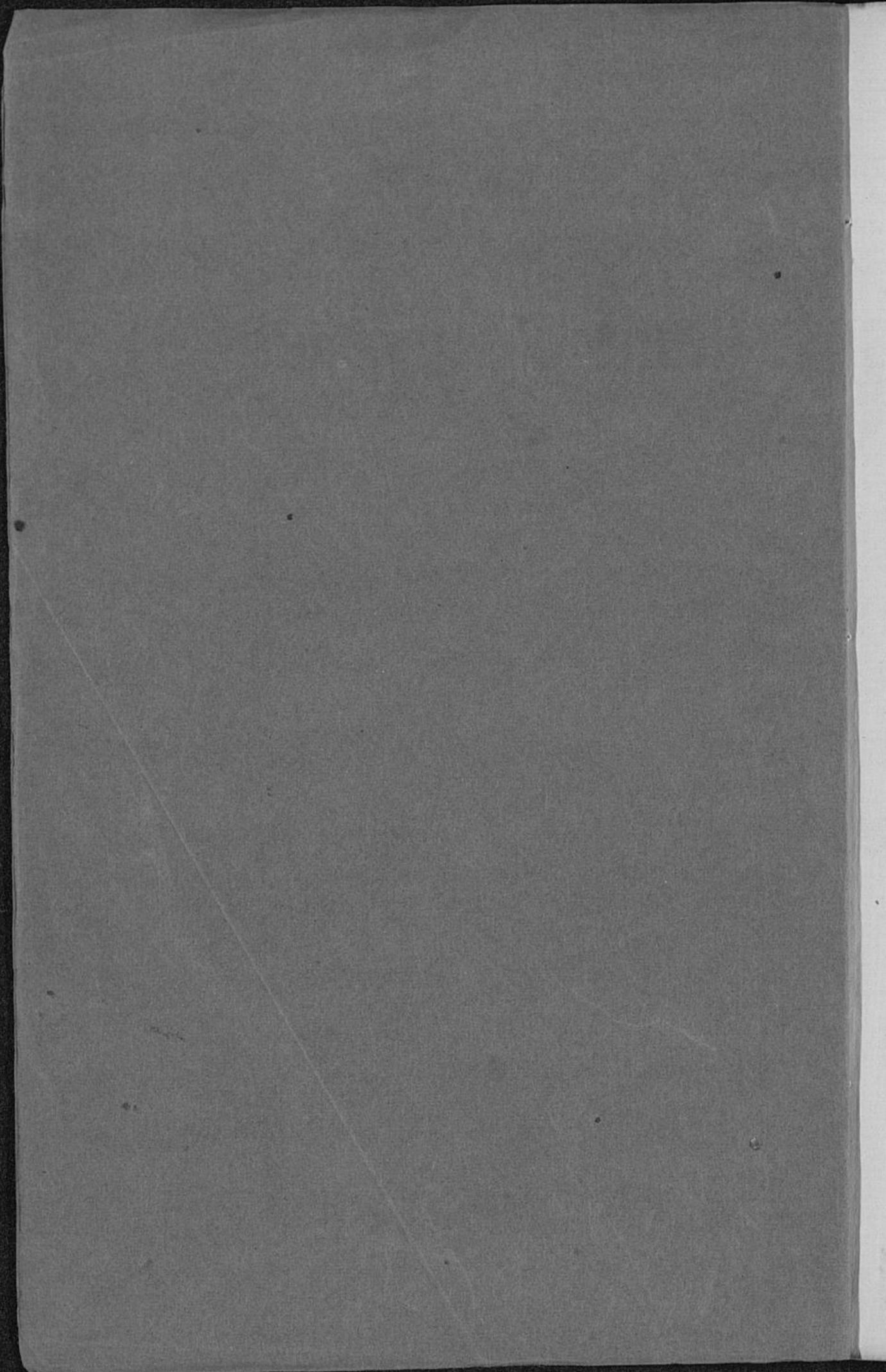


1856

S. lbs. 900  
14 0026



# Programm

der

## Realschule zu Düsseldorf,

mit welchem

zu den öffentlichen Prüfungen

am 3. und 4. September 1856

im

Namen des Lehrer-Collegiums

ergebenst einladet

der

Director Dr. Franz Heinen.

---

Inhalt:

1. Abhandlung: Ueber einige Notations-Apparate, ins Besondere den Fessel'schen, von dem Director.
2. Bericht über das Schuljahr 18<sup>55</sup>/<sub>56</sub> von demselben.

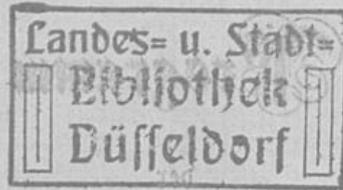
---

Düsseldorf.

Buchdruckerei von Hermann Bop.

1856.

#T008853155



Realbibliothek zu Düsseldorf

S. Nr. 14

in der öffentlichen Bibliothek

am 3. und 4. September 1888

mi

Stamen des Leptocarpus

erhöhen einander

der

Director Dr. Franz Brinn

haben

1. Abhandlung: Ueber einige Stationen-Platzname in Westfalen von  
Kesselbach, von dem Director  
2. Bericht über das Schuljahr 1887/88 von Brinn

Düsseldorf

Buchdruckerei von Hermann Vogt

1888

05.1388.

## Vorwort.

Zur Beschäftigung mit dem vorliegenden, in jüngster Zeit vielfach zur Sprache gekommenen Gegenstande ward ich angeregt durch meinen verehrten Lehrer und Freund, Herrn Professor Plücker. Als ich demselben zu Ostern v. J. meinen Versuch einer analytischen Behandlung des Problems vorlegte, hatte er die Freundlichkeit, mich auf einen andern Weg, dasselbe anzugreifen, aufmerksam zu machen, welchen ich im §. 10 ebenfalls dargelegt habe. Ich habe später, durch schmerzliche Verluste gebeugt, den Gegenstand eine Zeitlang ruhen lassen und, seitdem ich veranlasst, die diesjährige Programm-Abhandlung der Schule zu schreiben, ihn wieder aufnahm und weiter verfolgte, ihm nur eine sehr beschränkte und durch amtliche Geschäfte vielfach zersplitterte Mussezeit widmen können. Gleichwohl hoffe ich, dass in den folgenden physicalischen Versuchen sowohl als in den mathematischen Entwicklungen sich Einiges findet, welches neu und der Beachtung der Fachmänner nicht unwerth sein dürfte und das Schriftchen einem weitem Kreise zu einer freundlichen Aufnahme vielleicht empfehlen könnte, als für welchen es ursprünglich bestimmt war. Dass ich mich bemüht, auch dem Nichtmathematiker eine richtige und möglichst vollständige Einsicht in die interessanten Erscheinungen zu verschaffen, wird hoffentlich in einer Zeit, in der man so sehr bestrebt ist, dem Gebildeten die Ergebnisse der Wissenschaft zugänglich zu machen, keiner Rechtfertigung bedürfen.

Düsseldorf, im August 1856.

## §. 1.

Die Vorgänge bei der Rotation der Körper, seit Keplers und Huyghens Zeiten, ein Gegenstand der Forschung für den Mathematiker, haben mit den Fortschritten der Astronomie und der Technik immer mehr an Bedeutsamkeit gewonnen und fortdauernd Probleme geliefert, welche eben so fruchtbar für diese Gebiete geworden sind, als sie, mit deren Ausbeutung und Erweiterung an Schwierigkeit zunehmend, mächtig auf die Vervollkommnung der mathematischen Hilfsmittel zurück gewirkt haben, welche ihre Lösung erfordert. Zu denjenigen, welche in ihrer ganzen Allgemeinheit und nach allen Beziehungen hin noch nicht als vollkommen gelöst betrachtet werden, so Vieles auch dafür von Männern wie Euler, d'Alembert, Lagrange, Poisson, Airy, Jacobi u. A. geleistet worden ist\*) gehört das der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, und sowohl seine Bedeutsamkeit an sich als mehr noch die verwickelten Rechnungen, zu welchen der Calcul bei seiner Behandlung greifen muss, und die Schwierigkeit, die Resultate desselben vor die Anschauung zu bringen, machen es erklärlich, dass Apparate, welche neue Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung oder auch bereits bekannte nur in verstärktem Masse zu zeigen und die Ergebnisse der mathematischen Entwicklungen über dieselbe zu verständlichen besonders geeignet sind, von Mathematikern, nicht minder als von Physikern freudig begrüsst werden. Der älteste nächst dem Kreisel, diesem, wie J. Herschel \*\*) mit Recht ihn nennt, „philosophical instrument,“ ist das Bohnenberger'sche Maschinchen. Kaum beschrieben, \*\*\*) war es

---

\*) St. Guilhem in den Nouvelles Annales des Mathématiques XV. Févr. 1856 „Le problème, qui a pour l'objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationnelle.“ Auch spricht dafür die Preisaufgabe der Berliner Academie der Wissenschaften für das Jahr 1858: „die Differentialgleichungen eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers, auf welchen keine anderen beschleunigenden Kräfte als die Schwere wirken, durch regelmässig fortschreitende Reihen zu integriren, welche alle zur Kenntniss der Bewegung erforderlichen Grössen explicite durch die Zeit darstellen.“

\*\*) Treatise on Astronomy by J. Herschel §. 206.

\*\*\*) Tübinger Blätter für Naturwissenschaft und Arzneikunde, von v. Autenrieth und von v. Bohnenberger, Bd. 3. H. 1. J. 1817 und Gilberts Annalen, Bd. 60. S. 60.

schnell in den physikalischen Kabinetten eingebürgert, und wenn man jetzt auf die Aufmerksamkeit zurückblickt, welche sich ihm sofort zuwandte, und bedenkt, dass eine gehörige Würdigung seiner Theorie\*) manche Abänderungen hätte nahe legen können, so möchte man sich fast wundern, dass mehrere Jahrzehnte vergingen, ehe eine einzige ans Licht trat. Erst zufällige Beobachtungen, wie bei dem Fessel'schen\*\*) oder anderweitige Untersuchungen, wie die von Foucault über das Pendel und von Magnus über die Abweichung der Geschosse gaben in den letzten Jahren den Impuls dazu, und die seitdem unter besondern Namen bekannt gewordenen Apparate fanden eine so willkommene Aufnahme, als ständen sie gewissermassen einzig in ihrer Art dar.\*\*\*)

Im Folgenden soll nun die auf Veranlassung von Herrn Professor Plücker von dem Mechaniker Herrn Fessel zu Cöln ausgeführte Rotationsmaschine und des Zusammenhanges wegen, obwohl kürzer, zugleich das Bohnenberger'sche Maschinchen und das Polytrop von Magnus, überdies ein Apparat, den ich um ihn als Fessel'schen und Bohnenberger'schen und zu weitem Versuchen zu gebrauchen, habe construiren lassen, in ihrer Einrichtung und den Erscheinungen nach, welche sie bieten, im Wesentlichen beschrieben, dann eine elementare Erklärung der letztern gegeben und endlich mathematische Untersuchungen über die Abhängigkeit und Modification dieser Erscheinungen unter verschiedenen, von den gewöhnlichen zum Theil abweichenden Verhältnissen angeschlossen werden, welche zu neuen Abänderungen der Apparate führen.

\*) Poisson „Mémoire sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans. Journal de l'école polytechnique. Cah. 16. t. 14. p. 247.

\*\*\*) Poggendorffs Annalen, Bd. 90. S. 175 und 351 und Bd. 88 S. 18.

\*\*\*) Vergl. den Bericht von Baden-Powell in den Notices of the Meetings of the Members of the Royal Institution Part. IV. Jul. 1854. p. 393.

# I. Die Apparate.

## § 2.

Das Bohnenberger'sche Maschinchen Fig. 1. besteht in seiner gewöhnlichen Einrichtung aus einem Sphäroid, (auch wohl aus einer messingnen, kreisförmigen Scheibe mit aufgeworfenem Rande oder besser noch aus einem Ringe aus Schmiedeeisen mit eingetriebener, dünner Scheibe) welches um seine Axe  $ii$  leicht beweglich und mittelst dreier Ringe J, M, A so aufgehängt ist, dass die Mittelpunkte der Ringe und zugleich der Mittelpunkt des Sphäroids genau zusammenfallen, und der Durchmesser  $mm$ , um welchen der die Axe desselben  $ii$  tragende innere Ring J in dem mittlern M drehbar ist, gegen diese Axe rechtwinklig, und der Durchmesser  $aa$ , um welchen der mittlere Ring M im äussern A drehbar ist, ebenfalls rechtwinklig gegen  $mm$  ist. Die leichte Beweglichkeit der Ringe um ihre Drehaxen wird durch stählerne Schraubchen bewirkt. Der äussere Ring ist in der Regel in einem festen Fuss F eingeschraubt, welcher das Instrument trägt. In dem innern Ring J lässt sich in der Richtung der Rotationsaxe ein kleines Gewicht G mit zweien Stiften, welche in entsprechende Löcher desselben passen, erforderlichen Falles aufsetzen. Am Ende der stählernen Axe des Sphäroids ist ein kleiner Stift angebracht, in welchen die Schlinge eines starken Seidenfadens eingehangen werden kann, um ihn auf die Axe oder eine kleine, auf derselben angebrachte Rolle aufzuwickeln. Durch einen kräftigen, möglichst gleichmässigen, gegen das Ende nicht abnehmenden Zug wird er, während man den innern Ring mit der einen Hand in seiner Lage festhält, mit der andern von der Axe abgewickelt und so das Sphäroid in eine rasche, eine geraume Zeit andauernde Rotation versetzt.

Eine für andere Versuche, als die sind, welche wir hier betrachten werden, zweckmässige Abänderung ist dem Apparate von Professor Poggendorf\*) gegeben worden und besteht darin, dass der dritte äussere Ring A in einem vierten, mit ihm in einer Ebene liegenden Ringe sich so befestigen lässt,

\*) Poggendorffs Annalen, Bd. X., S. 351.

dass die Drehaxe des erstern mit der verticalen Drehaxe des letztern jeden beliebigen Winkel bilden, die Verlängerung der letztern Drehaxe aber in eine Centrifugalmaschine eingesetzt werden kann. Es sei hier gelegentlich nur bemerkt, dass wenn man nicht, wie bei dieser Vorrichtung, eine Drehung des Apparates um eine Verticalaxe will, welche durch den Mittelpunkt der Ringe geht, sondern um eine, welche dieser parallel ist, man sich mit Vorthail der stählernen Drehaxe mit der Gabel in dem später zu beschreibenden Fessel'schen Apparate bedienen kann, indem man nur durch die kreisförmige Hülse derselben eine eiserne Stange zu stecken braucht, welche an dem einen Arm ein verschiebbares Gegengewicht, am andern eine festschraubbare Zwinge mit einem aus zwei Bogenstücken bestehenden Ansatz nach Unten trägt, zwischen welche der dritte Ring des Bohnenberger'schen Maschinchens, nachdem man das Ganze von dem Fusse abgeschraubt, unter jedem Winkel seiner Axe gegen die Verticale festgeschraubt werden kann.

2. Bei dem Fessel'schen Apparate ist der Rotationskörper gewöhnlich eine messingne, runde Scheibe mit starkem Rande; durch ihre Mitte geht eine stählerne Axe, welche in einem messingnen Ringe leicht drehbar ist. Ursprünglich war dieser Ring unmittelbar mittelst eines Scharniers, um welches der Ring in vertikaler Ebene drehbar ist, mit einem Stahlstifte verbunden, welcher sich mit möglichst geringer Reibung in einer vertikalen messingnen Säule mit gehörig festem, eisernem Fusse um die Verticale drehen kann. Wird ein kleiner Schieber, der sich zur Seite des Stahlstiftes befindet, vorgeschoben, so wird die Axe durch denselben getragen und zu sinken verhindert. Eine spätere, zweckmässigere Einrichtung ist die Fig. 2 abgebildete. In jenen Ring R ist eine lange, runde Stange S fest eingelassen, welche sich durch eine kleine Hülse h hindurch stecken und mittelst einer Schraube in derselben feststellen lässt. Die Hülse ist zwischen den Armen einer messingnen Gabel g, welche am Ausgangspunkt der Arme einen langen unten zugespitzten Stift J trägt, in vertikaler Ebene leicht drehbar. Der Stift dreht sich wieder in der verticalen, messingnen Säule eines eisernen Ständers F mit möglichst geringer Reibung. Durch Verschiebung der Stange in der Hülse und Gewichte, welche sich auf ihr in verschiedenen Entfernungen vom Drehpunkte aufschrauben lassen, lässt sich theils auf beiden Seiten das Gleichgewicht, theils ein Druck auf die Axe hervorbringen, durch welchen die Scheibe gesenkt oder gehoben wird. Das Gegengewicht besteht aus einem soliden, mittelst einer gabel-

förmigen Vorrichtung anhängbaren Cylinder Z, zwischen welcher sich eine in beliebiger Entfernung vom Drehpunkte auf die Stange aufschraubbare, cylindrische Hülse befindet; auf den Cylinder kann man mit einem Einschnitte versehene Metallscheiben aufschieben.

Eine von Prof. Plücker ebenfalls veranlasste Abänderung des letztern Apparates, welche indessen in England einem Andern zugeschrieben zu werden scheint,\*) besteht darin, dass durch den Ring mit der Tragstange senkrecht auf der Richtung derselben die Drehaxe eines zweiten innern Ringes geht, welche zugleich senkrecht auf der Axe des von diesem Ringe getragenen Rotationskörpers ist. Diese Drehaxe des innern Ringes wird nun einerseits bestimmt durch die Spitze eines, durch den äussern Ring hindurchgehenden, in den innern hineinreichenden Schraubchens, andererseits ebenfalls durch eine Schraube, welche zwei concentrische Abschnitte von Kugelschalen gegeneinander presst, von denen der grössere eine Eintheilung trägt und an dem Ringe befestigt ist, der andere eine Marke hat, so dass der innere Ring unter jedem Winkel gegen den äussern festgestellt werden kann; nur wenn dieser Winkel Null ist, fällt die Rotationsaxe der Scheibe in die Richtung der Tragstange des äussern Ringes.

3. Ein Apparat, den ich durch H. Fessel grössten Theils habe ausführen lassen, um zugleich als Bohnenberger'scher und für weitere Zwecke zu dienen, ist in Fig. 3 dargestellt.

In den innern Ring J sind diametral gegenüber zwei Schraubenmütterchen von Stahl eingesetzt, in welche sich zwei stählerne Schrauben mit Spitzen umdrehen lassen, deren jede ein in der Nähe ihrer Spitze feststehendes, k, und ein durch Drehung nach der einen oder andern Seite versetzbares Schraubköpfchen, k', trägt; durch Andrehen des letzteren an den Ring wird die Schraube, wenn man sie mehr oder weniger mittelst des festen Schraubköpfchens in den Ring hineingeschraubt hat, im Ringe festgehalten. Man kann so mit Leichtigkeit den Schwerpunkt des Rotationskörpers R, dessen stählerne Axe von jenem Ringe getragen wird und den Spitzen der Schrauben entsprechende, kleine Vertiefungen hat, genau in den Mittelpunkt des Ringes einstellen, erforderlichen Falles mit Hülfe der beiden Schrauben um mehr als eine Linie weit aus demselben herausrücken, und ihn mit anderen Rotationskörpern bequem vertauschen. Durch den äussern, mit der Tragstange versehenen Ring A, geht dieser Stange gegenüber eine Schraube mit einem

\*) Siehe den oben angeführten Bericht von Baden-Powell.

festen Köpfchen  $f$  nach Aussen, deren Spitze sich in die Oeffnung eines der in den innern Ring eingesetzten Schraubenmütterchen einsenken lässt, damit man den letztern, welcher sich um die Spitzen zweier Schrauben,  $d$ ,  $d^1$ , die durch den äussern Ring in der Richtung eines auf der Stange senkrechten Durchmessers hindurchgehen, leicht drehen lässt, in der Ebene des äussern Ringes feststellen kann. Zwischen den parallelen Armen der Gabel  $G$ , in welche sich die in die messingene Säule des Ständers  $F$  passende, unten zugespitzte stählerne Verticalaxe endigt, ist auf den Spitzen zweier, durch dieselben hindurchgehender Schrauben eine etwa zwei Linien dicke, messingene Kreisscheibe  $K$  um ihren Mittelpunkt leicht drehbar, welche in der Richtung eines Durchmessers zur Aufnahme der Tragstange  $T$  des äussern Ringes durchbohrt ist und auf der einen Kreishälfte eine von der Mitte derselben nach beiden Seiten zu jenem Durchmesser hin sich erstreckende Theilung von  $5$  zu  $5$  bis  $90$  Grad hat, auf der andern, unteren, aber entsprechend gezahnt ist. Bequem ist es, die Theilung auf beiden Seiten der Kreisscheibe anbringen zu lassen. Die beiden verticalen Arme der Gabel tragen nach oben hin Zeiger  $i$ , welche wenn der mit der Durchbohrung der Kreishülse parallele Durchmesser horizontal ist, auf den Nullpunkt der Theilung zeigen. In der Richtung des durch den Nullpunkt gehenden Durchmessers dringt in die Kreishülse eine lange stählerne Schraube hinein, um die Stange in derselben festsetzen zu können. Auf ihr befindet sich zunächst der Kreisscheibe, etwa in der Mitte der ganzen Schraube ein festsitzendes Schraubenköpfchen  $a$ , und oben, auf der Verlängerung nach Aussen, eine kleine messingene Scheibe  $b$ , welche in verschiedenen Entfernungen vom Ende aufschraubbar ist und die Bestimmung hat, durch ihre Versetzung den Schwerpunkt des beweglichen Theils des Apparates zu heben oder zu erniedrigen, um ihn möglichst genau für den Fall des Gleichgewichtes in den Drehpunkt zu bringen. Zwei flache, metallne Bogenstücke, auf beiden Seiten auf die Kreishülse der Schraube gegenüber aufgeschraubt, dienen dazu, um den durch die Verzahnung an der unteren Hälfte hervorgebrachten Gewichtsverlust zu ersetzen und dem Gewicht der Schraube bei verschiedenen Lagen gegen die Verticale das Gleichgewicht zu halten. Durch richtige Stellung der versetzbaren, kleinen Scheibe erreicht man es, dass auch bei sehr abweichenden Neigungen der Stange gegen die Verticale das Gleichgewicht fort dauert. Als Gegengewicht gegen den Rotationskörper und die Ringe bediene ich mich eines messingnen in der Richtung seiner

Axe durchbohrten Cylinders, P, welcher sich auf der runden Tragstange mittelst eines Schraubchens, — als Gegengewicht steht ihm ein anderes gegenüber — in verschiedenen Entfernungen vom Drehpunkt feststellen lässt und vor dem oben beschriebenen den Vorzug hat, dass sein Schwerpunkt auf der Stange liegt, während durch dieses der Schwerpunkt des beweglichen Theiles unter die durch den Drehpunkt gehende Horizontale fällt und bei verschiedenen Neigungen der Stange bald auf die eine, bald auf die andere Seite der Verticalen rückt. In einer der Endflächen des Cylinders ist gegen den Rand hin ein gekrümmter Stift um Metallringe von kleinerm Durchmesser und sonstige ringförmige Uebergewichte bequem einzuhängen.

Zur Hervorbringung eines periodisch veränderlichen Gegendruckes dient ein Pendel, dessen Pendelstange in einen messingnen Ring eingelassen ist, durch welchen diametral gegenüber zwei stählerne Schraubchen senkrecht zur Richtung der Stange gehen. Eine auf der Tragstange feststellbare, cylindrische Hülse nimmt in zweien kleinen Vertiefungen die Spitzen jener Schrauben auf; in der verlängerten Richtung der Stange ist im Ringe eine Schraube befestigt, um auf derselben ein Gegengewicht aufschrauben zu können, ähnlich wie bei dem Metronom. Fig. 4 zeigt das Pendel mit der Hülse.

In den beiden Armen der Gabel G sind am untern Ende zwei mit der Ebene derselben parallele Einschnitte, durch welche ein messingnes, nach oben zugeschärftes Plättchen e geht, welches an beiden Enden aus der Gabel hervorragt und sich um ein Stifchen in dem einen Arm dreht; je nachdem man auf das eine oder andere Ende abwärts drückt, greift das Plättchen in einen Zahn der Kreishülse ein, und fixirt dadurch die Stange in ihrem Winkel gegen die Verticale, oder fällt aus und lässt ihr wieder freie Beweglichkeit in der Vertical-Ebene. Um bei starken Erschütterungen des Apparats das Ausfallen des Plättchens aus dem Zahne zu verhindern, hängt man in einen Einschnitt des Plättchens an dem Ende, wo der Drehstift ist, ein Gewicht ein. — Noch ist an der Gabel in der Mitte des Zwischenstückes zwischen den beiden Armen senkrecht gegen dasselbe ein durchgehender horizontaler Stift, z, angebracht, der, wenn die stählerne Tragstange der Gabel in der messingnen Säule des Ständers F steht, unmittelbar sich über einer auf dem obern Ende der Säule angebrachten, ähnlich wie die Kreishülse, eingetheilten Metallplatte H als Zeiger bewegt. Eine durch die Säule hindurchgehende Schraube v dient dazu, die Verticalaxe der Gabel erforderlichen Falles festzustellen; bei ge-

löster Schraube kann man durch einen Druck auf das Blättchen in der Gabel die Bewegung um die Verticale beschleunigen oder verlangsamen.

Soll die Ebene des innern Ringes nicht mit der des äussern zusammenfallen, so löst man die Schraube *f*. Um ihn nun unter einem andern Winkel gegen jenen festzustellen, dient eine kleine messingne, eingetheilte Scheibe *p*, Fig. 5, welche nach der einen Seite zwei Stahlstifte trägt, die in Löcher, welche in gleichen Abständen von *d* im äussern Ringe *A* sich befinden, passen, nach der andern in ihrer Mitte eine Schraube hat. Ein schmales Metallplättchen *q* hat ebenfalls nahe an seinen Enden zwei etwas längere Stahlstifte, die in entsprechende Löcher des innern Ringes *J*, zu beiden Seiten des Drehpunktes *d* passen, in der Mitte eine Oeffnung, etwas weiter als den Durchschnitt jener Schraube, und der Länge nach gegen beide Enden eine Durchbrechung. Setzt man die Kreisscheibe mit ihren Spitzen in die beiden Löcher des äussern Ringes, dreht den innern Ring um  $d d'$  in die Lage, die er erhalten soll und schiebt das Plättchen mit seiner Oeffnung durch die Schraube der Scheibe, so dass seine Spitzen in den innern Ring eingreifen, so kann man mittelst eines einschraubbaren Schraubenkopfes *t* das Plättchen und dadurch den innern Ring in seiner Lage festsetzen, und die Durchbrechung des Plättchens gestattet, den Winkel, unter welchem dieser gegen den äussern steht, abzulesen. Beim Abziehen der Schnur muss man den innern Ring allerdings festhalten, dann aber reicht die obige Vorrichtung hin, ihn in seiner Stellung gegen den äussern zu erhalten.

Der Apparat verwandelt sich sofort in den Bohnenberger'schen, wenn man in die Säule des Ständers *F* die unten conisch zugespitzte Tragstange *T* des äussern Ringes einsetzt, welche ebenfalls genau in die verticale Durchbohrung der Säule passt. Figur 6 zeigt den Apparat bei dieser Anordnung.

Als Rotationskörper dienen für die gewöhnlichen Versuche eine dünne Scheibe mit starkem (wulstigem) Rande und die später in Betracht zu ziehenden Körper. Die stählernen Rotationsaxen derselben dürfen nur die eben erforderliche Stärke haben, überhaupt sollte das Gewicht des übrigen beweglichen Theiles des Apparates ausser dem Rotationskörper möglichst verringert sein. Es ist zweckmässig, den Apparat bei den Versuchen auf eine weiche Unterlage, etwa ein zusammengefaltetes Taschentuch, zu setzen, um den Einfluss von Stössen möglichst zu verhindern.

4. Das von Prof. Magnus construirte und so benannte Polytrop unterscheidet sich von der Fessel'schen zweiten Einrichtung im Wesentlichen nur dadurch, dass an beiden Enden der Tragstange sich ringförmige Bügel mit Scheiben befinden, deren Rotationsaxen ebenfalls bei beiden in der Richtung der Stange liegen und mit Stiften versehen sind, um in dieselben die Schlingen zweier gleichlanger Schnüre einhängen zu können, deren andere Enden sich an einem hölzernen Griffe befestigen lassen. Je nachdem die Schnüre beide in demselben oder in entgegengesetztem Sinne aufgewickelt sind, kann man die vollkommen gleichen Scheiben entweder in gleichem oder entgegengesetztem Sinne rotiren lassen, auch mittelst des Griffes den Zug so einrichten, dass die Geschwindigkeit beider wenigstens nahezu gleich wird. An der Hülse, in welcher die Stange sich verschieben und festklemmen lässt, ist unten ein halbkreisförmiges messingnes Stück befestigt, gegen welches sich durch eine in die Gabel eingelassene Schraube ein Messingstück andrücken lässt, um die Stange unter jedem Winkel gegen die Verticale erforderlichen Falles zu fixiren oder bei Lösung derselben ihre Bewegung in der Vertical-Ebene frei zu lassen, was indessen bei den Apparaten, die wir gesehen, sich nicht bewerkstelligen liess, ohne der Gabel eine Seitenbewegung zu ertheilen. Es bildet bei diesem Apparate also der eine Theil der Tragstange mit seiner Scheibe ein Gegengewicht gegen den andern, und hält diesem das Gleichgewicht oder nicht, je nachdem die Stange in ihrer Mitte in der Hülse eingeklemmt ist oder nicht; zugleich trägt sie zu beiden Seiten des Drehpunktes Bügel, in welche sich Gewichte zur Herstellung des Gleichgewichtes oder Hervorbringung eines Uebergewichtes nach einer Seite einhängen lassen, welches indessen den bei dem Fessel'schen Gegengewichte bereits bemerkten Uebelstand hat.

## II. Die Versuche und ihre elementare Erklärung.

### § 3.

Indem wir uns nun zu den Versuchen wenden, welche sich mit den obigen Apparaten anstellen lassen, betrachten wir zunächst den unter Nr. 3 des §. 2 beschriebenen, und zwar, wenn er als Fessel'scher aufgestellt ist Fig. 3. Dabei denken wir uns den Beobachter auf der verlängerten Axe des Rotationskörpers, auf der Seite desselben, wo er die Scheibe wie den Zeiger einer Uhr von der Linken zur Rechten rotiren sieht. Die rechte Seite der Scheibe ist alsdann die, welche seiner Rechten, die linke die, welche seiner Linken gegenüberliegt.

Ist nun das cylinderische Gegengewicht P auf die Tragstange so aufgeschoben und festgestellt, dass Gleichgewicht vorhanden ist, so dauert dasselbe, wie bereits bemerkt, bei sehr abweichenden Stellungen der Stange gegen die Verticale fort und ein äusserst geringer Druck oder Stoss auf die Stange oder das Plättchen c an der Gabel reicht hin, um den beweglichen Theil des Apparates fortzubewegen. Diese leichte Beweglichkeit aber hört sofort auf, wenn die Scheibe durch einen kräftigen Zug in Rotation versetzt ist. Man empfindet alsdann einen starken Widerstand und vorübergehende, selbst kräftige Stösse versetzen die Stange nur in rasche Schwankungen um eine mittlere Lage, welche um so weniger von derselben abweichen und um so schneller geschehen, je rascher die Rotation der Scheibe ist. Man kann den Apparat rund in der Stube herumtragen, die Axe wird immer nach derselben Richtung zeigen. Schöner noch zeigt sich dieses Beharrungsvermögen, wenn man den ganzen Apparat auf eine, mit ihrer eisernen Axe in eine Centrifugal-Maschine einschraubbare, hölzerne Platte bringt, welche nach Oben theils um die Mitte herum, theils am Rande in angemessenen Entfernungen Stifte trägt, um den Fuss F des Apparates zwischen sich zu fassen und diesen dagegen zu schützen, dass er bei rascher Umdrehung der Platte ~~nicht~~ herabgeschleudert werde. Man kann alsdann in beliebiger Richtung und beliebig rasch drehen,

den Apparat in die Mitte oder am Rande der Platte aufstellen, so wird die Stange, vorausgesetzt, dass ihre freie Beweglichkeit nicht gehemmt ist, fortwährend nach derselben Richtung zeigen. Wie sich dieses Experiment ändert, wenn die Gabelaxe durch das Schraubchen *v* festgeklemmt ist, soll später erörtert werden. Nimmt man den Apparat wieder von der Platte, klemmt nun das gedachte Schraubchen fest, oder hält das Plättchen *c* fest, so folgt die Stange mit derselben Leichtigkeit, Stößen von Oben oder Unten, als wenn die Scheibe nicht rotirte, und lässt man bei gelöstem Schraubchen *v* das Plättchen *c* bloss in einen Zahn der Kreisscheibe *K* eingreifen und fixirt so die Stange in ihrem Winkel gegen die Verticale, so bringt ein leiser Druck auf einen Arm der Gabel *G* eine Seitenbewegung um die Verticale hervor.

Hat man als Gegengewicht die Gabel mit dem tiefen herabhängenden Cylinder so angeschraubt, dass für die horizontale Lage der Stange das Gleichgewicht vorhanden ist, und zeigt sich bei nicht rotirender Scheibe, auch wenn man dieselbe hebt oder senkt, keine Tendenz derselben in ihre frühere Lage zurück zu kehren, so bemerkt man, wenn sie rotirt und man nun der Stange eine andere Lage in ihrer Vertical-Ebene gibt, dann, nachdem man sie eine Weile in derselben ruhig gehalten, sich selbst überlässt, dass allmählich eine horizontale Seitenbewegung der Scheibe beginnt, welche äusserst langsam vor sich geht, während der Winkel gegen die Verticale unverändert bleibt, und je nachdem man die Stange aufwärts oder abwärts in ihrer Vertikal-Ebene verrückt hat, eine entgegengesetzte Richtung hat. Bringt man die Stange vorsichtig in ihre ursprüngliche Lage zurück, so hört sogleich jede Seitenbewegung wieder auf.

Beachtet man, dass im vorigen Experimente, wenn der durchbohrte Cylinder aufgeschraubt ist, der Schwerpunkt des beweglichen Theils des Apparats in den Drehpunkt, bei angehängtem Cylinder aber unterhalb desselben fällt, so liegt die Vermuthung nahe, dass die mit der Neigung der Stange sich verändernde Lage des Schwerpunktes im zweiten Falle der Grund der Seitenbewegung ist, und man überzeugt sich davon leicht in folgender Weise: Hat man nämlich wieder den durchbohrten Cylinder zum Gleichgewichte scharf eingestellt und hängt, während die Scheibe rotirt, ein noch so kleines Uebergewicht z. B. eine Pappscheibe in denselben ein, so stellt sich sofort diese Seitenbewegung ein. Dasselbe geschieht, wenn man den durchbohrten Cylinder mit einem vorher zugefügten Uebergewicht zur Gleichgewichtslage eingestellt hat und dieses während der Rotation der Scheibe wegnimmt oder

den Cylinder etwas näher nun dem Drehpunkte rückt; aber die Seitenbewegung ist der vorigen jetzt entgegengesetzt. Man kann daher durch Verschiebung des Cylinders oder Abheben und Zulegen von Uebergewichten die Seitenbewegung sofort umkehren. Bei gleich starker Rotation der Scheibe wächst sie oder nimmt ab, je nachdem der Druck, der sie hervorruft, stärker oder schwächer ist. Ist er sehr stark, so geht auch die Seitenbewegung sehr rasch vor sich, und bringt man gar kein Gegengewicht auf die Tragstange, so hat man den überraschenden Anblick, dass nun die messingne Scheibe, als sei sie dem Einflusse der Schwere ganz entzogen, sich rasch um die Verticale herumdreht. Hat man die Tragstange selbst bis ans Ende aus der Hülse herausgezogen und sie dann festgeklemmt, so vermag ein kräftiger Zug noch die Erscheinung hervorzurufen, und löst man gleich nachdem die Scheibe in Rotation versetzt, die Schraube an der Hülse und zieht die Stange heraus, so kann man sie mittelst einer Oese, die auf dem äussern Ringe ist, in der Schlinge einer Kordel aufhängen und sie eine geraume Zeit an derselben herumtragen, ehe die Axe herabsinkt. Wenn kein Gegengewicht aufgeschoben und besonders wenn die Stange weit aus der Hülse hervor gezogen ist, zeigt sich das Eigenthümliche, dass die Scheibe nun in starken Sätzen bei ihrer Seitenbewegung auf und nieder hüpft, indem sie zugleich weit kürzere Zeit ihre (mittlere) Lage gegen die Verticale beibehält. — Nimmt die Rotation der Scheibe allmählich ab, so nimmt die Seitenbewegung dagegen zu. Einzelne Stösse versetzen die Stange ebenso in Schwankungen, wie wenn die Seitenbewegung nicht vorhanden ist. Ein Druck von Oben nach Unten oder umgekehrt beschleunigt die Seitenbewegung oder verzögert sie, je nachdem er in der Richtung des Uebergewichtes auf die Scheibe oder ihr entgegengesetzt wirkt.

Uebt man auf das Metallplättchen c einen horizontalen Seitendruck aus und geschieht derselbe im Sinne der bereits stattfindenden Seitenbewegung, so senkt sich die Scheibe, wenn der durch das Uebergewicht auf dieselbe ausgeübte Druck bei nicht vorhandener Rotation sie heben würde, dagegen hebt sie sich im umgekehrten Falle, und sucht der Druck auf das Plättchen für sich eine der vorhandenen entgegengesetzte Seitenbewegung hervorzubringen, so hebt sie sich im erstern Falle und senkt sich im letztern. Hält man die Gabel mittelst des Plättchens c oder schraubt das Schräubchen v gegen ihre Axe, so dass die Seitenbewegung aufhört, so stellt sich die Stange sofort vertical. Fixirt man sie, indem man das Plättchen in einen Zahn der Kreishülse eingreifen

lässt, unter dem augenblicklich stattfindenden Winkel gegen die Verticale, so hört die Seitenbewegung sogleich auf, vorausgesetzt, dass die Säule gehörig vertical steht, und nicht durch eine schiefe Lage derselben eine Tendenz zu einer Bewegung nach der einen oder anderen Seite vorhanden ist; lässt man sie wieder frei, so beginnt bei Fortdauer der Rotation der Scheibe auch die Seitenbewegung wieder.

Achtet man auf die Richtung der Seitenbewegung mit Rücksicht auf die anfangs gedachte Stellung des Beobachters, so sieht man, dass, wenn das Uebergewicht auf der Seite des Drehpunktes ist, wo die Scheibe sich befindet, der rechte Theil der Scheibe sich von seiner Rechten entfernt, der linke dagegen sich seiner Linken nähert; ist es auf der andern, wirkt es also hebend auf die Scheibe, so nähert sich umgekehrt der rechte Theil der Scheibe seiner Rechten und der linke entfernt sich von seiner Linken. Es ist selbstredend, dass, wenn die Kordel in entgegengesetztem Sinne auf die Axe aufgewickelt wäre, der Beobachter bei unveränderter Stellung also nun die Scheibe entgegengesetzt mit dem Zeiger einer Uhr rotiren sähe, die Seitenbewegung in beiden Fällen die umgekehrte sein würde.

Man gewinnt eine klare Uebersicht über diese Bewegungen, wenn man sich Figur 7, aus dem Drehpunkt O als Mittelpunkt eine Kugel von sehr grossem Halbmesser beschrieben und die durch den Drehpunkt gehende Verticale O V aufwärts und ebenso die Axe der Scheibe E verlängert denkt, bis sie, jene in T, diese in P die Kugel treffen. Legt man dann durch TP einen grössten Kreis TPQ und beschreibt mit TP um T als Pol einen Kugelkreis Prl wo r für einen Beobachter, der in T nach P sieht, rechts, l links liegt, und ist ABC die Richtung, in der sich die Scheibe dreht, so tritt Folgendes ein: Sucht eine die rotirende Scheibe E angreifende Kraft den Pol P aufwärts in der Richtung PT zu treiben, so weicht P nach Pr aus; treibt sie P abwärts nach PQ, so weicht er nach Pr aus; drängt sie dagegen P nach Pr, so hebt sich P in der Richtung PT und drängt sie nach Pr, so senkt sich P nach PQ.

Um die oben gedachten, durch Stösse verursachten Schwankungen und oft äusserst langsamen Bewegungen des Mittelpunktes der Scheibe schärfer beobachten und sofort wahrnehmen zu können, lasse ich auf die blanke Metallscheibe des Rotationskörpers in einem dunkeln Zimmer mittelst des Heliostats durch eine grosse Oeffnung, oder auch durch eine offene Fensterscheibe Sonnenlicht schief auffallen. Das reflectirte Licht bildet auf der gegenüberstehenden Wand

einen kleinen lichten Kreis, in dem ein Paar sehr dunkler, vom Mittelpunkt aus sich erweiternder Streifen zusammenstossen, so dass sich ein Kreuz bildet, welches die leisesten Bewegungen des Mittelpunktes auf höchst anziehende Weise in verstärktem Maasse zeigt. Selbst die Rotation der Scheibe, wenn diese langsamer wird, lässt sich an demselben vollkommen deutlich erkennen, indem in dem Mittelpunkte des Bildes sich lichte und dunkle dünne Streifen durchschneiden, welche zugleich mit der Scheibe, während das Kreuz an seiner Stelle bleibt, wie die Speichen eines Rades rotiren. Hat man keinen Heliostat mit Uhrwerk, welcher das Sonnenlicht immer in gleicher Richtung auf die Scheibe sendet, so muss man eine Tageszeit wählen, wo die Sonne hoch am Himmel steht, indem sonst ihre eigene Bewegung mit in's Spiel kommt. Eine völlige Verdunkelung des Zimmers ist nicht nöthig, auch kann man sich Abends des Lichtes einer kräftigen Lampe bedienen, um welche man einen Schirm so stellt, dass ihr Licht nur auf die Scheibe fällt.

Ist nun Gleichgewicht vorhanden und ist M Figur 8 I das Bild des Mittelpunktes der nicht rotirenden Scheibe, sind ferner MU oder 1, MO oder 2, ML oder 3, MR oder 4 die Richtungen, nach welchen eine die Scheibe angreifende Kraft dieselbe bewegen würde, und nehmen wir zunächst an, es sei ein andauernder Druck, so sieht man, wenn M<sup>1</sup> in Figur 8 II das Bild des Mittelpunktes der in der Richtung O<sup>1</sup> R<sup>1</sup> U<sup>1</sup> rotirenden Scheibe ist, dieses entsprechend der obigen Ordnung sich nach M<sup>1</sup> L<sup>1</sup> oder 1<sup>1</sup>, nach MR<sup>1</sup> oder 2<sup>1</sup>, nach MO<sup>1</sup> oder 3<sup>1</sup>, endlich nach M<sup>1</sup> U<sup>1</sup> oder 4<sup>1</sup> fortschreiten. Bei umgekehrter Rotation der Scheibe sind auch alle resultirenden Bewegungen umgekehrt. Ist das Gleichgewicht nicht vorhanden und findet also eine Seitenbewegung bereits statt, so treibt ein anhaltender Druck das Bild nach einer Richtung, welche die Resultante der horizontalen Bewegung und derjenigen ist, nach welcher der Druck nach dem Vorigen die rotirende Scheibe, wenn Gleichgewicht vorhanden wäre, drängen würde.

Interessanter sind noch die Erscheinungen, wenn der Druck nur ein schnell vorübergehender, ein Stoss ist. Je nachdem er die nicht rotirende Scheibe Fig. 8 I. nach M<sup>1</sup>O, M<sup>1</sup>U, M<sup>1</sup>L oder M<sup>1</sup>R treiben würde, bewirkt er, dass die rotirende die Spiralen A, B, C oder D beschreibt Fig. 9, wo A, B, C, D den Ort des Bildes auf der Wand im Augenblicke des Stosses bezeichnen. Je stärker die Rotation, um so näher liegen die Endpunkte der Spiralen dem Anfangspunkte, um so schneller geschieht ihre Beschreibung und um so

weniger ist die Richtung im Anfange der Spirale erkennbar, nach welcher der Stoss die nicht rotirende Scheibe treiben würde. Ist z. B. die Rotation sehr schwach, so bewirkt der erste Stoss nach MO, dass das Bild die gleich anfangs stark ansteigende Spirale A' mit wenigen grossen Windungen beschreibt.

Findet in Folge eines Uebergewichtes — und man wählt zu dem Ende ein möglichst schwaches — eine Seitenbewegung statt, von der wir annehmen wollen, dass sie das Bild von der Linken zur Rechten, nach MR Fig. 8 I, fortschreiten lasse, so hat ein Stoss, welcher die nicht rotirende Scheibe in der Richtung MO, MU, ML oder MR treiben würde, zur Folge, dass die rotirende die Spiralen E, F, G, H beschreibt. Hat die Rotationsgeschwindigkeit abgenommen, also die Seitenbewegung zugenommen, so rücken die Spiralen weiter auseinander. Hat man das Pendel auf die Tragstange aufgeschoben, so beschreibt das Bild die Spiralen I oder K, je nachdem das Uebergewicht auf der Seite der Scheibe oder der andern ist. —

Die Erscheinungen, welcher unser Apparat bietet, wenn er als Bohnenberger'scher in der **gewöhnlichen** Weise gebraucht wird, also der Rotationskörper eine Scheibe oder ein Sphäroid ist, deren Schwerpunkt genau im gemeinsamen Mittelpunkt der Ringe liegt, bedürfen nach dem Vorhergehenden kaum noch der Erwähnung. Ist kein Uebergewicht in den innern Ring eingesetzt, so bleibt die Axe in jeder Lage in ihrer Stellung und folgt auch dem leisesten Drucke, rotirt aber die Scheibe, so leistet ihre Axe gegen Stösse, welche sie in eine andere Lage zu versetzen suchen, einen starken Widerstand, doch nur so lange, als der äussere Ring mit der Tragstange nicht festgehalten wird; wenn dieses aber geschieht, folgt sie ihnen wieder mit derselben Leichtigkeit. Ein anhaltender Druck auf den äussern Ring, der eine Rotation um die Verticale zu erzielen sucht, bewirkt eine Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene, ein Druck auf den innern Ring zu einer Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene bringt dagegen eine Seitendrehung um die Vertical-Axe hervor. Die Richtung jeder dieser Bewegungen so wie die Wirkung eines in den innern Ring eingesetzten Uebergewichtes sind aus dem Obigen und aus Fig. 7. ersichtlich, wenn man beachtet, dass der Drehpunkt O jetzt in den Mittelpunkt der Scheibe E fällt.

Die besonderen Erscheinungen, welche das Polytrop bietet, sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, später erwähnt werden, ebenso andere Versuche, welche sich mit dem obigen Apparate unter besondern Verhältnissen anstellen lassen.

## §. 4.

Versuchen wir nun, auf elementare Weise uns von den obigen Erscheinungen Rechenschaft abzulegen.

Es seien Fig. 10. I.  $ABCD$ ,  $E C D F$  zwei sich in  $CD$  schneidende Ebenen, und ein in der erstern sich bewegendes Körper von der Masse  $m$  gelänge in einem Punkte  $G$  ihrer Durchschnittslinie senkrecht auf dieselbe mit einer Geschwindigkeit an, welche ihn als trägen Körper in der Zeiteinheit von  $G$  nach  $H$  brächte, so wird er, wenn er von jenem Augenblicke in die Ebene  $E C D F$  übergeht, in Folge der von ihm erlangten Bewegungsgrösse  $m \cdot GH$ , von seinem Gewichte abgesehen, gegen diese neue Ebene einen Druck ausüben, der durch  $m \cdot HI$  dargestellt ist, wenn  $HI$  die Länge der von  $H$  auf die Ebene gefällten Senkrechten bezeichnet. Die Geschwindigkeit, die er als träger Körper in der Ebene haben würde, wenn diese fest wäre, würde  $GI$ , also der Verlust an Geschwindigkeit  $= GH - GI$  sein. Errichtet man auf  $HG$  im Punkte  $H$  und in der Ebene  $IGH$  eine Senkrechte  $KH$ , so ist  $GK > GH$ , also  $GK - GI$  oder  $IK > GH - GI$ . Aber  $IK$  ist  $= \frac{KH^2}{KG}$ , also  $GH - GI < \frac{KH^2}{KG}$ , und

um so mehr kleiner als  $\frac{KH^2}{HG}$ , Ist nun der Winkel der Ebenen

$IGH$  unendlich klein, so ist  $KH$  ebenfalls unendlich klein, während  $HG$  endlich ist, also ist  $GH - HI$  oder der durch den Uebergang in die neue Ebene bewirkte Verlust an Geschwindigkeit ein Unendlich kleines der zweiten Ordnung, welches unendlich mal wiederholt noch eine unendlich kleine Grösse sein würde, und wäre die Ebene  $E C D F$  nur zum Theil fest, so würde dieser Verlust noch geringer sein.

Wäre  $GH$  nicht senkrecht gegen die Durchschnittslinie  $CD$ , sondern schief, Fig. 10 II, so könnte man statt  $GH$  eine mit  $CD$  parallele Geschwindigkeit  $HH^1$  und eine auf  $DC$  senkrechte  $GH^1$  setzen, von denen  $HH^1$ , da sie den Körper parallel  $CD$  fortschieben würde, auf den Druck der in Folge seines Ueberganges als bewegendes Kraft auf die zweite Ebene gewissermassen frei wird, keinen Einfluss äussern könnte, und es tritt also hier  $GH^1$  an die Stelle von  $GH$  im Vorigen.

Denkt man sich nun, während alle Punkte einer materiellen Ebene nach Richtungen, welche alle der Ebene angehören, in Bewegung sind, drehe sich dieselbe durch eine äussere Kraft um eine Linie in ihr oder eine ihr parallele

Linie um einen unendlich kleinen Winkel, so wird je nach der Richtung und Grösse der im Augenblicke der Drehung bereits stattfindenden (nicht durch dieselbe hervorgebrachten) Geschwindigkeit jeder einzelne Massenpunkt auf die Ebene in ihrer nächstfolgenden Lage senkrecht gegen dieselbe einen Druck äussern, welcher sich für denselben nach dem Vorigen beurtheilen lässt und je nach der Art seiner Verbindung mit den übrigen auf diese zurückwirken und mit den von ihnen herrührenden Impulsen sich zu einer Gesamtwirkung auf die ganze Ebene in der neuen Lage zusammensetzen wird.

*Fig. 11* Ist die Ebene eine kreisförmige Scheibe, Fig. 11, welche sich um ihren Mittelpunkt  $M$  nach der Richtung  $A C B D$  dreht, und denkt man sich die Drehkräfte  $p q$ ,  $p_1 q_1$ ,  $p_2 q_2$ ,  $p_3 q_3$ , welche auf die einzelnen Massenpunkte  $p$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  tangential gegen die Halbmesser  $M p$ ,  $M p_1$ ,  $M p_2$ ,  $M p_3$  wirken, nach zweien auf einander senkrechten Durchmessern  $A B$ ,  $C D$  zerlegt, so sind die  $A B$  parallelen Seitenkräfte  $p r$ ,  $p_1 r_1$  der Punkte im obern Theile  $A C B$  der Scheibe unter sich gleichgerichtet, ebenso die  $A B$  parallelen  $p_2 r_2$ ,  $p_3 r_3$  im untern Theile, diese aber jenen entgegengesetzt, und beide setzen sich zu einem Kräftepaar  $P R$ ,  $P^1 R^1$  zusammen. In gleicher Weise geben die  $C D$  parallelen Seitenkräfte  $p s$ ,  $p_3 s_3$  auf der linken und  $p_1 s_1$ ,  $p_2 s_2$  auf der rechten Seite von  $C D$  das Kräftepaar  $P S$ ,  $P^1 S^1$ , und es hat wegen der Gestalt und Gleichartigkeit der Scheibe das erstere Kräftepaar mit dem andern ganz gleiche Wirkung.

Nehmen wir an, der Durchmesser  $A B$  sei horizontal, Fig. 12, und es gelange die Scheibe, deren Axe  $M O$  Fig. 12 ist, durch Drehung um den festen Punkt  $O$  aus der Lage I indem sie sich senkt, in die benachbarte Lage II, so werden, wenn man in dieser die Linien  $P S$ ,  $P^1 S^1$  den gleichbenannten Kräften in der vorigen parallel und gleich macht, und nun  $P S$ ,  $P^1 S^1$  nach dem Obigen in die Seitenkräfte  $P G$ ,  $P H$  und  $P^1 G^1$ ,  $P^1 H^1$  zerlegt, die auf der Scheibe senkrechten, also mit  $M O$  parallen  $P G$ ,  $P^1 G^1$  ein Kräftepaar bilden, welches den Druck angibt, der in Folge des Uebergangs aus der einen Lage in die andere auf die Ebene ausgeübt wird, während  $P H$ ,  $P^1 H^1$  zugleich mit dem Kräftepaar  $P R$ ,  $P^1 R^1$  die Drehung um die Axe  $O M$  fortsetzen wird und zwar die Stetigkeit der Lageveränderung vorausgesetzt, mit unveränderter Stärke. Durch diesen Druck wird der Punkt  $M$  gedrängt, sich in der horizontalen  $P P^1$  und zwar in der Richtung von  $M$  nach  $P$ , also zur Linken des Beobachters, zu bewegen; wie man noch deutlicher sieht, wenn man das Kräftepaar durch ein anderes in derselben Ebene liegendes,

und ihm ganz gleiches  $TU$ ,  $T^1U^1$ , welches  $OM$  unmittelbar angreift, ersetzt, da letzteres rücksichtlich seiner Drehkraft um den festen Punkt  $O$  die Wirkungsfähigkeit einer einzigen nach  $MP$  gerichteten Kraft  $MX$  hat, deren Moment  $OM \cdot MX$  dem Unterschiede der Momente  $OT \cdot T^1U^1$  und  $OT \cdot TU$  gleich ist. Die Folge der ersten Wirkung der Kraft  $K$  und der Rotation der Scheibe ist also ein Antrieb zu einer Rotation der Scheibe um die Vertical-Axe  $OV$ . Wird dieser Antrieb dadurch, dass man die Horizontal-Axe der Gabel gleich anfangs festhält, überhaupt die Axe  $OM$  verhindert, aus ihrer Verticalebene herauszutreten oder durch die Reibung und andere Widerstände gänzlich vernichtet, so verhält sich der Apparat für eine fernere Wirkung der Kraft  $K$  und der Rotation wie zuvor und es behält folglich auch die Axe  $OM$  so lange ihre leichte Beweglichkeit in dieser Ebene. Findet dieses aber nicht statt, so wächst mit den aufeinander folgenden Antrieben zur Drehung um die Vertical-Axe die Kraft um diese Widerstände zu bewältigen, und von dem Augenblicke an, wo dieses geschieht, stehen die Massentheilchen unter dem Einflusse zweier Rotationen, deren eine die Rotationsaxe unter unveränderlichem Winkel um die Verticale treibt, so dass sie für den auf der über  $O$  hinaus verlängerten Rotationsaxe stehenden Beobachter, welcher die Scheibe in der Richtung der Zeiger einer Uhr sich drehen sieht, von oben herab gesehen in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, während die andere die Drehung der Massentheilchen der Scheibe um die Rotationsaxe bewerkstelligt. Beide vereinigen sich zu einer Rotation um eine Axe, deren Lage man findet, wenn man von dem Scheidepunkt  $O$  aus auf der dann stattfindenden Lage der Axe  $OM$  und ebenso auf  $OV$  Linien  $OD$ ,  $OJ$  abträgt, welche den Winkelgeschwindigkeiten, das heisst, den Geschwindigkeiten, welche ein Punkt in einer Entfernung gleich der Einheit um diese Axen annehmen würde, proportional sind und nach den Seiten dieser Axen von  $O$  aus sich erstrecken, nach welchen die Rotationen für ein in  $O$  befindliches Auge als gleichgerichtet z. B. in der Richtung der Zeiger einer Uhr vor sich gehend, erscheinen würden, und alsdann die Diagonale  $OF$  des durch  $OJ$  und  $OE$  bestimmten Parallelogramms  $EOJF$  zieht, indem durch diese Diagonale nicht bloss die Lage der augenblicklichen Drehaxe, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe in dem gegebenen Augenblicke bestimmt ist. Der Punkt resp. die Punkte, in welchen sie die Scheibe trifft, sind während desselben in Ruhe, sie bildet die Unveränderlichkeit der Rotation vorausgesetzt, fortwährend mit der Verticalaxe und

der Rotationsaxe dieselben Winkel, trifft aber, indem sie sich mit der Letztern um jene gleichsam bewegt, die Scheibe von einem Augenblicke zum andern stets in andern Punkten. Sie bildet mithin die gemeinschaftliche Berührende zweier geraden Kegel, von denen der eine die Verticale zur Axe hat, der andere die Rotationsaxe, der erstere im Raume fest ist und der letztere auf jenem sich abrollt. Da die augenblickliche Drehaxe von der im Körper festen Rotationsaxe, welche bei unserer Annahme eine freie Axe ist, abweicht, so halten sich die Schwungkräfte um dieselbe nicht mehr im Gleichgewicht; sie bedingen im Vereine mit dem aus der beschleunigenden Kraft  $K$  hervorgehenden Kräftepaar die Verlegung der augenblicklichen Drehaxe und zugleich für die im Körper feste Drehaxe kegelförmige Drehungen oder Schwankungen, welche um so kleiner sind, je geringer jene Abweichung ist, oder je grösser die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe im Vergleich zu der Geschwindigkeit ist, welche die Rotationsaxe und mit ihr die Scheibe durch die Kraft  $K$  in einem unendlich kleinen Zeittheilchen erlangt haben würde, also mit der Grösse der Kraft  $K$  und der Entfernung ihres Angriffspunktes auf der Rotationsaxe zunehmen; deshalb hüpfte auch die Scheibe im Fessel'schen Apparate sehr stark, wenn man die Stange weit herauszieht und kein Gegengewicht angebracht ist. Will man den vorhergehenden Satz über die Zusammensetzung der Drehungen \*) nicht als bekannt voraussetzen, so darf man nur beachten, dass, sobald die Drehung um die Verticalaxe beginnt, die Scheibe gegen ihren in der Verticalebene liegenden Durchmesser  $CD$  eine andere Lage einnimmt, welche in Fig. 13 mit II. bezeichnet ist, und dass wenn wieder  $PR$ ,  $P^1R^1$  das aus der Zerlegung der Rotationskräfte hervorgehende gegen diesen Durchmesser senkrechte Kräftepaar in der Lage I. darstellt, durch den Uebergang in die Lage II, ähnlich wie vorhin, aus demselben zwei gegen die neue Lage senkrechte, entgegengesetzt gerichtete Druckkräfte  $PU$ ,  $P^1U^1$  entstehen, welche wieder  $OM$ , welches der zweiten Lage angehört, parallel sind und den Mittelpunkt  $M$  und die Axe  $OM$  in der Verticalebene heben, also der fernern Drehung der Axe durch die Kraft  $K$  nach entgegengesetzter Richtung

---

\*) Ueber das Princip der Zusammensetzung der Drehungen, welches von Frisi ums Jahr 1750 entdeckt worden. (Frisius de Rotatione Op. II. 134, 157 und Cosmographia II, 24) siehe Poinsot's Neue Theorie der Drehung, deutsch von Schellbach, Berlin 1851; auch in Ohm's Mechanik III. Th. §. 65 und in Duhamels analyt. Mechanik, übersetzt von Eggers. Leipzig 1853 I, S. 20 findet sich dasselbe erörtert.

entgegenwirken. Ist dieses Gleichgewicht vorhanden, so wird durch eine Hemmung oder Förderung der Drehung um die Verticale diese Gegenwirkung gegen die Kraft  $K$  geschwächt oder gestärkt, die Axe senkt sich oder steigt. Uebrigens darf man nicht unbeachtet lassen, dass durch die, wenn auch schwache Rotationsgeschwindigkeit um die Verticalaxe die Theilchen der Scheibe ein Bestreben erhalten, sich in horizontaler Richtung zu entfernen, welches für die der Axe näher liegenden Punkte z. B.:  $C$  schwächer, für die fernern z. B.:  $D$  stärker ist, als dasjenige, welches der Mittelpunkt der Scheibe durch diese Rotation erhält, und dessen Gesamtwirkung bei einer einzelnen Scheibe, je nachdem der Winkel  $VOM$  ein stumpfer ist, wie in der Figur, oder ein spitzer, die Wirkung der Kraft  $K$  zum Senken der Axe entweder verstärken oder sie schwächen wird. Will man sich experimental davon überzeugen, so darf man nur der Tragstange im Fessel'schen Apparate, ohne das die Scheibe rotirt, eine Drehung um die Verticale geben; sie senkt sich alsdann sofort mit Heftigkeit im erstern Falle, im letztern dauert diese Drehung eine Weile fort. Noch belehrender und zugleich ein Beleg für die obige Erklärungsweise ist folgender Versuch. Man setzt nämlich auf die früher gedachte Platte der Centrifugal-Maschine unsern Apparat zwischen den Stiften fest, fixirt die Axe der Gabel mittelst des Schraubchens  $v$  und setzt, während das Uebergewicht z. B.: bei der Scheibe ist, diese in Rotation. Gibt man alsdann mittelst der Kurbel der Centrifugalmaschine der Platte eine Umdrehung in der Richtung, in welcher bei Nichtfixirung der Gabelaxe die Umdrehung um die Verticale erfolgen würde, so kann man bei einiger Vorsicht eine Geschwindigkeit der Platte erzielen, welche derjenigen, die in jenem Falle stattfände, möglichst gleich ist; alsdann verharrt die Axe der Scheibe in ihrem Winkel gegen die Verticale, dreht man stärker, so hebt sie sich, dreht man langsamer, so senkt sie sich und fällt sofort, wenn die Drehung aufhört.

### §. 5.

Die Betrachtungsweise im vorigen §. kam im Grunde darauf hinaus, das System während einer unendlich kleinen Zeit, zunächst unter dem Einflusse der beschleunigenden Kraft anzunehmen und dann den Einfluss der rotatorischen Kräfte in anfänglicher Richtung und Stärke auf den Körper in der neuen Lage zu untersuchen. Wollte man umgekehrt verfahren, oder auch sofort die gleichzeitige Wirkung beider

Einflüsse auf die Scheibe ermitteln, so würde man die Wirkung der Kraft  $K$  zur Drehung von  $OM$  in der Verticalebene durch ein System von parallelen und unter sich gleichen, die einzelnen Massentheilchen der Scheibe angreifenden Kräften, von denen in Fig. 14 die in dem über dem horizontalen Durchmesser  $AB$  liegenden Theile  $ACB$  angebrachten in der Richtung  $OM$ , die in dem untern Theile  $ADB$  angebrachten in der Richtung  $MO$  wirken, ersetzen können.

Betrachten wir hier nur die gleichzeitige Wirkung und sind  $p, p_1, p_2, p_3$  vier symmetrisch gelegene Punkte,  $p_t, p_1 t_1, p_2 t_2, p_3 t_3$  Tangentialkräfte,  $p_k, p_1 k_1, p_2 k_2, p_3 k_3$  die parallelen, die Kraft  $K$  rücksichtlich ihres drehenden Einflusses ersetzenden Kräfte, und zwar die erstere  $p_1 k_1, p_2 k_2$  in der Richtung  $OM$ , die letztern  $p_2 k_2, p_3 k_3$  in der Richtung  $MO$  wirkend, endlich  $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$  die in den einzelnen Massenpunkten sich ergebenden Mittelkräfte, so wird eine durch  $AB$  gelegte Horizontalebene von  $p_m$  nicht, wie von  $p_t$ , in einem Punkte der verlängerten  $AB$ , sondern in einem Punkte  $e$ , der von  $N$  aus gesehen zur Linken von  $AM$  liegt, getroffen, von  $p_1 m_1$  in einem Punkte  $e^1$ , der zur Linken von  $MB$  liegt, von  $p_2 m_2$  in einem Punkte  $e_2$ , der ebenfalls zur Linken von  $MB$ , dagegen von  $p_3 m_3$  wieder in einem Punkte  $e_3$ , der zur Linken von  $MA$  liegt, getroffen.

Die vereinigte Wirkung der Kräfte  $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$  geht also dahin, die, von  $O$  aus betrachtet, zur Linken liegende Hälfte der Scheibe gegen die Linke des Beobachters zu rücken, die zur Rechten liegende von der Rechten zu entfernen, was rücksichtlich der Axe  $OM$  ein Streben zur Folge hat, diese in derselben Höhe in entgegengesetzter Richtung mit der Bewegung eines Uhrzeigers um die Verticale zu führen; allein sie ist darauf nicht beschränkt. Denn wären die Massenpunkte frei, so dass sie den gedachten Mittelkräften folgen könnten und  $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$  die im ersten Augenblicke zurückgelegten Wege, so würde, wenn man sich  $M$  mit  $m, m_1, m_2, m_3$  verbunden dächte, von diesen Linien die beiden erstern  $Mm, Mm_1$  mit  $OM$  grössere, die letztern  $Mm_2, Mm_3$  kleinere Winkel als  $Mp, Mp_1, Mp_2, Mp_3$ , bilden, es resultirt hieraus für die Scheibe ein Streben, den Winkel  $CMO$  zu vergrössern, dagegen  $OMD$  zu verkleinern, welches eine wenn auch äusserst kleine Senkung von  $AB$  und der Scheibe überhaupt nothwendig zur Folge hat. Sobald jene Rotation um die Verticale beginnt, tritt dieselbe, wie oben gezeigt worden, der ferneren Wirksamkeit der Kraft  $K$  zur Senkung der Scheibe entgegen. Je grösser die Rotation der Scheibe gegen die Wirksamkeit der Kraft  $K$  ist, also die Tangentialkräfte  $p_t$ ,

$p^1 t^1, p t^2, p^3 t^3$  gegen die horizontal gerichteten  $p k, p_1 k_1, p_2 k_2, p_3 k_3$ , um so näher liegen die resultirenden  $p m, p^1 m^1, p_2 m_2, p_3 m_3$  den Richtungen der erstern, um so näher also auch die Punkte  $e, e_1, e_2, e_3$  dem Durchmesser AB, und folglich wird um so geringer die Rotation um die Vertikale und zugleich die anfängliche Senkung der Scheibe sein. \*)

Kürzer, obwohl vielleicht nicht anschaulicher, würde man zu dem vorigen Ergebniss gelangen, wenn man sich die Massen des obern und untern Theiles der Scheibe in den Punkten P, P<sup>1</sup> der Symmetrie-Axe CD vereinigt, alle auf der Scheibe senkrechten  $k$  im obern Theile durch die Kraft P L, im untern durch P<sup>1</sup> L<sup>1</sup> und die die Scheibe rotirenden Kräfte durch ein einziges Kräftepaar in der Ebene derselben P R, P<sup>1</sup> R<sup>1</sup> parallel AB ersetzt dächte und nun in Betracht zöge, dass das resultirende Kräftepaar P J, P<sup>1</sup> J<sup>1</sup> auf die Scheibe den Einfluss äussert, 1. den Winkel A M O zu verkleinern, mithin O M B zu vergrössern, 2. den Winkel C M O zu verkleinern, dagegen O M D zu vergrössern, und der Apparat beiden Wirkungen im ersten Augenblicke nur durch eine Bewegung seiner Axe O M von der Rechten zur Linken unter gleichzeitiger kleiner Senkung Folge leisten kann. Wird daher die Axe gleich anfangs oder im Laufe der Bewegung in ihrem Winkel gegen die Vertikale fixirt, so kann die Seitenbewegung nicht eintreten oder hatte sie bereits statt, so muss dieselbe sofort aufhören; es wird der drehende Einfluss der Kraft K um die Horizontalaxe, welcher im Vereine mit der Rotationsgeschwindigkeit die Seitenbewegung einleitet und unterhält, dadurch aufgehoben. — Man könnte auch von M aus auf der Axe M O und der Horizontalen M B Stücke M X, M Y diesen Kräftepaaren proportional abtragen; die Resultirende M Z würde alsdann die Richtung der Axe des resultirenden Kräftepaares haben und zugleich dessen Grösse proportional sein. Nimmt M X in Folge der Widerstände, welche die Reibung und der Widerstand der Luft entgegenseetzen, allmählich ab, während M Y dasselbe ist, so liegt M Z näher bei M Y und die Drehung der Scheibe um die Vertikale muss stärker werden. Es darf übrigens bei der ganzen obigen Betrachtung nicht übersehen werden, dass wenn K nicht ein sehr bedeutendes Gewicht oder ein starker Stoss ist, die Kräfte  $p k$  gegen die Kräfte  $p t$ , wenn die Scheibe schnell rotirt, äusserst klein sind.

\*) Wir haben uns absichtlich bei der obigen Betrachtungsweise länger verweilt, weil sich in ähnlicher Weise von den Störungen eine allgemeine Vorstellung gewinnen lässt, welche auf die Bahn eines um einen Centalkörper M sich bewegenden Körpers p die Anziehungskraft eines dritten Körpers übt, der bald auf der einen, bald auf der andern Seite dieser Bahn steht.

## §. 6.

Im Vorigen vertritt die Kraft  $K$  das Gewicht der Scheibe, wenn das Gewicht des Dreharms sammt dem des Ringes durch ein Gegengewicht aufgehoben ist, und, ist das Gewicht beider durch ein Gegengewicht oder die Art der Aufhängung, wie im Bohnenberger'schen Apparate aufgehoben, die Wirkung eines Uebergewichtes, oder eines beständigen, sich gleichbleibenden Druckes, welcher den Dreharm zu senken sucht. Wirkte  $K$  in entgegengesetzter Richtung also zur Hebung der Scheibe, oder rotirte sie bei derselben Richtung von  $K$  in entgegengesetztem Sinne, so muss die Rotation um die Verticale offenbar eine der betrachteten entgegengesetzte sein. Ueberhaupt wird man nach dem Gesagten sich von den Figur 8 II dargestellten, aus einem anhaltenden Drucke resultirenden Bewegungen leicht Rechenschaft geben können. Indem diese Bewegungen selbst Gegenwirkungen zur Folge haben, erklären sich nun auch ohne Schwierigkeit die Spiralen, welche durch einzelne Stösse hervorgebracht werden. Betrachten wir einen, welcher die Spirale  $A$  erzeugt, also die nicht rotirende Scheibe nach  $MO$ , Figur 8 I, treiben würde, so weicht die rotirende Figur 8 II nach  $M^1R^1$  aus, wird sich aber zugleich je nachdem der Stoss im Vergleich zur Rotation der Scheibe stärker oder schwächer ist, etwas über der Horizontalen erheben und unter dem Einflusse beider Bewegungen zunächst den Bogen  $ab$  beschreiben, in  $b$  wird die mit der Bewegung  $MR$  auftretende senkende Gegenwirkung in der Richtung  $M^1U^1$ , Figur 8 II, vorherrschend und führt mit der in der Richtung  $MR$  noch fortdauernden Seitenbewegung den Mittelpunkt der Scheibe abwärts durch den Bogen  $bc$ , in  $c$  ist die Bewegung in der Richtung  $M^1R^1$  durch die in Folge der Senkung eintretende Gegenwirkung in der Richtung  $M^1L^1$  vernichtet, und diese letztere führt, während die Senkung fort dauert, die Scheibe durch den Bogen  $cd$ , in  $d$  ist nun auch die senkende Bewegung durch die in Folge der Seitenbewegung in der Richtung  $ML$  stattfindende Gegenwirkung aufwärts nach  $M^1O^1$  vernichtet, die Bewegung in der Richtung  $ML$  dauert fort und treibt mit der Gegenwirkung in der Richtung  $MO$  den Mittelpunkt aufwärts durch den Bogen  $de$  u. s. w. bis die Scheibe zur Ruhe kommt. Ist die rotirende Scheibe nicht balancirt, sondern schreitet sie um die Verticale z. B. in der Richtung  $M^1R^1$ , Figur 8 II, fort, so machen einzelne Windungen, welche ein Stoss erzeugt, die allgemein fortschreitende Bewegung des Centrums mit und rücken folglich auseinander, daher die Figuren  $E, F, G, H$ .

Der Grund, wesshalb die rotirende Scheibe sowohl wenn eine Seitenbewegung stattfindet als nicht, gegen jegliche Stösse ein um so grösseres Beharrungsvermögen besitzt, je stärker die Rotation, ergibt sich aus der Natur der dadurch bewirkten, spiralförmigen Bewegungen von selbst.

Ist der die Scheibe tragende, innere Ring mittelst der Scheibe  $p$  und des Plättchens  $q$  senkrecht gegen den äussern, den wir in der Verticalebene annehmen, gestellt, so kann ihr Gewicht, überhaupt eine in der Verticalebene der Tragstange wirkende Kraft keine Seitenbewegung mit der Rotation der Scheibe veranlassen, weil sie mit dieser in derselben Ebene liegt oder doch ihr parallel ist; es wird die Scheibe der Kraft ebenso folgen als wenn sie nicht rotirte. Steht der innere Ring unter einem andern Winkel gegen den äussern, so kann man die alsdann stattfindende Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe, indem man sie durch die Länge einer auf ihrer Axe vom Mittelpunkt der Scheibe aus aufgetragenen Linie darstellt, nach einer auf dem äussern Ringe senkrechten, also horizontalen und nach einer in dessen Ebene fallenden, auf dieser senkrechten Richtung zerlegen; alsdann trägt nach dem Gesagten die erstere Componente nichts zu einer Seitenbewegung bei, die letztere aber, mit unserm Normalfalle übereinstimmende, ist nothwendig kleiner als die, aus deren Zerlegung sie hervorgegangen ist. Man begreift daher, wie die obigen Erscheinungen je nach dem Winkel der beiden Ringe sich ändern müssen.

Auch die Erscheinungen, welche das Polytrop zeigt, lassen sich nach dem Obigen leicht vorhersehen. Da der Drehpunkt zwischen den beiden Scheiben liegt, so wird ein Druck in der Vertical-Ebene der Axe, der die eine Scheibe, wenn sie nicht rotirte, senkte oder Figur 8 I in der Richtung  $MU$  triebe, die andere heben oder in der Richtung  $MO$  bewegen. Rotiren also die Scheiben vom Drehpunkt aus gesehen nach derselben Richtung, z. B. wie Figur 8 unterstellt, so würde für die erstere eine Seitendrehung, Fig. 8 II, nach  $M^1L^1$ , für die andere eine entgegengesetzte nach  $M^1R^1$  daraus hervorgehen; ist also Gleichgewicht vorhanden und rotiren die gleich schweren Scheiben gleich stark, so tritt keine Seitenbewegung ein und der Druck oder Stoss behält seine volle Wirksamkeit; das System zeigt keine Festigkeit. Sind die Entfernungen vom Drehpunkte ungleich, so ist das Drehmoment des Gewichtes des Theils nach der einen Seite desselben grösser als das des Theils nach der andern, also wird, wenn beide Scheiben wieder gleich stark rotiren, eine Seitendrehung eintreten, deren Grösse und Richtung durch

den Unterschied der Dreharme bedingt ist. Der Apparat wird aber wieder leicht beweglich sein und Stößen leicht folgen, weil diese die Mittelpunkte der Scheiben zur Beschreibung von Spiralen nach entgegengesetzten Seiten veranlassen würden. Hierin hat es auch seinen Grund, dass wenn man den kleinern Dreharm durch Gewichte so belastet, dass das Gleichgewicht hergestellt ist, durch das kleinste Uebergewicht das Gleichgewicht trotz der Rotation der Scheiben gestört wird, und dürfte sich daraus der Schluss nicht ziehen lassen, als »sei die Entfernung, in welcher die rotirende Masse sich von der Vertical-Axe befindet, von keinem oder von einem ausserordentlich geringen Einfluss auf die Drehung des Apparates.« (Poggend. XCI. S. 299.) — Rotiren die Scheiben vom Drehpunkte aus gesehen nach verschiedener (von einem Punkte auf der verlängerten Axe nach derselben) Richtung, also wie eine einzige Masse und ist Gleichgewicht vorhanden, so würde der vorige Stoss, wenn er die Scheibe, welche wie Fig. 8 II rotirt, zu senken suchte, für beide Scheiben sich zu einer Richtung nach  $M^1L^1$  verbinden, also der Apparat um so weniger der ursprünglichen Richtung desselben folgen, und nur eine spiralförmige Bewegung der Axe daraus hervorgehen. Andere Versuche, welche mit diesem Apparate wie mit dem Fessel'schen sich anstellen lassen, und oben erwähnt sind, übergehen wir.

### §. 7.

Es ist oben der Centrifugalkräfte, welche bei diesen Rotations-Erscheinungen mitwirken, gelegentlich gedacht; allein sie verdienen eine nähere Beachtung und man kann eine allgemeine Einsicht in ihre Wirksamkeit selbst ohne mathematische Kenntnisse gewinnen.

Wie aus dem Obigen erhellet, ist nämlich die Seitenbewegung abhängig von der Grösse und Richtung der Rotations-Geschwindigkeit und der Grösse und Richtung des Drehmomentes der Kraft  $K$ , das letztere aber hängt ab von der Entfernung ihres Angriffspunktes vom Drehpunkte, oder, wenn nur das Gewicht des Rotationskörpers die beschleunigende Kraft bildet, von der Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte, und seiner Entfernung von der durch letztern gehenden Verticalen. Wenn also unter übrigens gleichen Umständen die Winkel des Dreharms mit der Verticalen sich zu  $180^\circ$  ergänzen, so werden die letztern Entfernungen, also die Drehmomente, gleich sein, mithin müssten auch die Seitenbewegungen gleich sein. Allein wie

bereits angedeutet worden, wirkt, je nachdem der Winkel der Axe mit der Richtung der Schwere ein stumpfer oder spitzer ist, die aus der Seitenbewegung hervorgehende Centrifugalkraft ebenfalls in der Richtung der letztern, der Kraft  $K$ , oder ihr entgegengesetzt. Mithin hat auch die Seitenbewegung in diesen Fällen nothwendig zwei verschiedene Werthe und nur wenn der Winkel ein rechter ist Einen. Fixirt man daher den Dreharm der Scheibe am Fesselschen Apparate zunächst unter einem stumpfen Winkel gegen die Richtung der Schwere und setzt, während bei der Scheibe ein sehr kleines Uebergewicht vorhanden ist, dieselbe in Rotation, lässt ihre Axe dann frei und senkt, nachdem man die Grösse der Geschwindigkeit der Seitendrehung an der Bewegung des horizontalen Zeigers eben erkannt hat, die Scheibe, so dass ihre Axe nun einen spitzen Winkel bildet, der jenen, bei welchem der Beharrungszustand eingetreten ist, zu  $180^\circ$  ergänzt, so zeigt sich der Winkel mit der Verticalen wieder eine geraume Zeit constant, aber die Seitendrehung ist nun eine merklich verchiedene. War das Uebergewicht bei der Scheibe, so ist bei einem stumpfen Winkel die Bewegung rascher, weil die Centrifugalkraft jetzt ebenfalls senkend wirkt, bei dem ergänzenden spitzen dagegen, kleiner weil sie jetzt dem Uebergewicht entgegenwirkt. Indem man das Experiment wiederholt und die Axe zuerst unter einem spitzen, dann unter dem Ergänzungswinkel gegen die Richtung der Schwere stellt, überzeugt man sich, dass nicht Abnahme der Rotations-Geschwindigkeit der Scheibe der Grund ist. Ein anderer belehrender Versuch ist folgender:

Man bringt den Apparat auf die Platte der Schwungmaschine, und indem man durch Verschiebung das cylindrische Gegengewicht zum Gleichgewicht scharf eingestellt hat, versichert man sich an der Theilung der verticalen Kreishülse, dass wenigstens  $20^\circ$  beiderseits der Verticalen das Gleichgewicht fort dauert, sobald man die Stange nach der einen oder andern Seite neigt; dann stellt man sie nahe der einen Grenzlage, bei welcher sie einen stumpfen Winkel mit der Verticalen bildet, und, nachdem man die Gabelaxe durch das Schraubchen  $v$  festgestellt hat, setzt man die Scheibe in Rotation. Während man nun den Ring, der sie trägt, einen Augenblick leise hält, setzt man die Platte durch die Kurbel der Centrifugal-Maschine langsam in eine solche Bewegung, dass die Platte, von Oben gesehen, sich entgegengesetzt mit einem Uhrzeiger dreht. Man kann es dann bei vorsichtiger Führung der Kurbel leicht erreichen, dass die Axe der Scheibe ihren Winkel gegen die Verticale nicht

ändert; dreht man nun aber nur ein wenig stärker, so steigt die Scheibe, dreht man noch so leise umgekehrt, so senkt sie sich, und geht über die Lage, in der ihre Axe horizontal ist hinaus, bis ihr Winkel mit der Verticalen die andere Grenzlage oder eine Grösse erreicht hat, der jenen zu  $180^\circ$  ergänzt; hat man fortdauernd mit derselben (sehr geringen) Geschwindigkeit gedreht, so verharrt jetzt die Axe wieder in ihrem Winkel gegen die Verticale. — Hier wirkt also die durch die Rotation der Platte bewirkte Centrifugalkraft allein und gerade so wie ein Uebergewicht, das im ersten Falle senkend, im andern hebend auf die Scheibe wirkt.

Hat man Rotationskörper verschiedener Gestalt oder von derselben Grundform, in denen aber das Verhältniss der Dimensionen ein verschiedenes ist, so werden hierdurch die Erscheinungen ebenfalls wesentlich abgeändert und der Grund liegt wieder in dem Einflusse, welchen die Centrifugalkraft alsdann äussert.

Ist z. B. der Rotationskörper ein Cylinder das eine Mal von sehr geringer Höhe gegen den Durchmesser der Basis, oder eine Scheibe, das andere Mal von grosser Länge, und setzt man sie nach einander in den Ring unseres Apparats, so dass ihre Schwerpunkte genau in den Mittelpunkt desselben fallen, steckt die Tragaxe des äussern in die verticale Säule und fixirt sie durch das Schraubchen  $v$ , so bewirkt, wenn man nun den Apparat auf die Platte der Centrifugal-Maschine setzt, wie Fig. 15, und die Axen der Cylinder gegen die Verticale neigt, eine Rotation der Platte, gleichviel, nach welcher Seite sie geschieht, wenn die Cylinder selbst nicht rotiren, dass die Axe der Scheibe sich vertical, dagegen die Axe des langen Cylinders sich horizontal stellet. Die Centrifugalkraft sucht also bei der Scheibe den nach Oben gerichteten Theil ihrer Axe  $MP$  zu heben oder den Pol  $P$  dem Pol  $T$ , der auf der nach oben verlängerten, durch den Mittelpunkt der Scheibe gehenden Lothlinie liegt, zu nähern, dagegen bei dem langen Cylinder davon zu entfernen. Hiernach lässt sich vorhersehen, was erfolgt, wenn die Cylinder in Rotation versetzt werden. Nehmen wir an, die Rotation geschehe bei beiden so, dass sie für ein Auge in  $P$  entgegengesetzt mit der Richtung eines Uhrzeigers von sich geht, und es stehe der Apparat zunächst mit der Scheibe auf der Platte. Dreht man nun die Platte der Centrifugalmaschine so, dass sie von Oben gesehen in der Richtung eines Uhrzeigers fortschreitet, so erkennt man aus dem oben §. 3 mit Rücksicht auf Fig. 7. Erörterten, dass hieraus und der Rotation der Scheibe eine Kraft entsteht, welche sich einer fernern Annäherung von  $P$

an T entgegengesetzt, und bei einiger Behutsamkeit in der Drehung der Platte bleibt wirklich der Winkel der Axe mit der Verticalen constant, während die geringste entgegengesetzte Drehung ein Aufrichten der Axe zur Folge hat. Wünschenswerth für diesen Versuch ist es, dass das Gewicht der Scheibe im Vergleich zu dem Gewichte des dieselbe tragenden Ringes und ihrer Axe möglichst gross sei, da die Centrifugalkräfte für diese eine entgegengesetzte Wirkung mit denen der Scheibe haben, daher die Wirkung dieser schwächen. Eine Scheibe, wie die Engländer sie construiren, aus starkem schmiedeisernem Ringe mit in denselben eingetriebener Scheibe ist deshalb empfehlenswerth. — Stellt man den vorigen Versuch dagegen mit dem langen Cylinder an, so muss man der Platte eine umgekehrte Drehung geben, damit die Neigung der Axe gegen die Verticale sich nicht ändert. Man begreift hiernach auch, dass es ein gewisses Verhältniss zwischen den Dimensionen des Cylinders geben muss, bei welchem der Winkel mit der Verticalen sich auch bei der leisesten Rotation der Platte, geschehe sie nach der einen oder andern Richtung, ändern muss; es wird ein solches sein, bei dem die Centrifugalkräfte für sich bei nicht stattfindender Achsendrehung des Cylinders keine Lageveränderung hervorbringen können. Wäre z. B. der Rotationskörper eine Kugel, so vermögen sie es offenbar nicht, und rotirt sie daher um eine Axe, die nicht mit der Verticalen zusammenfällt, so muss sie bei der geringsten Drehung um letztere ihren Winkel mit derselben verändern. Welches aber das Verhältniss der Dimensionen bei dem Cylinder und andern Körpern ist, lässt sich ohne Mathematik nicht darthun, wesshalb hierüber das Nähere in den folgenden mathematischen Entwicklungen, welche mit den vorhergehenden Schlüssen und Versuchen in vollkommener Uebereinstimmung stehen.

### §. 8.

Ehe wir diese elementaren Betrachtungen schliessen, mögen einige Worte über den obigen Apparat als ein Versinnlichungsmittel für die Bewegung der Erde beigefügt werden.

Die Verschiedenheit der Jahreszeiten rührt bekanntlich daher, dass die Axe der Erde auf der Bahn, welche sie um die Sonne beschreibt, der Ekliptik, nicht senkrecht steht, sondern mit einer auf der letztern senkrechten Linie, der Axe der Ekliptik, einen Winkel von nahe  $23^{\circ}$ ,  $28'$  bildet und bei dem Umlauf der Erde um die Sonne sich nahezu stets parallel bleibt. Dieses Beharren der Erdaxe in ihrer Richtung versinnlicht unser Apparat, wenn er als Bohnenberger'scher,

wie oben §. 3. erwähnt, auf die Platte der Centrifugalmaschine in der Nähe des Randes gestellt und diese in Rotation versetzt wird; und die Spiralen, deren wir dort gedacht, zeigen, was die Wirkung stärkerer Stösse sein würde, welche die Erde von Aussen erhielte. Vollkommen bliebe die Axe der Erde sich parallel, wenn sie eine Kugel und nicht unter den Polen abgeplattet, ein Sphäroid wäre, und die Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes auf das Sphäroid nicht eine Veränderung in der Lage seiner Drehaxe zu bewirken suchten. Stellt Fig. 16 E den Mittelpunkt der Erde, als Kugel gedacht,  $pp^1$  ihre Axe und zwar  $p$  den Nordpol,  $AA^1$  den Aequator der Erde,  $S$  die Sonne dar, so ist die Ekliptik eine durch  $SE$  auf die Ebene  $pES$  senkrecht stehende Ebene. Wäre die Erde nun eine vollkommene Kugel, so würde jedem Massenpunkt  $Q$  derselben auf der einen Seite dieser Ebene ein symmetrisch gelegener auf der andern  $Q^1$  entsprechen, den man findet, wenn man sich von  $Q$  eine Senkrechte auf die Ebene gefällt und sie um ein gleiches Stück nach der andern Seite verlängert denkt. Da die Entfernungen  $SQ$ ,  $SQ^1$  gleich sind, so ist die Anziehungskraft der Sonne für beide gleich, daher hat der eine kein grösseres Bestreben sich der Ebene der Ekliptik zu nähern als der andere, und es resultirt aus der Anziehung der Sonne nur ein Bestreben, den Mittelpunkt der Erde ihr zu nähern, aber keine Lageveränderung ihrer Axe gegen die Ebene der Ekliptik. Denkt man sich nun aber um den Aequator der Erde einen ringförmigen Wulst mit der vorhingedachten Kugel fest verbunden, so dass ihre Gestalt nun die eines Sphäroids wird und ist, Fig. 17 I die Stellung der Erde zur Zeit der Sommer-Sonnenwende, dagegen II ihre Stellung zur Zeit der Winter-Sonnenwende, so ist klar, dass in I die Massenpunkte des Wulstes  $A^1$  unterhalb der Ekliptik näher an  $S$  liegen, also stärker als die oberhalb gelegenen, angezogen werden, in II aber diese die näher liegenden sind, also stärker als jene angezogen werden. Es wird also aus beiden Wirkungen in beiden Stellungen ein Bestreben des Wulstes hervorgehen, die Erdaxe aufzurichten und zwar den Punkt  $P$ , in welchem der verlängerte nördliche Theil der Erdaxe das Himmelsgewölbe treffen würde (den nördlichen Himmelspol des Aequators) dem Punkte  $T$ , in dem eine auf der Nordseite der Ekliptik errichtete Senkrechte  $ET$  dasselbe treffen würde, (dem nördlichen Himmelspole der Ekliptik) zu nähern, also jenen in der Richtung  $PT$  zu bewegen. Stände die Erde der Sonne so gegenüber, dass diese sich in der Ebene des Aequators befände, also zur Zeit der Frühlings oder Herbstes Tag

und Nachtgleiche, so würde die Anziehung der Sonne auf die oberhalb und unterhalb der Ekliptik liegenden Massenpunkte des Wulstes offenbar gleich sein, und es könnte aus ihr keine Einwirkung auf eine Lageveränderung des Wulstes also auch nicht der Axe hervorgehen. In allen andern Stellungen muss sie vorhanden sein, obwohl kleiner als in den beiden oben gedachten. Bei der geringen Abplattung der Erde (Aequatorialhalbmesser = 860 Meilen, Polarhalbmesser nahe 857 deutsche Meilen), wird man sich diesen Wulst sehr dünn vorstellen müssen, und die Einwirkung, welche er in Folge der Anziehungskraft der Sonne auf die mit ihm verbundene übrige Erdmasse zur Aufrichtung ihrer Axe ausübt, kann daher nur sehr gering sein. Da ferner die Anziehungskraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht, so begreift man, dass je grösser die Entfernung  $SE$  ist, um so kleiner wird die Verschiedenheit der Einwirkung auf die beiden Hälften des Wulstes sein. Daher sind bei der Sonne, ungeachtet ihrer grossen Masse, die die Erdaxe aufrichtenden Kräfte nur sehr kleine Grössen, aus welchen indessen eine mittlere Wirkung resultirt, welche schon nach Verlauf eines Jahres merkbar ist. Denken wir uns statt jener mit der Stellung der Erde zur Sonne veränderlichen Kräfte diese mittlere fortwährend wirksam, so wird sie in Vereinigung mit der Rotation der Erde, welche um  $p$ , in der bei  $p$  durch einen Pfeil bezeichneten Richtung geschieht, eine Bewegung des nördlichen Himmelspols des Erd-Aequators  $P$  senkrecht zu der Verbindungslinie  $TP$  desselben mit dem Pol der Ekliptik  $T$  hervorrufen und zwar so, dass, von  $T$  aus gesehen,  $P$  von der Linken zur Rechten wie der Pfeil auf dem Bogen  $Pr$  angibt, fortschreitet und sich  $P$  in einem Kreise um den Pol der Ekliptik  $T$  bewegt. Der Wulst wird jetzt grade so auf die Erde wirken, wie ein auf dem innern Ring des Bohnenberger'schen Apparates in der Nähe des untern Theils der Axe eingesetztes (äusserst kleines) Uebergewicht auf die rotirende Scheibe desselben, und es ist in §. 3 mit Rücksicht auf Fig. 7, in der eine übereinstimmende Bezeichnung gewählt ist, dargethan, wie diese Bewegung alsdann erfolgt. Bringt man dagegen in dem Apparate Nr. 3, Seite 9, die rotirende Scheibe theils in die verticale Lage des äussern Ringes, theils unter verschiedenen Winkeln gegen denselben, so erhält man gemäss dem §. 25 Erörterten eine Vorstellung davon, wie die Anziehungskraft der Sonne bei ihren verschiedenen Stellungen gegen die Ebene des Aequators in Verbindung mit der Rotation des Wulstes auf die Seitenbewegung des Pols bald schwächer bald stärker wirkt —

Dem Monde wird der geringe Einfluss, den seine Masse im Vergleich zu der Masse der Sonne auf den Aequatorwulst äussern kann, durch seine grosse Nähe reichlich ersetzt, so dass er jenen selbst bedeutend übertrifft, ungefähr im Verhältniss 5 : 2; auch er sucht die Axe senkrecht auf die Ebene seiner Bahn zu stellen, welche indessen mit der Ekliptik nicht zusammenfällt, sondern beständig einen Winkel von  $5^{\circ}$ ,  $8'$ ,  $48''$  macht.

Nehmen wir für einen Augenblick an, die Linie, in welcher seine Bahn um die Erde die Ekliptik durchschneidet, die Knotenlinie, falle stets mit der Durchschnittslinie des Erdäquators und der Ekliptik zusammen, und bezeichne Fig. 18 I E wieder den Mittelpunkt der Erde zur Zeit des Sommer-Solstitiums, wie in Fig. 17 I,  $AA^1$  die Lage des Erdäquators, P dessen nördlichen Himmelspol, also EP die Richtung der Erdaxe, ET eine Senkrechte auf der Ekliptik und T ihren nördlichen Himmelspol, ferner  $MM^1$  ein auf der Knotenlinie senkrechter Durchmesser der Mondsbahn, EL eine Senkrechte auf der Mondsbahn und zwar L den nördlichen Himmelspol derselben, so würde die mittlere aufrichtende Kraft, welche der Mond bei seinem Umlauf um die Erde auf den Aequatorwulst äussert, offenbar den Himmelspol des Erdäquators P in derselben Richtung Pr um L treiben, wie dieses eben von der Sonne mit Bezug auf T gezeigt worden; es würden sich also beide Wirkungen mit einander verbinden. — Allein während der Winkel der Mondsbahn gegen die Ekliptik derselben bleibt, bleibt sich die Durchschnittslinie dieser Ebenen nicht parallel, sie hat vielmehr eine sehr schnelle rückläufige Bewegung, oder der Himmelspol der Mondsbahn L bewegt sich selbst in einem Kreise in der Richtung  $L L_1 L_2 L_3$  um den Pol der Ekliptik und kömmt erst nach einer Periode von ungefähr  $18\frac{1}{2}$  Jahren (genauer 679,334 mittleren Sonnentagen) an seinen frühern Ort zurück, so dass, wenn heute die oben angenommene Lage statt hat, nach der Hälfte dieser Periode ungefähr  $9\frac{1}{4}$  Jahren, die in Fig. 18 II dargestellte Lage statt findet. Auch in dieser erkennt man, dass der Mond den Himmelspol des Aequators in demselben Sinne Pr wie vorhin zu drehen suchen würde, aber der Neigungswinkel der Mondsbahn gegen den Aequator  $M^1EA$  oder, was dasselbe ist, der Winkel  $L_2EP$  ist jetzt grösser =  $TEP + TEL_2$  oder =  $28^{\circ}$ ,  $37'$ , während in der vorigen Lage =  $MEA = LEP = TEP - TEL$  oder  $18^{\circ}$ ,  $19'$  war, und es werden daher auch die Entfernungen des Mondes von den beiden Theilen des Aequator-Wulstes  $A, A^1$  jetzt von einander weniger verschieden sein als in der vorigen Lage. Der Mittelwerth der aufrich-

tenden Kräfte, welche der Mond bei den einzelnen Umläufen um die Erde auf ihre Axe übt, verändert sich demnach zugleich mit dem Fortschreiten des Himmelpoles seiner Bahn auf dem Kreise  $L, L_1, L_2$ , er ist einmal am geringsten in  $L_2$ , einmal am grössten in  $L$  und zweimal in  $L_1, L_3$  hat er einen mittlern Werth. Dabei ist aber zu beachten, dass in der Lage II die anziehenden Kräfte eine mehr senkrechte Richtung gegen die Ebene des Aequators haben als in der Lage I, also auch die aus ihnen und der Rotation des Wulstes hervorgehende Seitenbewegung des Pols dort eine stärkere sein wird, wie eben bereits rücksichtlich der Sonne mittelst des Apparates Nr. 3 erläutert worden ist. — Es geht hieraus ein Schwanken des Poles  $P$  (Nutation) hervor, in Folge dessen er bei seiner langsamen Rundbewegung um den Pol  $T$  sich demselben bald nähert, bald wieder davon entfernt und eine wellenförmige Linie um denselben beschreibt. Stellt Fig. 19  $T$  den Pol der Ekliptik vor und sind um  $T$  auf der Himmelskugel zwei Kreise beschrieben, der eine I mit einem Halbmesser  $= 23^\circ, 28'$ , der andere ganz ausgezogene II, mit einem Halbmesser  $= 5^\circ, 8', 48''$ , so wird auf dem Kreise II der Himmelpol der Mondsbahn  $L$  fortschreiten, dagegen der Kreis I der mittlere Ort für den Himmelpol des Aequators sein. Es seien nun  $L, L_1, L_2, L_3$  die verschiedenen Stellungen des erstern, und der letztere befinde sich auf dem Kreise I in  $P_3$ , wenn jener in  $L_3$  oder seine Entfernung von  $P_3$  die mittlere ist. Die Bewegung, welche  $P_3$  alsdann erhält, ist nach dem oben Erörterten senkrecht auf  $L_3 P_3$  und zwar, von  $L_3$  aus gesehen, von der Linken zur Rechten gerichtet, und während  $L_3$  sich auf seinem Wege  $L_3, L, L_1, L_2, L_3$ , dem äusserst langsam fortschreitenden Pole  $P_3$  zunächst von  $L_3$  bis  $L$  nähert, dann von  $L$  nach  $L_1$  und von  $L_1$  nach  $L_2$  davon entfernt, endlich von  $L_2$  nach  $L_3$  und  $L_3$  nach  $L$  wieder nähert und demgemäss seine Einwirkung auf  $P_3$  sich ändert, wird dieser nach  $P, P_1, P_2$  u. s. w. geführt. Durch die gleichzeitige Wirkung der Sonne wird diese epicycloidale Curve in der Richtung  $P_3 P_1$  verlängert, ohne dass indessen die periodischen Veränderungen in den Entfernungen des Himmelpoles des Aequators vom Pol der Ekliptik sich dadurch verändern; die oscillatorische Bewegung hat genau dieselbe Dauer mit der Umdrehung des Pols der Mondsbahn um den Pol der Ekliptik, gerade so als wenn das durch die Sonne veranlasste Fortschreiten desselben um diesen Pol nicht vorhanden wäre. Es ist dieses ein specieller Fall von einem für die Himmels-Mechanik höchst wichtigen, allgemeinen Principe, und, was oben von den Curven erörtert

worden ist, welches das Bild der rotirenden Scheibe des Fesselschen Apparates, wenn sie bereits in einer Seitenbewegung begriffen ist, unter der Einwirkung einzelner Stösse oder der Schwingungen des angehängten Pendels beschreibt — denen selbstredend kegelförmige Bewegungen der Axe entsprechen — bringt dieses Princip zu einer klaren Vorstellung.

Es ist hier nicht der Ort, auf die Erscheinungen alle einzugehen, welche die wellenförmige Bewegung des Himmelspols des Aequators um den Pol der Ekliptik verursacht; wir bemerken nur, dass die Durchschnittslinie beider Ebenen, die Linie der Tag- und Nachtgleichen, offenbar in Folge derselben eine rückläufige Bewegung, von Osten nach Westen, annehmen muss, welche jährlich  $50^{\circ},1$  beträgt (Präcession), und sie ihren Kreislauf in 25868 Jahren vollendet.

---

### III. Mathematische Entwicklungen.

#### §. 9.

Wir nehmen den Drehpunkt  $O$  (Fig. 20.) als den Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , von denen die positive  $OZ$  sich vertical in der Richtung der Schwere erstreckt; ferner sei  $O$  der Anfangspunkt eines zweiten, mit dem Rotationskörper fest verbundenen, mit ihm also zugleich sich rund drehenden, rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen eine Axe  $Oz$  mit der Drehaxe des Rotationskörpers stets zusammenfällt, während die Ebene der beiden andern Axen  $Ox$ ,  $Oy$  die Horizontalebene der festen Axen  $OX$ ,  $OY$  in einem bestimmten Augenblick in einer Geraden  $NON'$  schneiden mag. Die Lage der beweglichen Axen gegen die festen ist alsdann bekanntlich durch die Winkel  $ZOz = \vartheta$ ,  $XON = \psi$  und  $NOx = \phi$  vollkommen bestimmt, wenn vorher die Art, wie diese Winkel gerechnet werden sollen, festgesetzt ist. Wir nehmen an, der Winkel  $\vartheta$  werde von der positiven Axe  $OZ$  zu der positiven  $Oz$  gerechnet und bleibe in den Grenzen  $0$  und  $180^\circ$ , der Winkel  $XON = \psi$  werde stets von der positiven  $OX$  aus zu der negativen  $OY$  rund herum, wie der Pfeil vor  $\psi$  angibt, gerechnet, so dass sein zweiter Schenkel für  $\psi = 90^\circ$  mit  $-OY$ , für  $\psi = 180^\circ$  mit  $-OX$ , für  $\psi = 270^\circ$  mit  $+OY$  u. s. w. zusammenfällt, endlich werde der Winkel  $\phi$  (wenn  $\phi$  positiv ist) von der jedesmaligen Lage von  $ON$  auf der Ebene der  $Ox$ ,  $Oy$ , der Aequatorialebene, in aufwärtsgehender Richtung (über der Horizontalebene), wie ebenfalls durch den Pfeil neben  $\phi$  bezeichnet ist, rund herum bis  $360^\circ$  gerechnet.\*) Ist demnach  $\vartheta$  ein spitzer Winkel wie in Fig. 20. und dreht sich eine Linie um  $O$  in der Horizontalebene in der Richtung des Pfeils oder der positiven  $\psi$ , so wird ihre Projection auf die Aequatorialebene in entgegengesetzter Richtung mit der vorausgesetzten Rotation derselben oder derjenigen, nach welcher  $+ \phi$  gerechnet wird, fortschreiten; ist dagegen  $\vartheta$  stumpf, so wird unter denselben Umständen (s. Fig. 21.) die

\*) Wir haben die obige, von der frühern abweichende Richtung der Drehung gewählt, um bekannte, im Folgenden erforderliche Formeln hier nicht zu entwickeln, und uns auf Poisson's Lehrbuch der Mechanik beziehen zu können.

Drehung der Projection in übereinstimmendem Sinne stattfinden. Die Cosinus der Winkel der festen Axen mit den beweglichen, nämlich

$$\begin{aligned}\cos XOx &= a, \quad \cos XOy = b, \quad \cos XOz = c \\ \cos YOx &= a', \quad \cos YOy = b', \quad \cos YOz = c' \\ \cos ZOx &= a'', \quad \cos ZOy = b'', \quad \cos ZOz = c''\end{aligned}$$

können durch trigonometrische Functionen von  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  ausgedrückt werden, welche auf analytischem Wege\*) oder mittelst sphärischer Trigonometrie\*\*) leicht erhalten werden. Von den 9 Gleichungen sind diejenigen, welche für  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  unter den obigen Voraussetzungen stattfinden:

$$\begin{aligned}a'' &= -\sin \vartheta \cdot \sin \phi, \\ b'' &= -\sin \vartheta \cdot \cos \phi, \\ c'' &= \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{1}$$

Bezeichnen ferner  $p$ ,  $q$ ,  $r$  die Zerlegungen der Drehungsgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe, so ist

$$\begin{aligned}p &= \sin \vartheta \cdot \sin \phi \cdot \frac{d\psi}{dt} - \cos \phi \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ q &= \sin \vartheta \cdot \sin \phi \cdot \frac{d\psi}{dt} + \sin \phi \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ r &= \frac{d\phi}{dt} - \cos \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}\end{aligned}\tag{2}$$

Die allgemeinen (Euler'schen) Gleichungen der Drehungsbewegung sind nun

$$\begin{aligned}C \frac{dr}{dt} &= (A-B) pq + R \\ B \frac{dq}{dt} &= (C-A) rp + Q \\ A \frac{dp}{dt} &= (A-C) qr + P\end{aligned}$$

in welchen  $C$ ,  $B$ ,  $A$  die Haupt-Trägheitsmomente des bewegten Körpers gegen die Axen der  $Oz$ ,  $Oy$ ,  $Ox$  und  $R$ ,  $Q$ ,  $P$  die

\*) Lagrange *mec. anal.* t. II. sect. 9. §. 7. — Duhamel *mec. anal.* Deutsch von Eggers. 1 Thl. S. 17. — Eine besonders elegante Entwicklung gibt Hansen *Theorie der Pendelbewegung*. Danzig 1853. S. 20.

\*\*) Poisson *mec.* II. ed. §. 377. Minding, *Theoretische Mechanik*. §. 33.

Projectionen der äussern, auf den Körper einwirkenden, beschleunigenden Kräfte auf die Ebenen  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$  bezeichnen, oder nach Poinot (Theorie der Drehungen) die Glieder auf der linken Seite die allgemeinen Ausdrücke eines beschleunigenden Kräftepaares, geschätzt nach den beweglichen Axen  $Oz$ ,  $Oy$ ,  $Ox$  sind, welches erforderlich wäre, um die Axen und Grössen der den Körper in dem Augenblicke angreifenden Kräftepaare der Fortdauer der Bewegung gemäss zu ändern, und die auf der rechten Seite eben diese aus der Schwungkraft und den äussern Kräften entstehenden, beschleunigenden Kräftepaare, geschätzt nach denselben Axen, ausdrücken. In unserm Falle ist die Schwere die einzige beschleunigende Kraft, ihr Maass sei mit  $g$  bezeichnet. Man kann nun entweder den in der Wirklichkeit nur annäherungsweise darstellbaren, speziellen Fall in Betracht ziehen, wo bloss das Gewicht des Rotationskörpers  $mg$  diese beschleunigende Kraft bildet, oder den allgemeineren, woein Gewicht  $Mg$  überhaupt, in irgend einem Punkte der Rotationsaxe  $Oz$  als solche wirkt. Wir fassen zunächst den letztern ins Auge und haben, wenn  $\gamma$  die Entfernung des gedachten Punktes (des Schwerpunktes des beweglichen Theiles des Apparates) von  $O$  bezeichnet, wie leicht ersichtlich ist,  $Mg\gamma \sin \vartheta$  für den allgemeinen Ausdruck des Momentes dieser Kraft. Da seine Ebene senkrecht auf der Ebene  $xOy$  ist, so ist seine Projection auf letztere  $R = 0$ , und da der Bau der Maschine voraussetzt, dass  $A = B$  ist, so wird die erste der Euler'schen Gleichungen

$$C \frac{dr}{dt} = 0$$

oder  $r = \text{constans}$ .

Dieses Resultat, einzig aus den Gleichungen  $R = 0$  und  $A = B$  hergeleitet, zeigt, dass, welches auch die Werthe von  $\vartheta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  in irgend einem Augenblicke sein mögen, die Zerlegung  $r$  der Drehgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe nach der Rotationsaxe  $Oz$  während der ganzen Dauer der Drehung unveränderlich bleibt.

Indem wir nun zunächst die Erscheinungen in Betracht ziehen, bei welchen der Winkel  $\vartheta$  sich als constant zeigt, werden die obigen Gleichungen (2):

$$p = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

$$q = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

Die ersteren lassen sich den Gleichungen (1) gemäss auch so schreiben:

$$-p = \frac{d\psi}{dt} \cdot a''$$

$$-q = \frac{d\psi}{dt} \cdot b''$$

und zeigen, dass  $-p$ ,  $-q$  in diesem Falle die Zerlegungen einer Drehung  $\frac{d\psi}{dt}$  um die Vertical-Axe  $OZ$ , nach den Axen  $Ox$  und  $Oy$  ist, deren Zerlegung nach der Axe  $Oz$  durch  $\frac{d\psi}{dt} \cdot \cos \vartheta = \frac{d\psi}{dt} \cdot c''$  dargestellt ist. Bezeichnen wir durch  $\overline{\varphi}$  den Werth der Rotationsgeschwindigkeit  $\frac{d\varphi}{dt}$  in diesem Augenblicke und nehmen

ihn als denjenigen, in welchem die Axe  $Ox$  mit  $OX$  zusammen fällt, so wird, wenn wir von ihm die Zeit  $t$  anrechnen, unter der Voraussetzung, dass im Zustande der Bewegung sich nichts ändert, nach Verlauf dieser Zeit  $\varphi = \overline{\varphi} \cdot t$ , und wenn  $\overline{\psi}$  den  $\vartheta$  und  $\overline{\varphi}$  zugehörigen Werth der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\psi}{dt}$  um die Vertical-Axe bezeichnet,  $\psi = \overline{\psi} \cdot t$  sein. Für

die Projection  $Q$  des Momentes  $Mg\gamma \sin \vartheta$  auf die Coordinaten-Ebene  $xOz$  hat man, da der Neigungswinkel desselben (der Ebene  $zOZ$ ) gegen letztere gleich dem Winkel  $NOy$  der auf diesen Ebenen Senkrechten  $NO$  und  $Oy$  oder gleich  $90 + \overline{\varphi} \cdot t$  ist,  $Q = Mg\gamma \sin \vartheta \cos (90 + \overline{\varphi} \cdot t) = -Mg\gamma \sin \vartheta \sin \overline{\varphi} \cdot t$ . Ebenso findet man für  $P$ , die Projection desselben Momentes auf die Ebene  $yOz$ , da  $Ox$  senkrecht auf  $yOz$  mithin  $NOx$  oder  $\overline{\varphi} \cdot t$  der Neigungswinkel dieser Ebenen ist,

$$P = Mg \gamma \sin \vartheta. \cos \bar{\varphi} t.$$

Setzt man nun diese Werthe von  $Q$  und  $P$ , ferner den Werth  $R = 0$  und zugleich die Werthe, welche sich aus den Gleichungen

$$p = \bar{\psi}. \sin \vartheta. \sin \bar{\varphi} t$$

$$q = \bar{\psi}. \sin \vartheta. \cos \bar{\varphi} t$$

$$r = \bar{\varphi} - \bar{\psi} \cos \vartheta$$

für  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dp}{dt}$  ergeben, nämlich

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\bar{\varphi}. \bar{\psi}. \sin \vartheta \sin \bar{\varphi} t$$

$$\frac{dp}{dt} = \bar{\varphi}. \bar{\psi} \sin \vartheta. \cos \bar{\varphi} t$$

in die Euler'schen Gleichungen, so erhält man unter Beachtung, dass  $B = A$  ist, für die erste, wie vorauszusehen war

$$0 = 0$$

und die beiden andern geben, indem man  $A$  statt  $B$  setzt, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor  $\sin \vartheta$  heraus schreibt, nach einer leichten Reduction übereinstimmend:

$$\sin \vartheta \left[ Mg \gamma + (C-A) \cos \bar{\psi}^2 - C. \bar{\varphi}. \bar{\psi} \right] = 0.$$

Genügen  $\vartheta$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\psi}$  dieser Gleichung, so werden es zusammengehörige Werthe von der gesuchten Beschaffenheit sein, für welche also der Zustand der Bewegung, abgesehen von dem Widerstande der Luft und der Reibung unveränderlich bleibt. Zu dem Ende muss entweder

$$\sin \vartheta = 0 \quad \text{I.}$$

oder  
sein.  $(C-A) \cos \vartheta. \bar{\psi}^2 - C \bar{\varphi}. \bar{\psi} = -Mg \gamma \quad \text{II.}$

## §. 10.

In den Gleichungen I. und II. ist die Lösung der Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt, die Abhängigkeit zwischen den beiden Drehungen um die Rotations- und die Vertical-Axe aufzufinden, wenn ihr Winkel sich als ein unveränderlicher zeigt, enthalten. Bevor wir sie indessen näher erörtern, wollen wir die Aufgabe noch auf eine andere, directe Art angreifen.

Es sei wieder Fig. 22. der Drehpunkt  $O$  der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , von denen  $OZ$  sich in der Richtung der Schwere erstreckt, und zugleich der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, mit dem rotirenden Körper fest verbundener Axen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , von welchen  $Oz$  mit der Rotationsaxe desselben zusammen falle. In dem Augenblicke, von welchem wir die Zeit  $t$  zählen, falle die Axe  $Ox$  mit  $OX$  zusammen oder nach  $Ox_1$ , die beiden andern beweglichen Axen  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ , welche sich alsdann in der Ebene  $YOZ$  befinden, mögen  $Oy_1$ ,  $Oz_1$  und der Winkel der letzteren mit der Vertical-Axe  $z_1 OZ = \vartheta$  sein. Hat nun der Körper in diesem Augenblicke eine Winkel-

geschwindigkeit  $\bar{\varphi}$  um seine Rotationsaxe und zugleich eine

andere, noch zu bestimmende Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\psi}$  um die Vertical-Axe der Art, dass bei Unveränderlichkeit beider der Winkel  $\vartheta$  constant bleibt, so ist die Lage, in welche in Folge beider das System der beweglichen Axen nach der Zeit  $t$  gelangt, bekanntlich dieselbe, als wenn diese Drehungen nacheinander jede eine Zeit  $t$  hindurch stattgefunden hätten. Nehmen wir an, die letztere um die Vertical-Axe geschehe zuerst und zwar wieder in der Richtung der positiven  $OX$  zu den negativen  $OY$ , so dass die beweglichen Axen nun  $Oz_2$ ,  $Ox_2$ ,  $Oy_2$  sind und  $Ox_2$  ( $ON$ ) mit  $OX$  den Winkel  $x_2 OX = \psi$

bildet, so ist, weil die Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\psi}$  dieselbe bleibt,  $\psi = \bar{\psi} \cdot t$ . Dreht sich alsdann das System um  $Oz_2$

( $Oz$ ) mit der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\varphi}$  eine Zeit  $t$  hindurch aufwärts bis die Axen  $Ox_2$ ,  $Oy_2$  die Lage  $Ox$ ,  $Oy$  annehmen,

und der Winkel  $x_2 Ox = \varphi$  ist, so hat man  $\varphi = \bar{\varphi} \cdot t$ . Denkt man sich nun von  $O$  aus eine Kugel beschrieben, welche von  $OZ$ ,  $Oz_2$ ,  $Oy$ ,  $Oy_2$ ,  $Ox$ ,  $Ox_2$ , in den Punkten  $Z$ ,  $z_2$ ,  $y$ ,  $y_2$ ,  $x$ ,  $x_2$ , geschnitten werden mag, so ist  $z_2$  der Pol des Bogens  $yy_2 xx_2$ , daher sind die sphärischen Dreiecke  $Zy_2 y$  und  $Zy_2 x$  beide bei  $y_2$  rechtwinklig, mithin

$$\cos Zx = \cos xy_2 \cdot \cos Zy_2, \quad \cos Zy = \cos yy_2 \cdot \cos Zy_2$$

$$\text{Oder, da } \cos Zy_2 = \cos (90 + \mathfrak{S}) = -\sin \mathfrak{S}$$

$$\text{und } \cos y_2x = \cos (90 - \bar{\varphi} \cdot t) = \sin \bar{\varphi} t, \text{ ferner}$$

$$\cos yy_2 = \cos xx_2 = \cos \bar{\varphi} \cdot t \text{ ist,}$$

$$\cos Zx = -\sin \mathfrak{S} \cdot \sin \bar{\varphi} t, \quad \cos Zy = -\sin \mathfrak{S} \cdot \cos \bar{\varphi} t$$

Bezeichnen nun  $p, q, r$  wieder die Zerlegungen der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit nach den Axen  $Ox, Oy, Oz$ , so bestehen dieselben aus den Zerlegungen der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\varphi}$  um die Rotationsaxe  $Oz$  weniger denen der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\psi}$  um die Vertical-Axe, indem die letztere bei unserer Voraussetzung von der Linken zur Rechten, die erstere von der Rechten zur Linken geschieht. Die Zerlegungen von  $\bar{\varphi}$  nach den Axen  $Ox, Oy$  sind, da  $Oz$  senkrecht auf denselben steht, beide Null. Demnach ist

$$p = 0 - (-\bar{\psi} \cdot \sin \mathfrak{S} \cdot \sin \bar{\varphi} t) = \bar{\psi} \sin \mathfrak{S} \cdot \sin \bar{\varphi} t$$

$$q = 0 - (-\bar{\psi} \sin \mathfrak{S} \cdot \cos \bar{\varphi} t) = \bar{\psi} \sin \mathfrak{S} \cdot \cos \bar{\varphi} t$$

$$r = \bar{\varphi} - \bar{\psi} \cos \mathfrak{S}.$$

Die Werthe von  $R, Q, P$  ergeben sich wie oben, und man gelangt demnach auch mittelst ihrer und der eben für  $p, q, r$  gefundenen, welche dieselben sind, als die §. 9 aufgestellten, für die Bestimmung der Werthe von  $\bar{\psi}$ , bei welchen die Fortdauer der Unveränderlichkeit von  $\mathfrak{S}$  und  $\bar{\varphi}$  möglich ist, zu denselben beiden Bedingungsgleichungen I. und II.

### §. 11.

Untersuchen wir nun diese Gleichungen näher. Die erste  $\sin \mathfrak{S} = 0$  wird erfüllt, wenn  $\mathfrak{S} = 0$  oder  $180^\circ$ , also die Rotations-Axe senkrecht ist. In diesem Falle sind die Winkelgeschwindigkeiten  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$  und ebenso das Gewicht  $Mg$  beliebig.

Um die zweite richtig zu deuten, ist zunächst zu beachten, dass von den Gleichungen, aus denen sie hergeleitet ist, nur die Gleichung

$$r = \bar{\varphi} - \bar{\psi} \cdot \cos \mathfrak{S}$$

den cosinus des Winkels  $\vartheta$  enthält. Nimmt man also die Drehung  $\bar{\varphi}$  stets als positiv oder in der Richtung von der Rechten zur Linken um  $+ Oz$  an, so zeigt für einen spitzen Winkel  $\vartheta$  in der obigen Gleichung ein positiver Werth von  $\bar{\psi} \cos \vartheta$  eine Bewegung der Durchschnittslinie der Aequatorialebene mit der Horizontalebene auf dieser letztern von der Linken zur Rechten um  $+ OZ$  (Fig. 20), ein negativer aber eine Drehung von der Rechten zur Linken, oder eine mit  $\bar{\varphi}$  gleichgerichtete an, dagegen bedingt für einen stumpfen Winkel  $\vartheta$  (Fig. 21) ein negativer Werth von  $\bar{\psi} \cos \vartheta$  eine Drehung derselben Linie auf der Horizontalebene von der Linken zur Rechten, ein positiver von der Rechten zur Linken.

Die Gleichung II. gibt nun im Allgemeinen, so lange über  $A - B$ ,  $\gamma$ ,  $\vartheta$ , keine besonderen Bestimmungen getroffen werden, für  $\bar{\psi}$  zwei (reelle, oder imaginäre) Werthe, nämlich

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} C \bar{\varphi} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4} C^2 \bar{\varphi}^2 - M g \gamma (C - A) \cos \vartheta}}{(C - A) \cos \vartheta}.$$

Ein einziger Werth hat statt

1. wenn  $\vartheta = 90^\circ$
2. wenn  $A = B$
3. wenn  $\gamma = 0$

ist.

Ist erstens  $\vartheta = 90^\circ$ , so liegen der Schwerpunkt der bewegten Masse und die Rotations-Axe in der durch den Drehpunkt gehenden Horizontalebene. Dieser spezielle Fall ist gemäss dem Berichte »über die Preisfragen der Universität Bonn vom Jahre 1855—56« von Herrn Stud. Albert Schmitz in einer Preisschrift behandelt worden.

Ist zweitens  $A = C$ , so ist das Central-Ellipsoid oder dasjenige Ellipsoid, dessen drei Hauptdurchmesser in die durch den festen Drehpunkt gehenden Hauptdrehaxen fallen und der Länge nach den Quadratwurzeln aus den Haupt-

\*) Die merkwürdigen Beziehungen des Central-Ellipsoids zu den rotirenden Körpern, auf welche keine beschleunigenden Kräfte wirken, finden sich in Ohms Mechanik, §. III. Thl. S. 223 u. f., Duhamels Lehrbuch der Mechanik, Thl. II. §§. 82, 121 u. f. und besonders in der Schrift von Poinsot: Neutheorie der Drehungen, übersetzt von Schellbach Seite 27 u. f. erörtert.

trägheitsmomenten  $A, B, C$  ( $A = B$ ) der bewegten Masse proportional sein würde, eine Kugel.

In beiden Fällen reducirt sich die Gleichung II. auf

$$C \bar{\phi} \cdot \bar{\psi} = M.g\gamma$$

Der Werth  $\bar{\psi} = \frac{M.g\gamma}{C \bar{\phi}}$ , welchen sie liefert, ergibt sich

aus demjenigen der beiden obigen Wurzelwerthe der ursprünglich quadratischen Gleichung, in welchem die Wurzelgrösse das negative Zeichen hat, wenn  $C - A$  oder  $\cos \vartheta = 0$

gesetzt wird, und welcher alsdann unter der Form  $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$  erscheint; der andere Wurzelwerth wird in diesen Fällen  $= \infty$ .

Man sieht sofort aus dem Werthe von  $\bar{\psi}$ , dass in beiden Fällen  $\bar{\psi}$  um so kleiner ist, je grösser  $\bar{\phi}$  oder auch  $A$  gegen  $M$ , und je kleiner  $\gamma$  oder die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte ist, und dass die Drehung  $\bar{\psi}$  sich in eine entgegengesetzte verwandelt, wenn  $\gamma$  sein Zeichen ändert.

### §. 12.

Im dritten Falle wenn  $\gamma = 0$  ist, der Schwerpunkt also im Unterstützungspunkt liegt, wird unsere Hauptgleichung II.

$$\bar{\psi} \left( (C - A) \cos \vartheta \cdot \bar{\psi} - A \bar{\phi} \right) = 0$$

und befriedigt, wenn  $\bar{\psi} = 0$ ,

$$\text{oder } \bar{\psi} \cos \vartheta = \frac{A \cdot \bar{\phi}}{C - A}$$

ist.

Es findet also entweder gar keine Drehung  $\bar{\psi}$  statt, oder wenn eine erfolgt, muss sie, wenn  $\vartheta$  ein spitzer Winkel ist, nach der einen oder andern Richtung geschehen, je nachdem  $C \gtrless A$  ist.

Ist  $\vartheta > 90^\circ$  und  $C < A$ , so ist die Drehung  $\bar{\psi}$  mit der erstern im vorigen Falle übereinstimmend; ist  $C < A$  mit der letztern.

## §. 13.

Die allgemeinen Wurzelwerthe

$$\bar{\psi} = \frac{\frac{1}{2} C \bar{\phi} \pm \sqrt{\frac{1}{4} C^2 \bar{\phi}^2 - (C-A) Mg\gamma \cos \vartheta}}{(C-A) \cos \vartheta}$$

sind reell, einander gleich oder imaginär, je nachdem

$$\frac{1}{4} C^2 \bar{\phi}^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} (C-A) Mg\gamma \cos \vartheta \text{ ist.}$$

Der erste Fall tritt stets ein, wenn von den drei Grössen  $C - A$ ,  $\gamma$  und  $\cos \vartheta$  eine negativ und die beiden andern positiv oder alle drei negativ sind. Es ist alsdann die mit dem Wurzelzeichen behaftete Grösse grösser als das erste Glied, mithin sind die in diesen Fällen möglichen Drehungen  $\bar{\psi}$  einander entgegengesetzt.

Der zweite Fall kann unter den eben gemachten Voraussetzungen nicht eintreten, da  $\frac{1}{4} C^2 \bar{\phi}^2$  positiv ist, sondern nur wenn zwei der Grössen  $C - A$ ,  $\gamma$ ,  $\cos \vartheta$  negativ und die dritte positiv oder alle drei positiv sind. Ist unter den letzt gemachten Voraussetzungen die Bedingungsgleichung der Realität

$$\frac{1}{4} C^2 \bar{\phi}^2 > (C-A) Mg\gamma \cos \vartheta$$

erfüllt, so ist der Wurzel Ausdruck kleiner als  $\frac{1}{2} C \bar{\phi}$  und für einen spitzen Winkel  $\vartheta$  sind die beiden möglichen Drehungen  $\bar{\psi}$  unter sich gleich gerichtet, sowohl wenn  $C - A > 0$  und  $\gamma$  positiv, als wenn  $C - A < 0$  und  $\gamma$  negativ ist; aber die beiden erstern sind den beiden letztern entgegengesetzt. Dasselbe gilt, wenn  $\vartheta$  stumpf und zugleich entweder  $C - A > 0$  und  $\gamma$  negativ oder  $C - A < 0$  und  $\gamma$  positiv ist.

## §. 14.

Da die Hauptgleichung II. die Drehungen  $\bar{\psi}$  überhaupt bestimmt, welche der bewegliche Körper um die vertikale Axe entweder bereits haben oder aber durch eine äussere

Kraft erhalten müsste, damit der Winkel  $\mathfrak{S}$  seiner Haupt-(Rotations-) Axe mit der letztern constant bleibe, so wird sie auch gelten, wenn der Körper um diese Axe nicht rotirt oder  $\overline{\varphi} = 0$  ist, also für jedes Centrifugal-Pendel, in welchem eine Hauptaxe durch den festen Drehpunkt geht und die Trägheitsmomente rücksichtlich der beiden andern Hauptaxen einander gleich sind. Man erhält alsdann

$$\overline{\psi} = \pm \sqrt{\frac{-Mg\gamma}{(C - A) \cos \mathfrak{S}}}$$

Die Deutung der Fälle, in denen dem Centrifugal-Pendel eine Drehung von der verlangten Beschaffenheit gegeben werden kann oder nicht, ergibt sich aus dem Obigen leicht.

### §. 15.

Nehmen wir jetzt an, dass bloss das Gewicht des Rotationskörpers als beschleunigende Kraft wirkt, welches bei der Bohnenbergischen Aufhängung und auch im Fesselschen Apparate dann stattfindet, wenn man, ehe der Rotationskörper mit seiner Axe in den Ring eingesetzt wird, den übrigen beweglichen Theil desselben durch ein Gegengewicht in's Gleichgewicht bringt, alsdann tritt  $m$  an die Stelle von  $M$  und  $\delta$  oder die Entfernung seines Schwerpunktes vom Drehpunkte an die Stelle von  $\gamma$ . Die Gleichung II. bietet alsdann, je nach der Gestalt des Rotationskörpers verschiedene Eigenthümlichkeiten.

Bezeichnen  $A', B', C'$  die Trägheitsmomente rücksichtlich seines Schwerpunktes,  $A, B, C$  wie vorhin die Trägheitsmomente in Bezug auf den festen Drehpunkt, so hat man

1. für ein Rotations-Ellipsoid, welches  $2a$  zur Rotationsaxe und  $2b$  zur Aequatorialaxe hat, die Gleichungen

$$C' = \frac{2}{5} mb^2, \quad A' = B' = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$$

folglich (Siehe Poisson mec. t. II. §. 344)

$$C = \frac{2}{5} mb^2, \quad A = B = m \left( \frac{1}{5} (a^2 + b^2) + \delta^2 \right)$$

$$\text{mithin } C - A = m \left[ \frac{1}{5} (b^2 - a^2) - \delta^2 \right]$$

2. für die Kugel, da für sie  $b = a$  ist,

$$C - A = -m\delta^2$$

3. für einen Rotations-Cylinder, dessen Halbmesser der Basis =  $R$  und dessen Höhe =  $H$  ist,

$$C' = \frac{1}{2} m R^2, A' = B' = m \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right],$$

$$\text{also } C = C' = \frac{1}{2} m R^2, A = B = m \left[ \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} + \delta^2 \right]$$

$$\text{folglich } C - A = m \left[ \frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2 \right]$$

$$\text{Ist } \frac{R^2}{4} = \frac{H^2}{3} \text{ oder } \frac{H}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sin 60^\circ,$$

ist also  $H$  die halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite =  $2R$  ist, so stimmt dieser Werth mit dem obigen für die Kugel überein, folglich ist in diesem Falle das Haupt-Central-Ellipsoid für den Cylinder ebenfalls eine Kugel.

4. für den geraden Kegel, dessen Halbmesser der Basis =  $R$  und dessen Höhe =  $H$  ist,

$$C' = \frac{3}{10} m R^2, A' = B' = \frac{3}{20} m \left[ R^2 + \frac{H^2}{4} \right]$$

$$\text{mithin } C = C' = \frac{3}{10} m R^2, A = B = \frac{3}{20} m \left[ R^2 + \frac{H^2}{4} \right] + m \delta^2$$

$$C - A = m \left\{ \frac{3}{20} \left[ R^2 - \frac{H^2}{4} \right] - \delta^2 \right\}$$

Auch dieser Werth von  $C - A$  stimmt mit dem der Kugel überein, wenn  $R^2 = \frac{H^2}{4}$ , also  $H$  dem Durchmesser der

Basis  $2R$  gleich ist,

u. s. w.

### §. 16.

Setzt man nun in die Gleichung II. oder in

$$\frac{(C - A)}{M} \cos \vartheta \cdot \bar{\psi}^2 - \frac{C}{M} \bar{\phi} \cdot \bar{\psi} + g\gamma = 0$$

$$\delta \text{ statt } \gamma \text{ und für } \frac{C - A}{M} = \frac{C - A}{m} \text{ und } \frac{C}{M} = \frac{C}{m}$$

die eben gefundenen Werthe, so ergibt sich:

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\left[ \frac{1}{5} (b^2 - a^2) - \delta^2 \right] \cos \vartheta \cdot \bar{\psi}^2 - \frac{2}{5} b^2 \bar{\phi} \cdot \bar{\psi} + g\delta = 0 \text{ (III).}$$

2. für die Kugel, deren Halbmesser =  $b$  ist,

$$\delta^2 \cos \vartheta \cdot \bar{\psi}^2 + \frac{2}{5} b^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} - g \delta = 0 \quad (\text{IV.})$$

3. für den Rotations-Cylinder

$$\left[ \frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2 \right] \cos \vartheta \cdot \bar{\psi}^2 - \frac{1}{2} R^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} + g \delta = 0. \quad (\text{V.})$$

4. für den geraden Kegel

$$\left[ \frac{3}{20} \left( R^2 - \frac{H^2}{4} \right) - \delta^2 \right] \cos \vartheta \cdot \bar{\psi}^2 - \frac{3}{10} R^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{\psi} + g \delta = 0 \quad (\text{VI.})$$

Von den beiden Wurzelwerthen dieser Gleichungen müssen Apparate, welche den bezüglichen Rotationskörpern unter den gegebenen Bedingungen eine freie Bewegung um einen festen Punkt gestatten, den einen oder andern zeigen, so oft  $\vartheta$  constant bleibt, sei es dass die Seitendrehung  $\bar{\psi}$  durch die vereinigte Wirkung der ursprünglichen Rotation und des Gewichtes des Rotationskörpers hervorgebracht wird, oder dass eine andere Kraft die Rotation um die Verticale veranlasst. Die Werthe, welche Versuche mit unsern Apparaten geben können, werden um so kleiner gegen die berechneten ausfallen, je grösser die ausser dem Rotationskörper zu bewegendes fremde Masse ist; auch entstehen durch die Anordnung der letztern rücksichtlich der durch den Drehpunkt gehenden Lothrechten Centrifugalkräfte, welche mehr oder weniger störend einwirken. Man muss daher schon deshalb darauf verzichten in bestimmten Zahlen diese Formeln durch Versuche verificiren zu wollen, abgesehen davon, dass ohne sehr complicirte Einrichtungen es schwerlich möglich sein dürfte, dem Rotationskörper eine gegebene Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen. Man könnte zu letzterm Zwecke zwar auf der Rotationsaxe ein gezahntes Rädchen anbringen und mittelst eines dagegen gehaltenen Kartenblättchens aus dem Tone der dann entsteht, auf die Zahl der Umdrehungen schliessen, allein es würde schwer sein, von vornherein eine bestimmte oder auch nur nacheinander genau dieselbe Zugkraft hervorzubringen. Wie man im Allgemeinen die Formeln verificiren kann, haben wir oben §. 7. schon für einige Fälle dargethan, und würde man ebenso für andere im Folgenden zu betrachtende verfahren können.

Wir verweilen nicht bei der allgemeinen Discussion der Gleichungen, sondern gehen gleich zu den besondern Voraussetzungen über.

A. Liegt der Schwerpunkt im Drehpunkt, wie in der

Bohnenbergischen Einrichtung, ist also  $\delta = 0$ , so geben unsere Gleichungen

1. Für das Rotations-Ellipsoid

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{2b^2 \bar{\phi}}{(b^2 - a^2) \cos \vartheta}.$$

Es verändert mithin  $\bar{\psi} \cos \vartheta$  bei demselben  $\bar{\phi}$  mit  $b^2 - a^2$  sein Zeichen, oder die möglichen Drehungen sind für das abgeplattete und längliche Rotations-Ellipsoid entgegengesetzt.

2. Für die Kugel

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \infty.$$

Es schneidet also die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie, und man kann der Kugel keine Rotation um die Verticale ertheilen, bei welcher der Winkel ihrer Drehaxe mit derselben constant bleibt.

3. Für den Rotations-Cylinder

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{R^2 \bar{\phi}}{2 \left( \frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} \right) \cos \vartheta}$$

Der letztere Werth wird  $= \infty$ , wenn  $\frac{H}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

Es schneidet also bei einem solchen Cylinder ebenfalls die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie oder gibt man ihm irgend eine Rotation um die Verticale, so verändert sich  $\vartheta$ .

Mit  $\frac{H}{R} < \frac{1}{2} \sqrt{3}$  verändert  $\bar{\psi} \cos \vartheta$  sein Zeichen.

4. für den geraden Kegel

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{2 R^2 \bar{\phi}}{\left( R^2 - \frac{H^2}{4} \right) \cos \vartheta}$$

Ist seine Höhe dem Durchmesser der Basis gleich, so ist der zweite Werth unendlich, mithin gilt für einen solchen Kegel ebenfalls das oben rücksichtlich der Kugel Bemerkte und  $\bar{\psi} \cos \delta$  ändert mit  $H < 2 R$  sein Zeichen.

B. Liegt der Schwerpunkt nicht im Drehpunkte, ist aber das Gewicht des Rotationskörpers aufgehoben, wie am Fessel'schen Apparate stattfindet, wenn durch ein Gegengewicht Gleichgewicht hervorgebracht ist, so erhält man aus den obigen Gleichungen, wenn man  $g = 0$  setzt

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{2 b^2 \bar{\phi}}{\left[ (b^2 - a^2) - 5 \delta^2 \right] \cos \vartheta}$$

Es verändert mithin  $\bar{\psi} \cos \vartheta$  mit  $b^2 - a^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 5 \delta^2$  sein Zeichen; ist  $b^2 - a^2 = 5 \delta^2$ , so wird der zweite Werth unendlich, oder keine Seitendrehung findet, wenn  $\vartheta$  constant bleibt, statt.

2. für die Kugel

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = - \frac{2 b^2 \bar{\phi}}{5 \delta^2 \cos \vartheta}$$

3. für den Cylinder

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{R^2 \bar{\phi}}{2 \left( \frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2 \right) \cos \vartheta}$$

Für einen spitzen Winkel  $\vartheta$  ist  $\bar{\psi} \cos \vartheta \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$ , je nachdem  $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \delta^2$  ist. Hat man  $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} = \delta^2$ , so ist  $\bar{\psi}$

$= \infty$ . Ist  $\frac{H}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ , so wird der zweite Werth gleich  $-\frac{R^2 \bar{\phi}}{2 \delta^2 \cos \vartheta}$ , welcher mit dem der Kugel im Zeichen überein-

stimmt und auch im Werthe, wenn  $R = \frac{2b}{\sqrt{5}}$  ist.

4. für den geraden Kegel

$$\bar{\psi} = 0 \text{ und } \bar{\psi} = \frac{2 R^2 \bar{\phi}}{\left( R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{20}{3} \delta^2 \right) \cos \vartheta}$$

Eine constante Rotation um die Lothrechte ist wieder unmöglich, wenn  $R^2 - \frac{H^2}{4} = \frac{20}{3} \delta^2$ . Ist  $H = 2R$ , so wird  $\overline{\psi} = -\frac{3}{10} \frac{R^2 \overline{\phi}}{\delta^2 \cos \vartheta}$  also wie bei dem Cylinder mit dem  $\overline{\psi}$  der Kugel im Zeichen übereinstimmend und auch im Werthe, wenn  $R = \frac{2b}{\sqrt{3}}$  ist.

1. Vergleicht man die einzelnen Werthe von  $\overline{\psi}$  in  $B$  mit denen in  $A$ , so sieht man, dass wenn die Nenner in beiden positiv sind, das  $\overline{\psi}$  in allen Fällen  $B$  grösser ist als in den entsprechenden  $A$ .

C. Ist der Winkel  $\vartheta$  der Rotationsaxe mit der Vertikalen ein rechter, so wird ein Wurzelwerth in den obigen Gleichungen unendlich; er bezieht sich auf den Fall, wo die Seitenbewegung wie in §. 7 eine künstlich ertheilte ist. Der andere ist

1. für das Ellipsoid

$$\overline{\psi} = \frac{5}{2} \frac{g \delta}{b^2 \overline{\phi}}$$

2. für die Kugel ebenfalls

$$\overline{\psi} = \frac{5}{2} \frac{g \delta}{b^2 \overline{\phi}}$$

3. für den Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = \frac{2}{R^2} \frac{g \delta}{\overline{\phi}}$$

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = \frac{10}{3} \frac{g \delta}{R^2 \overline{\phi}}$$

Dieselben Werthe ergeben sich natürlich, wenn der andere Factor von  $\overline{\psi}^2$  in den Gleichungen III, V und VI Null ist. Sie zeigen das Merkwürdige, dass die Seitenbewegung in diesem Falle sich gleich bleibt, welches auch die Länge der Umdrehungsaxe (Axe der Figur) des bezüglichen Körpers sein mag, wenn nur die andere Dimension, die Rotationsgeschwindigkeit und die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte  $\delta$  dieselbe bleibt. Der Grund liegt unzweifelhaft darin, dass bei einem rechten Winkel alle Punkte eines auf

der Rotationsaxe des Körpers senkrechten Schnittes bei der Drehung um die Verticale eine gleiche Centrifugalkraft erlangen. Zugleich aber zeigen sie, dass obwol die Länge der Rotationsaxe dann nicht in Betracht kommt, die Gestalt des Körpers keineswegs gleichgültig ist. Das  $\bar{\psi}$  des Cylinders und des Kegels ist nur dann dem der Kugel vom Halbmesser  $b$  gleich, wenn der Halbmesser der Basis des erstern  $= \frac{2b}{\sqrt{5}}$ , des letztern dagegen  $\frac{2b}{\sqrt{3}}$  ist.

D. Setzen wir endlich  $\bar{\varphi} = 0$ , so geben die obigen Gleichungen für das Centrifugal-Pendel, welches als Schwungkörper hat

1. ein Rotations-Ellipsoid

$$\bar{\psi} = \sqrt{\frac{g \delta}{\left\{ \delta^2 - \frac{1}{5} (b^2 - a^2) \right\} \cos \vartheta}}$$

2. eine Kugel

$$\bar{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos \vartheta}}$$

3. einen Rotations-Cylinder

$$\bar{\psi} = \sqrt{\frac{g \delta}{\left( \delta^2 + \frac{H^2}{3} - \frac{R^2}{4} \right) \cos \vartheta}}$$

4. einen geraden Kegel

$$\bar{\psi} = \sqrt{\frac{g \delta}{\left\{ \delta^2 + \frac{3}{20} \left( \frac{H^2}{4} - R^2 \right) \right\} \cos \vartheta}}$$

Wenn also die Entfernung des Schwerpunktes des geraden Kegels vom Drehpunkte dieselbe ist, so hat auch  $\bar{\psi}$  denselben Werth, der Kegel mag seine Spitze von oder zu dem Drehpunkte wenden.

Ist das Centrifugal-Pendel ein mathematisches, der Schwungkörper also nur ein materieller Punkt, so geben die obigen Formeln, wenn in ihnen  $a, b, H, R$  gleich Null gesetzt werden, sämtlich

$$\bar{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos \mathfrak{S}}}$$

oder denselben Werth, der stattfindet, wenn der Schwungkörper entweder 1. eine Kugel ist;

oder 2. ein Rotations-Cylinder, welcher zur Höhe die halbe Höhe eines über dem Durchmesser seiner Basis als Seite beschriebenen gleichseitigen Dreiecks hat;

oder endlich 3. ein gerader Kegel ist, welcher den Durchmesser der Basis zur Höhe hat.

Haben letztere den Halbmesser der Kugel zum Halbmesser ihrer Grundflächen und bezeichnen  $c$ ,  $k$  ihre Inhalte,  $K$  den Inhalt der Kugel, so ist

$$K: k: c = 4: 2: \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

Haben sie dagegen gleichen Inhalt, also bei derselben Länge des Pendelarms auch gleiche Wirkungsfähigkeit, so verhalten sich ihre Halbmesser wie  $1: \sqrt[3]{2}: \frac{2}{3} \sqrt{3}$ .

Bei den vielfachen Anwendungen, welche das Centrifugal- (conische) Pendel in der Technik hat, gebraucht man bis jetzt nur das mit einer Kugel als Schwungkörper, und es war Huyghens der Erste, welcher es untersucht hat. Lagrange,\*<sup>\*)</sup> welcher die von Clairaut in den Memoires der Academie des Sciences de l'annee 1735 aufgestellte allgemeinere Theorie des Pendel-Problems wesentlich vervollständigt hat, findet die Ro-

tationsgeschwindigkeit um die Lothrechte  $\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r \cos \alpha}}$ ,

in welcher Gleichung  $\frac{d\phi}{dt}$ ,  $2g$ ,  $r$ ,  $\alpha$  unser  $\bar{\psi}$ ,  $g$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{S}$  bezeichnen. Auf elementarem Wege ergibt sich diese Formel ebenfalls leicht. Denn ist Fig. 23.  $P$  der schwere Punkt von der Masse  $m$ ,  $O$  der Aufhängepunkt,  $OP = \delta$  der Pendelarm,  $\mathfrak{S}$  sein Winkel mit der Verticalen  $OV$ , so entspricht der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\psi}$ , bei der die Entfernung von der Verticalen = 1 ist, in einer Entfernung  $PE$  eine Umdrehungsgeschwindigkeit  $PE \cdot \bar{\psi}$ , also eine Centrifugalkraft  $PF$

\*<sup>\*)</sup> Mecanique anal. t. II. sect. VIII. p. 205.

$$= \frac{m, P E^2 \bar{\psi}^2}{P E} = m P E \bar{\psi}^2. \text{ Ihr Drehmoment gegen } O \text{ ist}$$

$P F. O E = m P E. \bar{\psi}^2. O P \cos \vartheta = m. P E. \bar{\psi}^2. \delta. \cos \vartheta.$   
 Das Drehmoment des Gewichtes dagegen ist  $m g. P E.$  Soll  $\vartheta$  constant sein, so müssen diese Momente gleich oder  $\bar{\psi}^2. \delta. \cos \vartheta = g$  sein.

Man sieht aus dem Obigen, dass, abgesehen vom Widerstande der Luft, die Kugel durch andere der genannten Rotationskörper von den bezeichneten Dimensionen ersetzt werden könnte, und wie man die Dimensionen dieser Körper und des Ellipsoids nehmen müsse, damit bei derselben Umdrehungsgeschwindigkeit und demselben Pendelarme der Winkel mit der Verticalen grösser oder kleiner als für die Kugel sei. Die Formeln zeigen ferner, dass während das conische Kugel-Pendel nur bei einem spitzen Winkel seines Armes mit der Richtung der Schwere constant schwingen kann, für die übrigen ihre Dimensionen und der Pendelarm auch so angenommen sein können, dass nur bei einem stumpfen Winkel eine constante Drehung möglich ist. Dass einem rechten Winkel dagegen, wenn wir nicht voraussetzen, dass  $g = 0$  oder die Wirkung der Schwere durch ein Gegengewicht an dem verlängerten Pendelarme aufgehoben wäre, in keinem Falle eine solche stattfinden kann, ist von selbst einleuchtend, und zeigen die obigen Formeln, indem  $\cos \vartheta = 0$  für  $\bar{\psi}$  den Werth  $\infty$  gibt. Aus demselben Grunde gibt es für die Körper 1, 3, 4 keine constante Drehungslage, wenn ihre Dimensionen so beschaffen sind, dass der Factor von  $\cos \vartheta = 0$  ist. Es sind diese Bedingungen dieselben, denen wir bei den Formeln *B* begegnet sind, und es erhellt hieraus, und aus dem in §. 7 bereits Erörterten, dass die zweiten Werthe für  $\bar{\psi}$  in den Formeln *A* und *B* den Fällen zukommen, wo dem ganzen Apparate eine Umdrehung um die Lothlinie in der in jenem §. bezeichneten Weise künstlich ertheilt wird, während die Werthe Null von  $\bar{\psi}$  den Fällen entsprechen, wo dieses nicht geschieht. Jene beziehen sich also auf den allgemeinen Fall des conischen Pendels, wo der Schwungkörper ein Rotationskörper ist und zugleich um die Axe seiner Figur und die Verticale in Rotation gesetzt wird.

Um die obigen Resultate in dem gewöhnlichen Fall, dass die erstere Rotation nicht statt hat, für die verschiedenen Schwungkörper zur Anschauung zu bringen, könnte man sie paarweise wie an den Armen eines Regulators an einer in die

verticale Säule des Fessel'schen Apparates passenden Stange aufhängen, das Ganze auf die Platte der Schwungmaschine bringen, und, nachdem man die Stange mittelst des Schraubchens festgestellt und die Kurbel in Bewegung gesetzt hat, darauf achten, wann man eine Geschwindigkeit erreicht hätte, bei welcher keine weitere Entfernung von der Verticalen stattfindet, und alsdann eine Gabel einfallen lassen, um die Pendel in dieser Lage festzuhalten und die Winkel, die sie nun mit den Verticalen bilden, zu beobachten.

## §. 17.

Um die Schwankungen, welche der Winkel  $\vartheta$  der Rotationsaxe mit der Verticalaxe um einen mittlern Werth unter Umständen zeigt, in Betracht zu ziehen, müssen wir zu den Eulerschen Gleichungen zurückgreifen.

Sie sind in unserm Falle, wo  $A = B$  ist, gemäss §. 9.:

$$(1) \quad C dr = 0$$

$$(2) \quad A dq - (C - A) r p dt = \gamma a'' \cdot M g dt \quad (A.)$$

$$(3) \quad A dp + (C - A) r q dt = - \gamma b'' \cdot M g dt$$

$$\text{Zugleich ist: } p b'' - q a'' = \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad (B.)$$

$$p a'' + q b'' = \sin^2 \vartheta \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

$$\text{ferner } d c'' = (a q'' - b'' p) dt$$

$$d b'' = (c'' p - a'' r) dt \quad (C.)$$

$$d a'' = (b'' r - c'' q) dt$$

Aus den beiden ersten Gleichungen  $B$  folgt

$$p^2 + q^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \sin^2 \vartheta \cdot \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1 - c''^2) \cdot \frac{d\psi^2}{dt^2}$$

und aus den drei letzten

$$r d c'' = q d b'' + p d c''$$

Multipliziert man also die Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise mit  $c''$ ,  $b''$ ,  $a''$  und addirt so findet man

$$C \cdot d c'' r + A \cdot d (b'' q + a'' p) = 0$$

oder, da  $r = \text{Const} = n$  zufolge (1) ist,

$$C. n c'' + A (b'' q + a'' p) = \text{Const} = l,$$

$$\text{oder } C. n c'' - A (1 - c''^2) \frac{d\psi}{dt} = l. \quad (\text{D.})$$

Multipliziert man dagegen die Gleichung (2) mit  $q$  und die Gleichung (3) mit  $p$  und addirt, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} A. d(p^2 + q^2) = \gamma Mg (a'' q - b'' p) dt = -\gamma Mg \sin \vartheta dt = \gamma Mg. d c''$$

$$\text{oder } A (p^2 + q^2) = 2 \gamma Mg. c'' + \text{Const} = 2 \gamma Mg c'' + h,$$

oder endlich

$$A \left( \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1 - c''^2)^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} \right) = 2 Mg \gamma c'' + h. \quad (\text{E.})$$

Aus D und E folgt

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{A \sqrt{1 - c''^2}}{\sqrt{A (1 - c''^2) (2 Mg \gamma c'' + h) - (C n c'' - l)^2}} \quad (\text{F.})$$

$$\text{Ferner ist (nach D)} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{C n c'' - l}{A (1 - c''^2)},$$

$$\text{also } \frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{C n c'' - l}{\sqrt{A (1 - c''^2) (2 Mg \gamma c'' + h) - (C n c'' - l)^2}} \quad (\text{G.})$$

$$\text{Ebenso ergibt sich aus } \frac{d\phi}{dt} = r + c'' \cdot \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{d\phi}{d\vartheta} = \frac{n A (1 - c''^2) + (C n c'' - l) c''}{\sqrt{(1 - c''^2) [A (1 - c''^2) (2 Mg \gamma c'' + h) - (C n c'' - l)^2]}} \quad (\text{H.})$$

Die Integration der Gleichungen (F), (G), (H) führt zu elliptischen Functionen. Wir befassen uns hier nur mit der ersten, welche wir, beachtend, dass

$$\sqrt{(1 - c''^2)^2} \cdot d\vartheta = \sin \vartheta \cdot d\vartheta = -dc''$$

ist, auch so schreiben können:

$$t - t^0 = -A \int \frac{dc''}{\sqrt{A (1 - c''^2) (2 Mg \gamma c'' + h) - (C n c'' - l)^2}}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, den wir mit  $W$  bezeichnen wollen, bleibt so lange reell, als  $c''$  reell ist und verändert sich stetig, wenn  $c''$  sich stetig verändert. Denkt man sich nun, ohne die Zulässigkeit solcher Werthe zunächst zu berücksichtigen, es wachse

so ist  $c''$  von  $c'' = -\infty$  bis  $c'' = +\infty$ ,

$$W = +\infty \quad \text{für } c'' = -\infty$$

$$W = -(Cn + l)^2 \quad \text{für } c'' = -1$$

$$W = -(Cn + l)^2 \quad \text{für } c'' = +1$$

$$W = -\infty \quad \text{für } c'' = +\infty$$

Es liegt also jedenfalls eine reelle Wurzel von  $W = 0$  zwischen  $c'' = -\infty$  und  $c'' = -1$ . Nun kann aber  $W$ , während  $c''$  von  $c'' = -1$  bis  $c'' = +1$  wächst, nicht fortdauernd negativ sein, weil sonst  $\sqrt{W}$  mithin auch  $t$  fortdauernd imaginär wäre, die Realität von  $t$  in der Aufgabe aber nur Werthe von  $\vartheta$  zwischen  $0$  und  $180^\circ$ , also von  $c''$  zwischen  $-1$  und  $+1$  zulässt. Zwischen  $c'' = -1$  und  $c'' = +1$  muss es also zwei reelle Wurzeln von  $W$  geben, eine bei der  $W$  aus dem Negativen ins Positive, eine andere bei der  $W$  aus dem Positiven wieder ins Negative übergeht. Bezeichnen wir den kleinern dieser Werthe von  $c''$  mit  $c''_1$ , den grössern mit  $c''_2$  und die dritte ebenfalls nothwendig reelle Wurzel des cubischen Ausdrucks, welche zwischen  $-1$  und  $-\infty$  liegt, also stets negativ ist, mit  $w_3$ , so ist, damit  $\sqrt{W}$  reell werde,  $c''_1 < c'' < c''_2$  und zugleich  $c''_2 - w_3 > 0$ . Bringen wir  $\sqrt{2AMg\gamma}$ , den Coefficienten von  $-(c'')^3$  in dem obigen Integral, vor das Wurzelzeichen, so lässt es sich demnach in folgender Form darstellen:

$$t - t^0 = - \sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}} \int \frac{dc''}{\sqrt{-(c'' - c''_1)(c'' - c''_2)(c'' - w_3)}}$$

Substituirt man hierin für  $c''$  den Werth

$$c'' = c''_2 - x_2 (c''_2 - c''_1),$$

dividirt durch  $c''_2 - w_3$ , und setzt  $\frac{c''_2 - c''_1}{c''_2 - w_3} = k^2$ , so ergibt sich

$$t - t^0 = + \sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}} \frac{2}{\sqrt{c''_2 - w_3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x''} \sqrt{1 - k^2 x^2}},$$

also

$$x = \sin \text{ am. } \sqrt{\frac{Mg\gamma}{2A} (c''_2 - w_3)} \cdot (t - t^0),$$

für welchen Ausdruck wir der Kürze wegen

$$x = \sin \text{ am. } u$$

setzen. Mithin erhält man für  $c''$

$$c'' = c''_2 - (c''_2 - c''_1) \sin^2 \text{ am } u$$

Wenn  $u = 0$ , hat  $c''$  seinen grössten Werth  $c''_2$ , mithin Winkel  $\vartheta$  seinen kleinsten. Ist  $u = K$ , wo  $K$  bekanntlich das obige Integral zwischen den Grenzen  $x = 0$  und  $x = +1$  bezeichnet, so hat  $c''$  seinen kleinsten Werth  $c''_1$ , also  $\vartheta$  seinen grössten. So oft das Argument  $u$  um  $2K$  zunimmt, welches

geschieht, wenn die Zeit um  $2K \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{Mg\gamma}{2A}(c'' - w_3)}}$  wächst,

erhält  $c''$  wieder denselben Werth, also auch  $\vartheta$ , welches auch der augenblickliche Werth von  $\vartheta$  sein mag. Der Winkel  $\vartheta$  der Rotationsaxe mit der Verticalen verändert sich also periodisch und schwankt in der Zeitperiode  $\frac{T}{2}$  zwischen seinem kleinsten und grössten Werthe.

Wollte man die Wurzeln  $c''_1, c''_2, w_3$  selbst durch die Coefficienten des Ausdrucks  $W$  darstellen, so hat man bekanntlich, wenn

$$W = z^3 + az^2 - bz - c = 0$$

gesetzt wird, diese Gleichung zuerst auf die Form

$$y^3 - b'y - c' = 0$$

zu bringen und  $\cos \varepsilon = \frac{c'}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{b'}\right)^3}$  zu setzen, indem man

alsdann für die Wurzeln dieser Gleichung

$$y_1 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3} \cos \frac{1}{3} \varepsilon}$$

$$y_2 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3} \cos \frac{(2\pi - \varepsilon)}{3}} = -2 \sqrt{\frac{b'}{3} \cos \left(\frac{\pi + \varepsilon}{3}\right)}$$

$$y_3 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3} \cos \left(\frac{2\pi + \varepsilon}{3}\right)} = -2 \sqrt{\frac{b'}{3} \cos \left(\frac{\pi - \varepsilon}{3}\right)}$$

findet, und die Wurzeln von  $W = 0$ , einzeln den letztern weniger  $\frac{a}{3}$  gleich sind.

### §. 18.

Im Falle auf den Rotationskörper im Anfange seiner Bewegung durchaus keine anderen bewegendenden Kräfte wirken,

als solche, welche gemeinsam ihm eine Drehgeschwindigkeit  $n$  um seine Axe ertheilen und er alsdann allein dem Einflusse der beschleunigenden Kraft und der Trägheit überlassen ist, — wie gewöhnlich bei unsern Apparaten — lassen sich ohne Schwierigkeit die Bedingungen auffinden, damit die gedachten Schwankungen fortdauernd sehr klein bleiben.

Es ist nämlich in diesem Falle im Anfange der Bewegung  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ , mithin gibt die Gleichung  $D$  im vorigen §.:

$$C n c''_1 = l$$

wenn  $c''_1 = \cos \vartheta$ , dem anfänglichen Winkel  $\vartheta$  zugehört.

Ebenso ist in diesem Augenblicke  $p = 0$ , und  $q = 0$ , mithin gibt die Gleichung  $A(p^2 + q^2) = 2 M g \gamma c''_1 + h$  für  $h$  den Werth  $-2 M g \gamma c''_1$ . Substituirt man diese Werthe für  $l$  und  $h$  in Gleichung  $F$ , so erhält man

$$\sqrt{(1 - c''^2)} d\vartheta = \frac{1}{A} \sqrt{A(1 - c''^2) 2 M g \gamma (c'' - c''_1) - C^2 n^2 (c'' - c''_1)^2} dt$$

oder

$$dc'' = -\frac{1}{A} \left[ A(1 - c''^2) 2 M g \gamma - C^2 n^2 (c'' - c''_1) \right]^{\frac{1}{2}} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}} dt \quad (J.)$$

Hat man aber einen Ausdruck von der Form

$$du = dx \cdot fu,$$

$$\text{so ist } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{du} = fu \cdot \frac{dfu}{du},$$

mithin gemäss der Reihe

$$u' - u = \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$u$  ein Maximum, wenn  $fu = 0$  und  $fu \cdot \frac{dfu}{du}$  negativ, dagegen

$u$  ein Minimum, wenn  $fu = 0$  und zugleich  $fu \cdot \frac{dfu}{du}$  positiv ist.

In unserm Falle wird  $fu = 0$ , wenn entweder  $c'' - c''_1 = 0$ ,  
oder  $A(1 - c''^2) 2 M g \gamma - C^2 n^2 (c'' - c''_1) = 0$

ist. Bezeichnet man ferner den Factor in der grossen Klammer in der Gleichung  $J$  der Kürze wegen mit  $K$ , so ist

$$\frac{dfu}{du} = \frac{dfu}{dc''} = -\frac{1}{2A} K^{\frac{1}{2}} (c'' - c_1'')^{-\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2A} [4AMg\gamma c'' + C^2 n^2] K^{-\frac{1}{2}} (c'' - c_1'')^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{also } fu \frac{dfu}{du} = -\frac{dfu}{dc''} \cdot \frac{K^{\frac{1}{2}}}{A} (c'' - c_1'')^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{2A^2} \cdot K - \frac{1}{2A^2} \cdot (4AMg\gamma c'' + C^2 n^2) (c'' - c_1'')$$

Für  $c'' = c_1''$  reducirt sich dieser Ausdruck, da

$$K = A(1 - c''^2) \cdot 2Mg\gamma - C^2 n^2 (c'' - c_1'') \text{ ist,}$$

auf  $\frac{1}{A}(1 - c_1''^2)Mg\gamma$ , mithin gibt  $c'' = c_1''$  für ein positives  $\gamma$  ein Minimum.

Setzt man  $K = 0$  und bezeichnet die Wurzeln dieser Gleichung mit  $c_2''$ , so ergibt sich:

$$c_2'' = -\frac{C^2 n^2}{4AMg\gamma} \pm \sqrt{1 + \frac{C^2 n^2 c_1''}{2AMg\gamma} + \frac{C^2 n^2}{16A^2 M^2 g^2 \gamma^2}}$$

oder, wenn man der Kürze wegen  $\frac{M\gamma}{A} = \frac{1}{\lambda}$  und

$$\frac{C^2 n^2}{A^2} = \frac{4g\beta^2}{\lambda}, \text{ also } \beta^2 = \frac{C^2 n^2}{4AMg\gamma}$$

$$\text{setzt, } c_2'' = -\beta^2 \pm \sqrt{1 + 2\beta^2 c_1'' + \beta^4}$$

Macht man dieselbe Substitution in

$$-\frac{1}{2A^2} [4AMg\gamma c'' + C^2 n^2] (c'' - c_1''),$$

indem man mit  $4AMg\gamma$  multiplicirt und dividirt, so erhält

$$\text{man } -\frac{2g}{\lambda} (c'' + \beta^2) (c'' - c_1'').$$

Der negative Werth von  $c_2''$  ist grösser als 1, mithin nicht zulässig. Substituirt man den andern mit positivem Wurzelzeichen für  $c''$ , so wird der letztere Ausdruck

$$-\frac{2g}{\lambda} \sqrt{1 + 2\beta^2 c_1'' + \beta^4} \left[ -\beta^2 - c_1'' + \sqrt{1 + 2\beta^2 c_1'' + \beta^4} \right]$$

also, da

$$\sqrt{1 + 2\beta^2 c''_1 + \beta^4} = \sqrt{(\beta + c''_1)^2 + (1 - c''_1)^2} > \beta^2 + c''_1$$

ist, negativ, folglich gibt

$$\begin{aligned} c''_2 &= -\beta^2 + \sqrt{1 + 2\beta^2 c''_1 + \beta^4} \\ &= -\beta^2 + (1 + \beta^2) \left[ 1 - \frac{2\beta^2(1 - c''_1)}{(1 + \beta^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ein Maximum.

Der Ausdruck  $\frac{2\beta^2(1 - c''_1)}{(1 + \beta^2)^2}$  ist sehr klein

1. wenn  $c''_1$  nahe  $= 1$  d. h. die Rotationsaxe sehr wenig von der verticalen Lage abweicht, und  $\beta$  nicht gleich Null ist.

2. wenn der ursprüngliche Winkel mit der Verticalen, also  $c''_1$ , beliebig, aber  $\beta^2$  unendlich gross ist, welches um so mehr der Fall ist, je grösser die Umdrehungsgeschwindigkeit  $n$ , je kleiner die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte  $\gamma$ , je kleiner ferner das Gewicht des Rotationskörpers  $Mg$  und je grösser endlich das Trägheits-Moment  $C$  rücksichtlich der Rotationsaxe gegen das Trägheits-Moment  $A$  rücksichtlich der auf ihr senkrechten Axe, oder je kleiner jene Axe gegen diese ist.

Die Experimente mit dem Fesselschen Apparate bestätigen alle diese Bedingungen und würden es noch mehr, wenn die fremde mitzubewegende Masse nicht vorhanden wäre.

In den beiden Fällen (1) und (2) können die höhern Potenzen des gedachten Ausdruckes vernachlässigt werden, und man erhält

$$c''_2 = 1 - \frac{\beta^2(1 - c''_1)}{1 + \beta^2}$$

$$\text{also } c''_2 - c''_1 = 1 - c''_1 - \frac{\beta^2(1 - c''_1)}{1 + \beta^2}$$

ein Unterschied, welcher in den gedachten beiden Fällen so klein werden kann, als man will.

Will man in dem ersten Falle den Winkel  $\vartheta_2$  selbst ausdrücken, welcher dem maximum  $c''_2$  entspricht, und bezeichnet man den dem minimum  $c''_1$  zugehörigen Winkel mit  $\vartheta_1$ , so gelangt man dazu mittelst des Ausdrucks

$$c''_2 = 1 - \frac{\beta^2(1 - c''_1)}{1 + \beta^2},$$

indem man in demselben, da  $\vartheta_2$  und  $\vartheta_1$  beide sehr klein sind,

$1 - \frac{\vartheta_2^2}{2}$  für  $c''_2$  und  $1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$  für  $c''_1$  substituirt. Man erhält alsdann

$$\vartheta_2 = \frac{\beta \vartheta_1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

Es ist dieser Grenzwert derselbe, welchen Poisson in seinem traité de mécanique t. II. §. 431 aus der Gleichung  $J$  herleitet, indem er in ihr unmittelbar  $1 - \frac{\vartheta^2}{2}$  für  $c''$  und

$1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$  für  $c''_1$  substituirt und  $\beta^2$  für  $\frac{C^2 n^2}{4 A M g \gamma}$  setzt.

Wir verweilen hierbei nicht, sondern verweisen auf das bezogene Werk, wo man auch die angenäherten Werthe für  $\vartheta$  und  $\psi$  in  $t$  findet, welche sich ergeben, wenn man unter den gemachten Voraussetzungen im ersten Falle  $\vartheta = \vartheta_1 \sin u$ , im zweiten  $\vartheta = \vartheta_1 - u$ , wo  $u$  eine sehr kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen als  $u^2$  zu vernachlässigen sind, in den Ausdrücken für  $\frac{d\vartheta}{dt}$  und  $\frac{d\psi}{dt}$  substituirt und integrirt. Da

Poisson und ebenso Andere, welche nach ihm verfahren sind, z. B. Ohm in seiner Mechanik III. Theil S. 316. die obigen Untersuchungen über die Bedingungen, unter welchen  $u$  auch im zweiten Falle sehr klein bleibt, nicht anstellt, so ist er genöthigt, diese Möglichkeit von vornherein anzunehmen und findet die Bedingungen erst nach vollzogener Integration. Der von uns eingeschlagene Weg rechtfertigt diese Annahme, und kürzt zugleich die Integration ab, indem er sofort gestattet, für  $\cos \vartheta_1 + 4 \beta^2$  oder wie Poisson schreibt, für  $\cos \alpha + 4 \beta^2$  bloss  $4 \beta^2$  zu setzen.

# Bericht über die Realschule

während des Schuljahrs 18<sup>55</sup>/<sub>56</sub>.

## I. Lehrverfassung.

Das Lehrer-Collegium bestand aus: dem Director Dr. Heinen, den Herren Classen-Ordinarien: Oberlehrer Dühr, Oberlehrer Dr. Schauenburg, Honigsheim, Dr. Witz und Grf; den ordentlichen Lehrern Herrn Dr. Stammer und Herrn Dr. Uellner; den beiden Religionslehrern Herrn Caplan Langendorff und Herrn Pastor Krafft, dem Zeichenlehrer und Maler Herrn Conrad, und dem Hülflehrer Herrn Blind.

### Sexta. Ordinarius: Grf.

#### A. Wissenschaften.

11 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des alten Testaments vom Anfange bis zu S. 40 incl. nach van den Driesch. Die Glaubens- und Sittenlehre wurde an die einzelnen Lectionen angeknüpft; die einzelnen Paragraphen wurden sorgfältig memorirt.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichten des alten Testaments. Auswendiglernen von ausgewählten Stücken des Katechismus mit den biblischen Beweisstellen.

2. Rechnen. 5. St. Die Rechnungen mit ganzen Zahlen und Brüchen, mit besonderer Berücksichtigung des Kopfrechnens. Vielfache Uebungen an einfachern praktischen Aufgaben aus Schellen's Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen.

3. Naturgeschichte. 2 St. a. Zoologie im Winter. Beschreibung von interessanten Thieren aus verschiedenen Gruppen des Thierreichs, größtentheils an den ausgestopften Exemplaren des zoologischen Cabinets;

b. Botanik im Sommer. Theils Angabe der Namen und Merkmale der von den Schülern mitgebrachten Pflanzen, theils Zergliederung und Beschreibung einzelner Pflanzen aus verschiedenen Familien.

Stammer.

4. Geographie. 2 St. Allgemeine Vorbegriffe; Uebersicht der Land- und Meeresräume; Topographie von Europa. Erk.

## B. Sprachen.

12 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 5 St. Grammatik: der einfache Satz, und in steter Verbindung damit das Wichtigste aus der Wortformenlehre; neben schriftlichen Übungen, besonders mündlich eingeübt an geeigneten Stücken des Lesebuchs. 3 St. Wöchentliche Correctur leichter Aufsätze erzählenden Inhalts. 1 St. Declamiren auswendig gelernter Gedichte aus Hülfstett's Lesebuch oder aus andern Sammlungen. 2 St. Erk.

2. Französisch. 7 St. Aus Ploetz's Elementarbuch I. Cursus wurden die Übungsstücke bis zum VI. Abschnitt schriftlich übersetzt und retrovertirt. Die deutschen wurden theils mündlich, theils schriftlich in's Französische übersetzt. Einübung von avoir und être, den 4 regelmäßigen Conjugationen, den gebräuchlichsten unregelmäßigen Zeitwörtern, den in diesem Buche vorkommenden Regeln; Memoriren von Vocabeln. In der II. Abtheilung wurden seit Ostern in 1 St. wöchentlich die Übungsstücke bis Lektion 30 übersetzt. Einübung der Regeln und Auswendiglernen der Vocabeln. Wirk.

## C. Fertigkeiten.

1. Zeichnen. 3 St. Zeichnen von geraden Linien, von verschiedenen Winkeln, von geometrischen Figuren, namentlich regulären, von symmetrisch zusammengestellten Figuren, mit Benutzung des Reißzeuges. Freies Handzeichnen von geraden Linien, einfachen Blattformen, theils mit der Feder und Tusche, theils mit Bleistift ausgezeichnet, nach Vorzeichnungen auf der Schultafel. Conrad.

2. Schönschreiben. 4 St. Die deutschen und englischen Schriftformen, in genetischer Folge nach den an der Schultafel vom Lehrer vorgeschriebenen und zugleich erläuterten Mustern eingeübt. Erk.

3. Gesang. a. Untere Abtheilung. 1 St. Elementarlehre des Gesanges, stets mit bezüglichen praktischen Übungen. Einübung ein- und zweistimmiger Lieder aus Erk und Greef's Sängerbain I.

b. Obere Abtheilung. 2 St. Weitere Erörterung der Elementarlehre des Gesanges; die Intervalle und das Wichtigste aus der Lehre von den Accorden. (1 St. während des Winters.) Vier- und fünfstimmige Gesänge aus Erk und Greef's Sängerbain II. und III., sowie aus L. Erk's Blätter und Blüten I. und II. Erk.

**Quinta.** Ordinarius: Dr. Wirz.**A. Wissenschaften.**

11 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St. combinirt mit Sexta.

2. Praktisches Rechnen. 4 St. Begründung und Einübung der Rechnung mit gewöhnlichen und Decimal-Brüchen. Theilbarkeit der Zahlen. Vielsache Uebungen in Aufgaben aus der einfachen und zusammengesetzten Regel de Tri, nach der Schlussrechnung aufgelöst; nur die schwierigen Aufgaben wurden schriftlich gerechnet; nach Schellen's „Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen.“ Stammer.

3. Naturgeschichte. 3 St. a. Zoologie im Winter. Systematische Abhandlung der Säugethiere und der Vögel. Veranschaulichung durch die Präparate des zoologischen Cabinets und durch den naturhistorischen Atlas von Goldfuß;

b. Botanik im Sommer. In stetem Wechsel einerseits Namen, Merkmale und besondere Eigenschaften der von den Schülern mitgebrachten Pflanzen; andererseits Zergliederung und Beschreibung von Pflanzen aus verschiedenen Familien. Gelegentlich reihte sich daran: Erklärung und Einübung botanischer Kunstausdrücke. Handbuch: Fürnrohr.

Duhr.

4. Geographie. 2 St. Erweiterung der allgemeinen Vorbegriffe; Oceanographie und Inseln aller Meere; topische Geographie von Australien, America, Asien und Africa; Wiederholung der topischen Geographie von Europa. Uebungen im Kartenzeichnen.

Im Winter Blind, im Sommer Schauenburg.

**B. Sprachen.**

10 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 5 St. Grammatik: Die Satzlehre, und in Verbindung damit die Wortformenlehre ausführlicher. Neben schriftlichen Uebungen, Analysiren geeigneter Stücke aus dem Lesebuche. Correctur wöchentlich der Aufsätze. 3 St. Erk.

Les- und Declamirübungen, freie Vorträge (meist nach Witt's Götter- und Heldengeschichten.). 2 St.

J. W.: Schauenburg, i. S.: Honigsheim.

2. Französisch. 6 St. Nach einer kurzen Wiederholung des V. Abschnittes in Ploetz's Elementarbuch I. Cursus wurden aus dessen II. Cursus die in den ersten fünf Abschnitten enthaltenen Uebungen schriftlich übersetzt und retrovertirt. Die unregelmäßigen Zeitwörter, die Anwendung von avoir und être bei der Conjugation, die Elemente über den Gebrauch der Zeiten und Moden, Bemerkungen über die französische

Wortstellung wurden eingeübt und die in den Abschnitten vorkommenden Regeln auswendig gelernt. Alle 14 Tage ein französisches Scriptum.  
Wirz.

### C. Fertigkeiten.

8 bis 9 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 4 St. Freies Handzeichnen von geschmackvollen Formen und einfachen Verzierungen, welche in vergrößertem Maßstabe auf der Schultafel vorgezeichnet wurden. — Linearzeichnen geometrischer Constructionen, architektonischer Glieder, Postamente und Gefäße nach gegebenen Maßverhältnissen nebst Angabe der Schattenlinien, mit der Feder und Tusche ausgezeichnet, nach Vorzeichnungen auf der Schultafel.  
Conrad.

2. Schönschreiben. 3 St. Wiederholung des in Sexta Durchgenommenen. Die Geübteren schrieben deutsche und französische Denksprüche aus Hüllstett und Plöz, oder aus dem Gedächtnisse, mit Benutzung der Schriftformentafel.  
Grf.

3. Gesang. s. Sexta.  
Grf.

## Quarta. Ordinarius: Sonigsheim.

### A. Wissenschaften.

15 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Die Lehre von den h. Sacramenten im Allgemeinen und im Besondern.  
Langendorff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Erklärung des Evangeliums Lucas. Auswendiglernen des Katechismus, sowie einzelner ausgewählter biblischer Abschnitte und Kirchenlieder.  
Krafft.

2. Mathematik. 5 St. a. Geometrie. 3 St. Die Entstehung und die allgemeinen Eigenschaften der verschiedenartigen Raumgebilde. Vergleichung zweier geraden Linien ihrer Richtung (Theorie der Parallelen) und Größe nach. Lagebeziehung eines Kreises zu einer Geraden und zweier Kreise zu einander. Constructionsaufgaben. Abhängigkeit der Seiten und Winkel im Dreiecke und in Polygonen. Congruenz der Dreiecke. Die Eigenschaften der Parallelogramme und des Trapezes. Einschlägige geometrische Deter und Aufgaben darüber;

b. Algebra. 2 St. Die vier Rechnungsoperationen mit einfachen und zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken. Potenzen und Wurzeln. Quadratwurzel aus ganzen Zahlen. Nach Heis' Aufgaben-Sammlung.  
Dühr.

3. Praktisches Rechnen. 2 St. Wiederholung und Erweiterung der Lehre von den Decimal-Brüchen, insbesondere die abgekürzten

Rechnungen. Theilbarkeit der Zahlen. Einfache und zusammengesetzte Regel de Tri. Ketten-Rechnung. Vielsache Anwendungen, namentlich auch zur Lösung von Zins-, Rabatt-, Vertheilungs- und Mischungs-Rechnungen. Handbuch: Schellen. Duhr.

4. Naturgeschichte. 2 St. a. Zoologie im Winter. Bau und Lebensverrichtungen des Menschen. Systematische Abhandlung der Amphibien und der Fische. Veranschaulichung wie in Quinta. Handbuch: Fürrohr;

b. Botanik im Sommer. Einübung des Linnéischen Systems und praktische Anleitung, mit dessen Hülfe die Pflanzen zu bestimmen. Charakterisirung der wichtigeren Pflanzen-Familien. Zwischendurch: Zergliederung und Beschreibung einschlägiger Pflanzen, Beschaffenheit der äußern Pflanzen-Organen und Wiederholung der betreffenden Kunstausdrücke. Handbuch: Leunis' analytischer Leitfaden. Duhr.

5. Geschichte. 3 St. Geschichte der alten Welt, insbesondere der Griechen und Römer, mit Zugrundlegung des kleinern Handbuchs von Büß. Honigsheim.

6. Geographie. 2 St. Topische und politische Geographie von Spanien, Frankreich, Griechenland, der Türkei und Italien. Zugleich zeichneten die Schüler die Karten von den meisten dieser Länder.

Im Winter Blind, im Sommer Honigsheim.

## B. Sprachen.

9 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 4 St. Lectüre von Musterstücken aus Büß' deutschem Lesebuche, verbunden mit Wiederholung und weiterer Ausführung des Wichtigsten aus der Satzlehre. Eine Stunde wöchentlich wurde zum Declamiren auswendig gelernter Gedichte, eine andere zu freien Vorträgen verwandt und zu letztern vorzugsweise Erzählungen aus der alten Geschichte benutzt. Die schriftlichen Arbeiten (alle 14 Tage bis 3 Wochen) bestanden meistens in Erzählungen und kleinern Schilderungen.

Honigsheim.

2. Französisch. 5 St. Wiederholung des V. Abschnittes in Bloek's II. Cursus. Die Übungsstücke bis zum IX. wurden schriftlich übersezt und retrovertirt, die Vocabeln und Regeln auswendig gelernt. Die deutschen Übungsstücke wurden theils mündlich, theils schriftlich übersezt. Aus Ahn's Lesebuch II. Cursus wurden die naturhistorischen Stücke, Fabeln und Erzählungen, aus dem III. Cursus mehrere Stücke schriftlich übersezt, retrovertirt und die bezüglichen Regeln meist in französischer Sprache erklärt. Einige Gedichte wurden auswendig gelernt. Alle 8 Tage ein französisches Pensum. Wirß.

## C. Fertigkeiten.

5 bis 6 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 3 St. Zeichnen von Verzierungen, Blumen, Früchten, Landschaften, und von Gesichtstheilen des menschlichen Kopfes, theils mit der Feder, theils mit vollständiger Schattirung. Linearzeichnen. Die einfachen geometrischen Constructionen von Winkeln und Figuren, die Entwicklung und Auseinanderlegung der Oberflächen von Körpern in die horizontale Ebene. Conrad.

2. Schönschreiben. 1—2 St. Wiederholung der Schriftformen beider Currentschriftarten. Schreiben größerer Sätze aus dem Gedächtnisse oder aus Büchern, mit Benutzung der Schriftformentafel. Grf.

3. Gesang. f. Sexta. Grf.

## Tertia. Ordinarius: Dr. Schauenburg.

## A. Wissenschaften.

14 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St. combinirt mit Quarta.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 3 St. Die Ausmessung der ebenen geradlinigen Figuren. Proportionalität der Linien und harmonische Theilung. Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke. Relationen der Dreiecksseiten und ihrer Quadrate, sowie die bezüglichen geometrischen Sätze. Die Lehre vom Kreise nebst der Berechnung des Umfanges und des Inhaltes desselben. An passenden Stellen wurden geometrische Aufgaben angeknüpft;

b. Algebra. 1 St. Wiederholung, Begründung und Ergänzung der Wurzel-Ausziehung. Wiederholung und Vervollständigung der Proportionslehre. Gleichungen des 1. Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Nach Heis' Aufgaben-Sammlung. Duhr.

3. Praktisches Rechnen. 1 St. Französisches Maaß- und Gewichtssystem. Zusammengesetzte Regel de Tri ohne und mit Anwendung der Proportionslehre. Allgemeine Rechnungen mit Procenten, Gewinn- und Verlust-Rechnungen mit Procenten, Zins-, Rabatt- und Disconto-Rechnung. Handbuch: Schellen. Duhr.

4. Naturlehre. 1 St. Experimentale Erläuterung einiger der fruchtbarsten und faßlichsten Lehren der Physik. Heinen.

5. Naturgeschichte. 2 St. Mineralogie. Die stereometrischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften der Mineralien, durch Krystallmodelle, Mineraliensammlung und Experimente erläutert. Beschreibung und Einübung der wichtigern Mineralien. Handbuch Fürnrohr's Naturgeschichte. Stammer.

6. Geschichte. 2 St. Deutsche Geschichte (nach Kohlrausch) mit besonderer Berücksichtigung der brandenburgisch-preussischen Geschichte. Schauenburg.

7. Geographie. 2 St. Politische Geographie der germanischen Staaten in Europa und Rußlands. Uebungen im Kartenzeichnen.  
Schauenburg.

## B. Sprachen.

1. Deutsch. 3 St. Wiederholung der Lehre vom einfachen und zusammengesetzten Satz; Lehre vom Periodenbau, mit mannichfaltigen Uebungen. Rhetorische Vorübungen (Homonymen, Synonymen; Definitionen etc.) Allgemeines aus der Verslehre. Lesen und Declamiren aus Büß Lesebuch; alle 14 Tage bis 3 Wochen eine schriftliche Arbeit.  
Schauenburg.

2. Französisch. 4 St. Die Grammatik nach Ploetz II. Cursus wurde beendigt und durch mündliches und schriftliches Uebersetzen der betreffenden Uebungsstücke eingeübt. Alle 8 Tage ein Pensum.

Im Winter wurde aus Voltaire's Charles XII. Buch III und IV. (beinahe ganz), im Sommer aus Michaud's histoire de la première croisade chap. I. II. IV. und V. übersetzt und zum Theile retrovertirt. Der Unterricht, besonders der grammatische, wurde vorzugsweise in französischer Sprache erteilt.  
J. B.: Blind, i. S.: Honigsheim.

3. Englisch. 3 St. Aus Wahlert's Lesebuch wurde der größte Theil der grammatischen Vorübungen, mit Hinweisung auf die Regeln der Aussprache, schriftlich übersetzt und retrovertirt; aus dem zweiten Theile wurden mehrere Stücke schriftlich übersetzt, retrovertirt und theilweise memorirt.

Die Regeln aus Lloyd's Grammatik bis zu den zusammengesetzten Formen des Zeitwortes, so wie die unregelmäßigen Zeitwörter wurden auswendig gelernt, die Uebungsstücke theilweise schriftlich übersetzt und corrigirt.  
Wirß.

## C. Fertigkeiten.

5 bis 6 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 3 St. Fortsetzung der Uebungen in Quarta, Zeichnen von geometrischen Figuren mittelst Abscissen und Ordinaten, von Tangenten an gegebene Kreise, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, excentrischen Curven.  
Conrad.

2. Schönschreiben. f. Quarta. Erk.

3. Gesang. f. Sexta. Erk

## Secunda. Ordinarius: Duhr.

### A Wissenschaften.

15 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Wiederholung der Lehre von den h. Sacramenten; sodann Erläuterung

der Begriffe: Religion und Offenbarung; Schrift und Tradition; die Lehre von der Kirche, die Lehre von Gott dem Einen und Dreipersönlichen. Die je dritte Stunde wurde für die Kirchengeschichte verwandt. Das Wichtigste aus den beiden ersten Perioden derselben. Langendorff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Erklärung eines Theiles der Apostelgeschichte. Erster Theil der Kirchengeschichte. Wiederholung des Katechismus, der auswendig gelernten Psalmen und Kirchenlieder. Kraft.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 1 St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Tertia. Heinen.

1 St. Ebene Trigonometrie. Stammer.

b. Algebra 2 St. Ausführliche Theorie der Potenzen und Wurzeln. Die Rechnungen mit Logarithmen und Gebrauch der Tafeln. Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten. Arithmetische und geometrische Progressionen nebst Zinseszins- und Renten-Rechnung. Gebrauch der trigonometrischen Tafeln und Anwendung der trigonometrischen Functionen auf die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Nach Heis' Sammlung und August's Logarithmentafeln. Dühr.

3. Praktisches Rechnen. 1 St. Münz-, Wechsel-, Arbitrage-Rechnung. Wöchentlich eine häusliche Arbeit. Stammer.

4. Naturlehre. a. Physik. Das Allgemeine vom Gleichgewicht und der Bewegung fester und flüssiger Körper. Die Luftpumpe und das Barometer. Ausführliche Behandlung der Wärmelehre. Heinen.

b. Chemie. 3 St. Vorkommen, Gewinnung und Eigenschaften der Metalloide und leichten Metalle und ihrer wichtigern Verbindungen. Den Unterricht begleiteten Experimente, Aufstellung von Schematen und stöchiometrische Aufgaben. Stammer.

5. Geschichte. 2 St. Geschichte des Mittelalters; die deutsche wurde ausführlich, die der andern Staaten mehr übersichtlich vorgetragen. Den Repetitionen der Schüler diente als Grundlage das Handbuch von Pütz. Honigsheim.

6. Geographie. 1 St. Topische und politische Geographie von Asien, Africa und America. Uebungen im Kartenzichnen. Schauenburg.

## B. Sprachen.

11 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 3 St. Lehre von den Dichtungsarten; Uebersicht der Literaturgeschichte bis zum 15. Jahrhundert, mit längerem Verweilen bei den wichtigsten Werken und Mittheilung vieler Sprachproben. Lectüre ausgewählten lyrischer und epischer Gedichte aus Mager's Lesebuch III, dann der Schiller'schen Balladen und culturhistorischen Gedichte. Uebungen im freien Vortrage; monatliche freie Ausarbeitungen s. u. Schauenburg.

2. Französisch. 5 St. Aus der Sammlung von Noël und La Place (herausgeg. von Beckers) wurde ein großer Theil der prosaischen Stücke übersetzt, grammatisch und sachlich französisch erklärt und ihr Inhalt in französischer Sprache frei wiedergegeben. 2 St.

Zwei Stunden wöchentlich wurden auf mündliche Uebersetzung aus Schultheß verwandt, wobei namentlich auf die Repetition der Hauptregeln der französischen Grammatik Rücksicht genommen wurde. Alle 14 Tage wurde ein angemessenes Pensum aus demselben Buche gemacht und vom Lehrer corrigirt. Die 5. Stunde wurde theils auf das Auswendiglernen franz. Gedichte, theils auf Anfertigung von Extemporalien und Repetition der Grammatik verwandt.

J. W.: Honigsheim u. Stammer, i. S.: Uellner.

3. Englisch. 3 St. Aus Columbus von W. Irving wurden in zwei wöchentlichen Stunden XII Cap. gelesen, erklärt und von den Schülern frei wiedergegeben. Die dritte Stunde wurde zu mündlichen Uebersetzungen aus Herrig benutzt und außerdem alle 14 Tage aus eben dem Buche ein Exercitium gemacht und corrigirt. Zur Abwechslung traten bisweilen Extemporalien an deren Stelle.

J. W.: Honigsheim, i. S.: Uellner.

### C. Fertigkeiten.

4 bis 5 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 2 St. Fortsetzung der Uebungen in Tertia, Zeichnen von Cycloiden, Epicycloiden, Hypocycloiden, die ersten Elemente der Verzahnungen der Räder. Außerdem freies Handzeichnen. Conrad.

2. Schönschreiben. 1 St. Schreiben nach des Lehrers Vorschriften, sowie freie Uebungen bei den Geübteren. Erf.

3. Gesang. f. Sexta. Erf.

## Prima. Ordinarius: Der Director.

### A. Wissenschaften.

18 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St. combinirt mit Secunda.

2. Mathematik. 4, später 3 St. Construction algebraischer und trigonometrischer Ausdrücke; Lösung von Aufgaben durch Berechnung und Construction; Sätze über geometrische Verhältnisse. Aus der analytischen Geometrie: Coordinatensystem, Gleichung der Geraden, der Parallelen, Senkrechten und der Geraden, die durch einen oder zwei bestimmte Punkte, den Durchschnitt zweier Geraden oder Kreise gehen. Beweise für mehrere planimetrische Sätze und Verhältnisse. — Gleichung des Kreises. Chordalen. Gleichung und Construction der Ellipse, Parabel, Hyperbel, ihrer Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen; ihre Gleichungen für

zugeordnete Durchmesser. Anwendung auf Physik. — Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die Lehre von den Permutationen, Combinationen und Variationen. Eigenschaften der Binomial-Coefficienten und figurirten Zahlen. Das Binom für alle Fälle nebst Anwendung auf Wurzelausziehung. Functionenlehre: Convergirende und divergirende Reihen. Grenzen; unendlich große und unendlich kleine Größen, Methode der unbestimmten Coefficienten. Exponentialgröße. Logarithmische Reihen. Berechnung von Logarithmen. Die cyclischen und hyperbolischen Functionen. Die ersten Anfänge der Differential-Rechnung.

Heinen.

3. Naturlehre. 6 St. a. Physik. Anfangs 3, später 4 St. Schluß der Wärmelehre. Fallgesetze. Arbeitsgröße. Schwingende Bewegung. Pendelgesetze. Mathematisches und physisches Pendel. Anwendungen des Pendels. Centripetal- und Tangentialkraft. Die Gesetze Keplers. Notationsapparate. Stoß. Reibung. Wellenbewegung. Schwingungsgesetze. Schwingungen von Saiten und Stäben. Klang- und Ergänzungsfiguren. Oscillirende Wellen. Transmissionswellen. Interferenz in elliptischen und parabolischen Gefäßen. Beugung der Wellen. Der Schall. Seine Geschwindigkeit und Stärke. Quantität und Qualität. Intervall und Temperatur. Theorie der Pfeifen. Combinationstöne. Echo und Nachhall. Stimm- und Gehörorgan. Das Licht. Seine Intensität, Geschwindigkeit, Aberration. Reflexion des Lichtes. Brechung überhaupt und durch Linsengläser, insbesondere Farbenzerstreuung. Farbenspectrum. Achromasie. Das Auge. Subjective Farben. Optische Instrumente (Fernrohr, Mikroskop) Daguerreotypie. Interferenz und Polarisation des Lichtes.

Heinen.

b. Chemie. 3 St. Nach kurzer Bervollständigung des Pensums der Secunda: Organische Chemie: Allgemeine Einleitung, Verwandlungen der organischen Substanzen, organische Elementar-Analyse, Constitution der organischen Verbindungen. — Cellulose; Stärkemehl; Gummi; Milchsand. — Pectinsubstanzen. — Proteinsubstanzen; Fäulniß und fäulnißwidrige Mittel. — Leimgebende Substanzen. — Aethyl, Aethylalkohol und geistige Getränke, Gährung: Aether; zusammengesetzte Aether; Aldehyd; Essigsäure und ihre Salze; — Methyl- und Formyl-Verbindungen; — Amyl- und Butylverbindungen; Buttersäure; — Fettsäuren und Fette im Allgemeinen. — Phenyl- und Benzoylverbindungen und verwandte Substanzen; die wichtigsten organischen Säuren; Gerbstoffe; Gerberei. — Producte der trocknen Destillation des Holzes und der Steinkohlen. — Prinzipien der Färberei. — Fortwährende Beziehung auf Physiologie, Technologie und tägliches Leben.

Stammer.

Die praktischen Uebungen im Laboratorium, an welchen das ganze Jahr hindurch acht und zuletzt neun Primaner Theil nehmen, wurden in diesem Jahre nicht nur in gewohnter Weise fortgesetzt, sondern gewannen trotz des beschränkten Raumes und anderer Beschränkungen noch an

Ausdehnung. Sie bestanden in Wiederholung der Reactionen, in Ausführung leichterer qualitativer Analysen und in Darstellung von chemischen Präparaten, wozu die Schüler außer zwei besondern wöchentlichen Stunden auch gewöhnlich noch die Pausen verwendeten. Dargestellt wurden unter Andern: Reine Salzsäure, Salpetersäure, Eisenoxyd, (Polirroth), Schwefeleisen, schwefelsaures Eisenoxyd, schwefelsaures Manganoxydul, Kupferoxydul, chromsaures Natron, Chlorchromsäure, Stärkezucker, Schießbaumwolle und Collodium, Aether, absol. Alkohol aus Gerste, Butter Säure aus Zucker (nach Bensch), Benzoesäure, Schleimsäure, Aesculin, schwefelsaures Chinin. Stammer.

4. Naturgeschichte. 1 St. Wiederholung der Dryktognosie. Darauf Petrographie, Geognosie und eine Uebersicht der Geogenie. Dühr.

5. Geschichte. 2 St. Zuerst kurze Wiederholung der französischen und englischen Geschichte im Mittelalter; hierauf Geschichte der neuern Zeit von der Reformation bis zur französischen Revolution. Sonigsheim.

6. Geographie. 1 St. Vergleichende Wiederholung des gesammten Gebietes der Geographie. Schauenburg.

## B. Sprachen.

11 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 3 St. Uebersicht der Literaturgeschichte seit dem 15. Jahrhundert, mit genauerm Eingehen auf die bedeutendsten Dichter neuerer Zeit und Mittheilung vieler Proben. Gelesen und erklärt wurden im Winter Göthes Hermann und Dorothea, Iphigenia in Tauris; im Sommer Sophokles König Oedipus und Antigone (vom Lehrer vorgelesen nach der Donner'schen Uebersetzung), Göthes Tasso. Monatliche freie Aufsätze f. u. Schauenburg.

2. Französisch. 5 St. Bezüglich der Lectüre wurden 2 Stunden auf Guizot, Histoire générale de la civilisation en Europe verwandt, und sprachlich und historisch erklärt leçons 1—16 incl.; 2 Stunden auf Racine's Iphigénie und Molière's Misanthrope. Die 5. Stunde wurde zum Vortrag der Geschichte der franz. Nationalliteratur des 18. Jahrhunderts oder zu Extemporalien und gramm. Repetitionen benutzt. Alle Monate wurde ein französischer Aufsatz abgeliefert und vom Lehrer corrigirt; die eine Erklärung erfordernden Verbesserungen wurden in der Classe besprochen. Im W.: Blind; i. S.: Uellner.

3. Englisch. 3 St. Es wurden ausgewählte Stücke aus W. Irving's Sketchbook übersetzt und in englischer Sprache wiederholt. In einer Stunde wurde Shakespeare's Julius Caesar gelesen und derselbe in englischer Sprache erklärt. In einer andern wöchentlichen Stunde wurden die schwierigeren Stücke aus der Sammlung von Herrig

mit Bezugnahme auf engl. Grammatik übersetzt und im Sommer die Entwicklungsgeschichte der engl. Nationalliteratur von ihren Anfängen bis auf Shakspeare in englischer Sprache vorgetragen. Alle 4 Wochen wurde außerdem ein Aufsatz gemacht, an dessen Stelle im Anfange des Sommers häufige Extemporalien traten.

J. W.: Honigsheim, i. S.: Uellner.

### C. Fertigkeiten.

3 bis 4 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 2 St. Fortsetzung der Uebungen in Secunda. Projectivisches Zeichnen von Linien und Flächen in der verschiedensten Lage zu den Projectionsebenen; die verschiedenen Schrauben und Räder, sowie andere Maschinentheile mit Angabe der Schatten in Tusche. Architektonisches und freies Handzeichnen.

Conrad.

Grf.

2. Gesang. 1. Sexta.

### Latin.

V. Abtheilung. 4 St.

Die Formenlehre der lateinischen Sprache wurde mit Einschluß der 4 regelmäßigen Conjugationen auswendig gelernt und durch die Uebungstücke mündlich und schriftlich eingeübt.

J. W.: Blind, i. S.: Uellner.

IV. Abtheilung. 4 St.

Der erste Theil von Scheele wurde vollständig absolvirt und noch ein Stück aus der Casuslehre des zweiten Theiles durchgegangen. Die Uebungstücke wurden theils mündlich, theils schriftlich übersetzt, die Grundregeln nach den Zumpt'schen Versen eingeübt.

J. W.: Blind, i. S.: Uellner.

III. Abtheilung. 4 St.

Die Casus- und Moduslehre nach Scheele II, eingeübt durch mündliches und schriftliches Uebersetzen der betreffenden Uebungstücke. Wöchentliche Pensa, bisweilen abwechselnd mit Extemporalien.

Honigsheim.

II. und I. Abtheilung combinirt, 4 St.

1 St. Wiederholung der Syntax nach Siberti; wöchentliche Exercitien nach Spieß. 2 St. Caesar de bell. Gall. I und VII.

Schauenburg.

1 St. Anfangsgründe der Prosodie nach Siberti. Das zweite Buch aus Virgils Aeneide wurde statarisch gelesen und die ersten 300 Verse auswendig gelernt.

Heinen.

Die Zahl der am lateinischen Unterrichte theilnehmenden Schüler betrug: 35 in V, 20 in IV, 20 in III, 6 in II und I, zusammen 81 Schüler.

## Gymnastische Uebungen.

An den Turnübungen nahmen, mit Ausnahme der durch Gesundheitsrückichten abgehaltenen, alle Schüler der Anstalt regelmäßig Theil. Sie fanden in gewohnter Weise auf dem Turnplatz des Gymnasiums statt, unter Leitung des Dr. Stammer und unter Mitbeaufsichtigung des Dr. Uellner und des Herrn Conrad.

### Themata

zu den freien schriftlichen Arbeiten.

#### A. Deutsch.

##### In Prima.

1. Vergleichung des menschlichen Lebens mit dem Jahreslaufe (in der Classe disponirt und in Briefform behandelt.) 2. Inhalt von Göthes Hermann und Dorothea, als Erzählung des Apothekers an seinen Provisor. 3. Ueber den verderblichen Einfluß des Luxus. 4. Iphigenia in Aulis (als Ballade behandelt) 5. Inhalt von Sophokles „König Oedipus.“ 6. Euch, ihr Götter, gehöret der Kaufmann; Güter zu suchen geht er, doch an sein Schiff knüpset das Gute sich an. 7. Darlegung des Kampfes, den Göthes Iphigenia zu kämpfen hat. 8. Rathschläge an einen Freund, der reisen will (Brief.) 9. Inhalt von Sophokles „Antigone.“ 10. Welches Uebel ist größer, Blindheit oder Taubheit? 11. Inhalt der drei ersten Aufzüge von Shakespeare's Cäsar.

##### In Secunda.

1. Die confiscirten Baken, Erzählung aus dem Leben Friedrichs des Großen. 2. Ueber den Werth des Reichthums. 3. Inhalt des Gedichtes „Chidher“ von Rückert. 4. Vergleichung zwischen Schillers „Kraniche des Iphikus“ und Chamisso's „Die Sonne bringt es an den Tag.“ 5. Wie ist die Ansicht der Alten von dem Reide der Götter zu erklären? 6. Der Kampf des Frühlings mit dem Winter. 7. Das Leben am Bahnhofe. 8. Ueber den Nutzen und Schaden der Flüsse. 9. Das Lied von der Glocke, analysirt nach Grundgedanken und Ausführung. 10. Städte und Landmann. 11. Inhalt der Gudrun, nach des Lehrers Vortrage erzählt.

#### B. Im Französischen.

##### In Prima.

1. Vie de Frédéric le grand. 2. Analyse d'Iphigénie, tragédie de Racine. 3. Sur les éléments de la civilisation au commencement du moyen âge, d'après Guizot. 4. Lettre du commerce. 5. La vie et le caractère d'Eriphyle dans Iphigénie, tragédie de Racine. 6. Sur quels arguments Chr. Colombé a-t-il fondé la théorie de l'existence de terres inconnues à l'ouest? 7. Discours d'Arminius à ses frères

armés avant la bataille dans le Teutoburger Wald. 8. Expliquer les raisons par lesquelles la France sous le règne de Louis XIV. a exercé une espèce de dictature en Europe. 9. L'insurrection des Saxons contre Henri IV., empereur d'Allemagne.

### C. Im Englischen.

In Prima.

1. A short view of the third crusade. 2. The great war for the succession between England und France. 3. Theodoric king of the Ostrogoths. 4. A sketch of the History of England down to the reign of William the Conqueror. 5. Knowledge is a treasure and labour the key to it. 6. An account of the state of the moral and political character of the Roman people at the time of Jul. Caesar. 7. The war for the succession in Spain. 8. On the abolition of the slave trade.

## II. Chronik der Schule.

Von den vorgesezten hohen Behörden sind folgende Verordnungen eingegangen:

1. Von der K. Regierung vom 4. April d. J., enthaltend die Genehmigung des K. Ministeriums zu der provisorischen Anstellung des Herrn Dr. Wellner an der hiesigen Anstalt.

2. Von dem K. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten, — 3. Mai d. J. — in welcher die von dem Oberlehrer Dr. Göbel herausgegebene Sammlung französischer Werke zur Anschaffung für die Schüler-Bibliothek empfohlen wird.

3. Von der K. Regierung — 21. Juli — betreffend die anerkennende Beurtheilung der Wissensch. Prüfungs-Commission über das Abiturienten-Examen zu Ostern 1854.

Unter dem 6. August ward uns von dem Bürgermeister Herrn Sammers der Beschluß des Wohlloblichen Gemeinderathes vom 5. dess. M. mitgetheilt „daß die in der Pfannenschoppenstraße unter Nr. 78, 79 belegenen, im Ganzen 2 Morgen, 1 Ruthe 30 Fuß haltenden Grundstücke für ein neues Realschulgebäude angekauft werden sollen.“ Der günstige Ort des gewonnenen Terrains, ziemlich im dereinstigen Mittelpunkte der Stadt, die gesunde, trockene und geräuschlose Lage, welche das Gebäude dort erhält, und die Geräumigkeit des Platzes, auf welchem die Schüler vor dem Unterrichte sich sammeln, in den gesetzlichen Freiviertelstunden in frischer Luft sich ergehen und erholen und zugleich die gymnastischen Uebungen regelmäßig und zu geeigneten Stunden vorgenommen werden können, lassen die getroffene Wahl als eine sehr zweckmäßige erscheinen, und nachdem die Angelegenheit des Neubaus um einen so wichtigen Schritt gefördert worden, dürfen mit uns die Eltern der Zöglinge und die Freunde der Schule das gerechte Vertrauen hegen, daß ehestens sich dort für die

Realschule „das so lange und so sehnlichst gewünschte Gebäude, wie es bereits in dem Gymnasial-Programm vom Jahre 1825 heißt, erheben wird, welches allen den Mängeln, unter denen das gegenwärtige leidet, abhelfen wird.“ Wir leben der frohen Hoffnung, daß wir dieser Mängel, die dort zum Theil schon angeführt sind und sich seitdem nur zu sehr gesteigert und vermehrt haben, hier zum letzten Male gedacht haben, und daß auch unser nächstes Programm in ähnlicher Weise berichten kann, wie das Programm des königlichen Gymnasiums, welches bekanntlich früher in dem bisherigen Realschulgebäude war, vom Jahre 1828: „Nach endlicher Beseitigung aller Hindernisse wurde, Dank sei es den Höhern und Höchsten Behörden! der Neubau begonnen. Je länger das Bedürfniß des neuen Gebäudes empfunden ist, desto größer ist die Freude der Lehrer und Aller derer, welchen das Wohl der Bildungsanstalten am Herzen liegt, und welche ihre Bedeutsamkeit zu würdigen wissen.“

Das neue Schuljahr begann am 8. October, mit der Anmeldung und Prüfung der aufzunehmenden Schüler.

Am 14. d. M. beging die Schule die Vorfeier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs in gewohnter Weise. Die Festrede hielt Herr Dr. Stammer.

Der Lehramts-Candidat Herr Blind wirkte in demselben Geiste, dessen wir im vorigen Programme mit gebührender Anerkennung bereits gedacht haben, noch bis Ostern als Hilfslehrer an der Schule fort. Dann trat als ergänzende Lehrkraft ins Lehrer-Collegium Herr Dr. Victor Uellner, bis dahin Lehrer am Königl. Gymnasium zu Hannover. Der Oberlehrer Herr Duhr sah sich leider seit einem Monate genöthigt, wegen krankhafter Affection der Brust und der Sprachorgane seinen Unterricht auszusetzen, indem ihm auf längerer Zeit ärztlich untersagt ward, sich „den Anstrengungen, welche das stete Geräusch auf der Straße in den an derselben gelegenen Klassen-Zimmern nöthig macht, wenn nicht die Hälfte der Zeit verloren gehen soll“ (s. Worte des Gymnasial-Programms vom J. 1825 in Bezug auf einen an einem gleichen Uebel erkrankten Lehrer) zu unterziehen. Seine Lectionen wurden zum großen Theile von den übrigen Lehrern übernommen.

Der Empfang der ersten h. Communion seitens der jüngern katholischen Schüler hatte am 20. April statt. Ihrer 13 an der Zahl begingen, nachdem sie von Herrn Caplan Langendorff in besondern Stunden den erforderlichen Vorbereitungsunterricht erhalten hatten, an diesem Tage die heilige Handlung in Gemeinschaft mit ihren ältern Mitschülern und den katholischen Lehrern der Anstalt. Bei Anwesenheit Sr. Eminenz des Cardinal-Erzbischofs von Weisfel empfangen am 26. Mai 42 Schüler die h. Firmung.

Am 10. Juni ward unter dem Vorsitze des Geistlichen- und Schulrathes Herrn Sebastiani und im Beisein des Mitgliedes des Curatoriums Herrn Regierungsrath Otto das mündliche Abiturientenexamen des Primaners Tillmann Berger abgehalten, in Folge dessen ihm das

Zeugniß der Reife mit dem Prädicate „Sehr gut“ ertheilt ward. Er war 4 Jahr auf der Schule,  $1\frac{1}{2}$  Jahr in Prima und widmet sich dem Kaufmannsstande. —

Am 26. August fand unter dem Vorsitze des Königl. Regierungs- und Schulrathes Herrn Altgelt und im Beisein des Commissarius des Curatoriums Herrn Trinkaus ein zweites mündliches Abiturienten-Examen statt, zu welchem sich 3 Schüler der Prima gemeldet hatten. Alle erhielten das Zeugniß der Reife, nämlich:

1. Julius Bürckholz, aus Solingen, evangelisch,  $16\frac{1}{4}$  Jahr alt, 7 Jahr auf der Schule, mit dem Prädicate: Gut.

2. Eduard Fournier, aus Ronsdorf, evangelisch,  $17\frac{3}{4}$  Jahr alt,  $7\frac{1}{2}$  Jahr auf der Schule, mit dem Prädicate: Gut.

3. Ludwig Stein, aus Mülhausen a. d. N., 21 Jahr alt, evangelisch,  $4\frac{1}{2}$  Jahr auf der Schule, mit dem Prädicate: Hinreichend.

Bürckholz widmet sich dem Postfache, Fournier dem Maschinenwesen, Stein dem Subalternen-Dienste.

Die Turnübungen, die botanischen Excursionen und das Silentium für die drei untern Klassen fanden wie bisher statt.

Als Ordner haben folgende Schüler eine lobende Erwähnung verdient: In I. Nering-Bögel und Siebel, in II. Jung, Minjon und Schnitzler, in III. Johnen, Engels und Erk, in IV. Roder, Schleger und Müller, in V. Kremer und Auener, in VI. Schmitz, Leimgardt und Siebel.

### III. Statistische Nachrichten.

Die Schülerzahl betrug im verflossenen Schuljahr im Ganzen 203; davon waren 14 in Prima, 23 in Secunda, 35 in Tertia, 42 in Quarta, 42 in Quinta, 47 in Sexta; ferner 113 evangelischer Confession, 85 katholischer und 5 israelitischen Glaubens, endlich 115 über 14 Jahr alt, und 25 auswärtige. Die Zahl der aufgenommenen Schüler betrug im Wintersemester 55, im Sommersemester 16.

### IV. Lehrmittel.

Es sind hinzugekommen:

1. Für Physik und Mathematik.

A. Durch Schenkung:

Ein schönes Durchschnitts-Modell einer Locomotive, und ein kleines arbeitendes Modell einer Dampfmaschine, — angeschafft aus einem Geschenk des Gemeinde-Verordneten und Mitgliedes des Curatoriums Herrn

Trinkaus, von 50 Thalern, welche derselbe dem Berichtersteller bei seiner Reise zur Industrie-Ausstellung in Paris zur Verfügung stellte. — Ein Kaleidoscop, Geschenk von den Schülern der Prima. — Ein conischer Spiegel und ein Kaleidophon von Wheatstone, angekauft aus dem im vorigen Programme erwähnten Geschenke der Schüler der Tertia. Die diesjährigen Schüler dieser Klasse übergaben demselben 6 Thlr. 27 $\frac{1}{2}$  Sgr., ferner die ausgeschiedenen Primaner Braun 2 Thlr., Brüningshaus 1 Thlr. 10 Sgr., Huppertsberg 1 Thlr. und der Abiturient Berger 3 Thlr., über deren Verwendung das nächste Programm berichten wird. Der Primaner Fuhrmann schenkte für das physikalische Kabinet und die Bibliothek 8 Thlr., für welche „Schellbachs und Engels darstellende Optik“ angekauft ward.

### B. Durch Ankauf.

Aus den etatsmäßigen Mitteln mehrerer Jahre erhielt das Kabinet einen beträchtlichen Zuwachs an mehreren zum Theil schon früher bestellten Apparaten, nämlich: einen vollständigen Mellonischen Thermo-Apparat, geliefert von Illner und Hoffmann in Breslau, ferner eine Inductionsmaschine von Steinkorff in Paris, ein Prisma aus Faraday'schem Flintglas, Nicol'sches Prisma, eine große Convex- und Concav-Linse von derselben Brennweite von Dubosq in Paris; einen Apparat für die Plateau'schen Centrifugalerscheinungen, einen Kupferwürfel für diamagnetische Versuche, ein Reeff'sches Blihrad, eine Inductionswelle mit Magnetstab, einen Hohlspiegel von Neusilber, der zugleich als convexer Spiegel gebraucht werden kann, einen größeren Rotations-Apparat, der als Bohnenberg'scher und Fesselscher sich anwenden läßt, sechs Platin-Zink-Elemente, geliefert von Fessel in Köln; Fresnel's cylindrische Linse, zwei consonirende Stimmgabeln auf Resonanzkästen, zwei kleine Savart'sche Apparate für Transversal-Schwingungen, Presse für das Schmelzen von Blattgold durch Electricität, ein electricisches Ei, präparirte Kohlen für das electriche Licht, Neolipil mit verticaler Ausströmung, ein Baroskop, Gay-Lussac's Volumeter, Modell einer archimedischen Schraube, Percussions-Apparat mit Elfenbeinkugeln, Reflexionsapparat für feste Körper, Apparat für Endomose, Mariottesche Flasche, Contra-Baß-Bogen für Akustik, Metallplatte und Metallsaiten, Pfeifen von verschiedenem Durchmesser, und eine elliptische Metallglocke zu demselben Zwecke, ein schönes arbeitendes Modell einer Brahma'schen Presse, zum Theil aus Glas construirt, einen Gas-Imprägnirungs-Apparat, drei stereoskopische Ansichten von Paris, ein Drittel eines Meters mit Schieber, einen Pantographen, geliefert von D. Hempel in Paris; — einen Würfel aus Uranglas und einen aus Flußspath, eine Platte aus Uranglas, ein Blatt mit zwei Fluorescenz Spectris, eine Wellenscheibe, Nörrenberg's Apparat für die subjectiven Farben, einen Regenbogen-Apparat, eine dichratische Loupe u. a., von B. Albert in Frankfurt bezogen.

## 2. Für Chemie.

Durch Ankauf:

Mehre Ofen aus Thon zum Glühen von Retorten, Röhren und Tiegeln, eine Anzahl Glasröhren, drei Aräometerspindeln und einige kleinere Gegenstände.

## 3. Naturgeschichte.

A. Durch Schenkung.

Ein Sägetaucher.

B. Durch Ankauf.

Ein Mikroskop von Oberhäuser.

## 4. Zur Schulbibliothek.

A. Durch Schenkung.

Von einem hohen Königl. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten: von Schwarzenau, der Connetable Karl von Bourbon; Berlin 1852.

B. Durch Ankauf.

Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, 2 Thle.; Braunschweig 1845 und flg. — Redtenbach, Principien der Mechanik. — Dühamel, analytische Mechanik, übersetzt von Eggers. — Gruner und Wildermuth, französische Chrestomathie für Realschulen, erster und zweiter Curus; Stuttgart 1851 und 1852. — Gedichte der Troubadours, übersetzt von Kannegieser; Tübingen 1852. — Payne Collier, Ergänzungsband zu Shakespeare; Berlin 1853. — Hillebrand, die deutsche Nationalliteratur, 3 Bde. 2. Ausg., Hamburg und Gotha 1850.

Als Fortsetzungen: Liebig, Poggendorf und Wöhler, Handwörterbuch der Chemie, Bd. 6, L. 3—6. — Schloffer, Weltgeschichte, Lief. 30, 33 und 34. — Krönig, Fortschritte der Physik im Jahre 1852, VIII. Band; Berlin 1855. — Ritter, Erdkunde, Bd. 17, Abthlg. 2, 3tes Buch (Westasien), Berlin 1855.

Aus dem Leseverein der Schule: Magazin für die Literatur des Auslandes 1855. — Herrig, Archiv für die neuern Sprachen, 1855. — Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie 1855. — Gumprecht Zeitschrift für allgemeine Erdkunde, Bd. 5 und 6, 1855 und 1856. — Allgemeine Schulzeitung 1855 (und 1856). — Grunerts Archiv der Mathematik und Physik 1855 und 1856.

## 5. Zur Schülerbibliothek.

A. Durch Schenkung.

Von der Verlagshandlung von Ferdinand Hirt in Breslau: Aus dem Buche des Lebens und der Natur, I. Theil. Vom Primaner Huppertsberg: Segür, Geschichte Napoleons und der großen Armee, übers. von Kottenkamp; ferner: Nagel, Allgemeine Naturlehre für Gymnasien 2c. Ulm 1844.

## B. Durch Ankauf.

Michaud, histoire de la première croisade, herausgeg. von Göbel; Münster 1855. — Als Fortsetzung: Kiesel, Weltgeschichte, Bd. II.; Freiburg 1855.

## 6. Münzsammlung.

Dieselbe ist abermals um einige interessante Münzen und andre ethnographische Merkwürdigkeiten vermehrt worden, welche geschenkt wurden vom Herrn Dampfschiff-Conducteur Overlack, Herrn Musiklehrer Kochner und andern Freunden der Anstalt.

Für alle oben gedachten Geschenke sprechen wir hiemit Namens der Schule wiederholt unsren aufrichtigsten Dank aus.

## V. Unterricht für Handwerker.

Der unentgeltliche Unterricht für Gesellen und Lehrlinge aus dem Handwerkerstande fand in folgender Weise statt:

1. Sonntags, von 9—12 Uhr, Zeichnen in drei getrennten Classen. Lehrer: die Herren Maler Conrad, Bauunternehmer Fischer, Maler Holthausen und Maler Kofß.

Schülerzahl bei Herrn Conrad 68, bei Herrn Fischer 50, bei Herrn Holthausen 50, bei Herrn Kofß 95.

2. An Wochentagen und zwar:

a. im Winter in 3 getrennten Classen, jede mit 4 Stunden wöchentlich, Abends von 6—8 Uhr.

In der I. Classe — mit 19 Schülern — wurden Geschäftsaufsätze, Lectüre unter Erörterung des Gelesenen nach Form und Inhalt und bezügliche schriftliche Uebungen von Herrn Dré vorgenommen, ferner Anfangsgründe der Geometrie und Buchstabenrechnung von Herrn Adolf; in der II. Classe — mit 39 Schülern — Rechnen, kleinere Geschäftsaufsätze, Lesen und Rechtschreiben von Herrn Dré; in der III. Classe — 56 Schüler — Rechnen, Schreibübungen und Lesen von Herrn Adolf.

b. im Sommer, Montags von 6—8 Uhr in zwei getrennten Classen. In der obern — 28 Schüler — gab Herr Dré den Unterricht, in der untern — 35 Schüler — Herr Adolf. Er bestand in einer Fortsetzung des oben gedachten.

## Uebersicht der öffentlichen Prüfung

im Zeichensaale der Realschule.

Mittwoch den 3. September:

Vormittags von 8—12 Uhr.

V. Abtheilung im Lateinischen. Uellner.

Sexta	{ Rechnen. Stammer. Geographie. Erk.	Quinta	{ Französisch. Wirz. Deutsch. Erk. Geographie. Schauenburg.
-------	---	--------	---

Nachmittags von 3—6 Uhr.

Quarta	{ Geschichte. Honigsheim. Französisch. Wirz.	Tertia	{ Mineralogie. Stammer. Geschichte. Schauenburg. Französisch. Honigsheim.
--------	---	--------	---

Donnerstag den 4. September:

Vormittags von 8—12 Uhr.

III. Abtheilung im Lateinischen. Honigsheim.

Secunda	{ Deutsch. Schauenburg. Französisch. Uellner.	Prima	{ Mathematik. Heinen. Englisch Uellner. Chemie. Stammer.
---------	--	-------	--

Die Probefchriften und Zeichnungen der Realschüler liegen an beiden Tagen zur Einsicht offen.

Nachmittags um 3 Uhr.

Redeübung.

Gesang: Heilig ist der Herr! Componirt von Sigm. von Neukomm.

Ravensburg, VI. Die Versuchung, von Reinick.

Jung, V. Der treue Gefährte, von Grün.

Brewer, IV. Le lion de Florence, par Millevoeye.

Engels, III. Die Söhne der Bornehmen, von Simrock.

G. Cohnitz, II. Die Leiche von Sanct Just, von Grün.

A. Stein, I. Rede: On the development of the English language.  
(Eigene Arbeit.)

Gesang: Die Sonne sank. Nach einer Volksweise vier- und fünfstimmig, von L. Erk.

Reef, VI. Prinz Eugenius zu Reutlingen.

Peeters, V. Hunyad, von Vogl.

Bender, IV. Die Sonne bringt es an den Tag, von Chamisso.

Johann, III. Rhein und Loreley, von G. Kulmann.

Jung, II. Les châteaux en Espagne, par Collin d'Harleville.

Gesang: Im Frühling. Melodie von Mozart, vierstimmig von L. Grf.

Finmann, VI. Das Büblein auf dem Eis, von Güll.

Huppertsberg, IV. Hans Euler, von Seidl.

Bogts, II. The speech of Antony, from Jul. Caesar, by Shakspeare.

Kirdorf, V. Der Postillon, von Lenau.

Fournier, Abiturient. Rede. Molière et son temps. (Eigne Arbeit).

Gesang: Abschied von der Heimath. Nach einer Volksweise von L. Grf.

Siebel, VI. Christophorus, von Smets.

Kleinhaus, III. Les hirondelles, par Béranger.

Abschiedsrede des Abiturienten Burchholz über Göthes Spruch:

Liegt dir Gestern klar und offen,

Wirfst du heute kräftig, frei,

Kannst auch auf ein Morgen hoffen,

Das nicht minder glücklich sei.

Entlassung der Abiturienten.

Gesang: Glaube, Hoffnung, Liebe. Melodie von Carl Maria von Weber, vierstimmig von L. Grf.

Nach dem Schlußgesange versammeln sich die Schüler in den einzelnen Classen, um ihre Zeugnisse zu empfangen und über ihre Befähigungsfähigkeit in höhere Classen das Nähere zu vernehmen.

Donnerstag den 9. October, Morgens zwischen 8 und 10 Uhr, im Gebäude der Realschule Anmeldung, und von 10 Uhr an Prüfung der neu aufzunehmenden Schüler, welche, mit Zeugnissen versehen, sich wo möglich in Begleitung von ihren Eltern oder deren Stellvertretern einzufinden haben.

Freitag den 10 October, von Morgens 8 Uhr an, Befähigungsprüfung.

Samstag den 11. October, Morgens 8 Uhr, Anfang des Unterrichts.

Der Director

Dr. Heinen.



ig

e.

(t).

ss=

ch:

rl

in=

er=

hr,

ng

ich

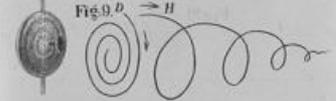
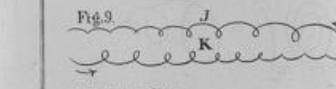
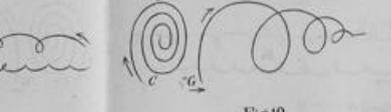
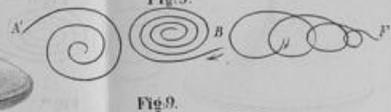
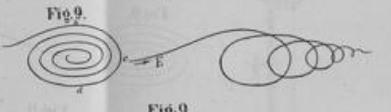
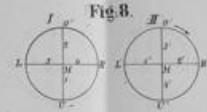
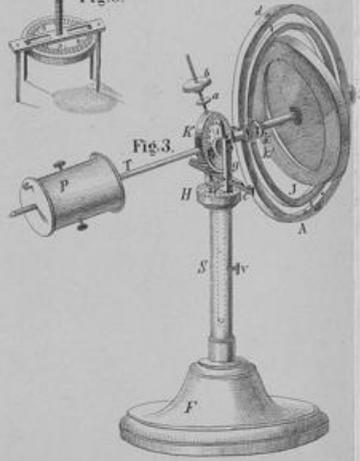
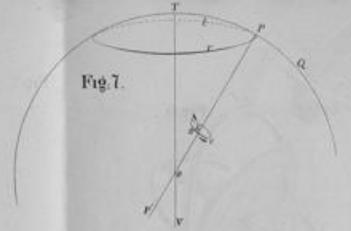
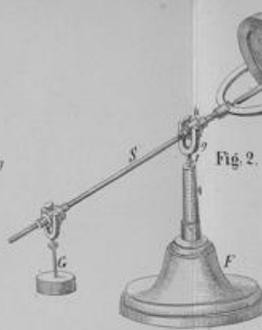
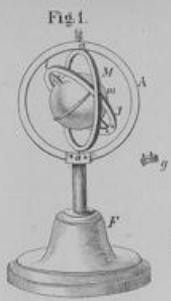
rn

ss=

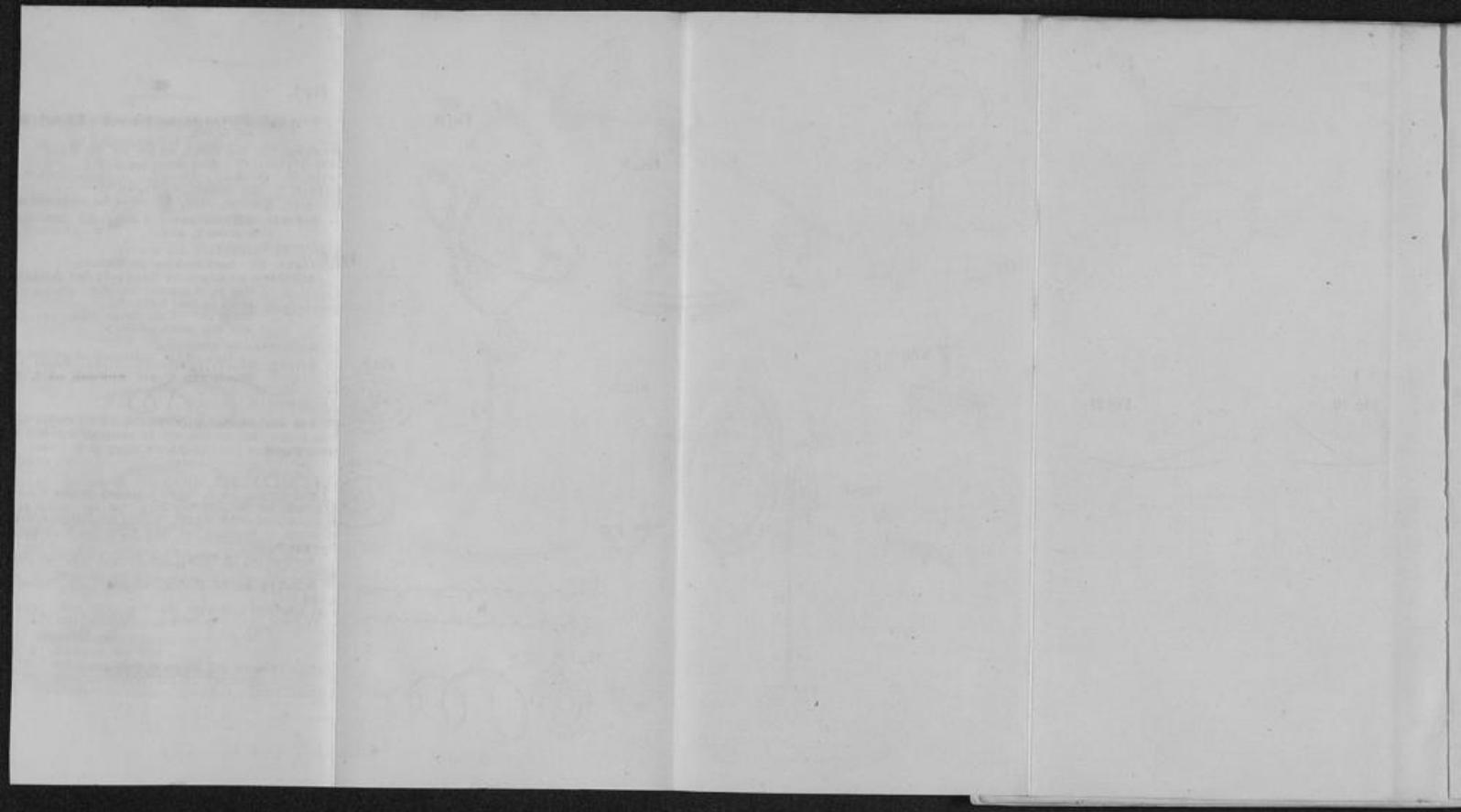
n=



f



Let. Aug. 18. 1800. in D. 1800.



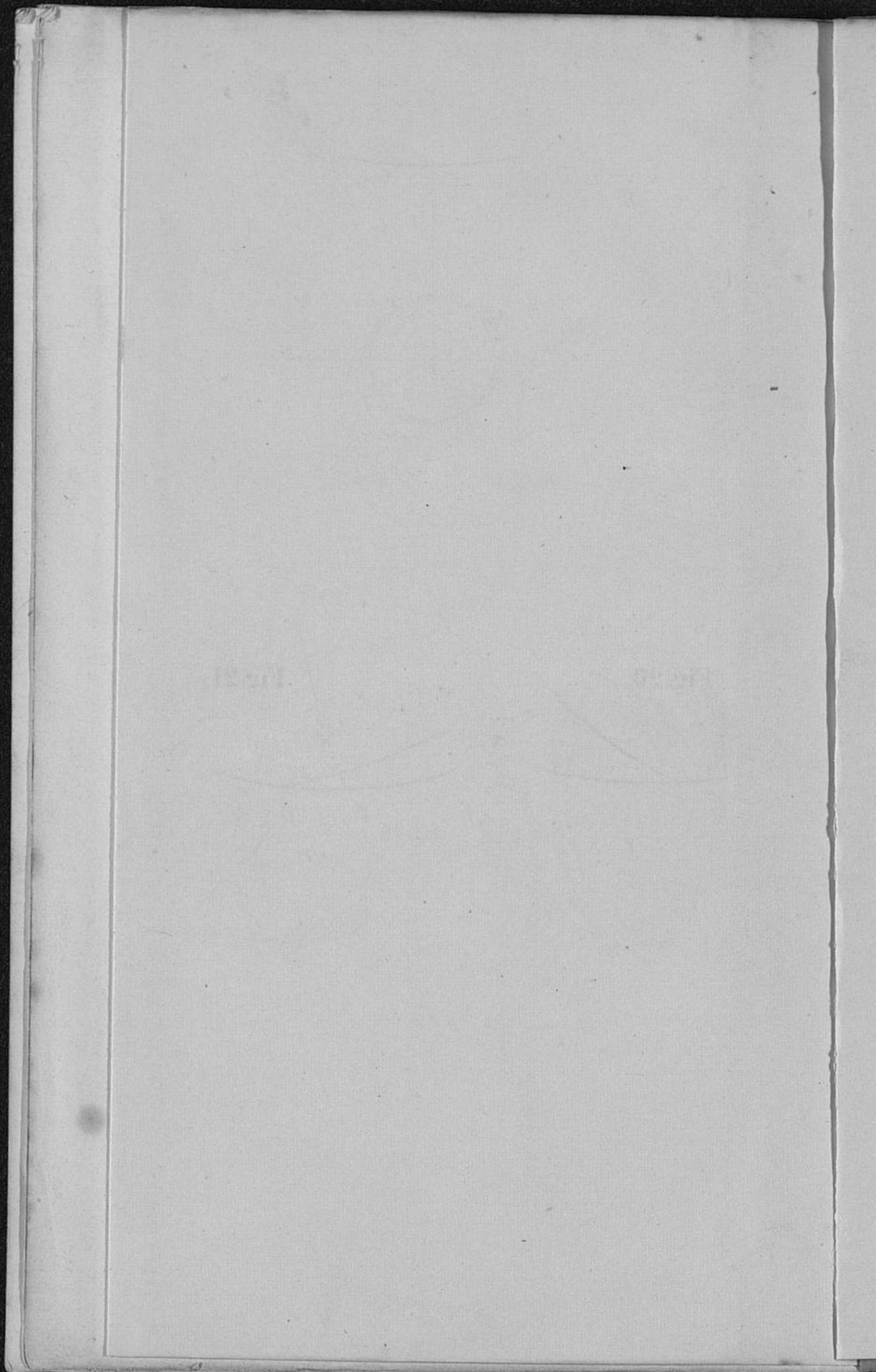
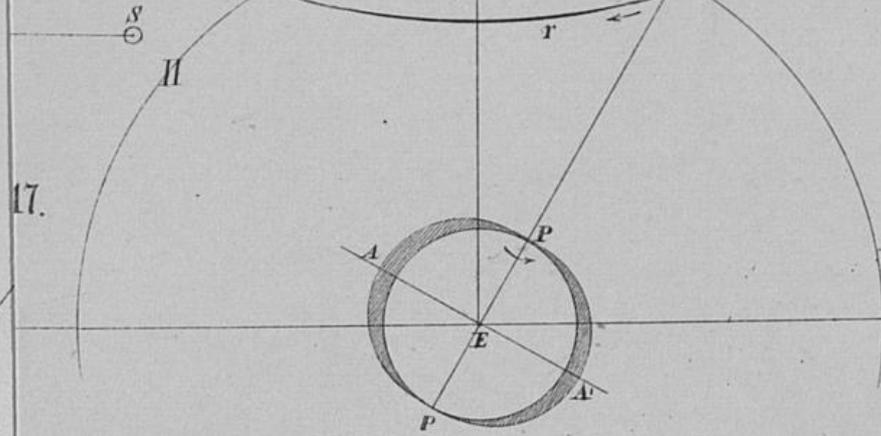


Fig. 16.



17.

Fig. 20.

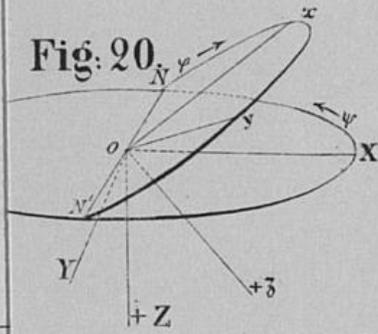


Fig. 21.

