

II. Die Versuche und ihre elementare Erklärung.

§ 3.

Indem wir uns nun zu den Versuchen wenden, welche sich mit den obigen Apparaten anstellen lassen, betrachten wir zunächst den unter Nr. 3 des §. 2 beschriebenen, und zwar, wenn er als Fessel'scher aufgestellt ist Fig. 3. Dabei denken wir uns den Beobachter auf der verlängerten Axe des Rotationskörpers, auf der Seite desselben, wo er die Scheibe wie den Zeiger einer Uhr von der Linken zur Rechten rotiren sieht. Die rechte Seite der Scheibe ist alsdann die, welche seiner Rechten, die linke die, welche seiner Linken gegenüberliegt.

Ist nun das cylinderische Gegengewicht P auf die Tragstange so aufgeschoben und festgestellt, dass Gleichgewicht vorhanden ist, so dauert dasselbe, wie bereits bemerkt, bei sehr abweichenden Stellungen der Stange gegen die Verticale fort und ein äusserst geringer Druck oder Stoss auf die Stange oder das Plättchen c an der Gabel reicht hin, um den beweglichen Theil des Apparates fortzubewegen. Diese leichte Beweglichkeit aber hört sofort auf, wenn die Scheibe durch einen kräftigen Zug in Rotation versetzt ist. Man empfindet alsdann einen starken Widerstand und vorübergehende, selbst kräftige Stösse versetzen die Stange nur in rasche Schwankungen um eine mittlere Lage, welche um so weniger von derselben abweichen und um so schneller geschehen, je rascher die Rotation der Scheibe ist. Man kann den Apparat rund in der Stube herumtragen, die Axe wird immer nach derselben Richtung zeigen. Schöner noch zeigt sich dieses Beharrungsvermögen, wenn man den ganzen Apparat auf eine, mit ihrer eisernen Axe in eine Centrifugal-Maschine einschraubbare, hölzerne Platte bringt, welche nach Oben theils um die Mitte herum, theils am Rande in angemessenen Entfernungen Stifte trägt, um den Fuss F des Apparates zwischen sich zu fassen und diesen dagegen zu schützen, dass er bei rascher Umdrehung der Platte ~~nicht~~ herabgeschleudert werde. Man kann alsdann in beliebiger Richtung und beliebig rasch drehen,

den Apparat in die Mitte oder am Rande der Platte aufstellen, so wird die Stange, vorausgesetzt, dass ihre freie Beweglichkeit nicht gehemmt ist, fortwährend nach derselben Richtung zeigen. Wie sich dieses Experiment ändert, wenn die Gabelaxe durch das Schraubchen *v* festgeklemmt ist, soll später erörtert werden. Nimmt man den Apparat wieder von der Platte, klemmt nun das gedachte Schraubchen fest, oder hält das Plättchen *c* fest, so folgt die Stange mit derselben Leichtigkeit, Stößen von Oben oder Unten, als wenn die Scheibe nicht rotirte, und lässt man bei gelöstem Schraubchen *v* das Plättchen *c* bloss in einen Zahn der Kreisscheibe *K* eingreifen und fixirt so die Stange in ihrem Winkel gegen die Verticale, so bringt ein leiser Druck auf einen Arm der Gabel *G* eine Seitenbewegung um die Verticale hervor.

Hat man als Gegengewicht die Gabel mit dem tiefen herabhängenden Cylinder so angeschraubt, dass für die horizontale Lage der Stange das Gleichgewicht vorhanden ist, und zeigt sich bei nicht rotirender Scheibe, auch wenn man dieselbe hebt oder senkt, keine Tendenz derselben in ihre frühere Lage zurück zu kehren, so bemerkt man, wenn sie rotirt und man nun der Stange eine andere Lage in ihrer Vertical-Ebene gibt, dann, nachdem man sie eine Weile in derselben ruhig gehalten, sich selbst überlässt, dass allmählich eine horizontale Seitenbewegung der Scheibe beginnt, welche äusserst langsam vor sich geht, während der Winkel gegen die Verticale unverändert bleibt, und je nachdem man die Stange aufwärts oder abwärts in ihrer Vertikal-Ebene verrückt hat, eine entgegengesetzte Richtung hat. Bringt man die Stange vorsichtig in ihre ursprüngliche Lage zurück, so hört sogleich jede Seitenbewegung wieder auf.

Beachtet man, dass im vorigen Experimente, wenn der durchbohrte Cylinder aufgeschraubt ist, der Schwerpunkt des beweglichen Theils des Apparats in den Drehpunkt, bei angehängtem Cylinder aber unterhalb desselben fällt, so liegt die Vermuthung nahe, dass die mit der Neigung der Stange sich verändernde Lage des Schwerpunktes im zweiten Falle der Grund der Seitenbewegung ist, und man überzeugt sich davon leicht in folgender Weise: Hat man nämlich wieder den durchbohrten Cylinder zum Gleichgewichte scharf eingestellt und hängt, während die Scheibe rotirt, ein noch so kleines Uebergewicht z. B. eine Pappscheibe in denselben ein, so stellt sich sofort diese Seitenbewegung ein. Dasselbe geschieht, wenn man den durchbohrten Cylinder mit einem vorher zugefügten Uebergewicht zur Gleichgewichtslage eingestellt hat und dieses während der Rotation der Scheibe wegnimmt oder

den Cylinder etwas näher nun dem Drehpunkte rückt; aber die Seitenbewegung ist der vorigen jetzt entgegengesetzt. Man kann daher durch Verschiebung des Cylinders oder Abheben und Zulegen von Uebergewichten die Seitenbewegung sofort umkehren. Bei gleich starker Rotation der Scheibe wächst sie oder nimmt ab, je nachdem der Druck, der sie hervorruft, stärker oder schwächer ist. Ist er sehr stark, so geht auch die Seitenbewegung sehr rasch vor sich, und bringt man gar kein Gegengewicht auf die Tragstange, so hat man den überraschenden Anblick, dass nun die messingne Scheibe, als sei sie dem Einflusse der Schwere ganz entzogen, sich rasch um die Verticale herumdreht. Hat man die Tragstange selbst bis ans Ende aus der Hülse herausgezogen und sie dann festgeklemmt, so vermag ein kräftiger Zug noch die Erscheinung hervorzurufen, und löst man gleich nachdem die Scheibe in Rotation versetzt, die Schraube an der Hülse und zieht die Stange heraus, so kann man sie mittelst einer Oese, die auf dem äussern Ringe ist, in der Schlinge einer Kordel aufhängen und sie eine geraume Zeit an derselben herumtragen, ehe die Axe herabsinkt. Wenn kein Gegengewicht aufgeschoben und besonders wenn die Stange weit aus der Hülse hervor gezogen ist, zeigt sich das Eigenthümliche, dass die Scheibe nun in starken Sätzen bei ihrer Seitenbewegung auf und nieder hüpft, indem sie zugleich weit kürzere Zeit ihre (mittlere) Lage gegen die Verticale beibehält. — Nimmt die Rotation der Scheibe allmählich ab, so nimmt die Seitenbewegung dagegen zu. Einzelne Stösse versetzen die Stange ebenso in Schwankungen, wie wenn die Seitenbewegung nicht vorhanden ist. Ein Druck von Oben nach Unten oder umgekehrt beschleunigt die Seitenbewegung oder verzögert sie, je nachdem er in der Richtung des Uebergewichtes auf die Scheibe oder ihr entgegengesetzt wirkt.

Uebt man auf das Metallplättchen c einen horizontalen Seitendruck aus und geschieht derselbe im Sinne der bereits stattfindenden Seitenbewegung, so senkt sich die Scheibe, wenn der durch das Uebergewicht auf dieselbe ausgeübte Druck bei nicht vorhandener Rotation sie heben würde, dagegen hebt sie sich im umgekehrten Falle, und sucht der Druck auf das Plättchen für sich eine der vorhandenen entgegengesetzte Seitenbewegung hervorzubringen, so hebt sie sich im erstern Falle und senkt sich im letztern. Hält man die Gabel mittelst des Plättchens c oder schraubt das Schräubchen v gegen ihre Axe, so dass die Seitenbewegung aufhört, so stellt sich die Stange sofort vertical. Fixirt man sie, indem man das Plättchen in einen Zahn der Kreishülse eingreifen

lässt, unter dem augenblicklich stattfindenden Winkel gegen die Verticale, so hört die Seitenbewegung sogleich auf, vorausgesetzt, dass die Säule gehörig vertical steht, und nicht durch eine schiefe Lage derselben eine Tendenz zu einer Bewegung nach der einen oder anderen Seite vorhanden ist; lässt man sie wieder frei, so beginnt bei Fortdauer der Rotation der Scheibe auch die Seitenbewegung wieder.

Achtet man auf die Richtung der Seitenbewegung mit Rücksicht auf die anfangs gedachte Stellung des Beobachters, so sieht man, dass, wenn das Uebergewicht auf der Seite des Drehpunktes ist, wo die Scheibe sich befindet, der rechte Theil der Scheibe sich von seiner Rechten entfernt, der linke dagegen sich seiner Linken nähert; ist es auf der andern, wirkt es also hebend auf die Scheibe, so nähert sich umgekehrt der rechte Theil der Scheibe seiner Rechten und der linke entfernt sich von seiner Linken. Es ist selbstredend, dass, wenn die Kordel in entgegengesetztem Sinne auf die Axe aufgewickelt wäre, der Beobachter bei unveränderter Stellung also nun die Scheibe entgegengesetzt mit dem Zeiger einer Uhr rotiren sähe, die Seitenbewegung in beiden Fällen die umgekehrte sein würde.

Man gewinnt eine klare Uebersicht über diese Bewegungen, wenn man sich Figur 7, aus dem Drehpunkt O als Mittelpunkt eine Kugel von sehr grossem Halbmesser beschrieben und die durch den Drehpunkt gehende Verticale O V aufwärts und ebenso die Axe der Scheibe E verlängert denkt, bis sie, jene in T, diese in P die Kugel treffen. Legt man dann durch TP einen grössten Kreis TPQ und beschreibt mit TP um T als Pol einen Kugelkreis Prl wo r für einen Beobachter, der in T nach P sieht, rechts, l links liegt, und ist ABC die Richtung, in der sich die Scheibe dreht, so tritt Folgendes ein: Sucht eine die rotirende Scheibe E angreifende Kraft den Pol P aufwärts in der Richtung PT zu treiben, so weicht P nach Pr aus; treibt sie P abwärts nach PQ, so weicht er nach Pr aus; drängt sie dagegen P nach Pr, so hebt sich P in der Richtung PT und drängt sie nach Pr, so senkt sich P nach PQ.

Um die oben gedachten, durch Stösse verursachten Schwankungen und oft äusserst langsamen Bewegungen des Mittelpunktes der Scheibe schärfer beobachten und sofort wahrnehmen zu können, lasse ich auf die blanke Metallscheibe des Rotationskörpers in einem dunkeln Zimmer mittelst des Heliostats durch eine grosse Oeffnung, oder auch durch eine offene Fensterscheibe Sonnenlicht schief auffallen. Das reflectirte Licht bildet auf der gegenüberstehenden Wand

einen kleinen lichten Kreis, in dem ein Paar sehr dunkler, vom Mittelpunkt aus sich erweiternder Streifen zusammenstossen, so dass sich ein Kreuz bildet, welches die leisesten Bewegungen des Mittelpunktes auf höchst anziehende Weise in verstärktem Maasse zeigt. Selbst die Rotation der Scheibe, wenn diese langsamer wird, lässt sich an demselben vollkommen deutlich erkennen, indem in dem Mittelpunkte des Bildes sich lichte und dunkle dünne Streifen durchschneiden, welche zugleich mit der Scheibe, während das Kreuz an seiner Stelle bleibt, wie die Speichen eines Rades rotiren. Hat man keinen Heliostat mit Uhrwerk, welcher das Sonnenlicht immer in gleicher Richtung auf die Scheibe sendet, so muss man eine Tageszeit wählen, wo die Sonne hoch am Himmel steht, indem sonst ihre eigene Bewegung mit in's Spiel kommt. Eine völlige Verdunkelung des Zimmers ist nicht nöthig, auch kann man sich Abends des Lichtes einer kräftigen Lampe bedienen, um welche man einen Schirm so stellt, dass ihr Licht nur auf die Scheibe fällt.

Ist nun Gleichgewicht vorhanden und ist M Figur 8 I das Bild des Mittelpunktes der nicht rotirenden Scheibe, sind ferner MU oder 1, MO oder 2, ML oder 3, MR oder 4 die Richtungen, nach welchen eine die Scheibe angreifende Kraft dieselbe bewegen würde, und nehmen wir zunächst an, es sei ein andauernder Druck, so sieht man, wenn M¹ in Figur 8 II das Bild des Mittelpunktes der in der Richtung O¹ R¹ U¹ rotirenden Scheibe ist, dieses entsprechend der obigen Ordnung sich nach M¹ L¹ oder 1¹, nach MR¹ oder 2¹, nach MO¹ oder 3¹, endlich nach M¹ U¹ oder 4¹ fortschreiten. Bei umgekehrter Rotation der Scheibe sind auch alle resultirenden Bewegungen umgekehrt. Ist das Gleichgewicht nicht vorhanden und findet also eine Seitenbewegung bereits statt, so treibt ein anhaltender Druck das Bild nach einer Richtung, welche die Resultante der horizontalen Bewegung und derjenigen ist, nach welcher der Druck nach dem Vorigen die rotirende Scheibe, wenn Gleichgewicht vorhanden wäre, drängen würde.

Interessanter sind noch die Erscheinungen, wenn der Druck nur ein schnell vorübergehender, ein Stoss ist. Je nachdem er die nicht rotirende Scheibe Fig. 8 I. nach M¹O, M¹U, M¹L oder M¹R treiben würde, bewirkt er, dass die rotirende die Spiralen A, B, C oder D beschreibt Fig. 9, wo A, B, C, D den Ort des Bildes auf der Wand im Augenblicke des Stosses bezeichnen. Je stärker die Rotation, um so näher liegen die Endpunkte der Spiralen dem Anfangspunkte, um so schneller geschieht ihre Beschreibung und um so

weniger ist die Richtung im Anfange der Spirale erkennbar, nach welcher der Stoss die nicht rotirende Scheibe treiben würde. Ist z. B. die Rotation sehr schwach, so bewirkt der erste Stoss nach MO, dass das Bild die gleich anfangs stark ansteigende Spirale A' mit wenigen grossen Windungen beschreibt.

Findet in Folge eines Uebergewichtes — und man wählt zu dem Ende ein möglichst schwaches — eine Seitenbewegung statt, von der wir annehmen wollen, dass sie das Bild von der Linken zur Rechten, nach MR Fig. 8 I, fortschreiten lasse, so hat ein Stoss, welcher die nicht rotirende Scheibe in der Richtung MO, MU, ML oder MR treiben würde, zur Folge, dass die rotirende die Spiralen E, F, G, H beschreibt. Hat die Rotationsgeschwindigkeit abgenommen, also die Seitenbewegung zugenommen, so rücken die Spiralen weiter auseinander. Hat man das Pendel auf die Tragstange aufgeschoben, so beschreibt das Bild die Spiralen I oder K, je nachdem das Uebergewicht auf der Seite der Scheibe oder der andern ist. —

Die Erscheinungen, welcher unser Apparat bietet, wenn er als Bohnenberger'scher in der **gewöhnlichen** Weise gebraucht wird, also der Rotationskörper eine Scheibe oder ein Sphäroid ist, deren Schwerpunkt genau im gemeinsamen Mittelpunkt der Ringe liegt, bedürfen nach dem Vorhergehenden kaum noch der Erwähnung. Ist kein Uebergewicht in den innern Ring eingesetzt, so bleibt die Axe in jeder Lage in ihrer Stellung und folgt auch dem leisesten Drucke, rotirt aber die Scheibe, so leistet ihre Axe gegen Stösse, welche sie in eine andere Lage zu versetzen suchen, einen starken Widerstand, doch nur so lange, als der äussere Ring mit der Tragstange nicht festgehalten wird; wenn dieses aber geschieht, folgt sie ihnen wieder mit derselben Leichtigkeit. Ein anhaltender Druck auf den äussern Ring, der eine Rotation um die Verticale zu erzielen sucht, bewirkt eine Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene, ein Druck auf den innern Ring zu einer Bewegung der Axe in der Vertical-Ebene bringt dagegen eine Seitendrehung um die Vertical-Axe hervor. Die Richtung jeder dieser Bewegungen so wie die Wirkung eines in den innern Ring eingesetzten Uebergewichtes sind aus dem Obigen und aus Fig. 7. ersichtlich, wenn man beachtet, dass der Drehpunkt O jetzt in den Mittelpunkt der Scheibe E fällt.

Die besonderen Erscheinungen, welche das Polytrop bietet, sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, später erwähnt werden, ebenso andere Versuche, welche sich mit dem obigen Apparate unter besondern Verhältnissen anstellen lassen.

§. 4.

Versuchen wir nun, auf elementare Weise uns von den obigen Erscheinungen Rechenschaft abzulegen.

Es seien Fig. 10. I. $ABCD$, $E C D F$ zwei sich in CD schneidende Ebenen, und ein in der erstern sich bewegendes Körper von der Masse m gelänge in einem Punkte G ihrer Durchschnittslinie senkrecht auf dieselbe mit einer Geschwindigkeit an, welche ihn als trägen Körper in der Zeiteinheit von G nach H brächte, so wird er, wenn er von jenem Augenblicke in die Ebene $E C D F$ übergeht, in Folge der von ihm erlangten Bewegungsgrösse $m \cdot GH$, von seinem Gewichte abgesehen, gegen diese neue Ebene einen Druck ausüben, der durch $m \cdot HI$ dargestellt ist, wenn HI die Länge der von H auf die Ebene gefällten Senkrechten bezeichnet. Die Geschwindigkeit, die er als träger Körper in der Ebene haben würde, wenn diese fest wäre, würde GI , also der Verlust an Geschwindigkeit $= GH - GI$ sein. Errichtet man auf HG im Punkte H und in der Ebene IGH eine Senkrechte KH , so ist $GK > GH$, also $GK - GI$ oder $IK > GH - GI$. Aber IK ist $= \frac{KH^2}{KG}$, also $GH - GI < \frac{KH^2}{KG}$, und

um so mehr kleiner als $\frac{KH^2}{HG}$, Ist nun der Winkel der Ebenen

IGH unendlich klein, so ist KH ebenfalls unendlich klein, während HG endlich ist, also ist $GH - HI$ oder der durch den Uebergang in die neue Ebene bewirkte Verlust an Geschwindigkeit ein Unendlich kleines der zweiten Ordnung, welches unendlich mal wiederholt noch eine unendlich kleine Grösse sein würde, und wäre die Ebene $E C D F$ nur zum Theil fest, so würde dieser Verlust noch geringer sein.

Wäre GH nicht senkrecht gegen die Durchschnittslinie CD , sondern schief, Fig. 10 II, so könnte man statt GH eine mit CD parallele Geschwindigkeit HH^1 und eine auf DC senkrechte GH^1 setzen, von denen HH^1 , da sie den Körper parallel CD fortschieben würde, auf den Druck der in Folge seines Ueberganges als bewegendes Kraft auf die zweite Ebene gewissermassen frei wird, keinen Einfluss äussern könnte, und es tritt also hier GH^1 an die Stelle von GH im Vorigen.

Denkt man sich nun, während alle Punkte einer materiellen Ebene nach Richtungen, welche alle der Ebene angehören, in Bewegung sind, drehe sich dieselbe durch eine äussere Kraft um eine Linie in ihr oder eine ihr parallele

Linie um einen unendlich kleinen Winkel, so wird je nach der Richtung und Grösse der im Augenblicke der Drehung bereits stattfindenden (nicht durch dieselbe hervorgebrachten) Geschwindigkeit jeder einzelne Massenpunkt auf die Ebene in ihrer nächstfolgenden Lage senkrecht gegen dieselbe einen Druck äussern, welcher sich für denselben nach dem Vorigen beurtheilen lässt und je nach der Art seiner Verbindung mit den übrigen auf diese zurückwirken und mit den von ihnen herrührenden Impulsen sich zu einer Gesamtwirkung auf die ganze Ebene in der neuen Lage zusammensetzen wird.

Fig. 11 Ist die Ebene eine kreisförmige Scheibe, *Fig. 11*, welche sich um ihren Mittelpunkt M nach der Richtung $A C B D$ dreht, und denkt man sich die Drehkräfte $p q, p_1 q_1, p_2 q_2, p_3 q_3$, welche auf die einzelnen Massenpunkte p, p_1, p_2, p_3 tangential gegen die Halbmesser $M p, M p_1, M p_2, M p_3$ wirken, nach zweien auf einander senkrechten Durchmessern $A B, C D$ zerlegt, so sind die $A B$ parallelen Seitenkräfte $p r, p_1 r_1$ der Punkte im obern Theile $A C B$ der Scheibe unter sich gleichgerichtet, ebenso die $A B$ parallelen $p_2 r_2, p_3 r_3$ im untern Theile, diese aber jenen entgegengesetzt, und beide setzen sich zu einem Kräftepaar $P R, P^1 R^1$ zusammen. In gleicher Weise geben die $C D$ parallelen Seitenkräfte $p s, p_3 s_3$ auf der linken und $p_1 s_1, p_2 s_2$ auf der rechten Seite von $C D$ das Kräftepaar $P S, P^1 S^1$, und es hat wegen der Gestalt und Gleichartigkeit der Scheibe das erstere Kräftepaar mit dem andern ganz gleiche Wirkung.

Nehmen wir an, der Durchmesser $A B$ sei horizontal, *Fig. 12*, und es gelange die Scheibe, deren Axe $M O$ *Fig. 12* ist, durch Drehung um den festen Punkt O aus der Lage I indem sie sich senkt, in die benachbarte Lage II , so werden, wenn man in dieser die Linien $P S, P^1 S^1$ den gleichbenannten Kräften in der vorigen parallel und gleich macht, und nun $P S, P^1 S^1$ nach dem Obigen in die Seitenkräfte $P G, P H$ und $P^1 G^1, P^1 H^1$ zerlegt, die auf der Scheibe senkrechten, also mit $M O$ parallen $P G, P^1 G^1$ ein Kräftepaar bilden, welches den Druck angibt, der in Folge des Uebergangs aus der einen Lage in die andere auf die Ebene ausgeübt wird, während $P H, P^1 H^1$ zugleich mit dem Kräftepaar $P R, P^1 R^1$ die Drehung um die Axe $O M$ fortsetzen wird und zwar die Stetigkeit der Lageveränderung vorausgesetzt, mit unveränderter Stärke. Durch diesen Druck wird der Punkt M gedrängt, sich in der horizontalen $P P^1$ und zwar in der Richtung von M nach P , also zur Linken des Beobachters, zu bewegen; wie man noch deutlicher sieht, wenn man das Kräftepaar durch ein anderes in derselben Ebene liegendes,

und ihm ganz gleiches TU , T^1U^1 , welches OM unmittelbar angreift, ersetzt, da letzteres rücksichtlich seiner Drehkraft um den festen Punkt O die Wirkungsfähigkeit einer einzigen nach MP gerichteten Kraft MX hat, deren Moment $OM \cdot MX$ dem Unterschiede der Momente $OT \cdot T^1U^1$ und $OT \cdot TU$ gleich ist. Die Folge der ersten Wirkung der Kraft K und der Rotation der Scheibe ist also ein Antrieb zu einer Rotation der Scheibe um die Vertical-Axe OV . Wird dieser Antrieb dadurch, dass man die Horizontal-Axe der Gabel gleich anfangs festhält, überhaupt die Axe OM verhindert, aus ihrer Verticalebene herauszutreten oder durch die Reibung und andere Widerstände gänzlich vernichtet, so verhält sich der Apparat für eine fernere Wirkung der Kraft K und der Rotation wie zuvor und es behält folglich auch die Axe OM so lange ihre leichte Beweglichkeit in dieser Ebene. Findet dieses aber nicht statt, so wächst mit den aufeinander folgenden Antrieben zur Drehung um die Vertical-Axe die Kraft um diese Widerstände zu bewältigen, und von dem Augenblicke an, wo dieses geschieht, stehen die Massentheilchen unter dem Einflusse zweier Rotationen, deren eine die Rotationsaxe unter unveränderlichem Winkel um die Verticale treibt, so dass sie für den auf der über O hinaus verlängerten Rotationsaxe stehenden Beobachter, welcher die Scheibe in der Richtung der Zeiger einer Uhr sich drehen sieht, von oben herab gesehen in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, während die andere die Drehung der Massentheilchen der Scheibe um die Rotationsaxe bewerkstelligt. Beide vereinigen sich zu einer Rotation um eine Axe, deren Lage man findet, wenn man von dem Scheidepunkt O aus auf der dann stattfindenden Lage der Axe OM und ebenso auf OV Linien OD , OJ abträgt, welche den Winkelgeschwindigkeiten, das heisst, den Geschwindigkeiten, welche ein Punkt in einer Entfernung gleich der Einheit um diese Axen annehmen würde, proportional sind und nach den Seiten dieser Axen von O aus sich erstrecken, nach welchen die Rotationen für ein in O befindliches Auge als gleichgerichtet z. B. in der Richtung der Zeiger einer Uhr vor sich gehend, erscheinen würden, und alsdann die Diagonale OF des durch OJ und OE bestimmten Parallelogramms $EOJF$ zieht, indem durch diese Diagonale nicht bloss die Lage der augenblicklichen Drehaxe, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe in dem gegebenen Augenblicke bestimmt ist. Der Punkt resp. die Punkte, in welchen sie die Scheibe trifft, sind während desselben in Ruhe, sie bildet die Unveränderlichkeit der Rotation vorausgesetzt, fortwährend mit der Verticalaxe und

der Rotationsaxe dieselben Winkel, trifft aber, indem sie sich mit der Letztern um jene gleichsam bewegt, die Scheibe von einem Augenblicke zum andern stets in andern Punkten. Sie bildet mithin die gemeinschaftliche Berührende zweier geraden Kegel, von denen der eine die Verticale zur Axe hat, der andere die Rotationsaxe, der erstere im Raume fest ist und der letztere auf jenem sich abrollt. Da die augenblickliche Drehaxe von der im Körper festen Rotationsaxe, welche bei unserer Annahme eine freie Axe ist, abweicht, so halten sich die Schwungkräfte um dieselbe nicht mehr im Gleichgewicht; sie bedingen im Vereine mit dem aus der beschleunigenden Kraft K hervorgehenden Kräftepaar die Verlegung der augenblicklichen Drehaxe und zugleich für die im Körper feste Drehaxe kegelförmige Drehungen oder Schwankungen, welche um so kleiner sind, je geringer jene Abweichung ist, oder je grösser die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe im Vergleich zu der Geschwindigkeit ist, welche die Rotationsaxe und mit ihr die Scheibe durch die Kraft K in einem unendlich kleinen Zeittheilchen erlangt haben würde, also mit der Grösse der Kraft K und der Entfernung ihres Angriffspunktes auf der Rotationsaxe zunehmen; deshalb hüpfte auch die Scheibe im Fessel'schen Apparate sehr stark, wenn man die Stange weit herauszieht und kein Gegengewicht angebracht ist. Will man den vorhergehenden Satz über die Zusammensetzung der Drehungen *) nicht als bekannt voraussetzen, so darf man nur beachten, dass, sobald die Drehung um die Verticalaxe beginnt, die Scheibe gegen ihren in der Verticalebene liegenden Durchmesser CD eine andere Lage einnimmt, welche in Fig. 13 mit II. bezeichnet ist, und dass wenn wieder PR , P^1R^1 das aus der Zerlegung der Rotationskräfte hervorgehende gegen diesen Durchmesser senkrechte Kräftepaar in der Lage I. darstellt, durch den Uebergang in die Lage II, ähnlich wie vorhin, aus demselben zwei gegen die neue Lage senkrechte, entgegengesetzt gerichtete Druckkräfte PU , P^1U^1 entstehen, welche wieder OM , welches der zweiten Lage angehört, parallel sind und den Mittelpunkt M und die Axe OM in der Verticalebene heben, also der fernern Drehung der Axe durch die Kraft K nach entgegengesetzter Richtung

*) Ueber das Princip der Zusammensetzung der Drehungen, welches von Frisi ums Jahr 1750 entdeckt worden. (Frisius de Rotatione Op. II. 134, 157 und Cosmographia II, 24) siehe Poinsot's Neue Theorie der Drehung, deutsch von Schellbach, Berlin 1851; auch in Ohm's Mechanik III. Th. §. 65 und in Duhamels analyt. Mechanik, übersetzt von Eggers. Leipzig 1853 I, S. 20 findet sich dasselbe erörtert.

entgegenwirken. Ist dieses Gleichgewicht vorhanden, so wird durch eine Hemmung oder Förderung der Drehung um die Verticale diese Gegenwirkung gegen die Kraft K geschwächt oder gestärkt, die Axe senkt sich oder steigt. Uebrigens darf man nicht unbeachtet lassen, dass durch die, wenn auch schwache Rotationsgeschwindigkeit um die Verticalaxe die Theilchen der Scheibe ein Bestreben erhalten, sich in horizontaler Richtung zu entfernen, welches für die der Axe näher liegenden Punkte z. B.: C schwächer, für die fernern z. B.: D stärker ist, als dasjenige, welches der Mittelpunkt der Scheibe durch diese Rotation erhält, und dessen Gesamtwirkung bei einer einzelnen Scheibe, je nachdem der Winkel VOM ein stumpfer ist, wie in der Figur, oder ein spitzer, die Wirkung der Kraft K zum Senken der Axe entweder verstärken oder sie schwächen wird. Will man sich experimental davon überzeugen, so darf man nur der Tragstange im Fessel'schen Apparate, ohne das die Scheibe rotirt, eine Drehung um die Verticale geben; sie senkt sich alsdann sofort mit Heftigkeit im erstern Falle, im letztern dauert diese Drehung eine Weile fort. Noch belehrender und zugleich ein Beleg für die obige Erklärungsweise ist folgender Versuch. Man setzt nämlich auf die früher gedachte Platte der Centrifugal-Maschine unsern Apparat zwischen den Stiften fest, fixirt die Axe der Gabel mittelst des Schraubchens v und setzt, während das Uebergewicht z. B.: bei der Scheibe ist, diese in Rotation. Gibt man alsdann mittelst der Kurbel der Centrifugalmaschine der Platte eine Umdrehung in der Richtung, in welcher bei Nichtfixirung der Gabelaxe die Umdrehung um die Verticale erfolgen würde, so kann man bei einiger Vorsicht eine Geschwindigkeit der Platte erzielen, welche derjenigen, die in jenem Falle stattfände, möglichst gleich ist; alsdann verharrt die Axe der Scheibe in ihrem Winkel gegen die Verticale, dreht man stärker, so hebt sie sich, dreht man langsamer, so senkt sie sich und fällt sofort, wenn die Drehung aufhört.

§. 5.

Die Betrachtungsweise im vorigen §. kam im Grunde darauf hinaus, das System während einer unendlich kleinen Zeit, zunächst unter dem Einflusse der beschleunigenden Kraft anzunehmen und dann den Einfluss der rotatorischen Kräfte in anfänglicher Richtung und Stärke auf den Körper in der neuen Lage zu untersuchen. Wollte man umgekehrt verfahren, oder auch sofort die gleichzeitige Wirkung beider

Einflüsse auf die Scheibe ermitteln, so würde man die Wirkung der Kraft K zur Drehung von OM in der Verticalebene durch ein System von parallelen und unter sich gleichen, die einzelnen Massentheilchen der Scheibe angreifenden Kräften, von denen in Fig. 14 die in dem über dem horizontalen Durchmesser AB liegenden Theile ACB angebrachten in der Richtung OM , die in dem untern Theile ADB angebrachten in der Richtung MO wirken, ersetzen können.

Betrachten wir hier nur die gleichzeitige Wirkung und sind p, p_1, p_2, p_3 vier symmetrisch gelegene Punkte, $p_t, p_1 t_1, p_2 t_2, p_3 t_3$ Tangentialkräfte, $p_k, p_1 k_1, p_2 k_2, p_3 k_3$ die parallelen, die Kraft K rücksichtlich ihres drehenden Einflusses ersetzenden Kräfte, und zwar die erstere $p_1 k_1, p_2 k_2$ in der Richtung OM , die letztern $p_2 k_2, p_3 k_3$ in der Richtung MO wirkend, endlich $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$ die in den einzelnen Massenpunkten sich ergebenden Mittelkräfte, so wird eine durch AB gelegte Horizontalebene von p_m nicht, wie von p_t , in einem Punkte der verlängerten AB , sondern in einem Punkte e , der von N aus gesehen zur Linken von AM liegt, getroffen, von $p_1 m_1$ in einem Punkte e^1 , der zur Linken von MB liegt, von $p_2 m_2$ in einem Punkte e_2 , der ebenfalls zur Linken von MB , dagegen von $p_3 m_3$ wieder in einem Punkte e_3 , der zur Linken von MA liegt, getroffen.

Die vereinigte Wirkung der Kräfte $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$ geht also dahin, die, von O aus betrachtet, zur Linken liegende Hälfte der Scheibe gegen die Linke des Beobachters zu rücken, die zur Rechten liegende von der Rechten zu entfernen, was rücksichtlich der Axe OM ein Streben zur Folge hat, diese in derselben Höhe in entgegengesetzter Richtung mit der Bewegung eines Uhrzeigers um die Verticale zu führen; allein sie ist darauf nicht beschränkt. Denn wären die Massenpunkte frei, so dass sie den gedachten Mittelkräften folgen könnten und $p_m, p_1 m_1, p_2 m_2, p_3 m_3$ die im ersten Augenblicke zurückgelegten Wege, so würde, wenn man sich M mit m, m_1, m_2, m_3 verbunden dächte, von diesen Linien die beiden erstern Mm, Mm_1 mit OM grössere, die letztern Mm_2, Mm_3 kleinere Winkel als Mp, Mp_1, Mp_2, Mp_3 , bilden, es resultirt hieraus für die Scheibe ein Streben, den Winkel CMO zu vergrössern, dagegen OMD zu verkleinern, welches eine wenn auch äusserst kleine Senkung von AB und der Scheibe überhaupt nothwendig zur Folge hat. Sobald jene Rotation um die Verticale beginnt, tritt dieselbe, wie oben gezeigt worden, der ferneren Wirksamkeit der Kraft K zur Senkung der Scheibe entgegen. Je grösser die Rotation der Scheibe gegen die Wirksamkeit der Kraft K ist, also die Tangentialkräfte p_t ,

$p^1 t^1, p t^2, p^3 t^3$ gegen die horizontal gerichteten $p k, p_1 k_1, p_2 k_2, p_3 k_3$, um so näher liegen die resultirenden $p m, p^1 m^1, p_2 m_2, p_3 m_3$ den Richtungen der erstern, um so näher also auch die Punkte e, e_1, e_2, e_3 dem Durchmesser AB , und folglich wird um so geringer die Rotation um die Vertikale und zugleich die anfängliche Senkung der Scheibe sein. *)

Kürzer, obwohl vielleicht nicht anschaulicher, würde man zu dem vorigen Ergebniss gelangen, wenn man sich die Massen des obern und untern Theiles der Scheibe in den Punkten P, P^1 der Symmetrie-Axe CD vereinigt, alle auf der Scheibe senkrechten k im obern Theile durch die Kraft $P L$, im untern durch $P^1 L^1$ und die die Scheibe rotirenden Kräfte durch ein einziges Kräftepaar in der Ebene derselben $P R, P^1 R^1$ parallel AB ersetzt dächte und nun in Betracht zöge, dass das resultirende Kräftepaar $P J, P^1 J^1$ auf die Scheibe den Einfluss äussert, 1. den Winkel AMO zu verkleinern, mithin OMB zu vergrössern, 2. den Winkel CMO zu verkleinern, dagegen OMD zu vergrössern, und der Apparat beiden Wirkungen im ersten Augenblicke nur durch eine Bewegung seiner Axe OM von der Rechten zur Linken unter gleichzeitiger kleiner Senkung Folge leisten kann. Wird daher die Axe gleich anfangs oder im Laufe der Bewegung in ihrem Winkel gegen die Vertikale fixirt, so kann die Seitenbewegung nicht eintreten oder hatte sie bereits statt, so muss dieselbe sofort aufhören; es wird der drehende Einfluss der Kraft K um die Horizontalaxe, welcher im Vereine mit der Rotationsgeschwindigkeit die Seitenbewegung einleitet und unterhält, dadurch aufgehoben. — Man könnte auch von M aus auf der Axe MO und der Horizontalen MB Stücke MX, MY diesen Kräftepaaren proportional abtragen; die Resultirende MZ würde alsdann die Richtung der Axe des resultirenden Kräftepaares haben und zugleich dessen Grösse proportional sein. Nimmt MX in Folge der Widerstände, welche die Reibung und der Widerstand der Luft entgegensetzen, allmählich ab, während MY dasselbe ist, so liegt MZ näher bei MY und die Drehung der Scheibe um die Vertikale muss stärker werden. Es darf übrigens bei der ganzen obigen Betrachtung nicht übersehen werden, dass wenn K nicht ein sehr bedeutendes Gewicht oder ein starker Stoss ist, die Kräfte $p k$ gegen die Kräfte $p t$, wenn die Scheibe schnell rotirt, äusserst klein sind.

*) Wir haben uns absichtlich bei der obigen Betrachtungsweise länger verweilt, weil sich in ähnlicher Weise von den Störungen eine allgemeine Vorstellung gewinnen lässt, welche auf die Bahn eines um einen Centalkörper M sich bewegenden Körpers p die Anziehungskraft eines dritten Körpers übt, der bald auf der einen, bald auf der andern Seite dieser Bahn steht.

§. 6.

Im Vorigen vertritt die Kraft K das Gewicht der Scheibe, wenn das Gewicht des Dreharms sammt dem des Ringes durch ein Gegengewicht aufgehoben ist, und, ist das Gewicht beider durch ein Gegengewicht oder die Art der Aufhängung, wie im Bohnenberger'schen Apparate aufgehoben, die Wirkung eines Uebergewichtes, oder eines beständigen, sich gleichbleibenden Druckes, welcher den Dreharm zu senken sucht. Wirkte K in entgegengesetzter Richtung also zur Hebung der Scheibe, oder rotirte sie bei derselben Richtung von K in entgegengesetztem Sinne, so muss die Rotation um die Verticale offenbar eine der betrachteten entgegengesetzte sein. Ueberhaupt wird man nach dem Gesagten sich von den Figur 8 II dargestellten, aus einem anhaltenden Drucke resultirenden Bewegungen leicht Rechenschaft geben können. Indem diese Bewegungen selbst Gegenwirkungen zur Folge haben, erklären sich nun auch ohne Schwierigkeit die Spiralen, welche durch einzelne Stösse hervorgebracht werden. Betrachten wir einen, welcher die Spirale A erzeugt, also die nicht rotirende Scheibe nach MO , Figur 8 I, treiben würde, so weicht die rotirende Figur 8 II nach M^1R^1 aus, wird sich aber zugleich je nachdem der Stoss im Vergleich zur Rotation der Scheibe stärker oder schwächer ist, etwas über der Horizontalen erheben und unter dem Einflusse beider Bewegungen zunächst den Bogen ab beschreiben, in b wird die mit der Bewegung MR auftretende senkende Gegenwirkung in der Richtung M^1U^1 , Figur 8 II, vorherrschend und führt mit der in der Richtung MR noch fortdauernden Seitenbewegung den Mittelpunkt der Scheibe abwärts durch den Bogen bc , in c ist die Bewegung in der Richtung M^1R^1 durch die in Folge der Senkung eintretende Gegenwirkung in der Richtung M^1L^1 vernichtet, und diese letztere führt, während die Senkung fort dauert, die Scheibe durch den Bogen cd , in d ist nun auch die senkende Bewegung durch die in Folge der Seitenbewegung in der Richtung ML stattfindende Gegenwirkung aufwärts nach M^1O^1 vernichtet, die Bewegung in der Richtung ML dauert fort und treibt mit der Gegenwirkung in der Richtung MO den Mittelpunkt aufwärts durch den Bogen de u. s. w. bis die Scheibe zur Ruhe kommt. Ist die rotirende Scheibe nicht balancirt, sondern schreitet sie um die Verticale z. B. in der Richtung M^1R^1 , Figur 8 II, fort, so machen einzelne Windungen, welche ein Stoss erzeugt, die allgemein fortschreitende Bewegung des Centrums mit und rücken folglich auseinander, daher die Figuren E, F, G, H .

Der Grund, wesshalb die rotirende Scheibe sowohl wenn eine Seitenbewegung stattfindet als nicht, gegen jegliche Stösse ein um so grösseres Beharrungsvermögen besitzt, je stärker die Rotation, ergibt sich aus der Natur der dadurch bewirkten, spiralförmigen Bewegungen von selbst.

Ist der die Scheibe tragende, innere Ring mittelst der Scheibe p und des Plättchens q senkrecht gegen den äussern, den wir in der Verticalebene annehmen, gestellt, so kann ihr Gewicht, überhaupt eine in der Verticalebene der Tragstange wirkende Kraft keine Seitenbewegung mit der Rotation der Scheibe veranlassen, weil sie mit dieser in derselben Ebene liegt oder doch ihr parallel ist; es wird die Scheibe der Kraft ebenso folgen als wenn sie nicht rotirte. Steht der innere Ring unter einem andern Winkel gegen den äussern, so kann man die alsdann stattfindende Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe, indem man sie durch die Länge einer auf ihrer Axe vom Mittelpunkt der Scheibe aus aufgetragenen Linie darstellt, nach einer auf dem äussern Ringe senkrechten, also horizontalen und nach einer in dessen Ebene fallenden, auf dieser senkrechten Richtung zerlegen; alsdann trägt nach dem Gesagten die erstere Componente nichts zu einer Seitenbewegung bei, die letztere aber, mit unserm Normalfalle übereinstimmende, ist nothwendig kleiner als die, aus deren Zerlegung sie hervorgegangen ist. Man begreift daher, wie die obigen Erscheinungen je nach dem Winkel der beiden Ringe sich ändern müssen.

Auch die Erscheinungen, welche das Polytrop zeigt, lassen sich nach dem Obigen leicht vorhersehen. Da der Drehpunkt zwischen den beiden Scheiben liegt, so wird ein Druck in der Vertical-Ebene der Axe, der die eine Scheibe, wenn sie nicht rotirte, senkte oder Figur 8 I in der Richtung MU triebe, die andere heben oder in der Richtung MO bewegen. Rotiren also die Scheiben vom Drehpunkt aus gesehen nach derselben Richtung, z. B. wie Figur 8 unterstellt, so würde für die erstere eine Seitendrehung, Fig. 8 II, nach M^1L^1 , für die andere eine entgegengesetzte nach M^1R^1 daraus hervorgehen; ist also Gleichgewicht vorhanden und rotiren die gleich schweren Scheiben gleich stark, so tritt keine Seitenbewegung ein und der Druck oder Stoss behält seine volle Wirksamkeit; das System zeigt keine Festigkeit. Sind die Entfernungen vom Drehpunkte ungleich, so ist das Drehmoment des Gewichtes des Theils nach der einen Seite desselben grösser als das des Theils nach der andern, also wird, wenn beide Scheiben wieder gleich stark rotiren, eine Seitendrehung eintreten, deren Grösse und Richtung durch

den Unterschied der Dreharme bedingt ist. Der Apparat wird aber wieder leicht beweglich sein und Stößen leicht folgen, weil diese die Mittelpunkte der Scheiben zur Beschreibung von Spiralen nach entgegengesetzten Seiten veranlassen würden. Hierin hat es auch seinen Grund, dass wenn man den kleinern Dreharm durch Gewichte so belastet, dass das Gleichgewicht hergestellt ist, durch das kleinste Uebergewicht das Gleichgewicht trotz der Rotation der Scheiben gestört wird, und dürfte sich daraus der Schluss nicht ziehen lassen, als »sei die Entfernung, in welcher die rotirende Masse sich von der Vertical-Axe befindet, von keinem oder von einem ausserordentlich geringen Einfluss auf die Drehung des Apparates.« (Poggend. XCI. S. 299.) — Rotiren die Scheiben vom Drehpunkte aus gesehen nach verschiedener (von einem Punkte auf der verlängerten Axe nach derselben) Richtung, also wie eine einzige Masse und ist Gleichgewicht vorhanden, so würde der vorige Stoss, wenn er die Scheibe, welche wie Fig. 8 II rotirt, zu senken suchte, für beide Scheiben sich zu einer Richtung nach M^1L^1 verbinden, also der Apparat um so weniger der ursprünglichen Richtung desselben folgen, und nur eine spiralförmige Bewegung der Axe daraus hervorgehen. Andere Versuche, welche mit diesem Apparate wie mit dem Fessel'schen sich anstellen lassen, und oben erwähnt sind, übergehen wir.

§. 7.

Es ist oben der Centrifugalkräfte, welche bei diesen Rotations-Erscheinungen mitwirken, gelegentlich gedacht; allein sie verdienen eine nähere Beachtung und man kann eine allgemeine Einsicht in ihre Wirksamkeit selbst ohne mathematische Kenntnisse gewinnen.

Wie aus dem Obigen erhellet, ist nämlich die Seitenbewegung abhängig von der Grösse und Richtung der Rotations-Geschwindigkeit und der Grösse und Richtung des Drehmomentes der Kraft K , das letztere aber hängt ab von der Entfernung ihres Angriffspunktes vom Drehpunkte, oder, wenn nur das Gewicht des Rotationskörpers die beschleunigende Kraft bildet, von der Entfernung des Schwerpunktes vom Drehpunkte, und seiner Entfernung von der durch letztern gehenden Verticalen. Wenn also unter übrigens gleichen Umständen die Winkel des Dreharms mit der Verticalen sich zu 180° ergänzen, so werden die letztern Entfernungen, also die Drehmomente, gleich sein, mithin müssten auch die Seitenbewegungen gleich sein. Allein wie

bereits angedeutet worden, wirkt, je nachdem der Winkel der Axe mit der Richtung der Schwere ein stumpfer oder spitzer ist, die aus der Seitenbewegung hervorgehende Centrifugalkraft ebenfalls in der Richtung der letztern, der Kraft K , oder ihr entgegengesetzt. Mithin hat auch die Seitenbewegung in diesen Fällen nothwendig zwei verschiedene Werthe und nur wenn der Winkel ein rechter ist Einen. Fixirt man daher den Dreharm der Scheibe am Fesselschen Apparate zunächst unter einem stumpfen Winkel gegen die Richtung der Schwere und setzt, während bei der Scheibe ein sehr kleines Uebergewicht vorhanden ist, dieselbe in Rotation, lässt ihre Axe dann frei und senkt, nachdem man die Grösse der Geschwindigkeit der Seitendrehung an der Bewegung des horizontalen Zeigers eben erkannt hat, die Scheibe, so dass ihre Axe nun einen spitzen Winkel bildet, der jenen, bei welchem der Beharrungszustand eingetreten ist, zu 180° ergänzt, so zeigt sich der Winkel mit der Verticalen wieder eine geraume Zeit constant, aber die Seitendrehung ist nun eine merklich verchiedene. War das Uebergewicht bei der Scheibe, so ist bei einem stumpfen Winkel die Bewegung rascher, weil die Centrifugalkraft jetzt ebenfalls senkend wirkt, bei dem ergänzenden spitzen dagegen, kleiner weil sie jetzt dem Uebergewicht entgegenwirkt. Indem man das Experiment wiederholt und die Axe zuerst unter einem spitzen, dann unter dem Ergänzungswinkel gegen die Richtung der Schwere stellt, überzeugt man sich, dass nicht Abnahme der Rotations-Geschwindigkeit der Scheibe der Grund ist. Ein anderer belehrender Versuch ist folgender:

Man bringt den Apparat auf die Platte der Schwungmaschine, und indem man durch Verschiebung das cylindrische Gegengewicht zum Gleichgewicht scharf eingestellt hat, versichert man sich an der Theilung der verticalen Kreishülse, dass wenigstens 20° beiderseits der Verticalen das Gleichgewicht fort dauert, sobald man die Stange nach der einen oder andern Seite neigt; dann stellt man sie nahe der einen Grenzlage, bei welcher sie einen stumpfen Winkel mit der Verticalen bildet, und, nachdem man die Gabelaxe durch das Schraubchen v festgestellt hat, setzt man die Scheibe in Rotation. Während man nun den Ring, der sie trägt, einen Augenblick leise hält, setzt man die Platte durch die Kurbel der Centrifugal-Maschine langsam in eine solche Bewegung, dass die Platte, von Oben gesehen, sich entgegengesetzt mit einem Uhrzeiger dreht. Man kann es dann bei vorsichtiger Führung der Kurbel leicht erreichen, dass die Axe der Scheibe ihren Winkel gegen die Verticale nicht

ändert; dreht man nun aber nur ein wenig stärker, so steigt die Scheibe, dreht man noch so leise umgekehrt, so senkt sie sich, und geht über die Lage, in der ihre Axe horizontal ist hinaus, bis ihr Winkel mit der Verticalen die andere Grenzlage oder eine Grösse erreicht hat, der jenen zu 180° ergänzt; hat man fortdauernd mit derselben (sehr geringen) Geschwindigkeit gedreht, so verharrt jetzt die Axe wieder in ihrem Winkel gegen die Verticale. — Hier wirkt also die durch die Rotation der Platte bewirkte Centrifugalkraft allein und gerade so wie ein Uebergewicht, das im ersten Falle senkend, im andern hebend auf die Scheibe wirkt.

Hat man Rotationskörper verschiedener Gestalt oder von derselben Grundform, in denen aber das Verhältniss der Dimensionen ein verschiedenes ist, so werden hierdurch die Erscheinungen ebenfalls wesentlich abgeändert und der Grund liegt wieder in dem Einflusse, welchen die Centrifugalkraft alsdann äussert.

Ist z. B. der Rotationskörper ein Cylinder das eine Mal von sehr geringer Höhe gegen den Durchmesser der Basis, oder eine Scheibe, das andere Mal von grosser Länge, und setzt man sie nach einander in den Ring unseres Apparats, so dass ihre Schwerpunkte genau in den Mittelpunkt desselben fallen, steckt die Tragaxe des äussern in die verticale Säule und fixirt sie durch das Schraubchen v , so bewirkt, wenn man nun den Apparat auf die Platte der Centrifugal-Maschine setzt, wie Fig. 15, und die Axen der Cylinder gegen die Verticale neigt, eine Rotation der Platte, gleichviel, nach welcher Seite sie geschieht, wenn die Cylinder selbst nicht rotiren, dass die Axe der Scheibe sich vertical, dagegen die Axe des langen Cylinders sich horizontal stellet. Die Centrifugalkraft sucht also bei der Scheibe den nach Oben gerichteten Theil ihrer Axe MP zu heben oder den Pol P dem Pol T , der auf der nach oben verlängerten, durch den Mittelpunkt der Scheibe gehenden Lothlinie liegt, zu nähern, dagegen bei dem langen Cylinder davon zu entfernen. Hiernach lässt sich vorhersehen, was erfolgt, wenn die Cylinder in Rotation versetzt werden. Nehmen wir an, die Rotation geschehe bei beiden so, dass sie für ein Auge in P entgegengesetzt mit der Richtung eines Uhrzeigers von sich geht, und es stehe der Apparat zunächst mit der Scheibe auf der Platte. Dreht man nun die Platte der Centrifugalmaschine so, dass sie von Oben gesehen in der Richtung eines Uhrzeigers fortschreitet, so erkennt man aus dem oben §. 3 mit Rücksicht auf Fig. 7. Erörterten, dass hieraus und der Rotation der Scheibe eine Kraft entsteht, welche sich einer fernern Annäherung von P

an T entgegengesetzt, und bei einiger Behutsamkeit in der Drehung der Platte bleibt wirklich der Winkel der Axe mit der Verticalen constant, während die geringste entgegengesetzte Drehung ein Aufrichten der Axe zur Folge hat. Wünschenswerth für diesen Versuch ist es, dass das Gewicht der Scheibe im Vergleich zu dem Gewichte des dieselbe tragenden Ringes und ihrer Axe möglichst gross sei, da die Centrifugalkräfte für diese eine entgegengesetzte Wirkung mit denen der Scheibe haben, daher die Wirkung dieser schwächen. Eine Scheibe, wie die Engländer sie construiren, aus starkem schmiedeisernem Ringe mit in denselben eingetriebener Scheibe ist deshalb empfehlenswerth. — Stellt man den vorigen Versuch dagegen mit dem langen Cylinder an, so muss man der Platte eine umgekehrte Drehung geben, damit die Neigung der Axe gegen die Verticale sich nicht ändert. Man begreift hiernach auch, dass es ein gewisses Verhältniss zwischen den Dimensionen des Cylinders geben muss, bei welchem der Winkel mit der Verticalen sich auch bei der leisesten Rotation der Platte, geschehe sie nach der einen oder andern Richtung, ändern muss; es wird ein solches sein, bei dem die Centrifugalkräfte für sich bei nicht stattfindender Achsendrehung des Cylinders keine Lageveränderung hervorbringen können. Wäre z. B. der Rotationskörper eine Kugel, so vermögen sie es offenbar nicht, und rotirt sie daher um eine Axe, die nicht mit der Verticalen zusammenfällt, so muss sie bei der geringsten Drehung um letztere ihren Winkel mit derselben verändern. Welches aber das Verhältniss der Dimensionen bei dem Cylinder und andern Körpern ist, lässt sich ohne Mathematik nicht darthun, wesshalb hierüber das Nähere in den folgenden mathematischen Entwicklungen, welche mit den vorhergehenden Schlüssen und Versuchen in vollkommener Uebereinstimmung stehen.

§. 8.

Ehe wir diese elementaren Betrachtungen schliessen, mögen einige Worte über den obigen Apparat als ein Versinnlichungsmittel für die Bewegung der Erde beigefügt werden.

Die Verschiedenheit der Jahreszeiten rührt bekanntlich daher, dass die Axe der Erde auf der Bahn, welche sie um die Sonne beschreibt, der Ekliptik, nicht senkrecht steht, sondern mit einer auf der letztern senkrechten Linie, der Axe der Ekliptik, einen Winkel von nahe 23° , $28'$ bildet und bei dem Umlauf der Erde um die Sonne sich nahezu stets parallel bleibt. Dieses Beharren der Erdaxe in ihrer Richtung versinnlicht unser Apparat, wenn er als Bohnenberger'scher,

wie oben §. 3. erwähnt, auf die Platte der Centrifugalmaschine in der Nähe des Randes gestellt und diese in Rotation versetzt wird; und die Spiralen, deren wir dort gedacht, zeigen, was die Wirkung stärkerer Stösse sein würde, welche die Erde von Aussen erhielte. Vollkommen bliebe die Axe der Erde sich parallel, wenn sie eine Kugel und nicht unter den Polen abgeplattet, ein Sphäroid wäre, und die Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes auf das Sphäroid nicht eine Veränderung in der Lage seiner Drehaxe zu bewirken suchten. Stellt Fig. 16 E den Mittelpunkt der Erde, als Kugel gedacht, pp^1 ihre Axe und zwar p den Nordpol, AA^1 den Aequator der Erde, S die Sonne dar, so ist die Ekliptik eine durch SE auf die Ebene pES senkrecht stehende Ebene. Wäre die Erde nun eine vollkommene Kugel, so würde jedem Massenpunkt Q derselben auf der einen Seite dieser Ebene ein symmetrisch gelegener auf der andern Q^1 entsprechen, den man findet, wenn man sich von Q eine Senkrechte auf die Ebene gefällt und sie um ein gleiches Stück nach der andern Seite verlängert denkt. Da die Entfernungen SQ , SQ^1 gleich sind, so ist die Anziehungskraft der Sonne für beide gleich, daher hat der eine kein grösseres Bestreben sich der Ebene der Ekliptik zu nähern als der andere, und es resultirt aus der Anziehung der Sonne nur ein Bestreben, den Mittelpunkt der Erde ihr zu nähern, aber keine Lageveränderung ihrer Axe gegen die Ebene der Ekliptik. Denkt man sich nun aber um den Aequator der Erde einen ringförmigen Wulst mit der vorhingedachten Kugel fest verbunden, so dass ihre Gestalt nun die eines Sphäroids wird und ist, Fig. 17 I die Stellung der Erde zur Zeit der Sommer-Sonnenwende, dagegen II ihre Stellung zur Zeit der Winter-Sonnenwende, so ist klar, dass in I die Massenpunkte des Wulstes A^1 unterhalb der Ekliptik näher an S liegen, also stärker als die oberhalb gelegenen, angezogen werden, in II aber diese die näher liegenden sind, also stärker als jene angezogen werden. Es wird also aus beiden Wirkungen in beiden Stellungen ein Bestreben des Wulstes hervorgehen, die Erdaxe aufzurichten und zwar den Punkt P , in welchem der verlängerte nördliche Theil der Erdaxe das Himmelsgewölbe treffen würde (den nördlichen Himmelspol des Aequators) dem Punkte T , in dem eine auf der Nordseite der Ekliptik errichtete Senkrechte ET dasselbe treffen würde, (dem nördlichen Himmelspole der Ekliptik) zu nähern, also jenen in der Richtung PT zu bewegen. Stände die Erde der Sonne so gegenüber, dass diese sich in der Ebene des Aequators befände, also zur Zeit der Frühlings oder Herbstes Tag

und Nachtgleiche, so würde die Anziehung der Sonne auf die oberhalb und unterhalb der Ekliptik liegenden Massenpunkte des Wulstes offenbar gleich sein, und es könnte aus ihr keine Einwirkung auf eine Lageveränderung des Wulstes also auch nicht der Axe hervorgehen. In allen andern Stellungen muss sie vorhanden sein, obwohl kleiner als in den beiden oben gedachten. Bei der geringen Abplattung der Erde (Aequatorialhalbmesser = 860 Meilen, Polarhalbmesser nahe 857 deutsche Meilen), wird man sich diesen Wulst sehr dünn vorstellen müssen, und die Einwirkung, welche er in Folge der Anziehungskraft der Sonne auf die mit ihm verbundene übrige Erdmasse zur Aufrichtung ihrer Axe ausübt, kann daher nur sehr gering sein. Da ferner die Anziehungskraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht, so begreift man, dass je grösser die Entfernung SE ist, um so kleiner wird die Verschiedenheit der Einwirkung auf die beiden Hälften des Wulstes sein. Daher sind bei der Sonne, ungeachtet ihrer grossen Masse, die die Erdaxe aufrichtenden Kräfte nur sehr kleine Grössen, aus welchen indessen eine mittlere Wirkung resultirt, welche schon nach Verlauf eines Jahres merkbar ist. Denken wir uns statt jener mit der Stellung der Erde zur Sonne veränderlichen Kräfte diese mittlere fortwährend wirksam, so wird sie in Vereinigung mit der Rotation der Erde, welche um p , in der bei p durch einen Pfeil bezeichneten Richtung geschieht, eine Bewegung des nördlichen Himmelspols des Erd-Aequators P senkrecht zu der Verbindungslinie TP desselben mit dem Pol der Ekliptik T hervorrufen und zwar so, dass, von T aus gesehen, P von der Linken zur Rechten wie der Pfeil auf dem Bogen Pr angibt, fortschreitet und sich P in einem Kreise um den Pol der Ekliptik T bewegt. Der Wulst wird jetzt grade so auf die Erde wirken, wie ein auf dem innern Ring des Bohnenberger'schen Apparates in der Nähe des untern Theils der Axe eingesetztes (äusserst kleines) Uebergewicht auf die rotirende Scheibe desselben, und es ist in §. 3 mit Rücksicht auf Fig. 7, in der eine übereinstimmende Bezeichnung gewählt ist, dargethan, wie diese Bewegung alsdann erfolgt. Bringt man dagegen in dem Apparate Nr. 3, Seite 9, die rotirende Scheibe theils in die verticale Lage des äussern Ringes, theils unter verschiedenen Winkeln gegen denselben, so erhält man gemäss dem §. 25 Erörterten eine Vorstellung davon, wie die Anziehungskraft der Sonne bei ihren verschiedenen Stellungen gegen die Ebene des Aequators in Verbindung mit der Rotation des Wulstes auf die Seitenbewegung des Pols bald schwächer bald stärker wirkt —

Dem Monde wird der geringe Einfluss, den seine Masse im Vergleich zu der Masse der Sonne auf den Aequatorwulst äussern kann, durch seine grosse Nähe reichlich ersetzt, so dass er jenen selbst bedeutend übertrifft, ungefähr im Verhältniss 5 : 2; auch er sucht die Axe senkrecht auf die Ebene seiner Bahn zu stellen, welche indessen mit der Ekliptik nicht zusammenfällt, sondern beständig einen Winkel von $5^{\circ}, 8', 48''$ macht.

Nehmen wir für einen Augenblick an, die Linie, in welcher seine Bahn um die Erde die Ekliptik durchschneidet, die Knotenlinie, falle stets mit der Durchschnittslinie des Erdäquators und der Ekliptik zusammen, und bezeichne Fig. 18 I E wieder den Mittelpunkt der Erde zur Zeit des Sommer-Solstitiums, wie in Fig. 17 I, AA^1 die Lage des Erdäquators, P dessen nördlichen Himmelspol, also EP die Richtung der Erdaxe, ET eine Senkrechte auf der Ekliptik und T ihren nördlichen Himmelspol, ferner MM^1 ein auf der Knotenlinie senkrechter Durchmesser der Mondsbahn, EL eine Senkrechte auf der Mondsbahn und zwar L den nördlichen Himmelspol derselben, so würde die mittlere aufrichtende Kraft, welche der Mond bei seinem Umlauf um die Erde auf den Aequatorwulst äussert, offenbar den Himmelspol des Erdäquators P in derselben Richtung Pr um L treiben, wie dieses eben von der Sonne mit Bezug auf T gezeigt worden; es würden sich also beide Wirkungen mit einander verbinden. — Allein während der Winkel der Mondsbahn gegen die Ekliptik derselben bleibt, bleibt sich die Durchschnittslinie dieser Ebenen nicht parallel, sie hat vielmehr eine sehr schnelle rückläufige Bewegung, oder der Himmelspol der Mondsbahn L bewegt sich selbst in einem Kreise in der Richtung $L L_1 L_2 L_3$ um den Pol der Ekliptik und kömmt erst nach einer Periode von ungefähr $18\frac{1}{2}$ Jahren (genauer 679,334 mittleren Sonnentagen) an seinen frühern Ort zurück, so dass, wenn heute die oben angenommene Lage statt hat, nach der Hälfte dieser Periode ungefähr $9\frac{1}{4}$ Jahren, die in Fig. 18 II dargestellte Lage statt findet. Auch in dieser erkennt man, dass der Mond den Himmelspol des Aequators in demselben Sinne Pr wie vorhin zu drehen suchen würde, aber der Neigungswinkel der Mondsbahn gegen den Aequator M^1EA oder, was dasselbe ist, der Winkel L_2EP ist jetzt grösser = $TEP + TEL_2$ oder = $28^{\circ}, 37'$, während in der vorigen Lage = $MEA = LEP = TEP - TEL$ oder $18^{\circ}, 19'$ war, und es werden daher auch die Entfernungen des Mondes von den beiden Theilen des Aequator-Wulstes A, A^1 jetzt von einander weniger verschieden sein als in der vorigen Lage. Der Mittelwerth der aufrich-

tenden Kräfte, welche der Mond bei den einzelnen Umläufen um die Erde auf ihre Axe übt, verändert sich demnach zugleich mit dem Fortschreiten des Himmelpoles seiner Bahn auf dem Kreise L, L_1, L_2 , er ist einmal am geringsten in L_2 , einmal am grössten in L und zweimal in L_1, L_3 hat er einen mittlern Werth. Dabei ist aber zu beachten, dass in der Lage II die anziehenden Kräfte eine mehr senkrechte Richtung gegen die Ebene des Aequators haben als in der Lage I, also auch die aus ihnen und der Rotation des Wulstes hervorgehende Seitenbewegung des Pols dort eine stärkere sein wird, wie eben bereits rücksichtlich der Sonne mittelst des Apparates Nr. 3 erläutert worden ist. — Es geht hieraus ein Schwanken des Poles P (Nutation) hervor, in Folge dessen er bei seiner langsamen Rundbewegung um den Pol T sich demselben bald nähert, bald wieder davon entfernt und eine wellenförmige Linie um denselben beschreibt. Stellt Fig. 19 T den Pol der Ekliptik vor und sind um T auf der Himmelskugel zwei Kreise beschrieben, der eine I mit einem Halbmesser $= 23^\circ, 28'$, der andere ganz ausgezogene II, mit einem Halbmesser $= 5^\circ, 8', 48''$, so wird auf dem Kreise II der Himmelpol der Mondsbahn L fortschreiten, dagegen der Kreis I der mittlere Ort für den Himmelpol des Aequators sein. Es seien nun L, L_1, L_2, L_3 die verschiedenen Stellungen des erstern, und der letztere befinde sich auf dem Kreise I in P_3 , wenn jener in L_3 oder seine Entfernung von P_3 die mittlere ist. Die Bewegung, welche P_3 alsdann erhält, ist nach dem oben Erörterten senkrecht auf $L_3 P_3$ und zwar, von L_3 aus gesehen, von der Linken zur Rechten gerichtet, und während L_3 sich auf seinem Wege L_3, L, L_1, L_2, L_3 , dem äusserst langsam fortschreitenden Pole P_3 zunächst von L_3 bis L nähert, dann von L nach L_1 und von L_1 nach L_2 davon entfernt, endlich von L_2 nach L_3 und L_3 nach L wieder nähert und demgemäss seine Einwirkung auf P_3 sich ändert, wird dieser nach P, P_1, P_2 u. s. w. geführt. Durch die gleichzeitige Wirkung der Sonne wird diese epicycloidale Curve in der Richtung $P_3 P_1$ verlängert, ohne dass indessen die periodischen Veränderungen in den Entfernungen des Himmelpols des Aequators vom Pol der Ekliptik sich dadurch verändern; die oscillatorische Bewegung hat genau dieselbe Dauer mit der Umdrehung des Pols der Mondsbahn um den Pol der Ekliptik, gerade so als wenn das durch die Sonne veranlasste Fortschreiten desselben um diesen Pol nicht vorhanden wäre. Es ist dieses ein specieller Fall von einem für die Himmels-Mechanik höchst wichtigen, allgemeinen Principe, und, was oben von den Curven erörtert

worden ist, welches das Bild der rotirenden Scheibe des Fessel'schen Apparates, wenn sie bereits in einer Seitenbewegung begriffen ist, unter der Einwirkung einzelner Stösse oder der Schwingungen des angehängten Pendels beschreibt — denen selbstredend kegelförmige Bewegungen der Axe entsprechen — bringt dieses Princip zu einer klaren Vorstellung.

Es ist hier nicht der Ort, auf die Erscheinungen alle einzugehen, welche die wellenförmige Bewegung des Himmelspols des Aequators um den Pól der Ekliptik verursacht; wir bemerken nur, dass die Durchschnittslinie beider Ebenen, die Linie der Tag- und Nachtgleichen, offenbar in Folge derselben eine rückläufige Bewegung, von Osten nach Westen, annehmen muss, welche jährlich $50^{\circ},1$ beträgt (Präcession), und sie ihren Kreislauf in 25868 Jahren vollendet.
