III. Mathematische Entwickelungen.

§. 9.

Wir nehmen den Drehpunkt O (Fig. 20.) als den Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen OX, OY, OZ, von denen die positive OZ sich vertical in der Richtung der Schwere erstreckt; ferner sei O der Anfangspunkt eines zweiten, mit dem Rotationskörper fest verbundenen, mit ihm also zugleich sich rund drehenden, rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen eine Axe Oz mit der Drehaxe des Rotationskörpers stets zusammenfällt, während die Ebene der beiden andern Axen Ox, Oy die Horizontalebene der festen Axen OX, OY in einem bestimmten Augenblick in einer Geraden NON' schneiden mag. Die Lage der beweglichen Axen gegen die festen ist alsdann bekanntlich durch die Winkel $ZOz = \vartheta$, $XON = \psi$ und $NOx = \varphi$ vollkommen bestimmt, wenn vorher die Art, wie diese Winkel gerechnet werden sollen, festgesetzt ist. Wir nehmen an, der Winkel ϑ werde von der positiven Axe OZ zu der positiven Oz gerechnet und bleibe in den Grenzen 0 und 180°, der Winkel $XON = \psi$ werde stets von der positiven OX aus zu der negativen OY rund herum, wie der Pfeil vor ψ angibt, gerechnet, so dass sein zweiter Schenkel für $\psi = 90$ mit $- OY$, für $\psi = 180°$ mit $- OX$, für $\psi = 270°$ mit $+ OY$ u. s. w. zusammenfällt, endlich werde der Winkel φ (wenn φ positiv ist) von der jedesmaligen Lage von ON auf der Ebene der Ox, Oy, der Aequatorialebene, in aufwärtsgehender Richtung (über der Horizontalebene), wie ebenfalls durch den Pfeil neben φ bezeichnet ist, rund herum bis 360° gerechnet.*) Ist demnach ϑ ein spitzer Winkel wie in Fig. 20. und dreht sich eine Linie um O in der Horizontalebene in der Richtung des Pfeils oder der positiven ψ, so wird ihre Projection auf die Aequatorialebene in entgegengesetzter Richtung mit der vorausgesetzten Rotation derselben oder derjenigen, nach welcher $+ \varphi$ gerechnet wird, fortschreiten; ist dagegen ϑ stumpf, so wird unter denselben Umständen (s. Fig. 21.) die

*) Wir haben die obige, von der frühern abweichende Richtung der Drehung gewählt, um bekannte, im Folgenden erforderliche Formeln hier nicht zu entwickeln, und uns auf Poisson's Lehrbuch der Mechanik beziehen zu können.

Drehung der Projection in übereinstimmendem Sinne statthaben. Die Cosinus der Winkel der festen Axen mit den beweglichen, nämlich

$$\begin{aligned}
\cos XOx &= a, \ \cos XOy = b, \ \cos XOz = c \\
\cos YOx &= a', \ \cos YOy = b', \ \cos YOz = c' \\
\cos ZOx &= a'', \ \cos ZOy = b'', \ \cos ZOz = c''
\end{aligned}$$

können durch trigonometrische Functionen von ϑ, ψ, φ ausgedrückt werden, welche auf analytischem Wege*) oder mittelst sphärischer Trigonometrie**) leicht erhalten werden. Von den 9 Gleichungen sind diejenigen, welche für a'', b'', c'' unter den obigen Voraussetzungen stattfinden:

$$\begin{aligned}
a'' &= -\sin\vartheta.\ \sin\varphi, \\
b'' &= -\sin\vartheta.\ \cos\varphi, \qquad (1) \\
c'' &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Bezeichnen ferner p, q, r die Zerlegungen der Drehungsgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe, so ist

$$\begin{aligned}
p &= \sin\vartheta.\ \sin\varphi.\ \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi.\ \frac{d\vartheta}{dt} \\
q &= \sin\vartheta.\ \sin\varphi.\ \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi.\ \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (2.) \\
r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\vartheta.\ \frac{d\psi}{dt}
\end{aligned}$$

Die allgemeinen (Euler'schen) Gleichungen der Drehungsbewegung sind nun

$$\begin{aligned}
C\,\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + R \\
B\,\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + Q \\
A\,\frac{dp}{dt} &= (A-C)\,qr + P
\end{aligned}$$

in welchen C, B, A die Haupt-Trägheitsmomente des bewegten Körpers gegen die Axen der Oz, Oy, Ox und R, Q, P die

---

*) Lagrange mec. anal. t. II. sect. 9, §. 7. — Duhamel mec. anal. Deutsch von Eggers. 1 Thl. S. 17. — Eine besonders elegante Entwickelung gibt Hansen Theorie der Pendelbewegung. Danzig 1853. S. 20.

**) Poisson mec. II. ed. §. 377. Minding, Theoretische Mechanik. §. 33.

Projectionen der äussern, auf den Körper einwirkenden, beschleunigenden Kräfte auf die Ebenen xOy, xOz, yOz bezeichnen, oder nach Poinsot (Theorie der Drehungen) die Glieder auf der linken Seite die allgemeinen Ausdrücke eines beschleunigenden Kräftepaares, geschätzt nach den beweglichen Axen Oz, Oy, Ox sind, welches erforderlich wäre, um die Axen und Grössen der den Körper in dem Augenblicke angreifenden Kräftepaare der Fortdauer der Bewegung gemäss zu ändern, und die auf der rechten Seite eben diese aus der Schwungkraft und den äussern Kräften entstehenden, beschleunigenden Kräftepaare, geschätzt nach denselben Axen, ausdrücken. In unserm Falle ist die Schwere die einzige beschleunigende Kraft, ihr Maass sei mit g bezeichnet. Man kann nun entweder den in der Wirklichkeit nur annäherungsweise darstellbaren, speziellen Fall in Betracht ziehen, wo bloss das Gewicht des Rotationskörpers mg diese beschleunigende Kraft bildet, oder den allgemeinern, wo ein Gewicht Mg überhaupt, in irgend einem Punkte der Rotationsaxe Oz als solche wirkt. Wir fassen zunächst den letztern ins Auge und haben, wenn $+\gamma$ die Entfernung des gedachten Punktes (des Schwerpunktes des beweglichen Theiles des Apparates) von O bezeichnet, wie leicht ersichtlich ist, $Mg\gamma \sin \vartheta$ für den allgemeinen Ausdruck des Momentes dieser Kraft. Da seine Ebene senkrecht auf der Ebene xOy ist, so ist seine Projection auf letztere $R = 0$, und da der Bau der Maschine voraussetzt, dass $A = B$ ist, so wird die erste der Euler'schen Gleichungen

$$C \frac{dr}{dt} = 0$$

oder $r =$ constans.

Dieses Resultat, einzig aus den Gleichungen $R = 0$ und $A = B$ hergeleitet, zeigt, dass, welches auch die Werthe von ϑ, φ, ψ in irgend einem Augenblicke sein mögen, die Zerlegung r der Drehgeschwindigkeit um die augenblickliche Drehaxe nach der Rotationsaxe Oz während der ganzen Dauer der Drehung unveränderlich bleibt.

Indem wir nun zunächst die Erscheinungen in Betracht ziehen, bei welchen der Winkel ϑ sich als constant zeigt, werden die obigen Gleichungen (2):

$$p = \sin\vartheta.\ \sin\varphi.\frac{d\psi}{d\,t}$$

$$q = \sin\vartheta.\ \cos\varphi.\frac{d\psi}{d\,t}$$

$$r = \frac{d\varphi}{d\,t} - \cos\vartheta.\ \frac{d\psi}{d\,t}.$$

Die ersteren lassen sich den Gleichungen (1) gemäss auch so schreiben:

$$-p = \frac{d\psi}{d\,t}.\ a''$$

$$-q = \frac{d\psi}{d\,t}.\ b''$$

und zeigen, dass $-p$, $-q$ in diesem Falle die Zerlegungen einer Drehung $\frac{d\psi}{d\,t}$ um die Vertical-Axe OZ, nach den Axen Ox und Oy ist, deren Zerlegung nach der Axe Oz durch $\frac{d\psi}{d\,t}.\ \cos\vartheta = \frac{d\psi}{d\,t}.\ c''$ dargestellt ist. Bezeichnen wir durch $\overline{\varphi}$ den Werth der Rotationsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{d\,t}$ in diesem Augenblicke und nehmen ihn als denjenigen, in welchem die Axe Ox mit OX zusammen fällt, so wird, wenn wir von ihm die Zeit t anrechnen, unter der Voraussetzung, dass im Zustande der Bewegung sich nichts ändert, nach Verlauf dieser Zeit $\varphi = \overline{\varphi}.t$, und wenn $\overline{\psi}$ den ϑ und $\overline{\varphi}$ zugehörigen Werth der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{d\,t}$ um die Vertical-Axe bezeichnet, $\psi = \overline{\psi}\,.\,t$ sein. Für die Projection Q des Momentes $Mg\,\gamma\,\sin\vartheta$ auf die Coordinaten-Ebene $x\,Oz$ hat man, da der Neigungswinkel desselben (der Ebene $z\,OZ$) gegen letztere gleich dem Winkel NOy der auf diesen Ebenen Senkrechten NO und Oy oder gleich $90 + \overline{\varphi}.\ t$ ist, $Q = Mg\gamma\sin\vartheta\cos(90 + \overline{\varphi}.\ t) = -Mg\gamma\ \sin\vartheta\sin\overline{\varphi}\,t.$ Ebenso findet man für P, die Projection desselben Momentes auf die Ebene $y\,Oz$, da Ox senkrecht auf $y\,Oz$ mithin NOx oder $\overline{\varphi}\,.\ t$ der Neigungswinkel dieser Ebenen ist,

$$P = Mg\,\gamma \sin \vartheta . \cos \overline{\varphi}\, t.$$

Setzt man nun diese Werthe von Q und P, ferner den Werth $R = 0$ und zugleich die Werthe, welche sich aus den Gleichungen

$$p = \overline{\psi}. \sin \vartheta . \sin \overline{\varphi}\, t$$

$$q = \overline{\psi}. \sin \vartheta . \cos \overline{\varphi}\, t$$

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} \cos \vartheta$$

für $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ ergeben, nämlich

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\overline{\varphi} . \overline{\psi} . \sin \vartheta \sin \overline{\varphi} . t$$

$$\frac{dp}{dt} = \overline{\varphi} . \overline{\psi} \sin \vartheta . \cos \overline{\varphi}\, t$$

in die Euler'schen Gleichungen, so erhält man unter Beachtung, dass $B = A$ ist, für die erste, wie vorauszusehen war

$$0 = 0$$

und die beiden andern geben, indem man A statt B setzt, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $\sin \vartheta$ herausschreibt, nach einer leichten Reduction übereinstimmend:

$$\sin \vartheta \left[Mg\,\gamma + (C-A) \cos \overline{\psi}^2 - C . \overline{\varphi} . \overline{\psi} \right] = 0.$$

Genügen ϑ, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ dieser Gleichung, so werden es zusammengehörige Werthe von der gesuchten Beschaffenheit sein, für welche also der Zustand der Bewegung, abgesehen von dem Widerstande der Luft und der Reibung unveränderlich bleibt. Zu dem Ende muss entweder

$$\sin \vartheta = 0 \qquad \text{I.}$$

oder

$$(C-A) \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - C\, \overline{\varphi} . \overline{\psi} = - Mg\gamma \qquad \text{II.}$$

sein.

§. 10.

In den Gleichungen I. und II. ist die Lösung der Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt, die Abhängigkeit zwischen den beiden Drehungen um die Rotations- und die Vertical-Axe aufzufinden, wenn ihr Winkel sich als ein unveränderlicher zeigt, enthalten. Bevor wir sie indessen näher erörtern, wollen wir die Aufgabe noch auf eine andere, directe Art angreifen.

Es sei wieder Fig. 22. der Drehpunkt O der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, im Raume fester Coordinaten-Axen OX, OY, OZ, von denen OZ sich in der Richtung der Schwere erstrecket, und zugleich der Anfangspunkt dreier rechtwinkliger, mit dem rotirenden Körper fest verbundener Axen Ox, Oy, Oz, von welchen Oz mit der Rotationsaxe desselben zusammen falle. In dem Augenblicke, von welchem wir die Zeit t zählen, falle die Axe Ox mit OX zusammen oder nach Ox_1, die beiden andern beweglichen Axen Oy_1, Oz, welche sich alsdann in der Ebene YOZ befinden, mögen Oy_1, Oz_1 und der Winkel der letzteren mit der Vertical-Axe $z_1 O Z = \vartheta$ sein. Hat nun der Körper in diesem Augenblicke eine Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ um seine Rotationsaxe und zugleich eine andere, noch zu bestimmende Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ um die Vertical-Axe der Art, dass bei Unveränderlichkeit beider der Winkel ϑ constant bleibt, so ist die Lage, in welche in Folge beider das System der beweglichen Axen nach der Zeit t gelangt, bekanntlich dieselbe, als wenn diese Drehungen nacheinander jede eine Zeit t hindurch stattgefunden hätten. Nehmen wir an, die letztere um die Vertical-Axe geschehe zuerst und zwar wieder in der Richtung der positiven OX zu den negativen OY, so dass die beweglichen Axen nun Oz_2, Ox_2, Oy_2 sind und Ox_2 (ON) mit OX den Winkel $x_2 OX = \psi$ bildet, so ist, weil die Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ dieselbe bleibt, $\psi = \overline{\psi}.\ t$. Dreht sich alsdann das System um Oz_2 (Oz) mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ eine Zeit t hindurch aufwärts bis die Axen Ox_2, Oy_2 die Lage Ox, Oy annehmen, und der Winkel $x_2\ Ox = \varphi$ ist, so hat man $\varphi = \overline{\varphi}.\ t$. Denkt man sich nun von O aus eine Kugel beschrieben, welche von OZ, Oz_2, Oy, Oy_2, Ox, Ox_2, in den Punkten Z, z_2, y, y_2, x, x_2, geschnitten werden mag, so ist z_2 der Pol des Bogens $yy_2\ xx_2$, daher sind die sphärischen Dreiecke $Zy_2\,y$ und $Zy_2\,x$ beide bei y_2 rechtwinklig, mithin

$$\cos Zx = \cos xy_2 \,.\, \cos Zy_2, \quad \cos Zy = \cos yy_2 \,.\, \cos Zy_2$$

Oder, da $\cos Zy_2 = \cos (90 + \vartheta) = -\sin \vartheta$

und $\cos y_2 x = \cos (90 - \overline{\varphi} \,.\, t) = \sin \overline{\varphi}\, t$, ferner

$\cos yy_2 = \cos xx_2 = \cos \overline{\varphi} \,.\, t$ ist,

$$\cos Zx = -\sin \vartheta \,.\, \sin \overline{\varphi}\, t, \quad \cos Zy = -\sin \vartheta \,.\, \cos \overline{\varphi}\, t$$

Bezeichnen nun p, q, r wieder die Zerlegungen der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit nach den Axen Ox, Oy, Oz, so bestehen dieselben aus den Zerlegungen der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\varphi}$ um die Rotationsaxe Oz weniger denen der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$ um die Vertical-Axe, indem die letztere bei unserer Voraussetzung von der Linken zur Rechten, die erstere von der Rechten zur Linken geschieht. Die Zerlegungen von $\overline{\varphi}$ nach den Axen Ox, Oy sind, da Oz senkrecht auf denselben steht, beide Null. Demnach ist

$$p = 0 - \left(- \overline{\psi} \,.\, \sin \vartheta \,.\, \sin \overline{\varphi}\, t\right) = \overline{\psi} \sin \vartheta \,.\, \sin \overline{\varphi}\, t$$

$$q = 0 - \left(- \overline{\psi} \sin \vartheta \,.\, \cos \overline{\varphi}\, t\right) = \overline{\psi} \sin \vartheta \,.\, \sin \overline{\varphi}\, t$$

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} \cos \vartheta.$$

Die Werthe von R, Q, P ergeben sich wie oben, und man gelangt demnach auch mittelst ihrer und der eben für p, q, r gefundenen, welche dieselben sind, als die §. 9 aufgestellten, für die Bestimmung der Werthe von $\overline{\psi}$, bei welchen die Fortdauer der Unveränderlichkeit von ϑ und $\overline{\varphi}$ möglich ist, zu denselben beiden Bedingungsgleichungen I. und II.

§. 11.

Untersuchen wir nun diese Gleichungen näher. Die erste $\sin \vartheta = 0$ wird erfüllt, wenn $\vartheta = 0$ oder 180^0, also die Rotations-Axe senkrecht ist. In diesem Falle sind die Winkelgeschwindigkeiten $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ und ebenso das Gewicht Mg beliebig.

Um die zweite richtig zu deuten, ist zunächst zu beachten, dass von den Gleichungen, aus denen sie hergeleitet ist, nur die Gleichung

$$r = \overline{\varphi} - \overline{\psi} \,.\, \cos \vartheta$$

den cosinus des Winkels ϑ enthält. Nimmt man also die Drehung $\overline{\varphi}$ stets als positiv oder in der Richtung von der Rechten zur Linken um $+ Oz$ an, so zeigt für einen spitzen Winkel ϑ in der obigen Gleichung ein positiver Werth von $\overline{\psi} . \cos \vartheta$ eine Bewegung der Durchschnittslinie der Aequatorialebene mit der Horizontalebene auf dieser letztern von der Linken zur Rechten um $+ OZ$ (Fig. 20), ein negativer aber eine Drehung von der Rechten zur Linken, oder eine mit $\overline{\varphi}$ gleichgerichtete an, dagegen bedingt für einen stumpfen Winkel ϑ (Fig. 21) ein negativer Werth von $\overline{\psi} \cos \vartheta$ eine Drehung derselben Linie auf der Horizontalebene von der Linken zur Rechten, ein positiver von der Rechten zur Linken.

Die Gleichung II. gibt nun im Allgemeinen, so lange über $A - B$, γ, ϑ, keine besonderen Bestimmungen getroffen werden, für $\overline{\psi}$ zwei (reelle, oder imaginäre) Werthe, nämlich

$$\overline{\psi} = \frac{\frac{1}{2} C \overline{\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}^2 - M g \gamma (C - A) \cos \vartheta}}{(C - A) \cos \vartheta}.$$

Ein einziger Werth hat statt

1. wenn $\vartheta = 90^0$
2. wenn $A = B$
3. wenn $\gamma = 0$

ist.

Ist erstens $\vartheta = 90^0$, so liegen der Schwerpunkt der bewegten Masse und die Rotations-Axe in der durch den Drehpunkt gehenden Horizontalebene. Dieser spezielle Fall ist gemäss dem Berichte »über die Preisfragen der Universität Bonn vom Jahre 1855—56« von Herrn Stud. Albert Schmitz in einer Preisschrift behandelt worden.

Ist zweitens $A = C$, so ist das Central-Ellipsoid oder dasjenige Ellipsoid, dessen drei Hauptdurchmesser in die durch den festen Drehpunkt gehenden Hauptdrehaxen fallen und der Länge nach den Quadratwurzeln aus den Haupt-

---

*) Die merkwürdigen Beziehungen des Central-Ellipsoids zu den rotirenden Körpern, auf welche keine beschleunigenden Kräfte wirken, finden sich in Ohms Mechanik, §. III. Thl. S. 223 u. f., Duhamels Lehrbuch der Mechanik, Thl. II. §§. 82, 121 u. f. und besonders in der Schrift von Poinsot: Neu-Theorie der Drehungen, übersetzt von Schellbach Seite 27 u. f. erörtert.

trägheitsmomenten A, B, C ($A = B$) der bewegten Masse proportional sein würde, eine Kugel.

In beiden Fällen reducirt sich die Gleichung II. auf

$$C\,\overline{\varphi}\,.\;\overline{\psi} = M.g\gamma$$

Der Werth $\overline{\psi} = \frac{Mg\gamma}{C\,\overline{\varphi}}$, welchen sie liefert, ergibt sich aus demjenigen der beiden obigen Wurzelwerthe der ursprünglich quadratischen Gleichung, in welchem die Wurzelgrösse das negative Zeichen hat, wenn $C - A$ oder $\cos\vartheta = 0$ gesetzt wird, und welcher alsdann unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint; der andere Wurzelwerth wird in diesen Fällen $= \infty$.

Man sieht sofort aus dem Werthe von $\overline{\psi}$, dass in beiden Fällen $\overline{\psi}$ um so kleiner ist, je grösser $\overline{\varphi}$ oder auch A gegen M, und je kleiner γ oder die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte ist, und dass die Drehung $\overline{\psi}$ sich in eine entgegengesetzte verwandelt, wenn γ sein Zeichen ändert.

§. 12.

Im dritten Falle wenn $\gamma = 0$ ist, der Schwerpunkt also im Unterstützungspunkt liegt, wird unsere Hauptgleichung II.

$$\overline{\psi}\Big((C - A)\cos\vartheta.\;\overline{\psi} - A\;\overline{\varphi}\Big) = 0$$

und befriedigt, wenn $\overline{\psi} = 0$,

$$\text{oder } \overline{\psi}\cos\vartheta = \frac{A.\;\overline{\varphi}}{C - A}$$

ist.

Es findet also entweder gar keine Drehung $\overline{\psi}$ statt, oder wenn eine erfolgt, muss sie, wenn ϑ ein spitzer Winkel ist, nach der einen oder andern Richtung geschehen, je nachdem $C \gtrless A$ ist.

Ist $\vartheta > 90^0$ und $C < A$, so ist die Drehung $\overline{\psi}$ mit der erstern im vorigen Falle übereinstimmend; ist $C < A$ mit der letztern.

§. 13.

Die allgemeinen Wurzelwerthe

$$\overline{\psi} = \frac{\frac{1}{2} C \overline{\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}^2 - (C-A) Mg\gamma. \cos \vartheta}}{(C-A) \cos \vartheta}$$

sind reell, einander gleich oder imaginär, je nachdem

$$\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}^2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} (C-A) \; Mg\gamma. \cos \vartheta \text{ ist.}$$

Der erste Fall tritt stets ein, wenn von den drei Grössen $C - A$, γ und $\cos \vartheta$ eine negativ und die beiden andern positiv oder alle drei negativ sind. Es ist alsdann die mit dem Wurzelzeichen behaftete Grösse grösser als das erste Glied, mithin sind die in diesen Fällen möglichen Drehungen $\overline{\psi}$ einander entgegengesetzt.

Der zweite Fall kann unter den eben gemachten Voraussetzungen nicht eintreten, da $\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}$ positiv ist, sondern nur wenn zwei der Grössen $C - A$, γ, $\cos \vartheta$ negativ und die dritte positiv oder alle drei positiv sind. Ist unter den letzt gemachten Voraussetzungen die Bedingungsgleichung der Realität

$$\frac{1}{4} C^2 \overline{\varphi}^2 > (C - A) \; Mg\gamma \cos \vartheta$$

erfüllt, so ist der Wurzelausdruck kleiner als $\frac{1}{2} C \overline{\varphi}$ und für einen spitzen Winkel ϑ sind die beiden möglichen Drehungen $\overline{\psi}$ unter sich gleich gerichtet, sowohl wenn $C - A > 0$ und γ positiv, als wenn $C - A < 0$ und γ negativ ist; aber die beiden erstern sind den beiden leztern entgegengesetzt. Dasselbe gilt, wenn ϑ stumpf und zugleich entweder $C - A > 0$ und γ negativ oder $C - A < 0$ und γ positiv ist.

§. 14.

Da die Hauptgleichung II. die Drehungen $\overline{\psi}$ überhaupt bestimmt, welche der bewegliche Körper um die vertikale Axe entweder bereits haben oder aber durch eine äussere

Kraft erhalten müsste, damit der Winkel ϑ seiner Haupt-(Rotations-) Axe mit der letztern constant bleibe, so wird sie auch gelten, wenn der Körper um diese Axe nicht rotirt oder $\overline{\varphi} = 0$ ist, also für jedes Centrifugal-Pendel, in welchem eine Hauptaxe durch den festen Drehpunkt geht und die Trägheitsmomente rücksichtlich der beiden andern Hauptaxen einander gleich sind. Man erhält alsdann

$$\overline{\psi} = \pm \sqrt{\frac{-Mg\gamma}{(C-A)\cos\vartheta}}$$

Die Deutung der Fälle, in denen dem Centrifugal-Pendel eine Drehung von der verlangten Beschaffenheit gegeben werden kann oder nicht, ergibt sich aus dem Obigen leicht.

§. 15.

Nehmen wir jetzt an, dass bloss das Gewicht des Rotationskörpers als beschleunigende Kraft wirkt, welches bei der Bohnenbergischen Aufhängung und auch im Fesselschen Apparate dann stattfindet, wenn man, ehe der Rotationskörper mit seiner Axe in den Ring eingesetzt wird, den übrigen beweglichen Theil desselben durch ein Gegengewicht in's Gleichgewicht bringt, alsdann tritt m an die Stelle von M und δ oder die Entfernung seines Schwerpunktes vom Drehpunkte an die Stelle von γ. Die Gleichung II. bietet alsdann, je nach der Gestalt des Rotationskörpers verschiedene Eigenthümlichkeiten.

Bezeichnen A', B', C' die Trägheitsmomente rücksichtlich seines Schwerpunktes, A, B, C wie vorhin die Trägheitsmomente in Bezug auf den festen Drehpunkt, so hat man

1. für ein Rotations-Ellipsoid, welches $2a$ zur Rotationsaxe und $2b$ zur Aquatorialaxe hat, die Gleichungen

$$C' = \frac{2}{5} mb^2, \ A' = B' = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$$

folglich (Siehe Poisson mec. t. II. §. 344)

$$C = \frac{2}{5} mb^2, \ A = B = m \left(\frac{1}{5}(a^2 + b^2) + \delta^2\right)$$

mithin $\quad C - A = m \left[\frac{1}{5}(b^2 - a^2) - \delta^2\right]$

2. für die Kugel, da für sie $b = a$ ist,

$$C - A = - m\delta^2$$

3. für einen Rotations-Cylinder, dessen Halbmesser der Basis $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist,

$$C' = \frac{1}{2} m R^2, \; A' = B' = m \left[\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right],$$

also $C = C' = \frac{1}{2} m R^2, \; A = B = m \left[\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} + \delta^2\right]$

$$\text{folglich} \quad C - A = m \left[\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right]$$

Ist $\frac{R^2}{4} = \frac{H^2}{3}$ oder $\frac{H}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^0$,

ist also H die halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $= 2R$ ist, so stimmt dieser Werth mit dem obigen für die Kugel überein, folglich ist in diesem Falle das Haupt-Central-Ellipsoid für den Cylinder ebenfalls eine Kugel.

4. für den geraden Kegel, dessen Halbmesser der Basis $= R$ und dessen Höhe $= H$ ist,

$$C' = \frac{3}{10} m R^2, \; A' = B' = \frac{3}{20} m \left[R^2 + \frac{H^2}{4}\right]$$

mithin $C = C' = \frac{3}{10} m R^2, A = B = \frac{3}{20} m \left[R^2 + \frac{H^2}{4}\right] + m\,\delta^2$

$$C - A = m \left\{\frac{3}{20}\left[R^2 - \frac{H^2}{4}\right] - \delta^2\right\}$$

Auch dieser Werth von $C - A$ stimmt mit dem der Kugel überein, wenn $R^2 = \frac{H^2}{4}$, also H dem Durchmesser der Basis $2R$ gleich ist,

u. s. w.

§. 16.

Setzt man nun in die Gleichung II. oder in

$$\frac{(C - A)}{M} \cdot \cos \vartheta . \, \overline{\psi}^2 - \frac{C}{M} \overline{\varphi} \, . \, \overline{\psi} + g\gamma = 0$$

δ statt γ und für $\frac{C - A}{M} = \frac{C - A}{m}$ und $\frac{C}{M} = \frac{C}{m}$

die eben gefundenen Werthe, so ergibt sich:

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\left[\frac{1}{5}(b^2 - a^2) - \delta^2\right] \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - \frac{2}{5} b^2 \, \overline{\varphi} \, . \, \overline{\psi} + g\delta = 0 \quad \text{(III)}.$$

2. für die Kugel, deren Halbmesser $= b$ ist,

$$\delta^2 \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 + \frac{2}{5} b^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} - g \delta = 0 \qquad \text{(IV.)}$$

3. für den Rotations-Cylinder

$$\left[\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right] \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - \frac{1}{2} R^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} + g \delta = o. \qquad \text{(V.)}$$

4. für den geraden Kegel

$$\left[\frac{3}{20}\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right) - \delta^2\right] \cos \vartheta . \overline{\psi}^2 - \frac{3}{10} R^2 \overline{\varphi} . \overline{\psi} + g \delta = o \qquad \text{(VI.)}$$

Von den beiden Wurzelwerthen dieser Gleichungen müssen Apparate, welche den bezüglichen Rotationskörpern unter den gegebenen Bedingungen eine freie Bewegung um einen festen Punkt gestatten, den einen oder andern zeigen, so oft ϑ constant bleibt, sei es dass die Seitendrehung $\overline{\psi}$ durch die vereinigte Wirkung der ursprünglichen Rotation und des Gewichtes des Rotationskörpers hervorgebracht wird, oder dass eine andere Kraft die Rotation um die Verticale veranlasst. Die Werthe, welche Versuche mit unsern Apparaten geben können, werden um so kleiner gegen die berechneten ausfallen, je grösser die ausser dem Rotationskörper zu bewegende f r e m d e Masse ist; auch entstehen durch die Anordnung der letztern rücksichtlich der durch den Drehpunkt gehenden Lothrechten Centrifugalkräfte, welche mehr oder weniger störend einwirken. Man muss daher schon desshalb darauf verzichten in bestimmten Zahlen diese Formeln durch Versuche verificiren zu wollen, abgesehen davon, dass ohne sehr complicirte Einrichtungen es schwerlich möglich sein dürfte, dem Rotationskörper eine gegebene Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen. Man könnte zu letzterm Zwecke zwar auf der Rotationsaxe ein gezahntes Rädchen anbringen und mittelst eines dagegen gehaltenen Kartenblättchens aus dem Tone der dann entsteht, auf die Zahl der Umdrehungen schliessen, allein es würde schwer sein, von vornherein eine bestimmte oder auch nur nacheinander genau dieselbe Zugkraft hervorzubringen. Wie man im Allgemeinen die Formeln verificiren kann, haben wir oben §. 7. schon für einige Fälle dargethan, und würde man ebenso für andere im Folgenden zu betrachtende verfahren können.

Wir verweilen nicht bei der allgemeinen Discussion der Gleichungen, sondern gehen gleich zu den besondern Voraussetzungen über.

A. Liegt der Schwerpunkt im Drehpunkt, wie in der

Bohnenbergischen Einrichtung, ist also $\vartheta = 0$, so geben unsere Gleichungen

1. Für das Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2b^2 \overline{\varphi}}{(b^2 - a^2)\cos\vartheta}.$$

Es verändert mithin $\overline{\psi} \cos\vartheta$ bei demselben $\overline{\varphi}$ mit $b^2 - a^2$ sein Zeichen, oder die möglichen Drehungen sind für das abgeplattete und längliche Rotations-Ellipsoid entgegengesetzt.

2. Für die Kugel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \infty.$$

Es schneidet also die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie, und man kann der Kugel keine Rotation um die Verticale ertheilen, bei welcher der Winkel ihrer Drehaxe mit derselben constant bleibt.

3. Für den Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{R^2 \overline{\varphi}}{2\left(\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3}\right)\cos\vartheta}$$

Der letztere Werth wird $= \infty$, wenn $\frac{H}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Es schneidet also bei einem solchen Cylinder ebenfalls die Aequatorial-Ebene die Horizontal-Ebene stets in derselben Linie oder gibt man ihm irgend eine Rotation um die Verticale, so verändert sich ϑ.

Mit $\frac{H}{R} \lessgtr \frac{1}{2}\sqrt{3}$ verändert $\overline{\psi}$ $\cos\vartheta$ sein Zeichen.

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2 R^2 \overline{\varphi}}{\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right)\cos\vartheta}$$

Ist seine Höhe dem Durchmesser der Basis gleich, so ist der zweite Werth unendlich, mithin gilt für einen solchen Kegel ebenfalls das oben rücksichtlich der Kugel Bemerkte und $\overline{\psi}$ $\cos\vartheta$ ändert mit $H \lessgtr 2R$ sein Zeichen.

B. Liegt der Schwerpunkt nicht im Drehpunkte, ist aber das Gewicht des Rotationskörpers aufgehoben, wie am Fessel'schen Apparate stattfindet, wenn durch ein Gegengewicht Gleichgewicht hervorgebracht ist, so erhält man aus den obigen Gleichungen, wenn man $g = 0$ setzt

1. für das Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2\, b^2\, \overline{\varphi}}{\left[(b^2 - a^2) - 5\,\delta^2\right] \cos\vartheta}.$$

Es verändert mithin $\overline{\psi} \cos\vartheta$ mit $b^2 - a^2 \lessgtr 5\,\delta^2$ sein Zeichen; ist $b^2 - a^2 = 5\,\delta^2$, so wird der zweite Werth unendlich, oder keine Seitendrehung findet, wenn ϑ constant bleibt, statt.

2. für die Kugel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = -\frac{2b^2\, \overline{\varphi}}{5\,\delta^2 \cos\vartheta}$$

3. für den Cylinder

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{R^2\, \overline{\varphi}}{2\left(\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} - \delta^2\right) \cos\vartheta}$$

Für einen spitzen Winkel ϑ ist $\overline{\psi} \cos\vartheta \lessgtr 0$, je nachdem $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} \lessgtr \delta^2$ ist. Hat man $\frac{R^2}{4} - \frac{H^2}{3} = \delta^2$, so ist $\overline{\psi} = \infty$. Ist $\frac{H}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so wird der zweite Werth gleich $\frac{-R^2\, \overline{\varphi},}{2\delta^2 \cos\vartheta}$, welcher mit dem der Kugel im Zeichen übereinstimmt und auch im Werthe, wenn $R = \frac{2b}{\sqrt{5}}$ ist.

4. für den geraden Kegel

$$\overline{\psi} = 0 \text{ und } \overline{\psi} = \frac{2\, R^2\, \overline{\varphi}}{\left(R^2 - \frac{H^2}{4} - \frac{20}{3}\,\delta^2\right) \cos\vartheta}.$$

Eine constante Rotation um die Lothrechte ist wieder unmöglich, wenn $R^2 - \frac{H^2}{4} = \frac{20}{3}\,\delta^2$. Ist $H = 2\,R$, so wird $\overline{\psi} = -\frac{3}{10} \cdot \frac{R^2\,\overline{\varphi}}{\delta^2 \cos\vartheta}$ also wie bei dem Cylinder mit dem $\overline{\psi}$ der Kugel im Zeichen übereinstimmend und auch im Werthe, wenn $R = \frac{2b}{\sqrt{3}}$ ist.

1. Vergleicht man die einzelnen Werthe von $\overline{\psi}$ in B mit denen in A, so sieht man, dass wenn die Nenner in beiden positiv sind, das $\overline{\psi}$ in allen Fällen B grösser ist als in den entsprechenden A.

C. Ist der Winkel ϑ der Rotationsaxe mit der Vertikalen ein rechter, so wird ein Wurzelwerth in den obigen Gleichungen unendlich; er bezieht sich auf den Fall, wo die Seitenbewegung wie in §. 7 eine künstlich ertheilte ist. Der andere ist

1. für das Ellipsoid
$$\overline{\psi} = \frac{5}{2}\,\frac{g}{b^2}\,\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

2. für die Kugel ebenfalls
$$\overline{\psi} = \frac{5}{2} \cdot \frac{g}{b^2}\,\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

3. für den Rotations-Cylinder
$$\overline{\psi} = \frac{2\,g}{R^2}\,\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

4. für den geraden Kegel
$$\overline{\psi} = \frac{10}{3}\,\frac{g}{R^2}\,\frac{\delta}{\overline{\varphi}}$$

Dieselben Werthe ergeben sich natürlich, wenn der andere Factor von $\overline{\psi}^2$ in den Gleichungen III, V und VI Null ist. Sie zeigen das Merkwürdige, dass die Seitenbewegung in diesem Falle sich gleich bleibt, welches auch die Länge der Umdrehungsaxe (Axe der Figur) des bezüglichen Körpers sein mag, wenn nur die andere Dimension, die Rotationsgeschwindigkeit und die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte δ dieselbe bleibt. Der Grund liegt unzweifelhaft darin, dass bei einem rechten Winkel alle Punkte eines auf der Rotationsaxe des Körpers senkrechten Schnittes bei der Drehung um die Verticale eine gleiche Centrifugalkraft erlangen. Zugleich aber zeigen sie, dass obwol die Länge der Rotationsaxe dann nicht in Betracht kommt, die Gestalt des Körpers keineswegs gleichgültig ist. Das $\overline{\psi}$ des Cylinders und des Kegels ist nur dann dem der Kugel vom Halbmesser b gleich, wenn der Halbmesser der Basis des erstern $= \frac{2b}{\sqrt{5}}$, des letztern dagegen $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ ist.

D. Setzen wir endlich $\overline{\varphi} = 0$, so geben die obigen Gleichungen für das Centrifugal-Pendel, welches als Schwungkörper hat

1. ein Rotations-Ellipsoid

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left\{\delta^2 - \frac{1}{5}(b^2 - a^2)\right\} \cos \vartheta}}$$

2. eine Kugel

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos \vartheta}}$$

3. einen Rotations-Cylinder

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left(\delta^2 + \frac{H^2}{3} - \frac{R^2}{4}\right) \cos \vartheta}}$$

4. einen geraden Kegel

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g\,\delta}{\left\{\delta^2 + \frac{3}{20}\left(\frac{H^2}{4} - R^2\right)\right\} \cos \vartheta}}\,.$$

Wenn also die Entfernung des Schwerpunktes des geraden Kegels vom Drehpunkte dieselbe ist, so hat auch $\overline{\psi}$ denselben Werth, der Kegel mag seine Spitze von oder zu dem Drehpunkte wenden.

Ist das Centrifugal-Pendel ein mathematisches, der Schwungkörper also nur ein materieller Punkt, so geben die obigen Formeln, wenn in ihnen a, b, H, R gleich Null gesetzt werden, sämtlich

$$\overline{\psi} = \sqrt{\frac{g}{\delta \cos \vartheta}}$$

oder denselben Werth, der stattfindet, wenn der Schwungkörper entweder 1. eine Kugel ist;

oder 2. ein Rotations-Cylinder, welcher zur Höhe die halbe Höhe eines über dem Durchmesser seiner Basis als Seite beschriebenen gleichseitigen Dreiecks hat;

oder endlich 3. ein gerader Kegel ist, welcher den Durchmesser der Basis zur Höhe hat.

Haben letztere den Halbmesser der Kugel zum Halbmesser ihrer Grundflächen und bezeichnen c, k ihre Inhalte, K den Inhalt der Kugel, so ist

$$K : k : c = 4 : 2 : \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

Haben sie dagegen gleichen Inhalt, also bei derselben Länge des Pendelarms auch gleiche Wirkungsfähigkeit, so verhalten sich ihre Halbmesser wie $1 : \sqrt[3]{2} : \frac{2}{3} \sqrt{3}$.

Bei den vielfachen Anwendungen, welche das Centrifugal- (conische) Pendel in der Technik hat, gebraucht man bis jetzt nur das mit einer Kugel als Schwungkörper, und es war Huyghens der Erste, welcher es untersucht hat. Lagrange,*) welcher die von Clairaut in den Memoires der Academie des Sciences de l'annee 1735 aufgestellte allgemeinere Theorie des Pendel-Problems wesentlich vervollständigt hat, findet die Rotationsgeschwindigkeit um die Lothrechte $\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r \cos \alpha}}$, in welcher Gleichung $\frac{d\varphi}{dt}$, $2g$, r, α unser $\overline{\psi}$, g, δ, ϑ bezeichnen. Auf elementarem Wege ergibt sich diese Formel ebenfalls leicht. Denn ist Fig. 23. P der schwere Punkt von der Masse m, O der Aufhängepunkt, $OP = \delta$ der Pendelarm, ϑ sein Winkel mit der Verticalen OV, so entspricht der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\psi}$, bei der die Entfernung von der Verticalen $= 1$ ist, in einer Entfernung PE eine Umdrehungsgeschwindigkeit $PE . \overline{\psi}$, also eine Centrifugalkraft PF

*) Mecanique anal. t. II. sect. VIII, p. 205.

$= \frac{m, PE^2.\overline{\psi}^2}{PE} = m\, P\, E\, \overline{\psi}^2$. Ihr Drehmoment gegen O ist $P\,F.\,O\,E = m\,P\,E.\,\overline{\psi}^2.\ O\,P \cos\vartheta = m.\ P\,E.\ \overline{\psi}^2.\ \delta.\cos\vartheta$. Das Drehmoment des Gewichtes dagegen ist $m\ g.\ P\ E$. Soll ϑ constant sein, so müssen diese Momente gleich oder $\overline{\psi}^2.\ \delta.\ \cos\vartheta = g$ sein.

Man sieht aus dem Obigen, dass, abgesehen vom Widerstande der Luft, die Kugel durch andere der genannten Rotationskörper von den bezeichneten Dimensionen ersetzt werden könnte, und wie man die Dimensionen dieser Körper und des Ellipsoids nehmen müsse, damit bei derselben Umdrehungsgeschwindigkeit und demselben Pendelarme der Winkel mit der Verticalen grösser oder kleiner als für die Kugel sei. Die Formeln zeigen ferner, dass während das conische Kugel-Pendel nur bei einem spitzen Winkel seines Armes mit der Richtung der Schwere constant schwingen kann, für die übrigen ihre Dimensionen und der Pendelarm auch so angenommen sein können, dass nur bei einem stumpfen Winkel eine constante Drehung möglich ist. Dass einem rechten Winkel dagegen, wenn wir nicht voraussetzen, dass $g = 0$ oder die Wirkung der Schwere durch ein Gegengewicht an dem verlängerten Pendelarme aufgehoben wäre, in keinem Falle eine solche stattfinden kann, ist von selbst einleuchtend, und zeigen die obigen Formeln, indem $\cos\vartheta = 0$ für $\overline{\psi}$ den Werth ∞ gibt. Aus demselben Grunde gibt es für die Körper 1, 3, 4 keine constante Drehungslage, wenn ihre Dimensionen so beschaffen sind, dass der Factor von $\cos\vartheta = 0$ ist. Es sind diese Bedingungen dieselben, denen wir bei den Formeln B begegnet sind, und es erhellet hieraus, und aus dem in §. 7 bereits Erörterten, dass die zweiten Werthe für $\overline{\psi}$ in den Formeln A und B den Fällen zukommen, wo dem ganzen Apparate eine Umdrehung um die Lothlinie in der in jenem §. bezeichneten Weise künstlich ertheilt wird, während die Werthe Null von $\overline{\psi}$ den Fällen entsprechen, wo dieses nicht geschieht. Jene beziehen sich also auf den allgemeinen Fall des conischen Pendels, wo der Schwungkörper ein Rotationskörper ist und zugleich um die Axe seiner Figur und die Verticale in Rotation gesetzt wird.

Um die obigen Resultate in dem gewöhnlichen Fall, dass die erstere Rotation nicht statt hat, für die verschiedenen Schwungkörper zur Anschauung zu bringen, könnte man sie paarweise wie an den Armen eines Regulators an einer in die verticale Säule des Fessel'schen Apparates passenden Stange aufhängen, das Ganze auf die Platte der Schwungmaschine bringen, und, nachdem man die Stange mittelst des Schräubchens festgestellt und die Kurbel in Bewegung gesetzt hat, darauf achten, wann man eine Geschwindigkeit erreicht hätte, bei welcher keine weitere Entfernung von der Verticalen stattfände, und alsdann eine Gabel einfallen lassen, um die Pendel in dieser Lage festzuhalten und die Winkel, die sie nun mit den Verticalen bilden, zu beobachten.

§. 17.

Um die Schwankungen, welche der Winkel ϑ der Rotationsaxe mit der Verticalaxe um einen mittlern Werth unter Umständen zeigt, in Betracht zu ziehen, müssen wir zu den Eulerschen Gleichungen zurückgreifen.

Sie sind in unserm Falle, wo $A = B$ ist, gemäss §. 9.:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad C dr = 0 \\ &(2)\quad A dq - (C - A)\, rp\, dt = \gamma a''. Mg\, dt \\ &(3)\quad A dp + (C - A)\, rq\, dt = -\gamma b''. Mg\, dt \end{aligned}\right\} \quad (A.)$$

Zugleich ist:

$$\left.\begin{aligned} pb'' - qa'' &= \sin \vartheta. \frac{d\vartheta}{dt} \\ pa'' + qb'' &= \sin^2 \vartheta. \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (B.)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} dc'' &= (aq'' - b''p)\; dt \\ db'' &= (c''p - a''r)\; dt \\ da'' &= (b''r - c''q)\; dt \end{aligned}\right\} \quad (C.)$$

Aus den beiden ersten Gleichungen B folgt

$$p^2 + q^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \sin \vartheta^2. \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1 - c''^2). \frac{d\psi^2}{dt^2}$$

und aus den drei letzten

$$r dc'' = q db'' + p dc''$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise mit c'', b'', a'' und addirt so findet man

$$C.\, dc'' r + A.\, d\, (b''q + a''p) = 0$$

oder, da $r = \text{Const} = n$ zufolge (1) ist,

$$C. nc'' + A(b''q + a''p) = \text{Const} = l,$$

$$\text{oder} \quad C. nc'' - A(1 - c''^2) \frac{d\psi}{dt} = l. \qquad \text{(D.)}$$

Multiplicirt man dagegen die Gleichung (2) mit q und die Gleichung (3) mit p und addirt, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} A.d(p^2 + q^2) = \gamma Mg(a''q - b''p)dt = -\gamma Mg \sin\vartheta\, dt = \gamma Mg.dc''$$

oder $\quad A(p^2 + q^2) = 2\gamma Mg.c'' + \text{Const} = 2\gamma Mgc'' + h,$

oder endlich

$$A\left(\frac{d\vartheta^2}{dt^2} + (1 - c'')^2 \frac{d\psi^2}{dt^2}.\right) = 2Mg\gamma c'' + h. \qquad \text{(E.)}$$

Aus D und E folgt

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{A\sqrt{(1 - c''^2)}}{\sqrt{A(1 - c''^2)(2Mg\gamma c'' + h) - (Cnc.'' - l)^2}} \qquad \text{(F.)}$$

Ferner ist (nach D) $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{Cnc'' - l}{A(1 - c''^2)}$,

$$\text{also} \quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{Cnc'' - l}{\sqrt{A(1 - c''^2)(2Mg\gamma c'' + h) - (Cnc'' - l)^2}} \qquad \text{(G.)}$$

Ebenso ergibt sich aus $\dfrac{d\varphi}{dt} = r + c''. \dfrac{d\psi}{dt}$,

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{nA(1 - c''^2) + (Cnc'' - l)c''}{\sqrt{(1 - c''^2).[A(1 - c''^2)(2Mg\gamma c'' + h) - (Cnc'' - l)^2]}} \qquad \text{(H)}$$

Die Integration der Gleichungen (F), (G), (H) führt zu elliptischen Functionen. Wir befassen uns hier nur mit der ersten, welche wir, beachtend, dass

$$\sqrt{(1 - c'')^2}.\, d\vartheta = \sin\vartheta.\, d\vartheta = -\, dc''$$

ist, auch so schreiben können:

$$t - t^0 = -A\int \frac{dc''}{\sqrt{A(1 - c''^2)(2Mg\gamma c'' + h) - (Cnc'' - l)^2}}$$

Der Ausdruck u n t e r dem Wurzelzeichen, den wir mit W bezeichnen wollen, bleibt so lange reell, als c'' reell ist und verändert sich stetig, wenn c'' sich stetig verändert. Denkt man sich nun, ohne die Zulässigkeit solcher Werthe zunächst zu berücksichtigen, es wachse

c'' von $c'' = -\infty$ bis $c'' = +\infty$,

so ist

$$W = +\infty \quad \text{für } c'' = -\infty$$
$$W = -(Cn + l)^2 \text{ für } c'' = -1$$
$$W = -(Cn + l)^2 \text{ für } c'' = +1$$
$$W = -\infty \quad \text{für } c'' = +\infty$$

Es liegt also jedenfalls eine reelle Wurzel von $W = 0$ zwischen $c'' = -\infty$ und $c'' = -1$. Nun kann aber W, während c'' von $c'' = -1$ bis $c'' = +1$ wächst, nicht fortdauernd negativ sein, weil sonst $\sqrt{W}$ mithin auch t fortdauernd imaginär wäre, die Realität von t in der Aufgabe aber nur Werthe von ϑ zwischen 0 und 180°, also von c'' zwischen -1 und $+1$ zulässt. Zwischen $c'' = -1$ und $c'' = +1$ muss es also zwei reelle Wurzeln von W geben, eine bei der W aus dem Negativen ins Positive, eine andere bei der W aus dem Positiven wieder ins Negative übergeht. Bezeichnen wir den kleinern dieser Werthe von c'' mit c''_1, den grössern mit c''_2 und die dritte ebenfalls nothwendig reelle Wurzel des cubischen Ausdrucks, welche zwischen -1 und $-\infty$ liegt, also stets negativ ist, mit w_3, so ist, damit $\sqrt{W}$ reell werde, $c''_1 \leq c'' < c''_2$ und zugleich $c''_2 - w_3 > 0$. Bringen wir $\sqrt{2AMg\gamma}$, den Coefficienten von $-(c'')^3$ in dem obigen Integral, vor das Wurzelzeichen, so lässt es sich demnach in folgender Form darstellen:

$$t - t^0 = -\sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}} \int \frac{dc''}{\sqrt{-(c''-c''_1)(c''-c''_2)(c''-w_3)}}$$

Substituirt man hierin für c'' den Werth

$$c'' = c''_2 - x_2 (c''_2 - c''_1),$$

dividirt durch $c''_2 - w_3$, und setzt $\dfrac{c''_2 - c''_1}{c''_2 - w_3} = k^2$, so ergibt sich

$$t - t0 = +\sqrt{\frac{A}{2Mg\gamma}} \frac{2}{\sqrt{c''_2 - w_3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x''}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

also

$$x = \sin \text{am.} \sqrt{\frac{Mg\gamma}{2A}(c''_2 - w_3)}.\,(t - t^0),$$

für welchen Ausdruck wir der Kürze wegen

$$x = \sin \text{am.}\, u$$

setzen. Mithin erhält man für c''

$$c'' = c''_2 - (c''_2 - c''_1) \sin^2 \text{am}\, u$$

Wenn $u = 0$, hat c'' seinen grössten Werth c''_2, mithin Winkel ϑ seinen kleinsten. Ist $u = K$, wo K bekanntlich das obige Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +1$ bezeichnet, so hat c'' seinen kleinsten Werth c''_1, also ϑ seinen grössten. So oft das Argument u um $2K$ zunimmt, welches geschieht, wenn die Zeit um $2K . \frac{1}{\sqrt{\frac{Mg\gamma}{2A}(c'' - w_3)}}$ wächst, erhält c'' wieder denselben Werth, also auch ϑ, welches auch der augenblickliche Werth von ϑ sein mag. Der Winkel ϑ der Rotationsaxe mit der Verticalen verändert sich also periodisch und schwankt in der Zeitperiode $\frac{T}{2}$ zwischen seinem kleinsten und grössten Werthe.

Wollte man die Wurzeln c''_2, c''_2, w_3 selbst durch die Coefficienten des Ausdruckes W darstellen, so hat man bekanntlich, wenn

$$W = z^3 + az^2 - bz - c = 0$$

gesetzt wird, diese Gleichung zuerst auf die Form

$$y^3 - b'y - c' = 0$$

zu bringen und $\cos \varepsilon = \frac{c'}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{b'}\right)^3}$ zu setzen, indem man alsdann für die Wurzeln dieser Gleichung

$$y_1 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3}} \cos \frac{1}{3} \varepsilon$$

$$y_2 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3}} \cos \frac{(2\pi - \varepsilon)}{3} = -2 \sqrt{\frac{b'}{3}} \cos \left(\frac{\pi + \varepsilon}{3}\right)$$

$$y_3 = 2 \sqrt{\frac{b'}{3}} \cos \left(\frac{2\pi + \varepsilon}{3}\right) = -2 \sqrt{\frac{b'}{3}} \cos \left(\frac{\pi - \varepsilon}{3}\right)$$

findet, und die Wurzeln von $W = 0$, einzeln den letzern weniger $\frac{a}{3}$ gleich sind.

§. 18.

Im Falle auf den Rotationskörper im Anfange seiner Bewegung durchaus keine anderen bewegenden Kräfte wirken, als solche, welche gemeinsam ihm eine Drehgeschwindigkeit n um seine Axe ertheilen und er alsdann allein dem Einflusse der beschleunigenden Kraft und der Trägkeit überlassen ist, — wie gewöhnlich bei unsern Apparaten — lassen sich ohne Schwierigkeit die Bedingungen auffinden, damit die gedachten Schwankungen fortdauernd sehr klein bleiben.

Es ist nämlich in diesem Falle im Anfange der Bewegung $\frac{d\,\psi}{d\,t} = 0$, mithin gibt die Gleichung D im vorigen §.:

$$C\,n\,c''_1 = l$$

wenn $c''_1 = \cos\vartheta$, dem anfänglichen Winkel ϑ zugehört.

Ebenso ist in diesem Augenblicke $p = 0$, und $q = 0$, mithin gibt die Gleichung $A\ (p^2 + q^2) = 2\,M g \gamma\, c''_1 + h$ für h den Werth $-\,2\,M g \gamma\, c''_1$. Substituirt man diese Werthe für l und h in Gleichung F, so erhält man

$$\sqrt{(1 - c''^2)}\, d\vartheta =$$
$$\frac{1}{A}\sqrt{A\ (1 - c''^2)\ 2\,M g \gamma\ (c'' - c''_1) - C^2\, n^2\ (c'' - c''_1)^2}.\ dt$$

oder

$$dc'' = -\frac{1}{A}\Big[A(1 - c''^2)\,2\,M g\gamma - C^2 n^2 (c'' - c'')\Big]^{\frac{1}{2}} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}}.\,d\,t \quad \text{(J.)}$$

Hat man aber einen Ausdruck von der Form

$$du = dx.\ f u,$$

so ist $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{dx}.\, d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{du}{dx}.\ \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{d\,u} = fu.\ \frac{dfu}{du}$,

mithin gemäss der Reihe

$$u' - u = \frac{du}{dx}.\, dx + \frac{d^2\,u}{dx}.\ \frac{d\,x^2}{1.\,2} + \frac{d^3 u}{d\,x^3}.\ \frac{d\ x^3}{1.\,2.\,3} + \dots$$

u ein Maximum, wenn $fu = 0$ und $f u.\ \frac{dfu}{du}$ negativ, dagegen u ein Minimum, wenn $fu = 0$ und zugleich $fu.\ \frac{dfu}{d\,u}$ positiv ist.

In unserm Falle wird $fu = 0$, wenn entweder $c'' - c''_1 = 0$, oder $A\ (1 - c''^2)\ 2\ M g \gamma - C^2 n^2\ (c'' - c''_1) = 0$

ist. Bezeichnet man ferner den Factor in der grossen Klammer in der Gleichung J der Kürze wegen mit K, so ist

$$\frac{dfu}{du} = \frac{dfu}{dc''} = -\frac{1}{2A} K^{\frac{1}{2}} (c'' - c_1'')^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2A} \left[4 A M g \gamma c'' + C^2 n^2 \right] K^{-\frac{1}{2}} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}},$$

also $f u \dfrac{dfu}{du} = - \dfrac{dfu}{dc''} \cdot \dfrac{K^{\frac{1}{2}}}{A} (c'' - c''_1)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2A^2} \cdot K - \frac{1}{2A^2} \cdot (4 A M g \gamma c'' + C^2 n^2) (c'' - c_1'')$$

Für $c'' = c_1''$ reducirt sich dieser Ausdruck, da

$K = A (1 - c''^2) . 2 M g \gamma - C^2 n^2 (c'' - c_1'')$ *ist.*

auf $\dfrac{1}{A} (1 - c''^2_1) M g \gamma$, mithin gibt $c'' = c_1''$ für ein positives γ ein Minimum.

Setzt man $K = 0$ und bezeichnet die Wurzeln dieser Gleichung mit c_2'', so ergibt sich:

$$c_2'' = - \frac{C^2 n^2}{4 A M g \gamma} \pm \sqrt{1 + \frac{C^2 n^2 c_1''}{2 A M g} + \frac{C^2 n^2}{16 A^2 M^2 g^2 \gamma^2}}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\dfrac{M\gamma}{A} = \dfrac{1}{\lambda}$ und

$\dfrac{C^2 n^2}{A^2} = \dfrac{4 g \beta^2}{\lambda}$, also $\beta^2 = \dfrac{C^2 n^2}{4 A M g \gamma}$.

setzt, $\quad c_2'' = - \beta^2 \pm \sqrt{1 + 2 \beta^2 c_1'' + \beta^4}$

Macht man dieselbe Substitution in

$$- \frac{1}{2 A^2} [4 A M g \gamma c'' + C^2 n^2.] (c'' - c_1''),$$

indem man mit $4 A M g \gamma$ multiplicirt und dividirt, so erhält man

$$- \frac{2g}{\lambda} (c'' + \beta^2) (c'' - c_1'').$$

Der negative Werth von c_2'' ist grösser als 1, mithin nicht zulässig. Substituirt man den andern mit positivem Wurzelzeichen für c'', so wird der letztere Ausdruck

$$- \frac{2g}{\lambda} \sqrt{1 + 2 \beta^2 c''_1 + \beta^4} \left[- \beta^2 - c''_1 + \sqrt{1 + 2 \beta^2 c''_1 + \beta^4} \right]$$

also, da

$$\sqrt{1+2\beta^2 c''_1+\beta^4}=\sqrt{(\beta+c''_1)^2+(1-c''^2_1)}>\beta^2+c''_1$$

ist, negativ, folglich gibt

$$c''_2=-\beta^2+\sqrt{1+2\beta^2 c''_1+\beta^4}$$
$$=-\beta^2+(1+\beta^2)\left[1-\frac{2\beta^2(1-c''_1)}{(1+\beta^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ein Maximum.

Der Ausdruck $\frac{2\beta^2(1-c''_1)}{(1+\beta^2)^2}$ ist sehr klein

1. wenn c_1'' nahe $=1$ d. h. die Rotationsaxe sehr wenig von der verticalen Lage abweicht, und β nicht gleich Null ist.

2. wenn der ursprüngliche Winkel mit der Verticalen, also c''_1 beliebig, aber β^2 unendlich gross ist, welches um so mehr der Fall ist, je grösser die Umdrehungsgeschwindigkeit n, je kleiner die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte γ, je kleiner ferner das Gewicht des Rotationskörpers Mg und je grösser endlich das Trägheits-Moment C rücksichtlich der Rotationsaxe gegen das Trägheits-Moment A rücksichtlich der auf ihr senkrechten Axe, oder je kleiner jene Axe gegen diese ist.

Die Experimente mit dem Fesselschen Apparate bestätigen alle diese Bedingungen und würden es noch mehr, wenn die fremde mitzubewegende Masse nicht vorhanden wäre.

In den beiden Fälllen (1) und (2) können die höhern Potenzen des gedachten Ausdruckes vernachlässigt werden, und man erhält

$$c''^2=1-\frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2}$$

$$\text{also } c''_2-c''_1=1-c''_1-\frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2}$$

ein Unterschied, welcher in den gedachten beiden Fällen so klein werden kann, als man will.

Will man in dem ersten Falle den Winkel ϑ_2 selbst ausdrücken, welcher dem maximum c''_2 entspricht, und bezeichnet man den dem minimum c''_1 zugehörigen Winkel mit ϑ_1, so gelangt man dazu mittelst des Ausdrucks

$$c''^2=1-\frac{\beta^2(1-c''_1)}{1+\beta^2},$$

indem man in demselben, da ϑ_2 und ϑ_1 beide sehr klein sind,

$1 - \frac{\vartheta_2^2}{2}$ für c''_2 und $1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$ für c''_1 substistuirt. Man erhält alsdann

$$\vartheta_2 = \frac{\beta\,\vartheta_1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

Es ist dieser Grenzwerth derselbe, welchen Poisson in seinem traité de mécanique t. II. §. 431 aus der Gleichung J herleitet, indem er in ihr unmittelbar $1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ für c'' und $1 - \frac{\vartheta_1^2}{2}$ für c_1'' substituirt und β^2 für $\frac{C^2 n^2}{4\,A\,M g \gamma}$ setzt.

Wir verweilen hierbei nicht, sondern verweisen auf das bezogene Werk, wo man auch die angenäherten Werthe für ϑ und ψ in t findet, welche sich ergeben, wenn man unter den gemachten Voraussetzungen im ersten Falle $\vartheta = \vartheta_1 \sin u$, im zweiten $\vartheta = \vartheta_1 - u$, wo u eine sehr kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen als u^2 zu vernachlässigen sind, in den Ausdrücken für $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d\psi}{dt}$ substituirt und integrirt. Da Poisson und ebenso Andere, welche nach ihm verfahren sind, z. B. Ohm in seiner Mechanik III. Theil S. 316. die obigen Untersuchungen über die Bedingungen, unter welchen u auch im zweiten Falle sehr klein bleibet, nicht anstellt, so ist er genöthigt, diese Möglichkeit von vornherein anzunehmen und findet die Bedingungen erst nach vollzogener Integration. Der von uns eingeschlagene Weg rechtfertigt diese Annahme, und kürzt zugleich die Integration ab, indem er sofort gestattet, für $\cos \vartheta_1 + 4\,\beta^2$ oder wie Poisson schreibt, für $\cos \alpha + 4\,\beta^2$ bloss $4\,\beta^2$ zu setzen.