die Angriffspunkte $a, b, c \dots$ der Kräfte und ihrer Resultante nicht mehr in einer Linie zu liegen, sondern können beliebig über die genannte Ebene verteilt sein. Immer können wir von jedem der Punkte ein Lot auf $a_1 d$ fällen und obigen Satz anwenden. Dies gibt uns die Möglichkeit, beliebig viele parallele Kräfte, die an den Punkten einer Ebene angreifen, zu einer Resultante zu vereinigen.

Sei in Fig. 43 ABCD eine solche Ebene, $a, b, c \dots f$ Angriffspunkte der Kräfte, die wir uns also senkrecht zur Zeichnung denken. Wir fällen von $a, b, c \dots$ Lote auf eine beliebige Linie EF in dieser Ebene, nennen sie $x_1, x_2, x_3 \dots$, die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$. Dann ist nach dem letzten Satze $\Sigma P x = R X = X \Sigma P$, wenn wir mit $R = \Sigma P$ die Resultante, mit X ihren Abstand von EF bezeichnen. Wir ziehen $GH \parallel EF$ in diesem Abstände X , dann muss auf GH der Angriffspunkt der Resultante liegen. Dieselbe Konstruktion machen wir für eine zweite beliebige Linie JK; wir finden wieder eine zweite ihr parallele, LM, in der die Resultante

angreifen muss. Folglich ist der Schnittpunkt N von GH und LM der Angriffspunkt der Resultante, deren Grösse $= \Sigma P$.

Zweckmässig wird man natürlich als EF und JK die Koordinatenachsen X und Y nehmen; dann sind die Lote von $a, b \dots$ einfach die Koordinaten dieser Punkte, und X, Y der Resultante sind die Koordinaten ihres Angriffspunktes.

Der Satz lässt sich endlich auch erweitern auf parallele Kräfte, deren Angriffspunkte beliebige Punkte eines Körpers bilden. Füllen wir von den Angriffspunkten der Kräfte Lote auf eine beliebige Ebene, so heisst das Produkt aus Kraft mal Lot: statisches Moment der Kraft in Bezug auf jene Ebene. Es gilt auch hier wieder der Satz, dass die Summe der statischen

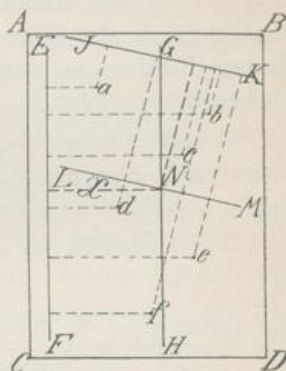


Fig. 43.

Momente der Kräfte in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich dem statischen Moment der Resultante in Bezug auf dieselbe Ebene ist. Führt man dies für drei Ebenen — die Koordinatenebenen — aus, so kann man die Koordinaten des Angriffspunktes, des sog. Mittelpunktes der parallelen Kräfte, berechnen.

Geht die Linie oder Ebene, in Bezug auf welche die statischen Momente genommen werden, durch den Angriffspunkt der Resultante, so wird das Lot von der Resultante auf sie $= 0$, d. h. das statische Moment der Resultante wird $= 0$; fällen wir daher auf eine Linie oder Ebene, welche durch den Mittelpunkt paralleler Kräfte geht, Lote $x, x_1, x_2 \dots$ von den Angriffspunkten der Kräfte $P, P_1, P_2 \dots$, so ist $\Sigma Px = 0$.

§ 47. Den wichtigsten Fall paralleler Kräfte, der in der Natur vorkommt, bietet die Schwere dar. Wir haben gesehen, dass auf jeden schweren Massenpunkt m die Kraft mg nach dem Erdmittelpunkt wirkt. Bei einem endlichen Körper greifen also an allen Teilchen parallele Kräfte $m_1g, m_2g, m_3g \dots$ an. Nach den vorigen Sätzen können wir diese sämtlichen Kräfte durch eine Resultante ersetzen, welche wir die Schwere oder das Gewicht des Körpers nennen; ihr Angriffspunkt heisst der Schwerpunkt des Körpers, er ist der Mittelpunkt der parallelen Kräfte oder der Massenmittelpunkt.

Wenden wir den zweiten Satz des vorigen Paragraphen an, indem wir die statischen Momente in Bezug auf drei rechtwinklige Koordinatenebenen der x , y , z bilden; nennen wir die Abstände der Massenpunkte $m_1, m_2, m_3 \dots$, von den Koordinatenebenen $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2 \dots$, die Resultante K , die Koordinaten ihres Angriffspunktes, d. h. des Schwerpunktes X, Y, Z , endlich die Masse des ganzen Körpers $m_1 + m_2 + \dots = \Sigma m = M$, so haben wir die Gleichungen:

$$K = m_1 g + m_2 g + m_3 g + \dots = g \Sigma m = g M$$

$$K X = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \dots = \Sigma g m x,$$

oder

$$g M X = g \Sigma m x$$

$$g M Y = g \Sigma m y$$

$$g M Z = g \Sigma m z,$$

also finden sich die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$X = \frac{\Sigma m x}{M}, \quad Y = \frac{\Sigma m y}{M}, \quad Z = \frac{\Sigma m z}{M}.$$

Legen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Schwerpunkt,

so ist $X = 0, Y = 0, Z = 0$, also $\frac{\Sigma m x}{M} = \frac{\Sigma m y}{M} = \frac{\Sigma m z}{M} = 0$,

also $\Sigma m x = 0, \Sigma m y = 0, \Sigma m z = 0$.

Soll ein Körper unter Einfluss der Schwere im Gleichgewicht sein, so muss die Richtung der Resultante, welche im Schwerpunkt angreift, durch den Unterstützungspunkt gehen, und diese Bedingung ist auch hinreichend für das Gleichgewicht (§ 41). Dabei sind drei Fälle möglich:

1. Der feste Punkt fällt mit dem Schwerpunkt zusammen: dann geht die Resultante bei jeder Stellung des Körpers durch den festen Punkt, der Körper ist in jeder Stellung im Gleichgewicht, welches man indifferentes Gleichgewicht genannt hat.

2. Der Schwerpunkt liegt unter dem festen Punkt: dann wird bei jeder kleinsten Drehung der Schwerpunkt gehoben, die Resultante geht nicht mehr durch den Unterstützungspunkt, aber sie sucht den Körper in die ursprüngliche Lage zurückzuführen, es entstehen Schwingungen um dieselbe. Man spricht in diesem Falle von stabilem Gleichgewicht, weil der Körper in der ursprünglichen Lage zu verharren sucht.

3. Der Schwerpunkt liegt senkrecht über dem festen Punkt: bei einer kleinsten Ablenkung wird der Schwerpunkt sinken; die

Resultante geht nicht mehr durch den festen Punkt, sie lässt den Schwerpunkt immer weiter sinken, bis der Körper im stabilen Gleichgewicht zur Ruhe kommt. Bei jeder Störung entfernt sich also der Körper immer weiter aus dieser Lage des labilen Gleichgewichts.

Wir können diese drei Fälle auch noch durch Folgendes charakterisieren: Im ersten Fall leistet bei einer Drehung des Körpers die Schwere keine Arbeit, potentielle und kinetische Energie werden nicht geändert. Im dritten Fall leistet die Schwere Arbeit, die potentielle Energie nimmt ab, die kinetische wächst; im zweiten Fall endlich bewegt sich bei einer Verschiebung der Körper gegen die Schwere, es wird Arbeit verbraucht, die potentielle Energie wächst. In diesem Falle ist also die Arbeit, welche die Schwere schon geleistet hat, ein Maximum, und dies Kennzeichen gilt allgemein, wenn ein Körper unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte in stabilem Gleichgewicht sein soll; es ist dann immer die potentielle Energie ein Minimum.

§ 48. Eine sehr wichtige Anwendung findet der Hebel in der Wage zur Vergleichung von Gewichten oder Massen.

Wir haben gesehen, dass ein Hebel, der um einen Punkt drehbar ist, sich im Gleichgewicht befindet, wenn $MgA = mga$, wo Mg und mg zwei Kräfte, A und a die Hebelarme bedeuten. Je nachdem $a = A$ ist oder nicht, unterscheidet man gleicharmige oder ungleicharmige Wagen. Die ersteren sind die wichtigeren, da sie zu genauen Gewichtsbestimmungen allein brauchbar sind. Wir wollen die Bedingungen für die Konstruktion einer vollkommenen Wage untersuchen.

1. Die unbelastete Wage soll im Gleichgewicht sein, ihr Balken horizontal stehen, ebenso, wenn auf beide Schalen gleiche Gewichte gesetzt sind. Daraus ergibt sich, dass $a = A$ sein muss, und die Schalen gleich schwer; denn nennen wir die Gewichte der Schalen P und P_1 , die Zusatzgewichte Q , so soll im unbelasteten Zustand $Pa = P_1A$ sein, im belasteten $(P + Q)a = (P_1 + Q)A$; durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten folgt: $Qa = QA$, d. h. $a = A$, und dann aus der ersten: $P = P_1$.

2. Für ein kleines Uebergewicht auf einer Schale soll die Wage sich neigen, einen Ausschlag geben, aber nicht umschlagen; d. h. wir müssen stabiles Gleichgewicht bei der un-

belasteten Wage haben, der Schwerpunkt des Balkens und der Schalen muss unter dem Drehpunkt liegen.

3. Sei in Fig. 44 MN eine Horizontale, OP eine Vertikale. Liege in A der Drehpunkt des Wagebalkens, die Aufhängepunkte der Schalen seien B und C, so dass im Gleichgewicht AB und AC mit der Horizontalen Winkel β bilden. Der Schwerpunkt des Balkens

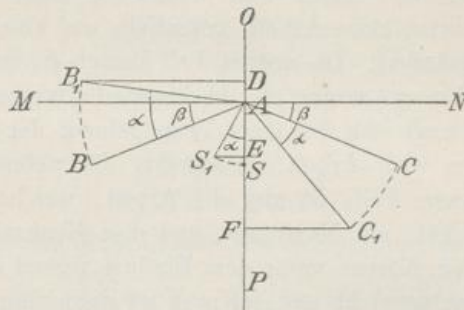


Fig. 44.

und der Schalen liege in S, das Gewicht des Balkens und der Schalen sei p . Nun denken wir uns auf die linke Schale das Gewicht Q , auf die rechte das Gewicht $Q + q$ aufgelegt.

Durch das Uebergewicht q dreht sich die Wage, sie gibt einen Ausschlag α , wodurch B, C, S nach B_1 , C_1 , S_1 gelangen. Die Wage ist jetzt wieder im Gleichgewicht, die statischen Momente sind auf beiden Seiten des Drehpunktes gleich. Daher ist die Summe der statischen Momente in Bezug auf eine Linie durch den Drehpunkt gleich 0 (§ 46). Nehmen wir als solche Linie die vertikale OP, so ist also $Q \cdot \overline{B_1D} + p \overline{S_1E} - (Q + q) \overline{C_1F} = 0$.

Nennen wir die Länge der Wagearme $BA = AC = l$, und die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Drehpunkt $AS = s$, so ist:

$$\begin{aligned} B_1D &= l \sin B_1AD = l \cos B_1AM = l \cos (\alpha - \beta) \\ C_1F &= l \sin FAC_1 = l \cos C_1AN = l \cos (\alpha + \beta) \\ S_1E &= s \sin \alpha. \end{aligned}$$

Daher wird obige Gleichung

$$Ql \cos (\alpha - \beta) + ps \sin \alpha = (Q + q) l \cos (\alpha + \beta),$$

was sich durch trigonometrische Zerlegung der \cos leicht in die

$$\text{Form bringen lässt: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{ql}{(2Q + q)l \operatorname{tg} \beta + \frac{ps}{\cos \beta}}.$$

Bei kleinem Ausschlag — und solche werden bei Wagen allein benutzt — ist die Tangente gleich dem Winkel. Obige Gleichung gibt also den Ausschlag α an für ein Uebergewicht q bei einer Belastung der Wage mit Q . Die Gleichung zeigt, dass der Ausschlag für dasselbe Uebergewicht von der Belastung Q abhängt, sobald β nicht gleich 0 ist, und zwar, dass α abnimmt mit wachsendem Q .

Ganz ebenso lässt sich berechnen, dass, wenn die Punkte B und C oberhalb der Horizontalen durch den Drehpunkt liegen, der Ausschlag für dasselbe Uebergewicht q von der Belastung abhängt, mit ihr wächst. Für den praktischen Gebrauch wünscht man aber für das gleiche Uebergewicht stets den gleichen Ausschlag; daher muss $\beta = 0$ sein, denn dann gibt unsere Gleichung: $\alpha = \frac{ql}{ps}$.

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausschlag proportional dem Uebergewicht ist. Den Ausschlag für das Uebergewicht $q = 1$ — wobei je nach der Feinheit der Wage 1 *mg*, 1 *cg* oder 1 *dg* genommen wird — nennt man die Empfindlichkeit der Wage. Die Gleichung zeigt, dass die Empfindlichkeit wächst mit der Länge der Arme, dass sie desto grösser ist, je kleiner p , das Gewicht des Balkens, und je kleiner s , die Entfernung des Schwerpunkts unter dem Drehpunkt. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen für die Konstruktion: Wir können s nicht = 0 machen, denn dann würde $\alpha = \infty$, die Wage würde für das kleinste Uebergewicht sich vertikal stellen, wir hätten labiles Gleichgewicht; l darf nicht zu gross gemacht werden, weil sonst die Wage zu langsam schwingt; daher bleibt nur übrig: der Wagebalken muss möglichst leicht sein; er wird daher durchbrochen gearbeitet, so dass er bei möglichster Festigkeit gegen Durchbiegung doch leicht ist; die Aufhängepunkte der Wagschalen liegen in derselben Ebene wie der Drehpunkt.

Der Drehpunkt, sowie die Aufhängepunkte der Schalen bestehen bei feinen Wagen aus Stahlschneiden, welche sich auf Achatplatten bewegen. Der Balken nimmt daher etwa die durch Fig. 45 skizzierte Gestalt an: die Mittelschneide A ist ein nach abwärts gerichtetes Stahlprisma, welches auf einer von dem Wagegestell getragenen Achatplatte ruht. In B und C sind zwei Stahlprismen mit der scharfen Kante aufwärts befestigt, auf welche Achatplatten gelegt werden, an denen die Schalen hängen. Am Balken ist ein Zeiger D angesetzt, welcher sich vor einer Teilung bewegt und

den Ausschlag der Wage abzulesen gestattet. Oben auf dem Balken ist noch eine Schraube E angebracht, auf welcher sich Mutter und Kontremutter bewegen lassen; dadurch, dass man sie höher oder

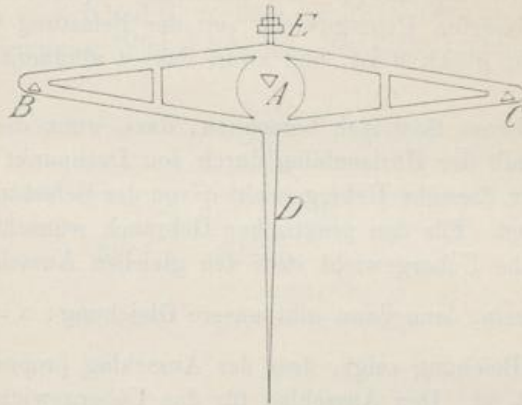


Fig. 45.

tiefer schraubt, kann man den Schwerpunkt des Balkens verlegen, s ändern, und so die Empfindlichkeit der Wage vermehren oder vermindern.

Die Schneiden werden durch Schrauben an ihrer Stelle gehalten; der Wagenbauer hat sie so zu justieren, dass sie genau in derselben Ebene und einander parallel stehen. Für eine gute Wage müssen die Schneiden eine durchaus scharfe und geradlinige Kante besitzen, sonst ändert sich beim Schwingen der Wage die Länge der Hebelarme. Denn seien z. B. die beiden Aussenschnitten A oben rund (Fig. 46); auf ihnen liegen die Achatplatten B, an denen die Schalen hängen. Die B bleiben stets horizontal und liegen daher auf dem höchsten Punkt der Schneiden. Sind in der Gleichgewichtslage AA, die höchsten Punkte der Schneiden, gleich weit entfernt vom Drehpunkt, so ist die Wage gleicharmig; sobald sie aber einen Ausschlag macht, in die Lage A_1A_1 kommt, rollen die B auf den Schneiden; auf der gehobenen Seite wird der Arm länger, auf der gesenkten kürzer, wodurch der Schwingung entgegengewirkt wird, der Ausschlag zu klein wird. Ganz denselben Einfluss hat es, wenn die Schneiden gekrümmt oder nicht ganz parallel gestellt sind.

Bei allen physikalischen genauen Wägungen bestimmt man das Gewicht eines Körpers nicht, indem man durch Auflegen von

Gewichten auf die andere Schale Gleichgewicht herzustellen sucht, sondern man bringt nur ungefähr Gleichgewicht hervor und beobachtet dann den Ausschlag. Der Ausschlag dividiert durch die Empfindlichkeit gibt dann die Gewichts-differenz zwischen Körper und Gewichten.

Die Gewichtsätze sind so eingerichtet, dass sie mit möglichst wenig Stücken alle beliebigen Gewichte herzustellen gestatten. Man hat in Grammen 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50, 100, 100, 200, 500. Mit diesen 12 Stücken kann man alle Kombinationen von 1 g bis 1000 g herstellen, ebenso hat man nach abwärts 0,5, 0,2, 0,1, 0,1,

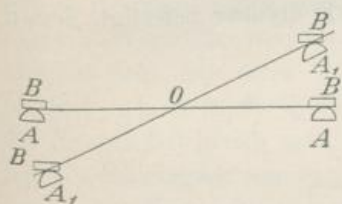


Fig. 46.

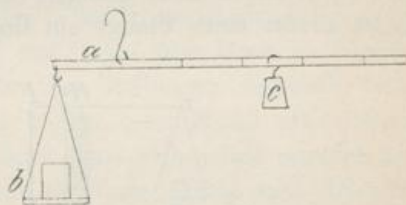


Fig. 47.

0,05, 0,02, 1,01, 0,01, 0,005, 0,002, 0,001, 0,001. Durch diese 24 Gewichte kann man dann von 1 mg bis 1 Kilogramm, von mg zu mg fortgehend, jedes Gewicht herstellen. Die Gewichte von 1 g aufwärts werden meist aus Messing hergestellt, dann vergoldet oder platinirt, um sie vor Oxydation und Gewichtsänderung zu schützen; kleinere Stücke werden aus Platin, die kleinsten wohl aus Aluminium gefertigt.

Die Wage ist das empfindlichste Instrument, welches wir kennen. Die besten Wagen lassen bei 1 Kilogramm Belastung noch 0,01 mg beobachten, d. h. wir können eine Grösse bis auf 1 Hundertmillionstel bestimmen.

§ 49. Von den ungleicharmigen Wagen seien zwei viel gebräuchte Formen erwähnt:

Die römische Schnellwage ist ein ungleicharmiger Hebel, an dessen kürzerem Arm von konstanter Länge a (Fig. 47) die Schale b hängt, während an dem längeren anderen Arm ein Gewichtsstück c verschiebbar ist. Der Arm besitzt Kerben, die vom Drehpunkt im Abstand a , $2a$, $3a$ u. s. w. und in Unterabteilungen angebracht sind. Man schiebt das Gewicht auf eine solche Kerbe, dass Gleichgewicht vorhanden ist. Ist dies z. B. die Kerbe im

Abstand $2 \frac{1}{2} a$, so ist $b = 2 \frac{1}{2} c$. Für c wird gewöhnlich 1 Kilo genommen; man kann so mit einem Gewichtsstück sehr schnell angenähert das Gewicht bestimmen.

Die Dezimalwage wird gebraucht, wenn man sehr grosse Gewichte bestimmen will, die sich nicht wohl in die Schalen einer gleicharmigen Wage bringen lassen. Fig. 48 skizziert eine Dezimalwage: A ist das feste Wagegestell, welches bei H eine Schneide trägt, auf welcher der ungleicharmige Wagebalken JF ruht. In J ist die Gewichtsschale angehängt, während an dem anderen Hebelarm in G und F zwei Stangen angehängt sind, GB und FD. In D ist an der einen Stange ein Brett DE drehbar befestigt, dessen

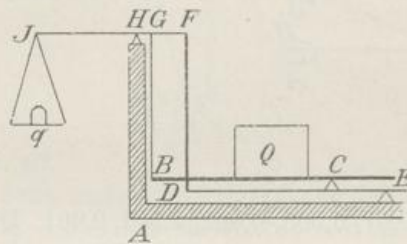


Fig. 48.

anderes Ende auf einer festen Schneide E ruht; in B ist das Brett, welches die zu wiegende Last aufnehmen soll, BC, angehängt, dessen anderes Ende C auf einer Schneide liegt, die auf dem Brette DE befestigt ist. Die Verhältnisse sind so gewählt, dass: $HG : HF = 1 : 5$ und $EC : ED = 1 : 5$.

Die Last Q drückt auf BC; sie wirkt als Zug Q_1 an der Stange BG und als Druck Q_2 auf die Schneide C, somit auf DE, wobei $Q_1 + Q_2 = Q$. Für Q_1 an BG können wir uns $\frac{1}{5} Q_1$ an F, dem fünfmal längeren Hebelarm angebracht denken; und für den Druck Q_2 in C können wir $\frac{1}{5} Q_2$ in D an dem fünfmal längeren Hebelarm setzen. Die Wirkung von Q lässt sich also ersetzen durch $\frac{1}{5} Q_1 + \frac{1}{5} Q_2 = \frac{1}{5} Q$ in F. Nun ist noch $JH = 2HF$, also wird das Gewichtsstück q, welches Q das Gleichgewicht hält, halb so gross sein, wie das in F anzubringende Gewicht, d. h. $q = \frac{1}{10} Q$.

Man kann also die Körper durch nur $\frac{1}{10}$ so schwere Gewichte abwiegen. Ganz ebenso sind die Centesimalwagen, bei welchen $\frac{1}{100}$ des Gewichts genügt, gebaut.

Der Grund, aus welchem den Wagen die beschriebene Konstruktion gegeben ist, ist folgender: Eine Wage wird nur dann brauchbar, richtig sein, wenn sie für denselben Körper dasselbe Gewicht ergibt, wo er auch auf der Wageschale oder dem Brett BC (Fig. 48) stehen mag. Wir haben gesehen, dass für einen Hebel, der im Gleichgewicht ist, bei einer kleinen Drehung die Arbeit auf beiden Seiten identisch ist (§ 42). An der Dezimalwage senke sich nun z. B. q um h , gleichzeitig steige Q um H , so ist also $qh = QH$. Soll die Wage für jede Stellung von Q auf dem Brett im Gleichgewicht sein, so muss QH für alle Stellungen identisch sein, immer $= qh$, d. h. da Q dasselbe bleibt, muss H für alle Stellen des Brettes BC gleich sein, das Brett muss sich selbst parallel auf und ab schwingen; nur dann kann die Wage richtig sein. Dies ist durch die Konstruktion erreicht; den $JH : HG = 1 : 10$, also G und damit das eine Ende des Brettes, B, hebt sich um $H = \frac{1}{10} h$.

Ferner ist $JH : HF = 1 : 2$, daher hebt sich F, somit D um $\frac{1}{2} h$; da aber $EC : ED = 1 : 5$, so hebt sich C, das andere Ende des Brettes BC nur $\frac{1}{5}$ so viel wie D, also auch um $H = \frac{1}{10} h$. Das Brett bleibt sich also parallel, und wir haben auch für die Dezimalwage das Gesetz von der Konstanz der Arbeit, $qh = QH$, bestätigt.

Wagen geben in Wahrheit eine Vergleichung von Kräften, beim Gleichgewicht ist $Mg = mg$. Da aber an jeder Stelle g für beide Wagschalen identisch ist, folgt auch $M = m$, die Massen sind gleich. Eine der besprochenen Wagen gibt an jeder Stelle der Erde die gleichen Angaben. — Das ist aber nicht der Fall bei Federwagen.

§ 50. Wir wenden uns nun zur Untersuchung rotierender Körper. Ein solcher bestehe aus den Massenteilchen $m_1, m_2, m_3 \dots$; er rotiere um die Axe A, welche senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, während sich in S der Schwerpunkt befinde (Fig. 49). Dann wirkt auf jeden Massenpunkt die Centrifugalkraft mrv^2 , wenn wir mit r den Abstand von der Drehaxe, mit w die Winkel-

geschwindigkeit bezeichnen (§ 26). Diese Kraft sei durch ma dargestellt. Wir zerlegen sie in zwei Komponenten mb und mc , von welchen mc parallel einer Linie AS durch Drehpunkt und Schwerpunkt sei, erstere, mb , senkrecht dazu. Dann ist, wenn $BA = x$, $mB = y$ die Koordinaten des Punktes m in Bezug auf A sind und $\sphericalangle mAB = \alpha$ genannt wird:

$$\overline{mb} = \overline{ma} \sin \alpha = m r w^2 \sin \alpha = m r w^2 \frac{y}{r} = m y w^2,$$

$$\overline{mc} = \overline{ma} \cos \alpha = m x w^2.$$

Summieren wir diese Kräfte für alle Teilchen, so finden wir die beiden Summen: $\Sigma (m y w^2)$ und $\Sigma (m x w^2)$ als Kräfte, welche auf den Körper wirken, oder, da w konstant ist: $w^2 \Sigma (m y)$ und $w^2 \Sigma (m x)$. Nun sind die y die Abstände von einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene, also (§ 47) $\Sigma m y = 0$, und es bleibt: $w^2 \Sigma m x$, eine Kraft, welche die Drehaxe zu verschieben sucht und stets nach dem Schwerpunkt zu gerichtet ist.

Fällt A mit S zusammen, d. h. dreht sich der Körper um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht, so wird auch $\Sigma m x = 0$,

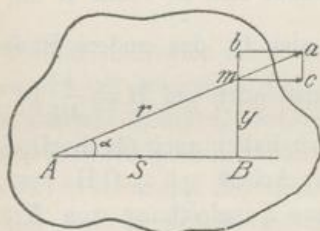


Fig. 49.

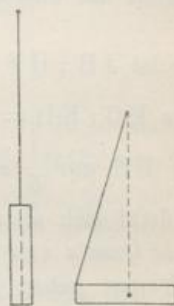


Fig. 50.

d. h.: bei Rotation eines Körpers um irgend eine Axe ist eine Kraft $w^2 \Sigma m x$ vorhanden, welche die Axe zu verschieben sucht, so dass sie festgehalten werden muss, wenn der Körper dauernd um sie rotieren soll; bei Rotation um eine Axe durch den Schwerpunkt ist keine solche Kraft vorhanden, die Axe braucht nicht festgehalten zu werden, man nennt sie daher eine freie Rotationsaxe. Rotiert ein Körper so, dass seine Axe sich verschieben kann, hängt man ihn z. B. an einem Faden auf, der gedreht wird, so verschiebt sich infolge jener Kraft die Axe so lange, bis sie durch den Schwerpunkt geht, also eine freie Rotationsaxe geworden ist. Jede Linie

durch den Schwerpunkt ist eine solche freie Axe, es gibt deren also für jeden Körper ∞ viele. Es lässt sich aber zeigen, dass sie sich verschieden verhalten. Die Centrifugalkraft sucht nämlich noch die ganze Masse bei der Drehung möglichst weit von der Axe zu entfernen. Haben wir (Fig. 50) einen Cylinder an einen Faden angehängt, der in rasche Drehung versetzt wird, so kann er in der ersten Stellung rotieren, weil die Axe, die Fadenrichtung, durch den Schwerpunkt S geht; sobald aber der Cylinder erschüttert wird, gerät er ins Schwanken und nimmt schliesslich die Stellung 2 an, wobei er auch um eine freie Axe rotiert, aber die Masse weiter von der Axe abliegt. Die zweite Axe entspricht einer stabilen, die erste einer labilen Stellung (vgl. § 47). Die schnell rotierenden Körper suchen sich nun alle so zu stellen, selbst gegen den Einfluss der Schwere, wie in obigem Beispiel der Cylinder, dass sie um eine stabile freie Axe rotieren.

§ 51. Wenn bei einem schnell um eine stabile freie Axe rotierenden Körper keine Kraft auf die Axe wirkt, welche sie zu verstellen sucht, so sucht er mit bedeutender Kraft seine Stellung im Raume unverändert beizubehalten. Denn an jedem Teilchen wirkt die Centrifugalkraft in der zur Axe senkrechten Ebene, und soll der Körper sich neigen, so müssen ziemlich grosse Kräfte als Komponenten der Centrifugalkraft zugefügt werden, durch welche sie die neue Richtung annehmen würde. Das tritt in auffallender Weise bei Kreiseln auf, namentlich wenn sie grosse Masse besitzen. Auch die Erde bietet ein Beispiel, indem ihre Axe dieselbe Richtung im Raum behält.

Wirkt aber auf die Axe eine Kraft, so bewegt sich die Axe stets senkrecht zur Richtung der Kraft. Diese zunächst auffallende Thatsache erklärt sich in einfacher Weise folgendermassen.

Es sei in Fig. 51 ein Kreisel skizziert, der aus einer Axe AB und einer schweren Kreisscheibe CD besteht. Ein Punkt E des vorderen Randes rotiere nach rechts herüber mit der Geschwindigkeit EF . Der Kreisel soll in der Ebene der Zeichnung geneigt werden, so dass die Axe AB die Stellung A_1B_1 annimmt. Welche Kraft muss dazu einwirken? Bei der Neigung des Kreisels muss die Geschwindigkeit EF in die Geschwindigkeit EG umgewandelt werden. Dazu muss aber, wie leicht ersichtlich, dem Punkte E eine aufwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente EH hinzu-

gefügt werden, damit EH und EF die Resultate EG ergeben. Am hinteren entgegengesetzten Punkte des Randes, welcher die Geschwindigkeit JK hat, muss die abwärts gerichtete Komponente JM hinzugefügt werden, damit die neue Geschwindigkeit JL entstehe. Damit also der Kreisel sich in der Ebene des Papiers nach links neige, muss eine Kraft auf ihn wirken, welche E hebt, J senkt, d. h. eine Kraft, welche die Axe des Kreisels senkrecht gegen die Ebene der Zeichnung drehen würde.

Sehr auffallend wird diese Wirkung, sobald eine schwache Kraft dauernd auf die Axe wirkt. Lassen wir einen Kreisel mit geneigter Axe rotieren, so sucht in jedem Moment die Schwere den Kreisel noch mehr zu neigen; die Axe bewegt sich stets senkrecht zu dieser Kraft, sie beschreibt einen Kegel um die Vertikale, dessen Spitze in der Spitze des Kreisels liegt. Die Geschwindigkeit dieser

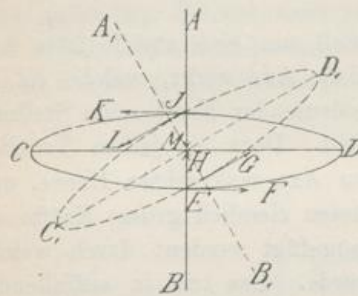


Fig. 51.

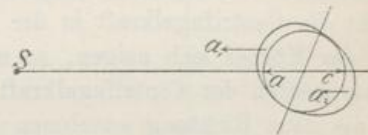


Fig. 52.

Kegelbewegung hängt von der Grösse der wirkenden Kraft und von der Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels ab.

Dieselbe Bewegung findet sich bei der Erdaxe aus folgendem Grunde: Wir können uns die Erde aus einer Kugel und einem wulstförmigen Ringe um den Aequator zusammengesetzt denken, entsprechend ihrer ellipsoidischen Gestalt (Fig. 52). Auf das Centrum der Kugel wirken Anziehung nach der Sonne S und Centrifugalkraft (wegen Umlauf der Erde um die Sonne) gleich und entgegengesetzt, $a = c$. Auf den der Sonne zugekehrten Teil des Wulstes dagegen wirkt die Anziehung der Sonne stärker, da er näher ist, als der Erdmittelpunkt, $a_1 > a$; also haben wir $a_1 > c$. Für den der Sonne abgewandten Teil des Wulstes ist aus denselben Gründen $a_2 < c$. Es sind also zwei Kräfte $a_1 - c$ und $c - a_2$ vorhanden, welche die Erdaxe senkrecht zur Erdbahn zu stellen suchen; da die

Erde um die eigene Axe rotiert, folgt sie diesen Kräften nicht, sondern die Axe beschreibt einen Kegel. Man nennt dies die Präcessionsbewegung. Der Kegel wird in 25800 Jahren (Platonisches Jahr) einmal durchlaufen. Da ausserdem die Erde in verschiedene Entfernung von der Sonne kommt (Perihelium und Aphelium) und mit verschiedener Geschwindigkeit um die Sonne läuft, verändern sich die Kräfte, welche die Axe zu verstellen suchen, und daher ändert sich die Geschwindigkeit der Präcessionsbewegung. Ebenso wirkt der Mond je nach seiner Stellung verschieden. Die so hervorgebrachten Aenderungen der Präcessionsbewegung bilden einen Teil der sog. Nutation.

§ 52. Wir haben bisher zwei Hauptsätze der Mechanik kennen gelernt: 1. den Satz von der Trägheit, welcher zuerst von Descartes ausgesprochen wurde; 2. den Satz, dass eine Kraft durch das Produkt mg gemessen wird, worin der Satz vom Parallelogramm der Kräfte liegt. Dieser Satz rührt von Newton her. Von demselben ist noch ein dritter fundamentaler Satz ausgesprochen worden, welcher als der Satz von der Wirkung und Gegenwirkung (actio und reactio) bezeichnet wird.

Dieser Satz sagt aus, dass, wenn von einem Körper eine Wirkung auf einen zweiten ausgeübt wird, z. B. ein Stoss, ein Druck, ein Zug u. s. w., vom zweiten genau dieselbe Wirkung, nur in entgegengesetzter Richtung auf den ersten ausgeübt wird. Drückt ein Gewichtsstück auf den Tisch, so drückt der Tisch ganz ebenso stark das Gewicht nach oben; ziehe ich an einem Strick, so zieht der Strick mich ebensosehr in entgegengesetzter Richtung. Die Wirkung eines Körpers auf einen zweiten hängt ab von seiner Masse und seiner Geschwindigkeit; eine eiserne Kugel wirkt mehr als eine hölzerne von gleicher Grösse und um so mehr, je schneller sie sich bewegt. Als Maß der Wirkung nimmt man daher das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, welches Bewegungsmenge oder Bewegungsmoment genannt wird. Sind also die Massen zweier Körper M und m , bekommen sie durch die gegenseitige Einwirkung die Geschwindigkeiten V und v , so ist nach dem Newtonschen Satz $MV = mv$.

Als Wirkung einer Kraft betrachten wir sonst die Arbeit, welche die Kraft leistet, d. h. das Produkt aus Kraft mal Weg. Wenn aber die Wirkung nur sehr kurze Zeit dauert, wie es z. B. bei dem Zusammenstoss von Körpern, bei explosionsartigen Wir-

kungen u. s. w. der Fall ist, so versagt jenes Maß für die Wirkung, weil in der sehr kurzen Zeit der Weg unendlich klein ist. Die Wirkung äussert sich dann aber in einer Aenderung der Geschwindigkeit, welche wieder der Masse umgekehrt proportional ist, so dass eben mv ein Maß der Wirkung wird. Da eine Kraft $k = ma$, wo $a =$ Beschleunigung, und $a = \frac{v}{t}$, so $k = \frac{mv}{t}$, oder $mv = kt$. kt nennt man den Impuls des Stosses.

Aus dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ergibt sich ein wichtiger Satz über sog. innere Kräfte; man versteht darunter Kräfte, welche zwischen verschiedenen Teilen ein und desselben Körpersystems wirken. Die Wirkungen dieser Kräfte sind nach dem Newtonschen Satz immer paarweise vorhanden, gleich und entgegengesetzt, ihre Summe ist also Null, sie können niemals den Schwerpunkt eines Systems verschieben oder seine Geschwindigkeit ändern. Denken wir uns nämlich in einem System zwei Massen, die wir $2m$ und m nennen wollen, etwa im Abstände $= 6$ von einander, welche sich etwa infolge der Schwerkraft anziehen; der gemeinsame Schwerpunkt liegt nach dem früheren in ihrer Verbindungslinie im Abstand 2 von $2m$, im Abstand 4 von m . Nähern sich nun die Massen infolge ihrer Wirkung, verschiebt sich $2m$ um 1 , so muss sich m um 2 verschieben, da $MV = mv$ sein muss. Wie man erkennt, liegt auch nach dieser Verschiebung der Schwerpunkt an seiner ursprünglichen Stelle, jetzt im Abstände 1 und 2 von den Massen.

Dasselbe gilt für jedes beliebige Massensystem, da wir uns je zwei Massen zu einem solchen Paar vereinigt denken können, und von keinem derselben durch Bewegung der Schwerpunkt verschoben wird.

Man bezeichnet dies als den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Als Beispiel für diese Sätze sei der Rückstoss bei Gewehren oder Geschützen angeführt; wenn die Kugel, deren Masse m sei, mit der Geschwindigkeit v nach vorn fliegt, fährt das Geschütz, dessen Masse M , mit der Geschwindigkeit V nach hinten, so dass $MV = mv$. Der Schwerpunkt von Geschütz und Geschoss zusammen bleibt dabei an seiner Stelle.

§ 53. Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss bei der drehenden Bewegung die Masse hat. Wenn ein Körper mit

der Winkelgeschwindigkeit w um eine Axe rotiert, so ist die Geschwindigkeit eines Teilchens m , das sich im Abstand r von der Axe befindet: $v = rw$; die kinetische Energie des Teilchens ist $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 w^2$. Bilden wir die Summe dieser Grösse für alle Teilchen: $D = \Sigma \frac{1}{2} m r^2 w^2 = \frac{1}{2} w^2 \Sigma m r^2$, so stellt D die Arbeit dar, welche nötig ist, um dem betreffenden Körper die Winkelgeschwindigkeit w zu geben, oder auch die Energie, die in dem mit dieser Geschwindigkeit rotierenden Körper steckt. $\Sigma m r^2 = S$ heisst das Trägheitsmoment des Körpers.

Die Gleichung $D = \frac{1}{2} w^2 S$ zeigt, dass für Aenderungen der Arbeit die Winkelgeschwindigkeit sich um so weniger ändert, je grösser S ist. Sei nämlich für das Drehungsmoment D_1 die Winkelgeschwindigkeit w_1 , so ist $D_1 = \frac{1}{2} w_1^2 S$. Durch Subtraktion folgt $D - D_1 = \frac{1}{2} (w^2 - w_1^2) S$, also $w^2 - w_1^2 = \frac{2(D - D_1)}{S}$, welche Gleichung zeigt, dass bei einer bestimmten Aenderung der Triebkraft sich die Winkelgeschwindigkeit desto weniger ändert, je grösser das Trägheitsmoment S ist. Daher bringt man bei Maschinen, deren Triebkraft nicht konstant ist, z. B. den Dampfmaschinen, Drehbänken u. s. w. Räder von grossem Trägheitsmoment an, um doch möglichst gleichförmige Geschwindigkeit zu erhalten, die sog. Schwungräder. Sobald die Triebkraft wächst, speichern sie gewissermassen den Arbeitsüberschuss auf, um ihn bei abnehmender Triebkraft wieder abzugeben.

Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse ist desto grösser, je weiter sie von der Axe entfernt ist. Die Schwungräder bestehen daher aus einem schweren dicken Rande, der durch Speichen mit der Axe verbunden ist. Sie haben den weiteren Zweck, den Maschinen über sog. tote Punkte, wo die Triebkraft für kurze Zeit ganz aufhört, durch ihre Trägheit fortzuhelfen.

§ 54. Wir können jetzt die Bewegung eines wirklichen physikalischen Pendels untersuchen, während wir uns bisher auf das mathematische Pendel beschränkt haben; für ein solches hatten

wir $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Haben wir zunächst ein Pendel mit dem Dreh-

punkt A, welches auch noch aus einem starren gewichtslosen Faden besteht, an welchem aber zwei Massenpunkte B und C (Fig. 53) angebracht sind, so kann es weder die Schwingungsdauer haben, welche der Länge AB entspricht, noch die, welche zur Länge AC gehört, sondern es muss eine mittlere Schwingungsdauer haben, welche einem mittleren Punkte S, der Länge AS, entspricht. S heisst der Schwingungspunkt, AS die reduzierte Länge des Pendels; sie ist also gleich der Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.

Sei nun in Fig. 54 ein Körper gegeben, welcher um A schwingen kann; er bestehe — damit wir die Rechnung mit niedrigerer Mathematik durchführen können — aus einem starren gewichtslosen Stabe, an welchem beliebig viele schwere Punkte m_1, m_2, \dots angebracht sind. Man sieht leicht, dass, wenn wir immer mehr solcher Punkte nehmen, die unmittelbar neben einander liegen, wir

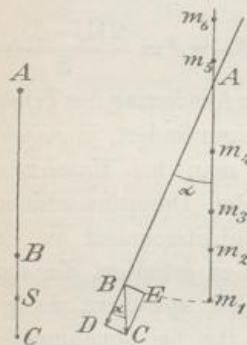


Fig. 53. Fig. 54.

zum wirklichen Pendel mit schwerer Stange gelangen werden. Wird dieser Körper gedreht, so ist dazu (§ 53) die Arbeit $D = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma (m r^2)$ nötig, wo r den Abstand jedes Punktes m von der Axe A bedeutet und positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem es von der Axe nach der einen oder anderen Seite liegt. Die Kraft, welche die Bewegung bewirkt, ist die Schwere. Sei das Pendel um den Winkel α abgelenkt; auf das Teilchen m_1 wirkt die Schwere $BC = m_1 g$; zerlegen wir $m_1 g$ in zwei Komponenten, so wirkt nur die tangentielle Komponente: $BE = m_1 g \sin \alpha$ zur Bewegung. Da sie am Hebelarm $AB = r_1$ angreift, ist ihr Moment $m_1 r_1 g \sin \alpha$. Das Moment der ganzen Schwere ist also $\Sigma m r g \sin \alpha$, und dieses muss der Grösse D gleich sein, also

$$\frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2 = g \sin \alpha \Sigma m r, \text{ oder}$$

$$\omega^2 = 2 g \sin \alpha \frac{\Sigma m r}{\Sigma m r^2}.$$

Für ein mathematisches Pendel von der Länge L und mit der einzigen Masse M wird $\Sigma m r = ML$, $\Sigma m r^2 = ML^2$, also

$w_1^2 = 2g \sin \alpha \frac{ML}{ML^2}$, $w_1^2 = 2g \sin \alpha \frac{1}{L}$. Ist $w^2 = w_1^2$, so haben

beide Pendel gleiche Schwingungsdauer; dazu muss also sein:

$$2g \sin \alpha \frac{\Sigma m r}{\Sigma m r^2} = 2g \sin \alpha \frac{1}{L}, \text{ oder } L = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r}.$$

L ist dabei die Länge eines mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer, d. h. die reduzierte Länge unseres Pendels.

Daher ist die Schwingungsdauer unseres physikalischen Pendels

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}}.$$

$g \Sigma m r$ heisst die Direktionskraft oder das Direktionsmoment; dieselbe multipliziert mit $\sin \alpha$ oder bei kleinen Schwingungen einfacher mit α , der Ablenkung aus der Gleichgewichtslage, gibt die Kraft, welche in jedem Moment den Körper nach der Ruhelage zurücktreibt. Das Direktionsmoment ist also gleich dem bei der Ablenkung $\alpha = 1$ wirkenden Momente.

§ 55. Die Gleichung $T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}}$ gibt uns das Mittel, $\Sigma m r^2 = S$, das Trägheitsmoment eines schwingenden Körpers experimentell zu bestimmen. Für einen regelmässig gestalteten Körper, Kugel, Cylinder, Würfel u. s. w. kann man S zwar auch durch Rechnung allein erhalten; das Resultat ist aber immer zweifelhaft, weil man die Dichte des Körpers überall gleich annehmen muss, während sie sich in den wirklichen Körpern oft ändert, Hohlräume vorhanden sind u. s. w.

Sei in Fig. 55 AB ein Pendel, welches um A schwingt; es sei oben noch ein Querstab CD angebracht. Es soll das Trägheitsmoment S dieses Körpers bestimmt werden.

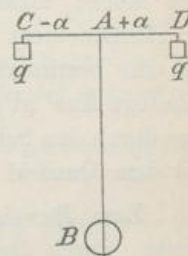


Fig. 55.

Wir beobachten die Schwingungsdauer $T_1 = \pi \sqrt{\frac{S}{g \Sigma m r}}$. Dann hängen wir in gleichen Abständen von der Axe A, in $+a$ und in $-a$ (die Vorzeichen entsprechen der verschiedenen Richtung vom Drehpunkt),

gleiche Massen q mittelst eines Fadens an. Dadurch wird das Trägheitsmoment des Körpers vermehrt um:

$$(+a)^2 q + (-a)^2 q = 2a^2 q,$$

die Direktionskraft um $g [(+a)q + (-a)q] = 0$.

Wir beobachten wieder die Schwingungsdauer:

$$T_2 = \pi \sqrt{\frac{S + 2a^2 q}{g \Sigma m r}}.$$

Durch Quadrieren der beiden Gleichungen für die Schwingungsdauer folgt: $S + 2a^2 q = T_2^2 \frac{g \Sigma m r}{\pi^2}$

$$S = T_1^2 \frac{g \Sigma m r}{\pi^2}, \text{ oder } \frac{g \Sigma m r}{\pi^2} = \frac{S}{T_1^2};$$

durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$S + 2a^2 q = \frac{T_2^2}{T_1^2} S, \text{ oder } S = 2a^2 q \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Durch Beobachtung der Schwingungsdauer T_1 und T_2 , durch Messung des Abstandes a und Bestimmung von q mit der Wage können wir also S erhalten.

§ 56. Diese Bestimmungsweise versagt aber, wenn es sich um eine Axe durch den Schwerpunkt handelt, weil der Körper um eine solche nicht schwingt. Folgender Satz aber gestattet das Trägheitsmoment für jede beliebige Axe zu berechnen, wenn es für eine bestimmt ist: das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Axe ist gleich dem Trägheitsmoment für eine ihr parallele Axe durch den Schwerpunkt plus der Masse des Körpers multipliziert mit dem Quadrat des Abstandes jener Axe vom Schwerpunkt.

Zum Beweise sei in Fig. 56: M der Schwerpunkt, A der Punkt, durch den die Axe geht, so ist das Trägheitsmoment für A : $S = \Sigma m r^2$, für M : $S_1 = \Sigma m r_1^2$.

$$\text{Nun ist } \Sigma m r^2 = \Sigma m [(a+b)^2 + c^2] = \Sigma m (a^2 + b^2 + 2ab + c^2) \\ = \Sigma m a^2 + \Sigma m (b^2 + c^2) + \Sigma m 2ab = a^2 \Sigma m + \Sigma m r_1^2.$$

Das letzte Glied ist nämlich $= 0$, da es $= 2a \Sigma m b$, die b aber Abstände der einzelnen Massenpunkte von einer Linie durch den Schwerpunkt sind (§ 47).

§ 57. In der Gleichung $T = \pi \sqrt{\frac{S}{g \Sigma m r}}$ können wir T und S

bestimmen; sie würde also zur Messung von g an verschiedenen Stellen der Erde dienen können, falls auch $\Sigma m r$ bestimmt werden könnte. Das ist aber nicht der Fall; g wird vielmehr am genauesten mittelst eines besonders konstruierten Pendels, des sog. Reversionspendels erhalten, welches von Kater angegeben, von Bessel vervollkommnet wurde. Wir können es nur angenähert behandeln,

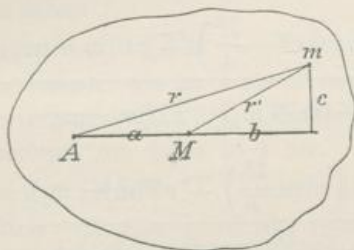


Fig. 56.

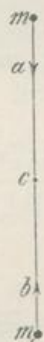


Fig. 57.

indem wir die Stange als gewichtslos und nur mit zwei Massen versehen betrachten. Die Pendelstange (Fig. 57) $m m_1$ besitzt zwei Schneiden a und b, um welche sie schwingen kann, und zwei Massen m und m_1 , welche von gleicher Form und Grösse, aber verschiedenem Gewicht sind; es sind zwei Linsen, von denen die eine hohl, die andere mit Blei ausgegossen ist. Linsen und Schneiden sind ein wenig verschiebbar, aber im ganzen ist das Pendel symmetrisch zur Mitte c. Wir nennen $a c = c b = \frac{1}{2}$, $m c = m_1 c = r$. Dann ist

für Schwingung um a: $\Sigma_a m r^2 = m \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + m_1 \left(r + \frac{1}{2}\right)^2$

„ „ „ b: $\Sigma_b m r^2 = m \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + m_1 \left(r - \frac{1}{2}\right)^2$

und „ „ „ a: $\Sigma_a m r = m \left(r - \frac{1}{2}\right) - m_1 \left(r + \frac{1}{2}\right)$

„ „ „ b: $\Sigma_b m r = m \left(r + \frac{1}{2}\right) - m_1 \left(r - \frac{1}{2}\right)$

Wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} &= \frac{m \left(r \mp \frac{1}{2} \right)^2 + m_1 \left(r \pm \frac{1}{2} \right)^2}{m \left(r \mp \frac{1}{2} \right) - m_1 \left(r \pm \frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{(m + m_1) \left(r^2 + \frac{1}{4} \right) \mp r l (m - m_1)}{(m - m_1) r \mp \frac{1}{2} (m + m_1)} \end{aligned}$$

wo die oberen Vorzeichen für Schwingung um a, die unteren für Schwingung um b gelten. Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit 1, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} &= \frac{(m + m_1) \left(r^2 + \frac{1}{4} \right) \mp r l (m - m_1)}{\mp \frac{1}{2} (m + m_1) + r l (m - m_1)} 1 \\ &= \mp \frac{(m + m_1) \left(r^2 + \frac{1}{4} \right) \mp r l (m - m_1)}{(m + m_1) \frac{1}{2} \mp r l (m - m_1)} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Bruch von der Form $\frac{A \mp B}{C \mp B} 1$, wo die oberen Vorzeichen für Schwingung um a, die unteren für Schwingung um b gelten. Der Versuch wird nun so ausgeführt, dass man Schneiden und Linsen so einstellt, dass die Schwingungsdauern um a und b identisch sind, dann ist also

$$T_a = \pi \sqrt{\frac{\Sigma_a m r^2}{g \Sigma_a m r}} = T_b = \pi \sqrt{\frac{\Sigma_b m r^2}{g \Sigma_b m r}}, \text{ d. h. es ist}$$

$$\frac{\Sigma_a m r^2}{\Sigma_a m r} = \frac{\Sigma_b m r^2}{\Sigma_b m r},$$

oder wenn wir unseren Wert dafür einsetzen

$$\frac{A - B}{C - B} 1 = \frac{A + B}{C + B} 1.$$

Multiplizieren wir aus, so folgt $B(A - C) = -B(A - C)$, d. h. $B(A - C) = 0$. Nun ist $B = r l (m - m_1)$ nicht $= 0$, da m nicht $= m_1$ ist; also muss $A - C = 0$ sein, $A = C$, folglich wird

$$\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r} = \frac{A \mp B}{A \mp B} 1 = 1.$$

Wir können also schreiben $T = \pi \sqrt{\frac{\sum m r^2}{g \sum m r}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$,

wo l nach der Definition gleich dem Abstand der Schneiden von einander ist. Dieser Abstand ist also gleich der reduzierten Pendellänge. Wenn man daher das Pendel richtig reguliert hat, so dass die Schwingungsdauer für beide Schneiden identisch ist, so lässt diese Schwingungsdauer und die Messung des Abstandes l der Schneiden g berechnen.

§ 58. Wir haben früher den Begriff der Dimension und der abgeleiteten Einheiten besprochen. Seitdem sind eine ganze Anzahl neuer Begriffe eingeführt, deren Dimension anzugeben ist. Wir hatten schon

Geschwindigkeit = $[L T^{-1}]$. Einheit der Geschwindigkeit hat ein Körper, der in 1 sec 1 cm durchläuft.

Beschleunigung = $[L T^{-2}]$. Einheit ist die Geschwindigkeitsänderung um 1 cm in 1 sec.

Kraft = $mg = [M L T^{-2}]$. Einheit der Kraft ist die, welche die Masse = 1 g in 1 sec um 1 cm beschleunigt. Diese Einheit wird Dyne genannt.

Arbeit = Kraft \times Strecke, durch welche die Kraft wirkt = $[M L^2 T^{-2}]$. Einheit der Arbeit ist geleistet, wenn die Dyne ihren Angriffspunkt um 1 cm in ihrer Richtung verschiebt. Diese Einheit heisst Erg.

Lebendige Kraft oder kinetische Energie = $\frac{1}{2} m v^2 = [M L^2 T^{-2}]$.

Potentielle Energie = $mgh = [M L^2 T^{-2}]$.

Statisches Moment = Kraft \times Hebelarm $[M L^2 T^{-2}]$.

Trägheitsmoment = $\sum m r^2 = [M L^2]$.

Direktionskraft = $g \sum m r = [M L^2 T^{-2}]$.

Winkelgeschwindigkeit = $\frac{2\pi}{T} = [T^{-1}]$.

§ 59. Wir sind schon einigemal auf das Gesetz von der Konstanz der Energie oder von der Erhaltung der Kraft gestossen; wir wollen es nun etwas ausführlicher besprechen. Es ist namentlich von v. Helmholtz in präziser Form ausgesprochen und auf die verschiedensten Fälle angewandt worden. Da es sich

bisher stets bestätigt hat, ist es zu einem der wichtigsten Gesetze der Physik geworden.

Wir haben schon den Begriff der Arbeit besprochen. Um Arbeit zu leisten, kann man die Muskelkraft von Tier und Mensch, oder Naturkräfte, Schwere, Wind, bewegtes Wasser, Dampfdruck u. s. w. benutzen. Alle Arbeit aber würde man mittelst gehobener und dann fallender Gewichte leisten können, und so ist die bequemste Art der Messung der Arbeit die durch Gewichte, was zuerst James Watt einführte. Wir setzten die Arbeit gleich Kraft mal Weg in Richtung der Kraft. Dass das richtig ist, ist leicht zu erkennen; es kostet offenbar die doppelte Arbeit, 1 Kilogrammgewicht $2 m$ hoch, oder 2 Kilogrammgewichte $1 m$ hoch zu heben, wie 1 Kilogrammgewicht $1 m$ hoch zu heben. Also allgemein ist $(mg) h$ die Arbeit. Für die Praxis kann man g als konstant betrachten und für mg ein Gewicht setzen. Als Einheit der Arbeit nimmt man für die Technik die, welche $1 kg$ $1 m$ hoch hebt, oder welche $1 kg$ durch Fall von $1 m$ Höhe leistet. Diese Einheit heisst Meterkilogramm oder Kilogramm-meter. Sie ist $= 1000 g \text{ Erg} = \text{circa } 981000 \text{ Erg}$ oder rund 1 Million Erg. Für die Praxis wird daraus die Arbeitsintensität oder der Effekt, d. h. die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit abgeleitet; es ist die Pferdekraft, welche in 1 sec 75 Kilogramm-meter leistet.

Wir haben bisher immer gefunden, dass Arbeit weder gewonnen noch verloren wird, sondern dass sie nur ganz oder teilweise umgewandelt wird. Wir wollen annehmen, eine Masse m befinde sich in der Höhe H über dem tiefsten Punkt, welchen sie erreichen kann. Sie falle von hier um eine Strecke $s = H - x$; dabei erhält sie eine Geschwindigkeit v , so dass (§ 19)

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g s = m g (H - x), \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g x = m g H.$$

Wir haben gesehen, dass $\frac{1}{2} m v^2$ durch Leibnitz lebendige Kraft genannt wurde. Dass dieselbe einer Arbeit äquivalent ist, erkennt man leicht, wenn man überlegt, welche Arbeit ein geschwungener Hammer, eine fliegende Kanonenkugel leisten können, während ruhend Hammer und Kugel unwirksam sind. Die Grösse $m g x$ stellt die Arbeit dar, welche die Masse durch den weiteren

Fall bis zum tiefsten Punkte leisten kann. Auf der rechten Seite haben wir mgH , die gesamte Arbeit, welche das über den Nullpunkt um H gehobene Gewicht repräsentiert. Diesen gesamten Arbeitsvorrat, der in einem Körper steckt, nennt man seine Energie, und demgemäss sind die beiden Ausdrücke links die kinetische oder aktuelle und die potentielle Energie genannt worden. Die Gleichung sagt aus, dass während der Bewegung des Körpers die Summe von beiden immer konstant bleibt, nämlich gleich der gesamten ursprünglich vorhandenen Energie. Durch alle Vorgänge kann also die Energie nur in verschiedene Formen verwandelt, ihre Grösse aber nicht geändert werden.

Dies ist das Prinzip von der Erhaltung der Kraft, oder wie es heute besser genannt wird: von der Erhaltung der Energie; es gilt zunächst aber nur für sog. konservative Kräfte, d. h. solche, die nur Bewegung hervorbringen. Wir werden aber sehen, dass es auch für die übrigen Kräfte, die Wärme, magnetische und elektrische Erscheinungen hervorbringen, gilt, sobald wir diese passend rechnen.

§ 60. Wir wollen schliesslich noch einen Begriff erörtern, der in verschiedenen Teilen der Physik eine wichtige Rolle spielt, das Potential.

Wenn eine Flüssigkeitsfläche in Ruhe ist, so steht sie überall senkrecht zur Richtung der Kraft, der Schwere. Da man vom Wasserniveau spricht, so nennt man jede Fläche, die überall senkrecht zur wirkenden Kraft steht, Niveaufläche, einerlei, ob die Kraft die Schwere ist oder nicht. Sei in Fig. 58 c ein Massenpunkt, von dem irgend welche Kräfte ausgehen, z. B. eine Anziehungskraft. Sei Kraft und Raum so beschaffen, dass die Kraft nach allen Seiten identisch ist, dann wirkt sie in Radien, und jede Kugelfläche um c als Mittelpunkt ist eine Niveaufläche. Sei n eine solche. Wenn sich auf ihr eine Masse befindet, so kostet es keinerlei Arbeit, diese Masse auf n zu verschieben, da ja die Bewegung stets senkrecht zur Kraft erfolgt und Arbeit gleich Verschiebung mal Kraftkomponente in Richtung der Verschiebung ist; wohl aber kostet es Arbeit, wenn wir die Masse aus der Fläche herausbewegen. Sei o eine andere Niveaufläche und es koste die Arbeit A , um die Masse m von n nach o auf dem Wege ab zu schaffen. Dann lässt sich leicht einsehen, dass es stets die gleiche Arbeit kosten muss, von welcher Stelle der Niveaufläche n wir auch die Masse m nach

irgend einer Stelle der Fläche o schaffen. Denn wäre z. B. die Arbeit längs $a_1 b_1$ kleiner, so könnten wir sofort ein Perpetuum mobile herstellen, d. h. eine Maschine, welche fortgesetzt Arbeit aus nichts schafft. Wenn wir nämlich bei der Bewegung der Masse m von a nach b die Arbeit A gebrauchen, so gewinnen wir dieselbe Arbeit A bei Bewegung von b nach a . Nun sei die Arbeit längs $a_1 b_1 = A_1 < A$. Wir liessen dann m in $a_1 b_1$ steigen: wir verbrauchen A_1 ; wir bewegen es von b_1 nach b , was keine Arbeit kostet; wir lassen es fallen längs ba , wobei wir A gewinnen; wir schieben es längs aa_1 , was keine Arbeit kostet. Bei diesem Umlauf haben wir $A - A_1$ gewonnen, und ebenso bei jedem

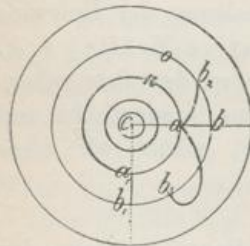


Fig. 58.

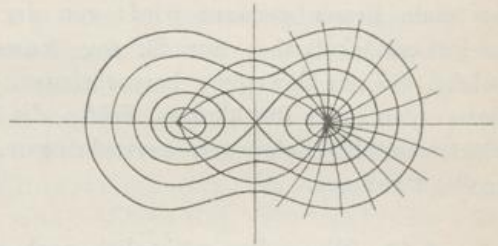


Fig. 59.

folgenden. Wäre also A nicht $= A_1$, so könnten wir unbegrenzt Arbeit aus nichts schaffen; das widerspricht dem Satz von der Erhaltung der Kraft; daher ist $A = A_1$, und die Arbeit, die nötig ist, um m von einer Niveaufläche zur anderen zu schaffen, ist an allen Stellen identisch. Ebenso ergibt sich, dass die Arbeit ganz unabhängig vom Wege ist; ob wir m längs des Radius ab oder längs ab_2 oder ab_3 verschieben, die Arbeit ist immer A .

Es sei m eine Masseneinheit, A die Arbeitseinheit. Wir können eine grosse Zahl von Niveauflächen konstruieren, die alle je um die Arbeitseinheit von einander entfernt sind. Ist das geschehen, so übersieht man mit einem Blick die Richtung und Grösse der Kraft an jeder Stelle des Raumes; denn der Abstand s zweier benachbarten Niveauflächen ist stets der Kraft umgekehrt proportional; wir haben ja $\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Strecke}$, also

$$A = 1 = ks, \quad k = \frac{1}{s}.$$

Dies Hilfsmittel ist freilich nicht nötig bei einem so einfachen Falle, wie der vorliegende ist; aber schon wenn zwei anziehende

Massen vorhanden sind, wird die Anschauung wesentlich erleichtert; die Niveaufächenschnitte sind dann Kurven, welche Lemniskaten ähnlich sind (Fig. 59). Die Arbeit nun, die nötig ist, um die Masseneinheit von irgend einer Stelle des Raumes gegen eine anziehende Kraft bis ins Unendliche zu entfernen, oder bei einer abstossenden Kraft sie aus dem Unendlichen bis an dieselbe Stelle zu bringen, heisst das Potential dieser Stelle. Da die Verschiebung auf einer Niveaufläche keine Arbeit kostet, sind die Niveauflächen auch Flächen gleichen Potentials.

Ziehen wir im Raum Linien, die überall senkrecht gegen die Flächen gleichen Potentials stehen (Fig. 59), so geben sie an jeder Stelle die Richtung der Kraft; sie heissen Kraftlinien.