1854.

Programm

der

Realschule zu Düsseldorf,

mit welchem

zu den öffentlichen Prüfungen

am 28. und 29. August 1854

im

Namen des Lehrer-Kollegiums

ergebenst einladet

der

Direktor **Dr. Franz Heinen.**

Inhalt:

Düsseldorf.
Buchdruckerei von Hermann Voß.

1854.

Discussion de quelques courbes enveloppes.

1. L'équation

$$F\ (x,\ y,\ c) = 0,$$

représente une ligne déterminée tant que la constante c a une valeur déterminée. Mais si nous faisons parcourir à c toutes les valeurs possibles, nous obtenons une infinité de lignes différentes mais de même famille, dont chacune correspond à une valeur particulière de c. Le lieu géométrique qui touche toutes ces lignes, est appelé *la ligne enveloppe* ou *l'enveloppe* des courbes $F\ (x,\ y,\ c) = 0$, qui alors prennent le nom de *lignes enveloppées;* et la constante c est nommée le *paramètre.*

Pour trouver l'équation $\Phi(x,\ y) = 0$, ou $y = \varphi(x)$, de l'enveloppe, supposons d'abord l'équation des courbes données, écrite sous la forme

$$y = f\ (x,\ c).$$

Chaque point de l'enveloppe étant le point de contact de l'enveloppe avec une des courbes enveloppées, il faut que pour chaque x, y de l'enveloppe il existe les deux équations

$$f\ (x) = \varphi\ (x), \qquad \text{(I)}$$

et

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad \text{(II)}$$

Ces deux équations ne contiennent d'autres variables que x et c; donc, si nous déterminons c en fonction de x au moyen de la seconde équation et que nous substituions cette fonction de x dans la première équation, celle-ci ne contiendra plus que la variable x. Mais comme les deux équations subsistent pour toutes les valeurs de x appartenant à l'enveloppe, l'équation résultante en x devra être satisfaite par une infinité de valeurs de x, c'est à dire qu'elle sera identique; il faut donc

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad \text{(III)}$$

Cette équation diffère essentiellement de l'équation (II) puisque dans (III) la quantité c contenue dans f, est nécessairement fonction de x (à cause de (II)), tandis que dans (II) elle est évidemment considérée comme constante par rapport à x. Par conséquent l'équation (III) devra s'écrire

$$\frac{df}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} + \left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \text{(IV)}$$

où $\left(\frac{df}{dx}\right)$ est maintenant la même chose que $\frac{df}{dx}$ dans l'équation (II). Les équations (II) et (IV) fournissent

$$\frac{df}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = 0;$$

et comme c contient nécessairement x, il faut

$$\frac{df}{dc} = 0. \qquad \text{(V)}$$

Cette équation exprime la relation entre l'abscisse x d'un point de l'enveloppe et la variable c appartenant à la courbe individuelle qui touche l'enveloppe en ce point. Donc si nous faisons parcourir à c toutes les valeurs possibles, cette équation nous fournira les x correspondants de l'enveloppe, et comme chacun de ces points appartient en même temps à la courbe individuelle donnée par la même valeur de c, nous aurons les y de ces points en substituant ces valeurs de c et de x dans l'équation $y = f\,(x, c)$. Il s'ensuit que les deux équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad y = f\,(x, c),$$

nous fournissent tous les points de l'enveloppe, c'est à dire que les x, y qui satisfont à la fois à ces équations pour la même valeur de c, appartiennent au même point de l'enveloppe. Donc, si nous éliminons c entre ces équations, l'équation résultante en x, y exprimera la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de l'enveloppe, ou en d'autres termes, elle sera l'équation de cette ligne.

Reprenons maintenant le cas ordinaire, où la courbe enveloppée est donnée au moyen de l'équation

$$F\,(x, y, c) = 0.$$

Si dans cette équation nous mettons pour y sa valeur $f\,(x, c)$, elle sera évidemment identique; donc

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais pour les points de l'enveloppe c est une fonction de x déterminée par l'équation (V); on a donc:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} + \frac{dF}{dy} \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dc} \cdot \frac{dc}{dx}\right\} = 0.$$

A cause de (V), cette équation se réduit à

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dF}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Or, dans la partie $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, la variable c est considérée comme constante, donc $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ sont absolument les mêmes expressions que dans l'équation dérivée de la courbe enveloppée

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0; \qquad \text{(VII)}$$

et comme, à cause de (II), la dérivée $\frac{dy}{dx}$ appartenant à l'enveloppe est égale à la dérivée appartenant à l'enveloppée qui la touche au point x, y, l'équation (VII) réduit l'équation (VI) à

$$\frac{dF}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = 0,$$

d'où

$$\frac{dF}{dc} = 0.$$

Par conséquent on obtient l'équation de l'enveloppe en éliminant c entre les deux équations

$$F\,(x, y, c) = 0, \qquad \frac{dF}{dc} = 0.$$

Il s'en suit immédiatement qu'il n'existe pas de courbe enveloppe, lorsque la courbe enveloppée est algébrique par rapport à c et que son équation n'est que du premier degré en c, puisqu'alors l'équation $\frac{dF}{dc} = 0$ ne contient plus c.

Si au lieu d'un seul paramètre, la courbe enveloppée dépend de n paramètres, ces constantes dépendent généralement entre elles au moyen de $n - 1$ équations, de sorte qu'il n'en reste qu'une seule arbitraire. Au moyen de ces équations on exprimera alors toutes les constantes variables en fonction d'une d'elles, et ces expressions substituées dans $F\,(x, y) = 0$, fourniront alors une équation qui ne renfermera plus qu'une seule constante arbitraire.

2. Si l'équation $F = 0$ est du deuxième degré en c, on peut écrire immédiatement l'équation de l'enveloppe. On a en effet

$$F = Ac^2 + Bc + C = 0;$$

d'où

$$\frac{dF}{dc} = 2Ac + B = 0,$$

$$c = -\frac{B}{2A},$$

ce qui, substitué dans la première équation, fournit

$$\frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C = 0,$$

ou

$$B^2 = 4AC. \qquad \text{(VIII)}$$

3. Pour construire l'enveloppe par points, observons que l'équation $F(x, y, c) = 0$, résolue par rapport à c, fournit les valeurs de c appartenant aux courbes individuelles qui passent par un point donné quelconque x, y du plan. Mais pour les points x, y de l'enveloppe nous avons en outre l'équation $\frac{dF}{dc} = 0$, ce qui signifie que pour ces points l'équation $F = 0$, a deux racines c égales; ou en d'autres termes, que parmi les courbes individuelles qui passent par un point de l'enveloppe il y en a toujours deux qui coïncident. Réciproquement, *dès que parmi les courbes enveloppées qui passent par un point donné, il y a en a deux qui coïncident, ce point est un point de l'enveloppe.* Cette propriété peut aussi s'énoncer de la manière suivante:

Au point qu'elle a de commun avec l'enveloppe, chaque courbe enveloppée est coupée par une courbe enveloppée de moins que dans tous les autres points; ou bien, en séparant les racines imaginaires de l'équation $F(x, y, c) = 0$: Si F est d'un degré pair en c, chaque enveloppée est coupée dans le point de contact avec l'enveloppe par un nombre pair d'enveloppées, qui peut être zéro. Mais si F est d'un degré impair, le nombre des enveloppées qui coupent une enveloppée en un point de l'enveloppe, est toujours impair.

---

4. Appliquons maintenant ces considérations générales à la recherche de quelques courbes particulières :

I.

Les lignes enveloppées sont des droites données au moyen des relations entre les distances de deux ou plusieurs points fixes à ces droites.

Je désignerai ces points dans la figure par P', P'', etc., leurs coordonnées par x', y'; x'', y'' etc. et les distances correspondantes par p', p'' etc; la droite variable, marquée dans la figure par MN, sera représentée par l'équation

$$y = \beta x + b.$$

5. *La somme des carrés des distances de deux points à la droite est constante et égale à $2a^2$.*

Nous avons les équations

$$y = \beta x + b,$$

$$\frac{(y' - \beta x' - b)^2}{1 + \beta^2} + \frac{(y'' - \beta x'' - b)^2}{1 + \beta^2} = 2a^2.$$

L'élimination de b fournit:

$$(y' - \beta x' - y + \beta x)^2 + (y'' - \beta x'' - y + \beta x)^2 = 2a^2(1 + \beta^2),$$

ou

$$\beta^2[2a^2 - (x' - x)^2 - (x'' - x)^2] + 2\beta\,[(y' - y)(x' - x) + (y' - y)\\ (x'' - x)] - [(y - y)^2 + (y'' - y')^2 - 2a^2] = 0.$$

De là on obtient pour l'équation de l'enveloppe (numéro 2.),

$$[(y' - y)(x' - x) + (y'' - y)(x'' - x)]^2 - [(y' - y)^2 + (y'' - y)^2 - 2a^2]\\ \times [(x' - x)^2 + (x'' - x)^2 - 2a^2] = 0;$$

d'où

$$[(y' - y)(x'' - x) - (y'' - y)(x' - x)]^2 - 2a^2[(y' - y)^2 + (y - y)^2\\ + (x' - x)^2 + (x'' - x)^2] + 4a^4 = 0,$$

l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole. Pour la simplifier, il suffit de remarquer que jusqu'à présent les axes des coordonnées ont été tout à fait indéterminés; pour les déterminer par rapport aux points fixes nous pouvons donc faire trois suppositions arbitraires. Or, il conviendra de poser

$$x' = 0, \quad x'' = 0, \quad y' = -y'',$$

ce qui réduit l'équation à

$$a^2 y^2 + (a^2 - y'^2)\, x^2 = a^2 (a^2 - y'^2).$$

La courbe cherchée est donc une ellipse ou une hyperbole selon que a est plus grand ou plus petit que y', c'est à dire selon que la double somme donnée des carrés des distances est plus grande ou plus petite que le carré de la distance entre les deux points fixes. Les demi-axes sont a et $\sqrt{a^2 - y'^2}$, et l'excentricité est y'.

Donc, *si sur le petit-axe de l'ellipse ou sur l'axe imaginaire de l'hyperbole on prend deux points dont les distances au centre sont égales à l'excentricité, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ces points sur une tangente, est constamment égale au double carré du demi-grand-axe (ou du demi-axe réel).*

Le problème précédent se résout aussi directement au moyen de la figure.

Par le milieu O de P′ P″ (fig. I.) menons A B perpendiculaire à P′P″, faisons OA = OB = OP′, et des points P′, P″, B, abaissons les perpendiculaires P′ D, P″ G, BH, sur MN. Nous aurons alors

$$P'D^2 + P''G^2 = 2a^2;$$

mais

$$P'D^2 = P'H^2 - DH^2, \quad P''G^2 = P''H^2 - GH^2;$$

donc

$$P'H^2 + P''H^2 - (DH^2 + GH^2) = 2a^2.$$

Et comme $\qquad DH = P'B \sin P'BH,$

$$GH = P''B \sin BP''G = P'B \cos P'BH,$$

nous aurons

$$2a^2 = P'H^2 + P''H^2 - P'B^2 = P'H^2 + P''H^2 - 2y'^2,$$

ou bien

$$P'H^2 + P''H^2 = 2a^2 - 2y'^2,$$

ce qui prouve que le lieu géométrique du point H est un cercle qui a pour centre le point O et pour rayon $\frac{\sqrt{2a^2 + 2y'^2 - 2y'^2}}{2} = a.$

Et puisque H est le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur la tangente, il s'ensuit que MN est tangente à l'ellipse ou l'hyperbole dont B et A sont les foyers, y' l'excentricité et a et $\sqrt{a^2 - y'^2}$ les demi-axes.

Corollaire. La droite, dont les distances aux deux points fixes sont p', p'', est tangente commune aux deux cercles dont P′ et P″ sont les centres et p', p'' les rayons; et comme entre ces rayons il existe la relation $p'^2 + p''^2 = 2a^2$, ces cercles se coupent sur la circonférence qui a le milieu de P′P″ pour centre et $\sqrt{a^2 - \frac{P'P''^2}{2}}$ pour rayon. Donc, *si l'on a deux groupes de cercles concentriques et que l'on cherche les droites touchant à la fois deux cercles qui se coupent sur une circonférence donnée dont le centre est au milieu de la droite qui joint les deux centres, toutes ces droites envelopperont une ellipse ou une hyperbole de même centre que la circonférence.*

6. Au lieu de deux points fixes on peut prendre un nombre μ quelconque de points. L'équation de l'enveloppe sera alors

$$(\Sigma(y'-y)^2 - \mu a^2)(\Sigma(x'-x)^2 - \mu a^2) = (\Sigma(y'-y)(x'-x))^2$$

ou

$$\mu^2 a^4 - \mu a^2(\Sigma(x'-x)^2 + \Sigma(q'-q)^2) + \Sigma(q'-q)^2(x''-x)^2$$
$$= 2\Sigma(y'-y)(x'-x)(y''-y)(x''-x),$$

$$\mu^2 a^4 - \mu a^2(\Sigma(x'-x)^2 + \Sigma(y'-y)^2) + \Sigma[(y'-y)(x''-x)$$
$$- (y''-y)(x'-x)^2] = 0,$$

une équation qui, toutes les réductions faites, ne surpassera pas le deuxième degré.

Le résultat précédent n'est pas changé si l'on remplace les perpendiculaires par des droites qui font un angle donné avec la droite variable, car cela revient à supposer la quantité a^2 multipliée par le carré du sinus de cet angle.

7. *La différence des carrés des distances de deux points à la droite est constante.*

Les équations sont

$$y=\beta x+b,$$

$$\frac{(y'-\beta x'-b^2)}{1+\beta^2}-\frac{(y''-\beta x''-b)^2}{1+\beta^2}=a^2.$$

D'où l'on obtient pour l'équation de l'enveloppe

$$[y'x'-y''x''-y(x'-x'')-x(y'-y'')]^2$$
$$=[y'^2-y''^2-2y(y'-y'')-a^2][x'^2-x''^2-2x(x'-x'')-a^2].$$

Il est facile de voir que c'est l'équation d'une parabole. Pour la simplifier il faut donc faire disparaître les termes en y et en x^2, ce qui a lieu lorsqu'on pose

$$y'=y''=0,$$

d'où

$$y^2(x'-x'')^2=-a^2[x'^2-x''^2-2x(x'-x'')-a^2],$$

ou

$$y^2=2\,\frac{a^2}{x''-x'}\,x-a^2\,\frac{x'^2-x''^2-a^2}{(x'-x'')^2}.$$

Pour ramener cette équation à la forme ordinaire on n'a qu'à poser

$$x'^2-x''^2=a^2,$$

ce qui donne

$$y^2=2\,\frac{a^2}{x'-x''}\,x,$$

ou bien, si l'on observe que $x'-x''$ est, indépendamment du choix de l'origine des coordonnées, la distance d des deux points,

$$y^2=2\,\frac{a^2}{d}\,x,$$

l'équation d'une parabole dont l'axe est la droite qui joint les deux points donnés et dont le paramètre est égal à $2\frac{a^2}{d}$.

Pour trouver le sommet de la parabole, il faut résoudre l'équation

$$x'^2-x''^2=a^2,$$

ce qui donne

$$x'+x''=\frac{a^2}{x'-x''}=\frac{a^2}{d};$$

et comme on a encore

$$x'-x''=d,$$

on obtient

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{d} + d\right),$$

$$x'' = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{d} - d\right).$$

Donc le sommet se trouve plus près du point P″ que du point P′; de plus il se trouve entre les deux points ou sur le prolongement de la droite qui les joint, selon que a est plus petit ou plus grand que d; la concavité de la parabole est toujours tournée vers le point P′; la distance du foyer au sommet est $\frac{1}{2}\frac{a^2}{d}$ et le foyer lui-même se trouve au milieu de P′P″.

Réciproquement, si la parabole est donnée, on connaît le rapport $\frac{a^2}{d}$, mais une des quantités a et d reste arbitraire; les deux points P′ et P″ seront donc construits en portant sur l'axe de la parabole à partir du foyer deux distances égales mais arbitraires. Ce qui fournit le théorème suivant: *Si sur l'axe d'une parabole on prend deux points quelconques également distants du foyer, la différence des carrés des perpendiculaires abaissées de ces points sur les tangentes sera constante et égale au produit du paramètre par la distance entre les deux points.*

Pour résoudre le problème précédent sans le secours de la géométrie analytique, soit encore O (fig. II) le milieu de la droite P′P″. Nous aurons alors

$$P'A^2 - P''B^2 = a^2;$$

mais

$$P'A^2 = P'C^2 - AC^2$$
$$P''B^2 = P''C^2 - BC^2,$$

donc, en observant que C est le milieu de AB,

$$P'C^2 - P''C^2 = a^2;$$

c'est à dire, que le lieu géométrique du point C est une droite perpendiculaire à P′P″. Par conséquent la droite MN est tangente à une parabole dont O est le foyer et dont cette perpendiculaire est la tangente au sommet. Les constantes de la parabole se détermineront facilement au moyen de la figure.

Ce problème fournit évidemment un théorème analogue au corrollaire du numéro précédent, avec la différence que les cercles se coupent sur une perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres.

8. *La distance d'un point P‴ est moyenne proportionnelle entre les distances de deux autres points P′, P″ à la droite.*

Les équations sont

$$y = \beta x + b,$$

$$\frac{y' - \beta x' - b}{\pm \sqrt{1+\beta^2}} \cdot \frac{y'' - \beta x'' - b}{\pm \sqrt{1+\beta^2}} = \frac{(y''' - \beta x''' - b)^2}{1+\beta^2},$$

d'où l'on tire

$$(y' - y - \beta(x' - x))(y'' - y - \beta(x'' - x)) = \pm (y''' - y - \beta(x''' - x))^2.$$

Dans cette équation il faut prendre le signe inférieur quand on suppose que la droite passe toujours entre les deux points P′, P″; mais on prendra le signe supérieur lorsqu'on veut que la droite coupe le *prolongement* de P′P″.

L'équation de l'enveloppe sera

$$[(x' - x)(y'' - y) + (x'' - x)(y' - y) \mp 2(x''' - x)(y''' - y)]^2$$
$$= 4[(x' - x)(x'' - x) \mp (x''' - x)^2][(y' - y)(y'' - y) \mp (y''' - y)^2],$$

d'où, en développant,

$$\begin{aligned} y^2[(x' + x'' \mp 2x''')^2 - (4 \mp 4)(x'x'' \mp x'''^2)] - 2xy(x' + x'' \mp 2x''') \\ (y' + y'' \mp 2y''') + x^2[(y' + y'' \mp 2y''')^2 - (4 \mp 4)(q'q'' \mp q'''^2)] \\ - 2y[(y'x'' + x'y'' \mp 2x'''y''')(x' + x'' \mp 2x''') - 2(x'x'' \mp x'''^2) \\ (y' + y'' \mp 2y''')] - 2x[(y'x'' + x'y'' \mp 2x'''y''')(y' + y'' \pm 2y''') \\ - 2(y'y'' \mp y'''^2)(x' + x'' \mp 2x''')] + (x'y'' + y'x'' \mp 2x'''y''')^2 \\ - 4(x'x'' \mp x'''^2)(y'y'' \mp y'''^2) = 0. \qquad \text{(IX)} \end{aligned}$$

Pour faire disparaître le terme en xy il faut poser

$$x' + x'' \mp 2x''' = 0, \qquad \text{(X)}$$

ou

$$y' + y'' \mp 2y''' = 0. \qquad \text{(XI)}$$

Comme la double ordonnée du milieu C (fig. III.) de la droite P′P″ est exprimée par $(y' + y'')$, l'équation (XI.) exige que cette ordonnée soit égale à l'ordonnée du troisième point prise avec son signe ou avec le signe contraire. Pour le signe supérieur il faut donc placer l'axe des x parallèle à la droite CP‴; mais pour le signe inférieur l'axe des x passera par le milieu K de CP‴. De là on voit que pour le signe inférieur les deux conditions (X et XI) peuvent être remplies à la fois, ce qui se fait en plaçant l'origine des coordonnées au point K. Mais pour le signe supérieur on ne peut remplir qu'une seule de ces conditions, parceque les deux axes des coordonnées ne peuvent pas être parallèles à la même droite. La dernière remarque suit aussi immédiatement de l'équation (IX), de la quelle les deux conditions employées à la fois, feraient disparaître tous les termes variables et la réduiraient ainsi à une équation entre des grandeurs données.

D'après cela il est évident que la différence des signes apporte aussi une différence dans les courbes, de sorte qu'il faut discuter les deux cas séparément.

A. Pour le signe supérieur l'équation (IX) combinée avec (XI) devient

$$\begin{aligned}y^2(x'+x''-2x''')^2 &- 2y[y'x''+x'y''-x'''(y'+y'')](x'+x''-2x''')\\ &- x(y'-y'')^2(x'+x''-2x''')+[x'y''+x''y'-x'''(y'+y'')]^2\\ &+(x'x''-x''')(y'-y'')^2=0,\end{aligned}$$

l'équation d'une parabole, dont il faut encore faire disparaître le terme en y et le terme constant. Pour y parvenir il faut poser

$$y'x''+x'y''-x'''(y'+y'')=0 \qquad \text{(XII)}$$

et

$$x'x''-x'''^2=0,$$

car la supposition $q'-q''=0$ exigerait que les trois points fussent en ligne droite.

Ces deux équations fournissent successivement

$$x'x''(y'+y'')^2=(y'x''+x'y'')^2,$$
$$(y'^2x''-y''^2x')(x'-x'')=0.$$

Le second facteur $x'-x''$ ne peut pas, en général, s'évanouir, puisque la direction de l'axe des y est déjà déterminée, tandis que cette condition exigerait que cet axe fût parallèle à $P'P''$; il faut donc

$$y'^2x''-y''^2x'=0.$$

La position des axes des coordonnées est donc déterminée au moyen des trois équations

$$\begin{aligned}y'+y''&=2y'''\\ x'x''&=x'''^2\\ y'^2x''&=y''^2x'.\end{aligned}$$

Pour construire la seconde de ces équations qui fournira la tangente au sommet de la parabole, il suffit de chercher le quatrième point S harmonique au point P''' et les pieds L, R des perpendiculaires abaissées des points P', P'' sur $P'''C$, et de prendre ensuite le milieu T de $P'''S$. Nous aurons en effet

$$P'''L : LS = P'''R : SR,$$
$$P'''T+TL : P'''T-TL = P'''T+TR : TR-P'''T,$$
$$P'''T : TL = TR : P'''T,$$

ou

$$TL \,.\, TR = P'''T^2.$$

Pour construire enfin l'axe de la parabole, il est préférable de se servir de la première équation (XII) puisqu'elle est du premier degré en y', y''. Or, par les constructions précédentes nous avons obtenu les valeurs de x', x'', x''' et de $y' - y'' = d = \mathrm{P'R} + \mathrm{P''L} = 2\mathrm{P'R}$, de sorte que cette équation fournira

$$y' = \frac{d\,(x' - x''')}{x'' + x' - 2x'''},$$

ou bien

$$y' : 2\mathrm{P'R} = \mathrm{RP'''} : 2\mathrm{P''C}$$

$$y' : \mathrm{P'R} = \mathrm{RP'''} : \mathrm{P'''C}; \quad y' - \mathrm{P'R} : \mathrm{P'R} = \mathrm{CR} : \mathrm{P'''C}.$$

On élèvera donc au point $\mathrm{P'''}$ une perpendiculaire à $\mathrm{P'''C}$, on fera $\mathrm{P'''W} = \mathrm{P'R}$ et l'on mènera par W et C une droite qui coupera le prolongement de $\mathrm{RP'}$, au point Z. La droite menée par ce point parallèlement à $\mathrm{P'''C}$ sera l'axe de la parabole, et le pied O de la perpendiculaire abaissée de T sur cette droite, le sommet de la parabole.

L'équation de la parabole sera maintenant

$$y^2 = \frac{(y' - y'')^2}{x' + x'' - 2x'''}\,x = \frac{\mathrm{P'R}^2}{\mathrm{P'''C}}\,x,$$

ou aussi

$$y^2 = \frac{(x' + x'' - 2x''')y'^2}{(x' - x''')^2}\,x = q'^2\,\frac{(\sqrt{x'} \mp \sqrt{x''})^2}{(x' \mp \sqrt{x'x''})^2}\,x =$$

$$= \frac{y'^2}{x'}\,x = \frac{y''^2}{x''}\,x.$$

La distance du foyer au sommet sera

$$\frac{y'^2}{4x'} = \frac{\mathrm{P'R}^2}{2\mathrm{P'''C}}.$$

La construction de la parabole se fait aussi au moyen des considérations suivantes :

D'abord il est clair que les droites $\mathrm{P'P'''}$ et $\mathrm{P''P'''}$ sont des tangentes à la parabole, car pour ces droites on a

$$p'''^2 = 0 = p'p'',$$

et comme de plus ce sont les seules tangentes qu'on puisse mener par ces points, les deux points $\mathrm{P'}$ et $\mathrm{P''}$ sont des points de la parabole (3). Un autre point de la courbe est le point D, milieu de $\mathrm{P'''C}$; en effet, pour chaque droite menée par ce point la perpendiculaire p''' est égale à la perpendiculaire q abaissée du point C; mais

$$q = \frac{1}{2}(p' + p''),$$

donc

$$p'''^2 = \frac{1}{4}(p'^2 + p''^2 + 2p'p''),$$

d'où l'on tire

$$(p' - p'')^2 = 0, \text{ ou } p' = p''.$$

Il ne passe donc par D que la seule tangente EF, parallèle à P'P'', ce qui prouve en même tems que P'''C est un diamètre conjugué à la corde P'P''. Nous avons donc 3 droites P'''P', P'''P'', EF, touchant la parabole aux 3 points P', P'', D, ce qui est plus que suffisant pour construire la parabole par des procédés connus. On pourra aussi tracer tant de tangentes qu'on voudra au moyen d'une construction analogue à celle qui nous a fait trouver la tangente au sommet.

Comme nous savons (par ces considérations) que l'axe de la parabole est parallèle à P'''C, on trouvera immédiatement le foyer G en faisant l'angle GP'P''' = CP'''P' et GP''P''' = CP'''P'', ce qui détermine en même temps la position de l'axe. La directrice (et par suite le sommet) se trouve en faisant RH = GP' et menant par H une perpendiculaire à P'''C.

Réciproquement, si, la parabole étant donnée, on demande de trouver les 3 points, il faut d'abord remarquer que ces points sont déterminés au moyen de 6 constantes, tandis que la parabole n'en exige que 4. Il s'ensuit que 2 des 6 constantes restent arbitraires mais fourniront les 4 autres constantes. Nous pourrons donc prendre arbitrairement le point P''' et construire les 2 autres points en menant le diamètre P'''C, qui coupe la parabole au point D, en faisant DC = DP''' et en menant par C la corde conjuguée à ce diamètre. Ou bien nous pourrons prendre les points P', P'' arbitrairement sur la parabole et chercher le point P''' par un procédé analogue.

9. B. Pour le signe inférieur, l'équation (IX.) combinée avec les deux équations (X et XI.), devient

$$8y^2(x'x'' + x'''^2) + 8x^2(y'y'' + y'''^2) - (x'y'' + x''y' + 2x'''y''')^2 + 4(x'x'' + x'''^2)(y'y'' + y'''^2) = 0.$$

Et si l'on pose encore pour déterminer la direction des axes,

$$x'y'' + x''y' + 2x'''y''' = 0,$$

on obtient enfin

$$y^2\frac{(x'x'' + x'''^2)}{2} + x^2\frac{y'y'' + y'''^2}{2} = -\frac{(x'x'' + x'''^2)(y'y'' + y'''^2)}{4},$$

l'équation d'une hyperbole.

Quant aux signes des termes de cette équation, il est clair que le coefficient $(x'x'' + x'''^2)$ doit être négatif, ce qui d'ailleurs est toujours possible si l'axe des y passe entre les points P′ et P″ de manière que $p'''^2 < p'p''$.

La discussion de cette courbe se fait aisément à l'aide de la figure, (fig. IV.) en admettant seulement que l'enveloppe cherchée est une courbe du seconde degré (et par suite de seconde classe).

D'abord les droites P‴P′ et P‴P″ touchent encore la courbe aux points P′ et P″. Puis, la courbe a des tangentes parallèles: si en effet nous désignons par h la distance entre les deux tangentes parallèles, nous aurons les équations

$$p'''^2 = p'p''$$

et

$$(p''' + h)^2 = (p' + h)(p'' - h),$$

ou

$$(p''' + h)^2 = (p' - h)(p'' + h),$$

selon la position de la première de ces tangentes. Ces équations fournissent

$$2h^2 = h(p'' - p' - 2p''')$$

ou

$$2h^2 = h(p' - p'' - 2p''');$$

d'où

$$h = 0$$

et

$$h = \frac{p'' - p' - 2p'''}{2} \text{ ou } = \frac{p' \quad p'' - 2p'''}{2}.$$

Ces expressions nous montrent qu'à chaque tangente il correspond une autre tangente qui lui est parrallèle, excepté les deux cas où

$$2p''' = p'' - p' \quad \text{et} \quad 2p''' = p' - p'';$$

c'est à dire que les deux tangentes passant par le point D, milieu de P‴C, n'ont pas de tangente parallèle. Cette propriété s'interprête en disant que les points de ces tangentes situés à l'infini, sont les points de contact avec la courbe, ou en d'autres termes, que ces tangentes sont des asymptotes et que par suite la courbe est une hyperbole dont le centre est en D. Pour construire ces asymptotes soit MN l'une d'elles, et nous aurons

$$\mathrm{P'E} \,.\, \mathrm{P''G} = \mathrm{P'''L}^2 = \mathrm{CH}^2,$$

donc

$$\mathrm{KP'} \,.\, \mathrm{KP''} = \mathrm{KC}^2,$$

ou

$$(\mathrm{CP'} - \mathrm{CK})(\mathrm{CP'} + \mathrm{CK}) = \mathrm{KC}^2,$$

et

$$\mathrm{KC}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{CP'}^2.$$

On n'aura donc qu'à déterminer le point K au moyen d'un triangle rectangle isocèle et à joindre D et K; l'autres asymptote DK' s'obtiendra en faisant CK' = CK (une propriété connue de l'hyperbole). Les bisectrices des angles formés par les asymptotes seront les axes. Connaissant les asymptotes et une tangente à l'hyperbole on trouvera aisément la longueur des axes par des procédés connus. Du reste, il est clair que les branches de l'hyperbole se trouveront dans les angles NDS et K'DM.

Si l'on demande encore de trouver les 3 points pour une hyperbole tracée, il faut observer qu'une hyperbole étant donnée au moyen de 5 constantes, il ne reste plus qu'une seule coordonnée arbitraire des 3 points, et que les 6 coordonnées de ces points dépendent entre elles par les 5 équations suivantes

$$\begin{gathered} x'+x''=-2x''', \\ y'+y''=-2y''', \\ x'y''+y'x''+2x'''y'''=0 \\ x'x''+x'''^2=-2a^2, \\ y'y''+y'''^2=2b, \end{gathered}$$

où a et b désignent les demi-axes de l'hyperbole.

On peut donc prendre arbitrairement un point P' sur l'hyperbole, ce qui détermine complètement la position des deux autres points. Et si ce point parcourt l'hyperbole, le point P'' la parcourra de même, mais le point P''' décrira une courbe, dont on obtient l'équation en éliminant x', y', x'', y'', entre ces équations, ce qui fournit

$$b^2x'''^2-a^2y'''^2=-a^2b^2,$$

l'équation de l'hyperbole *conjuguée.*

Comme le produit des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole sur les tangentes, est toujours égal au carré du demi-petit-axe (du demi-axe imaginaire) et que la tangente à l'ellipse ne passe pas entre les foyers tandis que la tangente à l'hyperbole y passe toujours, le problème des numéros 8 et 9 démontre le théorème suivant:

Etant donnés le centre d'une suite de cercles concentriques et les foyers d'une suite d'ellipses ou d'hyperboles confocales, si l'on construit les tangentes qui touchent à la fois un cercle et une ellipse (ou une hyperbole) dont le demi-petit axe est égal au rayon du cercle, ces tangentes enveloppent une parabole ou une hyperbole.

10. *Les distances de quatre points fixes à la droite sont proportionelles.*

Les équations sont

$$y=\beta x+b,$$

$$\frac{y'-\beta x'-b}{\pm\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{y^{\text{IV}}-\beta x^{\text{IV}}-b}{\pm\sqrt{1+\beta^2}}=\frac{y''-\beta x''-b}{\pm\sqrt{1+\beta^2}}\cdot\frac{y'''-\beta x'''-b}{\pm\sqrt{1+\beta^2}},$$

d'où

$$(y'-y-\beta(x'-x))(y^{\mathrm{IV}}-y-\beta(x^{\mathrm{IV}}-x))$$
$$=\pm(y''-y-\beta(x''-x))(y'''-y-\beta(x'''-x)).$$

Il est clair qu'il faut prendre le signe supérieur lorsqu'on veut que la droite passe à la fois entre les points P$'$, P$^{\mathrm{IV}}$ et entre les points P$''$, P$'''$, ou bien qu'elle ne passe ni entre P$'$, P$^{\mathrm{IV}}$, ni entre P$''$, P$'''$; mais on choisira le signe inférieur lorsqu'on demande qu'elle passe entre les points P$'$, P$^{\mathrm{IV}}$, mais non entre P$''$, P$'''$, ou bien qu'elle passe entre P$''$, P$'''$, mais non entre P$'$, P$^{\mathrm{IV}}$.

L'équation de l'enveloppe sera

$$4[(y'-y)(y^{\mathrm{IV}}-y)\mp(y''-y)(y'''-y)]\,[(x'-x)(x^{\mathrm{IV}}-x)$$
$$(\mp x''-x)(x'''-x)]=[(x'-x)(y^{\mathrm{IV}}-y)+(y'-y)(x^{\mathrm{IV}}-x)$$
$$\mp(x''-x)(y'''-y)\mp(x'''-x)(y''-y)]^2.$$

Le terme en xy disparaîtra par une des suppositions

$$y'+y^{\mathrm{IV}}=\pm(y''+y''')$$

ou $\qquad$ (XIII.)

$$x'+x^{\mathrm{IV}}=\pm(x''+x''').$$

Ces deux équations ne subsistent en même tems que pour le signe inférieur.

Si nous prenons d'abord le signe supérieur, la première de ces équations exige que l'axe des x soit parallèle à la droite DC qui joint les milieux de P$'$ P$^{\mathrm{IV}}$ et P$''$P$'''$. Et si nous posons encore

$$x'y^{\mathrm{IV}}+y'x^{\mathrm{IV}}-x''y'''-x'''y''=0,$$
$$\text{(XIV)}$$
$$x'x^{\mathrm{IV}}-x''x'''=0,$$

l'équation du lieu cherché se réduit à

$$y^2=4\,\frac{y''y'''-y'y^{\mathrm{IV}}}{x'+x^{\mathrm{IV}}-x''-x'''}\,x=2\,\frac{y''y'''-y'y^{\mathrm{IV}}}{\mathrm{CD}}\,x,$$

l'équation d'une parabole.

La seconde des équations (XIV.) nous montre que la tangente au sommet est la droite des puissances égales des deux cercles qui ont C et D pour centres et CB et DF pour rayons. De là on trouve les abscisses des 4 points, et ces valeurs substituées dans les premières des équations (XIII. et XIV.), fourniront les valeurs des ordonnées des 4 points et par suite la position de l'axe des x, si l'on observe que toutes les différences de deux ordonnées sont connues.

Si nous désignons par d et d' les projections de P$'$P$^{\mathrm{IV}}$ et de P$''$P$'''$ sur une droite perpendiculaire à CD, nous aurons les équations

$$d^2=y'^2+y^{\mathrm{IV}2}-2y'y^{\mathrm{IV}},\quad d'^2=y''^2+y'''^2-2y''y''',$$

et comme d'ailleurs

$$y' + y^{\mathrm{IV}} = y'' + y''',$$

il viendra

$$d^2 + 4y'y^{\mathrm{IV}} = d'^2 + 4y''y''',$$

$$4(y''y''' - y'y^{\mathrm{IV}}) = d^2 - d'^2$$

d'où l'on conclut (en ayant égard à l'équation de la parabole), que la concavité de la parabole est tournée du côté des deux points pour lesquels d a la plus grande valeur.

Sans faire usage des développements analytiques, on démontre par des considérations analogues à celles du numéro 9., que la courbe cherchée est une parabole parcequ'elle n'a pas de tangentes parallèles, et que l'axe est parallèle à CD parceque la tangente parallèle à CD est située à l'infini.

On peut aussi construire immédiatement la parabole en remarquant que $\mathrm{P'P'''}$, $\mathrm{P'P''}$, $\mathrm{P^{IV}P'''}$, $\mathrm{P^{IV}P''}$ sont des tangentes, qui par conséquent forment un quadrilatère complet auquel on sait inscrire une parabole, par exemple au moyen de la propriété que le cercle qui passe par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole, passe aussi par le foyer. Il est encore à remarquer qu'on peut construire une tangente parallèle à une direction quelconque, car cette tangente est la chordale commune des cercles, qui ont pour diamètres les projections des droites $\mathrm{P'P^{IV}}$ et $\mathrm{P''P'''}$ sur la droite perpendiculaire à la direction donnée. De plus il est facile de démontrer que deux autres tangentes sont fournies par les droites qui joignent les milieux L, K de $\mathrm{P'P''}$, $\mathrm{P'''P^{IV}}$ et les milieux R, S de $\mathrm{P'P'''}$, $\mathrm{P''P^{IV}}$.

Si le foyer est connu le sommet se trouve facilement quand on observe que la tangente au sommet est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes.

11. Reprenons l'équation générale de l'enveloppe cherchée, mais avec le signe inférieur.

En ayant égard aux deux équations (XIII.) elle devient

$$8y^2(x'x^{\mathrm{IV}} + x''x''') + 8x^2(y'y^{\mathrm{IV}} + y''y''')$$
$$= x'y^{\mathrm{IV}} + x^{\mathrm{IV}}y' + x''y''' + x'''y'' - 4(y'y^{\mathrm{IV}} + y''y''')(x'x^{\mathrm{IV}} + x''x'''),$$

et si nous posons encore

$$x'y^{\mathrm{IV}} + x^{\mathrm{IV}}y' + x''y''' + x'''y'' = 0,$$

nous aurons enfin

$$y^2\frac{x'x^{\mathrm{IV}} + x''x'''}{2} + x^2\frac{q'q^{\mathrm{IV}} + y''y'''}{2}$$
$$= -\frac{1}{4}(y'y^{\mathrm{IV}} + y''y''')(x'x^{\mathrm{IV}} + x''x'''),$$

l'équation d'une hyperbole, dont le centre se trouve au milieu de CD.

Pour la construction (fig. VI.) on connaît les 4 tangentes $P'P''$, $P'P'''$ $P''P^{IV}$, $P'''P^{IV}$, et le centre H de l'hyperbole (ce qui suffit déjà). De plus les droites menées par les milieux L, K, parallèlement aux droites $P'''P^{IV}$, $P''\,P'$ seront aussi des tangentes, car les 4 perpendiculaires sont égales deux à deux. Mais une considération plus générale fournira autant de tangentes qu'on voudra. Il est clair, en effet, que l'égalité

$$p'p^{IV}=p''p'''$$

n'est pas détruite si nous multiplions ces perpendiculaires deux à deux par le même facteur. Il s'ensuit qu'on a aussi

$$P''A\,.\,P'''B=P'A\,.\,P^{IV}B$$

et

$$P''S\,.\,P'''R=P'R\,.\,P^{IV}S,$$

en sorte que, un point de la tangente étant pris arbitrairement sur une des droites $P'P''$, $P'P'''$ $P''P^{IV}$, $P'''P^{IV}$, on trouvera au moyen de l'une de ces équations un second point sur une des trois autres droites. Il s'ensuit, en outre, que les deux droites $P'P''$ et $P^{IV}P'''$, de même que $P'P'''$ et $P^{IV}P''$, sont des droites que M. Steiner a appelées „Projectivische Gerade", qui engendrent toujours une section conique. La théorie de ces droites nous fournit par conséquent un moyen fort élégant de résoudre les quatre derniers problèmes.*)

Les deux problèmes des numéros 10 et 11 fournissent encore le théorème suivant:

Si l'on a deux systèmes de sections coniques confocales, les tangentes communes à deux ellipses ou à deux hyperboles, dont les demi-petits-axes sont égaux, enveloppent une parabole dont l'axe est parallèle à la droite qui joint les deux centres communs; mais si l'on prend les droites qui touchent à la fois une hyperbole de l'un de ces systèmes et l'ellipse correspondante (dont le demi-petit-axe est égal au demi-axe imaginaire) *de l'autre système, ces droites enveloppent une hyperbole dont le centre est le milieu de la droite qui joint les deux centres.*

II.

Les lignes enveloppées sont des cercles, dont les centres se trouvent sur une circonférence donnée.

12. Soient a, b les coordonnées du centre C, et r le rayon de la circonférence donnée. Si alors nous désignons par x', y' les coordonnées d'un point quelconque de cette circonférence, il est

*) *Steiner*, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geom. Gestalten. — Numéros 10., 38. suiv.

clair que le rayon du cercle variable correspondant sera toujours une fonction $f(x', y')$ de ces coordonnées (qui peut aussi se réduire à une constante).

L'équation du cercle variable est donc

$$(x-x')^2+(y-y')^2=f(x',y'), \qquad \text{(I.)}$$

où les coordonnées x', y' sont liées entre elles par l'équation

$$(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2. \qquad \text{(II.)}$$

Il faudrait maintenant substituer dans la première de ces équations la valeur de y' tirée de la seconde et éliminer ensuite x' entre l'équation résultante $F=0$ et sa dérivée $\frac{dF}{dx'}=0$. Mais au lieu d'effectuer l'élimination de y' il est plus simple de *supposer* seulement la substitution de la fonction de x' pour y'; ce qui fournit

$$\frac{dF}{dx'}=-2(x-x')-2(y-y')\frac{dy'}{dx'},-\left(\frac{df}{dx'}+\frac{df}{dy'}\ \frac{dy'}{dx'}\right),$$

Mais l'équation (II.) donne

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{x'-a}{y'-b};$$

donc

$$0=\frac{dF}{dx'}=-2(x-x')+2(y-y')\frac{x'-a}{y'-b}-\frac{df}{dx'}+\frac{df}{dy'}\cdot\frac{x'-a}{y'-b}.$$

ou (III.)

$$2(y-y')(x'-a)-2(x-x')(y'-b)-\frac{df}{dx'}(y'-b)+\frac{df}{dy'}(x'-a)=0.$$

Nous aurons par conséquent l'équation de l'enveloppe en éliminant x' et y' entre ces trois équations (I. — III.), ce qui se fait en déterminant x', y' au moyen des équations (I. et III.) et en substituant dans (II.) les valeurs trouvées. Cette élimination sera la plus simple, lorsque les deux équations sont du premier degré en x', y', et c'est ce cas seulement que nous allons examiner. Or les deux équations ne sont du premier degré que lorsque la fonction f est de la forme

$$x'^2+y'^2+cx'+ey'\mp g^2.$$

Par conséquent $f(x', y')$ n'est autre chose que le produit des deux segments d'une droite parallèle à un des axes des coordonnés, les segments étant mesurés entre le point x', y' et la courbe dont l'équation est

$$f(x,y)=x^2+y^2+cx+ey\mp g^2=0\text{*)}.$$

*) *Plücker*, System der analyt. Geom. Nr. 2. — La démonstration qui s'y trouve donne lieu à la considération suivante: L'équation $q=0$, résolue par rapport à x, fournit

$$q=\lambda\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_m),$$

Or, sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer l'origine des coordonnées choisie telle que dans l'équation de cette courbe les coefficients de x et de y disparaissent, de sorte qu'elle deviendra

$$x^2+y^2=\pm k^2;$$

donc

$$f=x'^2+y'^2\mp k^2.$$

La courbe $f=0$, est donc pour le signe supérieur un cercle ayant l'origine des coordonnées pour centre et k pour rayon, et pour le signe inférieur une courbe imaginaire. Ou bien aussi, si nous désignons par z le rayon du cercle variable, la condition à laquelle il doit suffire, est

$$z^2=f(x',y')=x'^2+y'^2\mp k^2;\quad \text{donc } k^2=\pm(x'^2+y'^2-z^2),$$

c'est à dire que *la différence des carrés du rayon du cercle variable et de la distance de son centre à un point fixe* (l'origine des coordonnées) *est constante.* Pour le signe supérieur le rayon est plus petit que cette distance, pour le signe inférieur il est plus grand; si la différence est nulle, la courbe $f=0$ se réduit à un point.

Si nous faisons encore passer l'axe des x par le centre c, les trois équations seront

$$(x'-a)^2+y'^2=r^2,$$
$$x^2+y^2-2x'x-2y'y=\mp k^2,$$
$$yx'-xy'-ay=0;$$

d'où l'on obtient pour l'équation de l'enveloppe

$$x^2+y^2-2ax\pm k^2)^2=4r^2(x^2+y^2),$$

d'où

$$y^2=2r^2-(x^2-2ax\pm k^2)$$
$$\pm\sqrt{[2r^2-(x^2-2ax\pm k^2)]^2+4r^2x^2-(x^2-2ax\pm k^2)^2}$$
$$=2r^2-(x^2-2ax\pm k^2)\pm 2r\sqrt{r^2+2ax\mp k^2}.$$

---

et comme nous avons déjà

$$q=\varkappa\,(y-y_1)\,(y-y_2)\,.\,.\,.\,.\,(y-y_n),$$

il s'ensuit que le produit des segments pris sur la droite parallèle à l'axe des y est égal à celui sur la droite parallèle à l'axe des x, multiplié par le facteur $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Mais comme ce facteur ne contient pas les coordonnées x, y, et que la démonstration est indépendante de l'angle des coordonnées, on en déduit la propriété suivante des courbes algébriques: Si par un nombre quelconque de points dans le plan d'une courbe algébrique on trace des droites parallèles entre elles et qu'on détermine sur chacune d'elles le produit des segments compris entre le point et la courbe; on aura les produits correspondant à une autre direction des droites parallèles en multipliant les premiers produits par le *même* facteur dépendant seulement des constantes de la courbe et des deux angles que ces droites font avec une direction quelconque. — Pour le cercle ce facteur est l'unité.

Examinons séparément les deux courbes correspondant aux deux signes de k^2.

13. Si nous prenons d'abord le signe supérieur, il est clair que le rayon du cercle variable sera la longueur de la tangente menée de son centre à la circonférence du rayon k. Donc, la courbe cherchée est *l'enveloppe des cercles ayant leurs centres sur une circonférence donnée et coupant rectangulairement une autre circonférence donnée.* Pour plus de simplicité je désignerai les deux cercles par les lettres C et D qui marquent leurs centres; la constante a représente la distance des deux centres (fig. VII).

La construction de la courbe se trouve facilement au moyen des considérations du numéro 3. Supposons en effet, que M soit un point de la courbe: le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par ce point et coupent rectangulairement la circonférence D, sera la chordale du point M et du cercle D. Les deux points d'intersection de cette chordale avec le cercle C sont donc les centres des deux cercles enveloppés qui passent par M; mais pour que ce point appartienne à l'enveloppe il faut que les deux cercles coïncident et que par conséquent la chordale soit tangente au cercle C. Ce qui donne lieu à la construction suivante:

Par un point E de la circonférence C on mène la tangente AB et l'on cherche le point M tel que AB soit la chordale du point M et du cercle D. La théorie des chordales fournit la construction suivante du point M: On cherche les points d'intersection H et L de la tangente AB avec deux tangentes quelconques GH et KL du cercle D, et de ces points comme centres et avec les rayons HG et LK on décrit deux cercles qui se couperont en deux points M et M' de la courbe. Cette construction est plus simple qu'il ne paraît au premier instant, car d'abord les mêmes tangentes GH et KL au cercle D peuvent servir pour un grand nombre de points de la courbe; ensuite les tangentes au cercle C se mènent très-facilement de la manière suivante: sur le diamètre arbitraire CB on prend un point quelconque N et de ce point comme centre et avec un rayon égal à NC on décrit une circonférence qui coupera le cercle C et le diamètre CB aux points E et B; la droite BE qui joint ces points touchera le cercle au point E. On peut donc prendre autant de diamètres qu'on voudra, et le même diamètre servira à la construction de plusieurs tangentes.

De cette construction on déduit immédiatement quelques propriétés: Chaque tangente au cercle C fournit deux points de la courbe, excepté les tangentes communes qui n'en fournissent qu'un seul, le point de contact avec le cercle D; ces deux ou quatre points sont les points d'intersection du cercle D et de la courbe.

Les tangentes au cercle C qui coupent le cercle D ne fournissent pas de points, car la chordale d'un cercle et d'un point ne coupe jamais le cercle.

La courbe est le lieu géométrique des points qu'on obtient en abaissant d'un point fixe des perpendiculaires sur les tangentes à une circonférence donnée et en prolongeant ces perpendiculaires d'une quantité telle que la différence des carrés de la perpendiculaire et de son prolongement soit une grandeur donnée (k^2).

14. Reprenons l'équation de la courbe

$$(y^2 + x^2 - 2ax + k^2)^2 = 4r^2 (x^2 + y^2).$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$y^2 + x^2 - 2ax + k^2 = \pm 2r \sqrt{x^2 + y^2},$$

ce qui signifie :

Si d'un point de la courbe on mène une tangente au cercle du centre C et du rayon $\sqrt{a^2 - k^2}$, la longueur de cette tangente est moyenne proportionelle entre le diamètre $2r$ et la distance du point au point D; ou bien: *la courbe est le lieu géométrique des points pris sur les tangentes d'un cercle tels que la partie interceptée de ces tangentes soit moyenne proportionelle entre une grandeur donnée et les distances des mêmes points à un point fixe.*

Si l'on pose

$$x^2 + y^2 = m^2,$$

l'équation de la courbe se réduit à

$$m^2 - 2ax + k^2 = \pm 2rm,$$

d'où

$$x = \frac{k^2}{2a} + m \frac{m \mp 2r}{2a},$$

ce qui donne un moyen de construire la courbe comme le lieu des intersections d'un cercle du centre D et du rayon variable m avec la droite

$$x = \frac{k^2}{2a} + m \frac{m \mp 2r}{2a},$$

facile à tracer, si l'on observe que la quantité $\frac{k^2}{2a}$ est constante.

L'équation polaire de la courbe sera

$$t = a \cos \varphi \pm r \pm \sqrt{(a \cos \varphi \pm r)^2 - k^2}.$$

Si nous posons $\varphi = \pi - \varphi$, elle devient

$$t = - a \cos \varphi \pm r \pm \sqrt{(- a \cos \varphi \pm r)^2 - k^2}$$
$$= - [a \cos \varphi \mp r \mp \sqrt{(a \cos \varphi \mp r)^2 - k^2}].$$

Comme le signe du radical est indépendant du signe de r, cette expression nous montre qu'on obtient toutes les valeurs de t en faisant parcourir à φ tous les angles de 0 jusqu'à 2π ou de

$-\pi$ jusqu'à $+\pi$, mais en conservant seulement le signe supérieur de r, de sorte que l'équation de la courbe se réduit à

$$t = a\cos\varphi + r \pm \sqrt{(a\cos\varphi + r)^2 - k^2}.$$

15. Avant d'examiner les différentes formes dont la courbe est susceptible, cherchons d'abord si elle a des points singuliers. La différentiation de l'équation de la courbe donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2r^2x - (x-a)(x^2+y^2-2ax+k^2)}{y(x^2+y^2-2ax+k^2-2r^2)}.$$

Il s'agit donc de voir si le numérateur et le dénominateur de cette expression peuvent devenir zéro en même temps. Or, le dénominateur devient égal à zéro pour les valeurs suivantes

$$y=0, \quad x = a \pm r \pm \sqrt{(a\pm r)^2 - k^2},$$

et

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x = \frac{k^2 - r^2}{2a}.$$

Les secondes valeurs ne font évanouir le numérateur que lorsque $a = 0$ ou $r = 0$.

La supposition $a = 0$ rend x infini et y imaginaire, à moins qu'on n'ait en même temps $k = r$, ce qui fournit $x = \frac{0}{0}$. Dans ce cas l'expression de $\frac{dy}{dx}$ devient égal à $-\frac{x}{y}$, d'où l'on peut déjà conclure que la courbe se réduit à un cercle, qui n'a pas de points singuliers. La supposition $r = 0$, ne fournit une valeur réelle pour y que lorsqu'en même temps $x = 0$, c'est à dire que $k = r = 0$, ce qui réduit la courbe à un point.

Les *premières* valeurs de x et y transforment le numérateur en

$$\begin{aligned} 2r^2x - (x-a)(x^2-2ax+k^2) &= 2r^2x \mp 2(x-a)\,rx \\ &= \pm 2r\,(\pm r - (x-a)) = \mp 2rx\,(x - a \mp r) \\ &= \mp 2r(a \pm r \pm \sqrt{(a\pm r)^2 - k^2})\sqrt{(a\pm r)^2 - k^2}, \end{aligned}$$

expression qui se réduit à zéro dans un des trois cas

$$r = 0,$$
$$k = 0, \quad x = 0,$$
$$a \pm r = \pm k, \quad x = a \pm r.$$

Le premier de ces cas réduit la courbe à un cercle et ne fournit donc pas de points singuliers. Pour les deux autres cas il faut chercher la vraie valeur de $\frac{dy}{dx}$ par la voie ordinaire qui donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2r^2-(x^2+y^2-2ax+k^2)-(x-a)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}-2a\right)}{\frac{dy}{dx}(x^2+y^2-2ax+k^2-2r^2)+y\left(2x+2y\frac{dy}{dx}-2a\right)};$$

d'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x^2+y^2-2ax+k^2-2r^2+2y^2)-4\frac{dy}{dx}y(a-x)$$
$$=2r^2-(x^2+y^2-2ax+k^2)-2(x-a)^2.$$

et pour $y=0$,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2r^2-(x^2-2ax+k^2)-2(x-a)^2}{x^2-2ax+k^2-2r^2}}.$$

En supposant $k=0$, cette expression devient

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{2r^2-2a^2}{-2r^2}}=\pm\sqrt{\frac{a^2-r^2}{r^2}},$$

et pour $a=r$, $\frac{dy}{dx}=\pm 0$.

Pour reconnaître la nature du point singulier, il faut examiner les valeurs de y aux environs de ce point. Pour cela nous avons

$$y^2{}_{0+h}=2r^2-(h^2-2ah)$$
$$\pm\sqrt{[2r^2-(h^2-2ah)]^2+h^2(4r^2-4a^2-h^2+4ah)}.$$

D'abord on voit qu'on peut toujours prendre h assez petit pour que la quantité devant le radical, de même que la quantité sous le radical, reste positive; de plus il est clair qu'il faut prendre le radical avec le signe inférieur, parceque pour $h=0$, il faut aussi $y=0$; enfin la valeur de y^2 est positive ou négative et par suite celle de y réelle ou imaginaire, selon que le terme $h^2(4r^2-4a^2-h^2+4ah)$ du radical est négatif ou positif. Ce terme est négatif pour un très-petit h si $a>r$, et positif si $a<r$; mais lorsque $a=r$, il prend le signe de h. Il est donc démontré que l'origine des coordonnées est un point isolé pour $a<r$, un point de rebroussement pour $a=r$, et un point double pour $a>r$.

La supposition $a\pm r=\pm k$, fournit

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{\mp r(a\pm r)}{\pm r(a\pm r)-r^2}}=\pm\sqrt{\frac{\mp k}{a}}.$$

Cette expression montre déjà qu'il n'existe un point double que lorsque

$$a-r=-k,$$

ou

$$a = r - k.$$

De plus nous avons

$$y^2_{a \pm r + h} = \mp 2ar - h^2 \mp 2hr$$
$$\pm \sqrt{(\mp 2ar - h^2 \mp 2hr)^2 - h^2[h^2 \pm 4r(a \pm r + h)]}.$$

Pour le signe supérieur de r la quantité devant le radical est négative pour un h assez petit; il faut donc prendre le signe supérieur du radical. Mais sous le radical le facteur de $-h^2$ est positif; par conséquent la valeur du radical est plus petite que celle de la quantité qui le précède de sorte que y_{a+r+h} est imaginaire. Pour le signe inférieur de r la quantité devant le radical est positive, et il faut prendre le radical avec le signe inférieur puisque pour $h = 0$, la valeur de y^2 doit se réduire à zéro. Or, le facteur de $-h^2$ étant positif ou négatif selon que a est plus petit ou plus grand que r, il s'ensuit qu'il y a un point double lorsque $a < r$ et un point isolé lorsque $a > r$.

Les recherches précédentes nous font enfin conclure que la courbe a un point double lorsque

$$a > r, \; k = 0,$$

ou lorsque

$$a < r, \; k = r - a,$$

un point de rebroussement pour

$$a = r, \; k = 0,$$

et un point isolé dans chacun des quatre cas suivants

$$k = 0, \quad r = 0;$$
$$a < r, \quad k = 0;$$
$$k = a + r, \quad a \gtreqless r;$$
$$k = a - r, \quad a > r;$$

Toutes les courbes qui ne satisfont à aucune de ces conditions n'ont pas de points singuliers, abstraction faite cependant des points d'inflexion dont il sera question plus tard.

16. Passons maintenant à la discussion des différentes formes de la courbe correspondant aux différentes relations entre les trois grandeurs constantes r, k, a. Ces quantités sont toujours positives, car d'abord r et k, étant des rayons de cercles, sont nécessairement positifs, et quant à a, nous avons placé l'origine des coordonnées de manière que le centre C tombe du côté des abscisses positives.

L'équation qui se prète le mieux à la discussion est l'équation entre coordonnées polaires

$$t = a\cos\varphi + r \pm \sqrt{(a\cos\varphi + r)^2 - k^2}.$$

Cette équation fait voir que, la quantité devant le radical étant toujours plus grande que le radical, le rayon vecteur a le signe de l'expression $(r + a\cos\varphi)$. De plus, la courbe est toujours *fermée*, car la valeur de t ne saurait jamais être infinie.

La courbe est imaginaire tant que

$$a + r < k,$$

car alors il n'existe pas de valeur de φ, qui rende le radical réel; et en effet toutes les tangentes au cercle C coupent le cercle D.

Si $r + a = k$, nous aurons $t = r$, car la seule valeur réelle de t a lieu pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$.

Soit d'abord $r < k$ et supposons que r et k restent constants, tandis que a prend successivement toutes les valeurs possibles.

Le radical sera réel pour toutes les valeurs de φ pour lesquelles

$$\cos\varphi > \frac{k-r}{a}, \text{ ou } \cos\varphi < -\frac{r+k}{a}.$$

Or comme la plus petite valeur de a est $k - r$, la première de ces conditions est toujours à remplir, mais la seconde donne des valeurs imaginaires pour φ tant que $a < r + k$. Donc, dans ce cas l'angle φ sera compris entre les limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$, et chaque droite menée par D coupera la courbe seulement deux fois. Aux deux limites de φ, c'est à dire pour

$$\varphi = \pm \text{ arc cos } \frac{k-r}{a},$$

les deux valeurs de t coïncident, et comme la courbe n'a pas de point multiple, les deux rayons vecteurs sont des tangentes de la courbe; entre ces valeurs extrèmes les deux valeurs de t changent d'une manière continue. On en déduit que la courbe est une seule figure fermée contenue dans l'angle $2 \text{ arc cos } \frac{k-r}{a}$ et ne renfermant pas le point D.

Pour $a = k + r$, la courbe se compose de cette même figure fermée et d point de contact des deux cercles. Si $a > k + r$, on aura encore cette figure fermée; mais en outre on démontre de la même manière que la partie de la courbe correspondant aux valeurs de φ pour lesquelles

$$\cos\varphi < -\frac{k+r}{a},$$

est aussi une figure fermée, touchée par les rayons vecteurs pour lesquels

$$\varphi = \pm \text{ arc cos}\left(-\frac{k+r}{a}\right).$$

Toutes ces valeurs de φ qui rendent le radical réel, rendent t négatif; par conséquent cette partie de la courbe est située du même côté du point D que la première. De plus il est aisé de vérifier que les points de tangence de la seconde partie avec les rayons vecteurs extrêmes, se trouvent entre les points d'intersection de la première partie avec ces mêmes rayons, et comme il n'y a pas de point multiple, il s'ensuit que la seconde partie est située entièrement dans la première.

Soit maintenant $k < r$:

Pour $a = 0$, (lorsque les cercles sont concentriques) nous aurons

$$t = r \pm \sqrt{r^2 - k^2},$$

l'équation d'un système de deux cercles concentriques, l'un situé dans l'intérieur du cercle D, l'autre entourant le cercle C.*)

Pour toutes les valeurs de a entre 0 et $r - k$, il n'existe point de valeur de φ qui fasse évanouir le radical ou le rende imaginaire; de plus le rayon vecteur reste toujours positif; par conséquent la courbe est formée de deux figures fermées qui entourent le point D, correspondant l'une au signe supérieur, l'autre au signe inférieur du radical. Il est clair que la seconde figure est située entièrement dans la première.

Pour $a = r - k$, les deux figures sont encore situées l'une dans l'autre, mais pour $\varphi = \pi$ les deux valeurs de t se réduisent à une seule $t = r - a$; donc ce point est commun aux deux figures. Et comme nous savons déjà (n° 15.) que c'est un point double, il s'ensuit que la figure intérieure est une *feuille* de la courbe. (fig. VIII.)

Si $a > r - k$, les deux figures, s'étant d'abord réunies, ne forment plus qu'une seule, de sorte que la plus petite forme maintenant la partie rentrante de la plus grande (fig. IX). Lorsque a continue à croître cette partie rentrante devient plus petite; et lorsque a atteint la valeur de $r + k$, on obtient encore, comme faisant partie de la courbe, le point de contact extérieur des deux cercles. Mais

---

*) Lorsque $a = 0$, l'équation entre coordonnées orthogonales se réduit à

$$(x^2 + y^2 + k^2) = 4r^2(x^2 + y^2);$$

ou bien

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(4r^2 - 2k^2) + k^4 \\ &= (x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)[(r+\sqrt{r^2-k^2})^2 + (r-\sqrt{r^2-k^2})^2] \\ &\qquad + (r+\sqrt{r^2-k^2})^2(r-\sqrt{r^2-k^2})^2 \\ &= [x^2+y^2-(r+\sqrt{r^2-k^2})^2]\,[x^2+y^2-(r-\sqrt{r^2-k^2})^2], \end{aligned}$$

équation qui met les deux cercles en évidence.

a croissant toujours, ce point s'ouvre, pour ainsi dire, et se transforme en une figure fermée située entièrement dans la première figure (fig. X). La démonstration en est la même que pour $r < k$.

La discussion précédente se vérifie aisément au moyen de la figure, si l'on a égard aux observations du numéro 13. Il est clair, en effet, que si le cercle D est situé dans l'intérieur du cercle C, les deux points fournis par la même tangente au cercle C appartiennent à deux figures différentes. Mais lorsque les cercles se coupent les tangentes situées entre les deux tangentes communes ne fournissent pas de points, tandis que chaque autre tangente en fournit deux qui appartiennent à la même figure, puisque pour les deux tangentes communes les deux points se réunissent en un seul. Et si les deux cercles sont situés l'un entièrement hors de l'autre, les deux figures fermées correspondent l'une aux tangentes situées entre les tangentes communes qui passent par le point de similitude extérieur, et l'autre aux tangentes situées entre les tangentes qui passent par le point de similitude intérieur.

17. Pour reconnaître la marche de la courbe il faut encore rechercher les points qui correspondent aux valeurs extrêmes de x et y. Or, les points pour lesquels y est un maximum n'offrant rien de remarquable, il suffit de poser seulement le *dénominateur* de $\frac{dy}{dx}$ égal à zéro; mais, pour éviter les infiniment grands, il est le plus simple de supposer les axes des coordonnées renversés et de considérer par conséquent les valeurs de x, y qui rendent nul le *numérateur* de

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y(x^2+y^2-2ax+k^2-2r^2)}{2r^2x-(x-a)(x^2+y^2-2ax+k^2)}.$$

Ces valeurs sont les suivantes (n° 15.)

$$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}, \quad x = \frac{k^2-r^2}{2a};$$

et

$$y=0, \qquad x = a \pm r \pm \sqrt{(a\pm r)^2-k^2},$$

qui déterminent en général six points. Les deux premiers de ces points ont une tangente commune et existent tant que

$$x^2 < r^2,$$

c'est à dire que

$$2ar > k^2-r^2, \text{ si } k > r,$$

ou

$$2ar > r^2-k^2, \text{ si } k < r.$$

Des quatre autres points qui sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe des x, deux sont imaginaires lorsque

$$(a-r)^2 < k^2,$$

c'est à dire, que

$$a - r < k, \text{ si } a > r,$$

ou

$$r - a < k, \text{ si } a < r.$$

La question, si ces points sont des maxima ou des minima, est résulue par le signe de la dérivée de $\frac{dx}{dy}$.

La première supposition donne

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y^2}{ar^2},$$

et correspond par conséquent toujours à un *minimum*.

La supposition $y=0$, fournit

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x^2 - 2ax + k^2 - 2r^2}{2r^2x - (x-a)(x^2 - 2ax + k^2)} = \frac{\pm 2rx - 2r^2}{2r^2x \mp 2rx(x-a)}$$

$$= \frac{\pm 2r(x \mp r)}{\pm 2rx(\pm r + a - x)}$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{(a \pm r)^2 - k^2}}{(a \pm r \pm \sqrt{(a \pm r)^2 - k^2})(\mp \sqrt{(a \pm r)^2 - k^2})}.$$

Les deux signes supérieurs pris ensemble, rendent la fraction négative et correspondent par conséquent toujours à un *maximum*. Le signe supérieur de r pris avec le signe inférieur du radical fournit un *maximum*, si

$$(a+r)^2 - k^2 > a^2,$$

c'est à dire si

$$2ar > k^2 - r^2,$$

et un *minimum*, si

$$2ar < k^2 - r^2;$$

il y aura donc toujours maximum pour $k < r$.
Le signe inférieur de r avec le signe supérieur du radical fournit un *maximum* ou un *minimum*, suivant que $a > r$ ou $a < r$. Enfin pour les deux signes inférieurs il y a *maximum*, si

$$a > r \text{ et } 2ar < r^2 - k^2,$$

ou si

$$a < r \text{ et } 2ar > r^2 - k^2,$$

d'où l'on voit déjà que le maximum n'existe que dans le seul cas de

$$a < r \text{ et } 2ar > r^2 - k^2,$$

tandis qu'il y a minimum si

$$a > r,$$

ou si

$$a < r \text{ et } 2ar < r^2 - k^2.$$

Les plus grandes valeurs dont x est susceptible se trouvent en cherchant les valeurs extrèmes de x qui rendent y réel; mais on y parvient plus directement en observant que, la courbe n'ayant en général pas de point de rebroussement, et le point isolé, s'il existe, étant renfermé dans une figure fermée, la plus grande et la plus petite valeur de x devront correspondre à un des six points dans lesquels la tangente est parallèle à l'axe des y. Or, il est évident que le plus grand de ces x est

$$x = a + r + \sqrt{(a+r)^2 - k^2}.$$

La plus petite valeur de x est une des trois

$$x = \frac{k^2 - r^2}{2a}, \quad x = a \pm r - \sqrt{(a \pm r)^2 - k^2}.$$

Si maintenant $k > r$, la supposition

$$\frac{k^2 - r^2}{2a} < a \pm r - \sqrt{(a \pm r)^2 - k^2},$$

donne

$$0 < [(k^2 - r^2) \mp 2ar]^2,$$

ce qui a toujours lieu; mais si $k < r$ et $r > a$, on démontre de la même manière que la valeur *absolue* de $\frac{k^2 - r^2}{2a}$ est plus grande que la valeur *absolue* de $a - r - \sqrt{(a-r)^2 - k^2}$, (car l'autre expression de x est toujours positive). On voit donc que la plus *petite* valeur de x est

$$x = \frac{k^2 - r^2}{2a};$$

et si ce point n'existe pas, elle est

$$a + r - \sqrt{(a+r)^2 - k^2} \text{ ou } a - r - \sqrt{(a-r)^2 - k^2},$$

suivant que a ou r est plus grand.

Les discussions précédentes nous font déduire les propriétés suivantes de la courbe:

La courbe est imaginaire si

$$a < k - r.$$

Elle est composée d'une *seule* figure fermée, lorsque

$$+\sqrt{(k-r)^2} < a < k + r,$$

c'est à dire lorsque les cercles se coupent.

Si $k > r$, il y a minimum pour $x = a + r - \sqrt{(a+r)^2 - k^2}$, quand $2ar < k^2 - r^2$; mais quand $2ar > k^2 - r^2$, il y a maximum pour cette même valeur de x et minimum pour $x = \frac{k^2 - r^2}{2a}$.

Si au contraire $r > k$, nous aurons aussi $r^2 - k^2 > a\,(r + k) < 2ar$; c'est à dire qu'il y a toujours minimum pour $x = \frac{k^2 - r^2}{2a}$, et maximum pour $x = a + r - \sqrt{(a+r)^2 - k^2}$. Par conséquent la courbe a deux maxima et un minimum plus petit que ces maxima (fig. IX), excepté le seul cas de $k > r$, $2ar < k^2 - r^2$.

La courbe est composée de *deux* figures fermées, lorsque

$$a > k + r,$$

et lorsque

$$a < r - k, \text{ mais } r > k.$$

Pour le premier de ces cas il existe toujours le minimum $x = \frac{k^2 - r^2}{2a}$, car il est facile de démontrer qu'on a $2ar > r^2 - k^2$ ou $2ar < k^2 - r^2$, selon que r ou k est plus grand; ce minimum appartient à la figure extérieure. La figure extérieure a donc encore un maximum plus grand que le minimum et plus petit que l'autre maximum. La figure intérieure a seulement un maximum en $x = a - r + \sqrt{(a-r)^2 - k^2}$, et un minimum $x = a - r - \sqrt{(a-r)^2 - k^2}$. (fig. X).

Pour le second cas les points extrêmes de la courbe intérieure sont

$x = a + r - \sqrt{(a+r)^2 - k^2}$ et $x = a - r + \sqrt{(a-r)^2 - k^2}$, et la courbe extérieure a encore un maximum entre un maximum et un minimum, si $2ar > r^2 - k^2$.

La propriété de la courbe, d'avoir outre un maximum et un minimum, second un maximum, nous fait déjà présumer qu'elle a aussi des points d'inflexion (fig. IX. et X.) Mais ces points ne pouvant être déterminés à cause du degré élevé de l'équation, il faut s'assurer de leur existence d'une manière indirecte. Pour cela il suffit d'avoir égard au signe du numérateur de l'expression $\frac{d^2x}{dy^2}$ avant la division de ses deux termes par $\pm\, 2r$. En effet, il est facile de démontrer que ce signe est positif pour la plus grande valeur de x et pour $x = \frac{k^2 - r^2}{2a}$, mais négatif pour le second maximum de x appartenant à la même partie de la courbe, dans tous les cas où le minimum de $x = \frac{k^2 - r^2}{2a}$ existe. Il s'ensuit qu'entre ce minimum et le second maximum le numérateur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ passe par zéro. Mais pour savoir si la fraction entière passe en même temps par zéro, il faut encore voir si le numérateur et le dénominateur ne peuvent pas s'évanouir à la fois. Or, si l'on pose $\frac{dx}{dy}=\frac{U}{V}$, on aura

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}}{V^2}.$$

Pour que les deux termes deviennent égaux à zéro en même temps, il faut $V=0$, et $U=0$ ou $\frac{dV}{dy}=0$. La condition $V=0$, $U=0$, n'est satisfaite que lorsque la courbe a un point singulier; les deux conditions $V=0$, $\frac{dV}{dy}=0$, pris ensemble exigent que le dénominateur de $\frac{dx}{dy}$ ait deux racines y égales, c'est à dire que la courbe ait un point de rebroussement dont la tangente soit parallèle à l'axe des x. Il est donc démontré que entre le minimum et le plus petit des deux maxima le seconde quotient différentiel passe par zéro; ce qui signifie qu'entre ces deux points la courbe a un point d'inflexion. Il est d'ailleurs évident que la figure intérieur ne peut jamais avoir un point d'inflexion, car la tangente d'inflexion aurait de commun avec la courbe non seulement les trois points réunis au point d'inflexion, mais encore un second point d'intersection avec la figure intérieure et deux points d'intersection avec la figure extérieure; ce qui est impossible puisque la courbe n'est que du quatrième degré.

18. Il reste encore à considérer les courbes particulières qui ont des points singuliers.

1°. Soit $a<r$, $k=r-a$.

Ce cas étant déjà suffisamment discuté aux n^{os} 15 et 16, il suffit de remarquer que la figure (fig. VIII.) n'indique pas de point d'inflexion, ce qui s'accorde parfaitement avec les considérations du n° 17. On voit, en effet, que le changement de signe du numérateur de $\frac{d^2x}{dy^2}$, en passant du point $x=\frac{k^2-r^2}{2ar}$ au point $x=a+r-\sqrt{(a+r)^2-k^2}$ (le plus petit des deux maxima, car les deux autres valeurs extrêmes fournissent le point double), est dû à l'évanouissement de la fonction V qui fait disparaître en même temps le dénominateur.

2°. La même remarque s'applique encore à la courbe pour laquelle $k=0$, et dont l'équation est par conséquent

$$t = r + a\cos\varphi \pm (r + a\cos\varphi);$$

donc

$$t' = 2(r + a\cos\varphi),$$
$$t'' = 0.$$

Telle est aussi l'équation de la courbe qu'on obtient en menant par le point D des droites et en portant sur ces droites, à partir des points d'intersection avec un cercle du centre C et du rayon a, des distances égales à $2r$.*)

Le n°. 13 fait voir que cette courbe est l'enveloppe des cercles passant par le point D; ou bien le lieu géométrique des points qu'on obtient en abaissant du point D des perpendiculaires sur les tangentes au cercle C et prolongeant ces perpendiculaires d'une quantité égale à elles-mêmes.

Si l'on cherche le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes au cercle dont le rayon est r' et dont la distance du centre au point fixe est a', on trouve immédiatement

$$t = r' + a'\cos\varphi,$$

la même équation que celle de la courbe proposée en faisant $r' = 2r$, $a' = 2a$. Par conséquent *la courbe est le lieu géométrique des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à un cercle.*

En s'appuyant seulement sur les théorèmes les plus connus de la géométrie élémentaire, on démontre encore que la courbe est une épicycloïde, engendrée par un point dont la distance au centre du cercle roulant est a, les rayons des deux cercles étant égaux à r.

Pour $a = r$, la courbe est la *cardioïde.*

Du reste, la construction (n°.13) fait voir que ce sont les seules courbes qui puissent avoir un point double, puisqu'un point n'a qu'une seule chordale par rapport à un cercle, de-sorte que chaque point de la courbe ne correspond qu'à une seule tangente au cercle C. Mais lorsque les deux cercles se touchent intérieurement il y a *deux* tangentes infiniment près de la tangente commune, dont chacune fournit deux points infiniment près du point de contact, ce qui prouve qu'il doit passer deux branches de la courbe par ce point. D'un autre côté, lorsque le cercle D se réduit à un point situé au dehors du cercle C, les *deux* tangentes à ce cercle qui

---

*) Comp. *Magnus:* Sammlung von Aufg. und Lehrs. aus der anal. Geom. §. 61.

passent par D fournissent ce point comme point de la courbe, et comme pour chacune d'elles il y a deux tangentes infiniment voisines, dont chacune fournit un point infiniment près du point D, ce point est encore un point double. Lorsque le point D est situé à l'intérieur du cercle C, il est un point isolé, et quand il se trouve sur la circonférence, un point de rebroussement.

Les autres courbes particulières trouvées au n° 15 n'offrent rien de remarquable.

19. L'aire de la courbe s'exprime le plus simplement au moyen des coordonnées polaires.

Lorsque $k < r$ et $a < r - k$, le pôle se trouve à l'intérieur des deux figures; par conséquent l'espace annulaire compris entre ces deux figures est égal à

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(t'^2 - t''^2)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4(r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi\,,$$

et puisque la courbe est symmétrique par rapport à l'axe des abscisses,

$$\mathrm{A} = 4\int_0^{\pi}(r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi.$$

Dans tous les autres cas, l'aire d'une des figures est donnée par

$$\mathrm{A}'_1 = 4\int_0^{\arccos\frac{k-r}{a}}(r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi,$$

$$\mathrm{A}'_2 = -\,4\int_{\arccos\frac{-k-r}{a}}^{\pi}(r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi,$$

et l'espace annulaire compris entre les deux figures (lorsque $a > k + r$), par

$$A'' = 4\int_0^{\arccos\frac{k-r}{a}} (r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi$$

$$+ 4\int_{\arccos\frac{-k-r}{a}}^{\pi} (r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi} (r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi$$

$$-4\int_{\arccos\frac{k-r}{a}}^{\arccos\frac{-k-r}{a}} (r + a\cos\varphi)\sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 - k^2}\,.\,d\varphi$$

En posant

$$r + a\cos\varphi = z,$$

l'intégrale devient

$$-\int \frac{z\sqrt{z^2 - k^2}}{\sqrt{a^2 - (z-r)^2}}\,dz,$$

et se réduit ainsi à une intégrale elliptique, qui cependant s'obtient sous une forme *finie* dans un des trois cas

$$a = 0, \qquad r = 0, \qquad k = 0,$$

Les deux premières de ces suppositions réduisent la courbe à deux cercles qui ont le point C pour centre (n° 15), mais le troisième cas donne, suivant que le point D est situé à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle C,

$$A = 4\int^{\pi} (r + a\cos\varphi)^2\,d\varphi,$$

ou

$$A'' = 4\int_0^{\pi}(r + a\cos\varphi)^2\,d\varphi - 4\int_{\arccos\left(-\frac{r}{a}\right)}^{\arccos\left(-\frac{r}{a}\right)}(r + a\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi}(r + a\cos\varphi)^2\,d\varphi.$$

Mais

$$\int(r + a\cos\varphi)^2\,d\varphi = \int r d^2\varphi + \int 2ar\cos\varphi d\varphi + \int a^2\cos^2\varphi d\varphi$$

$$= r^2\varphi + 2ar\sin\varphi + a^2\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right);$$

donc en prenant les limites,

$$A = 2(2r^2 + a^2)\pi, \qquad A'' = 2(2r^2 + a^2)\pi.$$

Cette expression fournit pour l'aire de la cardioïde la valeur connue

$$A = 6r^2\pi.$$

20. La seconde courbe que nous avons trouvée au numéro 13, est représentée par les équations

$$(y^2 + x^2 - 2ax - k^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2),$$

$$t = r + a\cos\varphi \pm \sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 + k^2}.$$

Pour la construire on pourrait encore se servir du cercle D du rayon k, car le rayon du cercle mobile, étant exprimé par $x'^2 + y'^2 + k^2$, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droite est la droite menée du centre variable au point D, et l'autre le rayon du cercle D perpendiculaire à cette droite. Mais on parvient à une construction plus simple en se rappelant la construction de la courbe précédente et en observant que maintenant la tangente au cercle C est la chordale commune du point D et d'un cercle qui a pour rayon la grandeur constante k et pour centre le point M de l'enveloppe qu'il s'agit de construire (fig. XI). Or, si d'un point quelconque F de la tangente AB et avec le rayon FD on décrit un cercle, ce cercle, d'après la définition de la chordale, coupera rectangulairement le cercle du centre M et du rayon k; la distance FM sera par conséquent égale à $\sqrt{FD^2 + k^2}$. De là on déduit la construction suivante: Au point D on construit un angle droit SDR, tout-à-fait arbitraire et l'on fait $DH = DL = k$; des points d'intersection F et G des côtés de cet angle avec la tangente AB au cercle C, et des rayons égaux à FL et GH, on décrit deux cercles qui se couperont en deux points M, M' appartenant à la courbe.

Les conséquences tirées de cette construction sont analogues à celles du numéro 13; seulement il faut remarquer que la construction du cercle du rayon k est toujours possible de sorte que chaque tangente fournit deux points de la courbe situés l'un au-dehors, l'autre au de-dans du cercle D.

21. L'équation en x, y fournit encore, comme au numéro 14, la courbe comme lieu géométrique de points situés sur les tangentes à un cercle donné; il existe cependant la différence que pour la première courbe le point fixe est situé au dehors et pour la seconde, au-dedans du cercle fixe. On voit aussi que pour la première courbe le cercle fixe peut devenir imaginaire tandis que pour la seconde c'est le point fixe qui peut ne pas exister.

Comme dans l'équation polaire le radical ne peut jamais s'évanouir ou devenir imaginaire, on en conclut que l'enveloppe cherchée est composée de deux figures fermées entourant le point D et représentées par les deux équations

$$t = r + a\cos\varphi + \sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 + k^2},$$

$$t' = r + a\cos\varphi - \sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 + k^2}.$$

Le second de ces rayons est donc toujours négatif; sa valeur absolue est

$$-(r + a\cos\varphi) + \sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 + k^2},$$

d'où l'on voit que la première figure est située tout entière au-dehors, la seconde au-dedans du cercle D. Pour avoir les points situés sur le *même* rayon vecteur (et non sur le prolongement), il faut remplacer dans l'expression de t', l'angle φ par $\pi + \varphi$, et renverser les signes, ce qui donne

$$t' = -(r - a\cos\varphi) + \sqrt{(r - a\cos\varphi)^2 + k^2}.$$

La distance des deux courbes mesurée sur le même rayon vecteur sera donc

$$2r + \sqrt{(r + a\cos\varphi)^2 + k^2} - \sqrt{(r - a\cos\varphi)^2 + k^2},$$

expression qui est égale à $2r$ pour $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

Les propriétés de cette courbe se déduisent immédiatement de celles de la courbe précédente en changeant simplement le signe de k^2. C'est ainsi qu'on trouve que l'existence de points singuliers dépend des conditions suivantes (n° 15)

$$r = 0, \quad k = 0, \quad a \pm r = k\sqrt{-1}.$$

La troisième condition fournissant des valeurs imaginaires et les deux autres suppositions rentrant dans des cas déjà discutés, nous pourrons dire que le courbe ne présente pas de points singuliers.

Pour examiner si les six points pour lesquels $\frac{dx}{dy} = 0$, sont des maxima ou des minima, il faut encore avoir recours à la deuxième dérivée qui devient dans les différents cas

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y^2}{ar^2},$$

(toujours un minimum) et

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-a \mp \sqrt{(a \pm r)^2 + k^2}}{(a \pm r \pm \sqrt{(a \pm r)^2 + k^2})(\pm \sqrt{(a \pm r)^2 + k^2})}.$$

Dans la seconde expression le dénominateur est toujours positif, puisque les deux facteurs ont le même signe, le signe du radical, donc le signe ne dépend que de la fraction du numérateur. Or celui-ci est toujours négatif pour le signe supérieur du radical, mais positif pour le signe inférieur du radical pris avec le signe supérieur de r; Pour les signes inférieurs de r et du radical il est négatif ou positif selon que

$$2ar > r^2 + k^2 \text{ ou } 2ar < r^2 + k^2.$$

De là et par des raisonnements analogues à ceux des numéros précédents on conclut que la courbe *intérieure* a seulement un minimum et un maximum, mais lorsque $2ar > r^2 + k^2$; la courbe *extérieure* a toujours deux maxima et un minimum et par conséquent deux points d'inflexion.

Pour $a = 0$, la courbe se réduit encore à deux cercles

$$t = r \pm \sqrt{r^2 + k^2}.$$

Pour $a = r$, c'est à dire lorsque le point fixe se trouve sur la circonférence donnée, on a

$$t = r(1 + \cos\varphi) + \sqrt{r^2(1 + \cos\varphi)^2 + k^2},$$

$$t' = r(1 - \cos\varphi) + \sqrt{r^2(1 - \cos\varphi)^2 + k^2};$$

ou

$$t = 2r\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{4r^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi + k^2},$$

$$t' = -2r\sin^2\frac{1}{2}\varphi + \sqrt{4r^2\sin^4\frac{1}{2}\varphi + k^2},$$

et

$$t - t' = 2r + \sqrt{4r^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi + k^2} - \sqrt{4r^2\sin^4\frac{1}{2}\varphi + k^2}.$$

Bericht über die Realschule

während des Schuljahres 53/54.

I. Lehrverfassung.

Das Lehrer-Kollegium bestand aus: dem Direktor Dr. Heinen, dem Oberlehrer Herrn Duhr, den Herren Klassen-Ordinarien: Oberlehrer Dr. Philippi, Oberlehrer Dr. Schauenburg, Honigsheim, Dr. Wirtz u. Erk; dem ordentlichen Lehrer Herrn Dr. Stammer, den beiden Religionslehrern Kaplan Langendorff und Pastor Krafft, dem Zeichenlehrer und Maler Herrn Conrad, dem Hülfslehrer Dr. Krumm und dem Lehramts-Kandidaten Herrn Kaiser.

Sexta. Ordinarius: **Erk.**

A. Wissenschaften.

11 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des alten Testamentes nach van den Driesch von §. 1—60. Die einzelnen Lektionen wurden fast alle von den Schülern memorirt und daran die Erklärung der Glaubens- und Sittenlehre angeknüpft. Langendorff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Biblische Geschichte des alten Testamentes. Krafft.

2. Praktisches Rechnen. 5 St. Die Rechnungen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, mit besonderer Berücksichtigung des Kopfrechnens. Vielfache Uebungen an einfachern praktischen Aufgaben aus „Schellen's Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen." I. Theil §§. 1—20. II. Theil §§. 1—14. Sämmtliche Aufgaben wurden nach der Schlußrechnung aufgelöst. Stammer.

3. Naturgeschichte. 2 St. a. Zoologie im Winter. Beschreibung von interessanten Thieren aus verschiedenen Gruppen des Thierreichs, besonders Säugethieren und Vögeln, theis an den ausgestopften Exemplaren des zoologischen Kabinets, theils nach der Beobachtung der Schüler an lebenden Thieren.

b. Botanik im Sommer. Theils Angabe der Namen und Merkmale der von den Schülern mitgebrachten Pflanzen, theils Zergliederung und Beschreibung einzelner Pflanzen aus verschiedenen Familien.
Stammer.

4. Geographie. 2 St. Allgemeine Vorbegriffe; Uebersicht der Land- und Meeresräume; Topographie von Europa. Stammer.

B. Sprachen.

13 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 6 St. Grammatik: Der einfache Satz und in steter Verbindung damit das Wichtigste aus der Wortformenlehre; neben schriftlichen Uebungen besonders mündlich eingeübt an geeigneten Stücken des Lesebuchs. Uebungen im zusammenhängenden Sprechen und im Nacherzählen. 3 St. Wöchentliche Correctur leichter Aufsätze erzählenden Inhalts. 1 St. Lesen und Memoriren prosaischer und poetischer Stücke aus Hülstett's Lesebuch oder aus andern Sammlungen. 2 St. Erk.

2. Französisch. 7 St. Aus Ploetz's Elementarbuch I. Kursus wurden die Uebungsstücke bis zum VI. Abschnitt schriftlich übersetzt und retrovertirt. Die deutschen Uebungen wurden theils mündlich, theils schriftlich in's Französische übersetzt. Einübung von avoir und être, der 4 regelmäßigen Konjugationen, der gebräuchlichsten unregelmäßigen Zeitwörter, der in diesem Buche vorkommenden Regeln, Memoriren von Vokabeln. In der II. Abtheilung wurden seit Ostern die Uebungsstücke bis Lection 40 übersetzt. Einübung der Regeln und Auswendiglernen der Vokabeln. Wirtz.

C. Fertigkeiten.

8 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 3 St. Zeichnen von geraden Linien, von verschiedenen Winkeln, von geometrischen Figuren, namentlich regulären, von symmetrisch zusammengestellten Figuren, von einfachen Gefäßen, nach Vorzeichnungen an der Schultafel theils aus freier Hand, theils mit Benutzung des Reißzeuges. Conrad.

2. Schönschreiben. 4 St. Die deutschen und englischen Schriftformen, in genetischer Folge nach den an der Schultafel vom Lehrer vorgeschriebenen und zugleich erläuterten Mustern eingeübt.
Erk.

3. Gesang. a. Untere Abtheilung. 1 St. Elementarlehre des Gesanges, stets mit bezüglichen praktischen Uebungen. Einübung ein- und zweistimmiger Lieder aus Erk und Greef's Sängerhain I.

b. Obere Abtheilung. 2 St. Weitere Erörterung der Elementarlehre des Gesanges; dann die Intervallenlehre und das Wichtigste aus der Lehre von den Accorden (1 St. während des Winters). Vier- und fünfstimmige Gesänge aus Erk und Greef's Sängerhain II. und III. Erk.

Quinta. Ordinarius: Dr. Wirtz.

A. Wissenschaften.

11 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St., combinirt mit Sexta.

2. Praktisches Rechnen. 4 St. Begründung und Einübung der Rechnungen mit gewöhnlichen und Decimal-Brüchen. Die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen. Vielfache Uebungen in Aufgaben aus der einfachen und zusammengesetzten Regel de Tri, der Gewinn- und Verlust-Rechnung mit Procenten, der Zins- und Rabatt-Rechnung, der Vertheilungs-, Mischungs- und Ketten-Rechnung. Die Aufgaben wurden ohne Proportionen, nach der sog. Schlußrechnung, durch Zurückführen auf die Einheit aufgelöst, und zwar zum größten Theil im Kopfe; nach Schellen's „Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen."

Krumm, gegen Ende des Sommers Kaiser.

3. Naturgeschichte. 3 St. a. Zoologie im Winter. Systematische Abhandlung der Säugethiere und der Vögel. Veranschaulichung durch die Präparate des zoologischen Kabinets und durch den naturhistorischen Atlas von Goldfuß.

b. Botanik im Sommer. In stetem Wechsel: Namen, Merkmale und besondere Eigenschaften der von den Schülern mitgebrachten Pflanzen; Zergliederung und Beschreibung von Pflanzen aus allen wichtigern Familien; Erklärung und Einübung botanischer Kunstausdrücke. Handbuch: Fürnrohr. Duhr.

4. Geographie. 2 St. Erweiterung der allgemeinen Vorbegriffe; Oceanographie und Inseln aller Meere; topische Geographie der außereuropäischen Erdtheile. Uebungen im Kartenzeichnen. Stammer.

B. Sprachen.

10 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 5 St. Grammatik: Die Satzlehre, und in Verbindung damit die Wortformenlehre ausführlicher. Neben schriftlichen Uebungen Analysiren geeigneter Stücke aus dem Lesebuche. Correctur wöchentlicher Aufsätze. 3 St. Erk.

Lese- und Declamirübungen, freie Vorträge (meist nach Witt's Götter- und Heldengeschichten).

Im Winter Philippi, im Sommer Kaiser.

2. Französisch. 6 St. Nach einer kurzen Wiederholung des V. Abschnittes in Ploetz's Elementarbuch I. Kursus wurden aus dessen II. Kursus die in den ersten fünf Abschnitten enthaltenen Uebungen schriftlich übersetzt und retrovertirt. Die deutschen Stücke wurden theils mündlich, theils schriftlich in's Französische übersetzt. Die unregelmäßigen Zeitwörter, die Anwendung von avoir und être bei der Konjugation, die Pronominal- und unpersönlichen Verben, die Elemente über den Gebrauch der Zeiten und Moden, Bemer-

kungen über die französische Wortstellung wurde eingeübt und die darin vorkommenden Regeln auswendig gelernt. Alle 14 Tage ein französisches Scriptum. Wirtz.

C. Fertigkeiten.

8 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 4 St. Freies Handzeichnen von geschmackvollen Formen, Arabesken und Ornamenten, welche in vergrößertem Maßstabe auf der Schultafel vorgezeichnet wurden. — Linearzeichnen architektonischer Glieder, Postamente und Gefäße nach gegebenen Maßverhältnissen, nebst Angabe der Schattenlinien, mit der Feder und Tusche ausgezeichnet, nach Vorzeichnungen auf der Schultafel. Conrad.

2. Schönschreiben. 3 St. Wiederholung des in Sexta Durchgenommenen. Die geübteren Schüler schrieben deutsche oder französische Denksprüche aus Hülstett und Plötz, oder aus dem Gedächtnisse, mit Benutzung der Schriftformentafel. Erk.

3. Gesang. S. Sexta. Erk.

Quarta. Ordinarius: Honigsheim.

A. Wissenschaften.

15 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Die Lehre von den heiligen Sakramenten. Sodann die Erklärung der h. zehn Gebote bis zum fünften Gebote incl. Langendorff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Erklärung des apostolischen Glaubensbekenntnisses und des Evangeliums Matthaei. Auswendiglernen von ausgewählten Psalmen und Kirchenliedern. Krafft.

2. Mathematik. 5 St. a. Geometrie. 3 St. Die Entstehung und die allgemeinen Eigenschaften der generisch verschiedenen Raumgebilde. Vergleichung zweier geraden Linien ihrer Richtung (Theorie der Parallelen) und Größe nach. — Lagebeziehung eines Kreises zu einer geraden und zweier Kreise zu einander. Konstruktions-Aufgaben. Abhängigkeit der Seiten und Winkel im Dreiecke und in Polygonen. Kongruenz der Dreiecke. Die Eigenschaften der Parallelogramme und des Trapezes. Nähere an die betreffenden Lehrsätze angeknüpfte Erörterungen über geometrische Oerter nebst vielen darauf sich beziehenden Aufgaben.

Krumm, gegen Ende des Sommers: Kaiser.

b. Algebra. 2 St. Die vier Rechnungs-Operationen mit einfachen und zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken — Quadrat- und Kubik-Wurzel aus Zahlen und algebraischen Ausdrücken. Nach Heis' Aufgaben-Sammlung.

Krumm, gegen Ende des Sommers: Kaiser.

3. Praktisches Rechnen. 2 St. Wiederholung und Erweiterung der Lehre von den Decimal-Brüchen, insbesondere die abgekürzten Rechnungen. Vielfache Uebungen an schwierigeren Aufgaben aus der Regel de Tri, der Zins-, Rabatt-, Vertheilungs-, Mischungs- und Ketten-Rechnung. Die Theorie der Proportionen und ihre Anwendung. Nach Schellen's „Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen."

Krumm, gegen Ende des Sommers: Kaiser.

4. Naturgeschichte. 2 St. a. Zoologie im Winter. Bau und Lebensverrichtungen des Menschen. Ergänzungen des vorjährigen Kursus der Säugethiere und Vögel. Die Amphibien und die Fische. Handbuch: Fürnrohr.

b. Botanik. im Sommer. Einübung des Linnéischen Systems und praktische Anleitung, mit dessen Hülfe die Pflanzen zu bestimmen. Charakterisirung der wichtigern Pflanzen-Familien. Zwischendurch einerseits Zergliederung und Beschreibung einschlägiger Pflanzen, andrerseits Beschaffenheit der äußeren Pflanzenorgane nebst Wiederholung der betreffenden Kunstausdrücke. Handbuch: Leunis' analitischer Leitfaden. Duhr.

5. Geschichte. 3 St. Geschichte der alten Welt, insbesondere der Griechen und Römer, mit Zugrundelegung des kleinern Handbuches von Pütz. Honigsheim.

6. Geographie 2 St. Topische und politische Geographie von Griechenland, der Türkei, Italien, Spanien und Frankreich. Die meisten der durchgenommenen Länder wurden von den Schülern gezeichnet. Honigsheim.

B. Sprachen.

9 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 4 St. Lectüre von Musterstücken aus Pütz' deutschem Lesebuche; an dieselbe knüpfte sich zugleich die Wiederholung des Wichtigsten aus der Satzlehre, so wie genauere Erörterungen über die Wortarten, besonders das Zeitwort. Declamirübungen und freie Vorträge (Erzählungen aus der alten Geschichte, nach Weil, Grube und Andern). Die schriftlichen Arbeiten (alle 14 Tage bis 3 Wochen) bestanden theils in größern Erzählungen, theils in Umformungen poetischer Stücke in Prosa. Honigsheim.

2. Französisch. 5 St. Wiederholung des III. Abschnittes in Ploetz's II. Kursus. Die Uebungsstücke bis zum VII. Abschnitt wurden schriftlich übersetzt und retrovertirt, die Vokabeln und Regeln auswendig gelernt. Die deutschen Uebungsstücke wurden theils mündlich, theils schriflich übersetzt. Aus Ahn's Lesebuch II. Kursus wurden die naturhistorischen Stücke, Fabeln und Erzählungen, aus dem III. Kursus mehrere Stücke schriftlich übersetzt, retrovertirt und die bezüglichen Regeln so viel wie thunlich in französischer Sprache erklärt. Einige Gedichte wurden auswendig gelernt. Alle 8 Tage ein französisches Pensum. Wirtz.

C. Fertigkeiten.

6—7 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 3 St. Zeichnen von Verzierungen, Blumen, Früchten, Landschaften, und von Gesichtstheilen des menschlichen Kopfes, theils mit der Feder, theils mit vollständiger Schattirung. Linearzeichnen. Die einfachen geometrischen Konstruktionen von Winkeln und Figuren, die Entwickelung und Auseinanderlegung der Oberflächen von Körpern in die horizontale Ebene. Conrad.

2. Schönschreiben. 1—2 St. Wiederholung der Schriftformen beider Currentschriftarten. Schreiben größerer Sätze aus dem Gedächtnisse oder aus Büchern, mit Benutzung der Schriftformtafel. Erk.

3. Gesang. S. Sexta. Erk.

Tertia. Ordinarius: Dr. Schauenburg.

A. Wissenschaften.

14 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St. combinirt mit Quarta.

2. Mathematik. 4 St. a. Geometrie. 3 St. Vergleichung der Inhalte geradliniger Figuren, Ausmessung und Verwandlung derselben. Lehre von den Transversalen, den Strahlenbüscheln und der harmonischen Theilung. Aehnlichkeit der Dreiecke und der Polygone, nebst den daraus abgeleiteten Sätzen über mittlere und dritte Proportionalen. Relationen der Quadrate über Dreiecksseiten, der Summe und der Differenz derselben. Die Lehre vom Kreise nebst Berechnung des Umfangs und des Inhalts desselben. Zu den einzelnen Lehrsätzen wurden entsprechende Aufgaben gegeben. Kaiser.

b. Algebra. 1 St. Wiederholungen aus dem vorjährigen Cursus. Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehung. Auflösung der Gleichungen des 1. Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Nach Heis' Aufgaben-Sammlung. Duhr.

3. Praktisches Rechnen. 1 St. Allgemeine Rechnungen mit Procenten, Gewinn- und Verlust-Rechnung mit Procenten, Zins-, Rabatt- und Disconto-Rechnung. Die abgekürzten Rechnungen mit Decimal-Brüchen. Nach Schellen's „Aufgaben für das theoretische und praktische Rechnen."

Krumm, gegen Ende des Sommers Kaiser.

4. Naturlehre. 1 St. Einige der fruchtbarsten und faßlichsten Lehren aus verschiedenen Theilen der Physik, durch Experimente erläutert. Heinen.

5. Naturgeschichte. 2 St. Mineralogie. Die stereometrischen, physikalischen und chemischen Eigenschaften der Mineralien, durch Krystallmodelle, Mineraliensammlung und Experimente erläutert.

Beschreibung und Einübung der wichtigern Mineralien. Handbuch Fürnrohr. Stammer.

6. Geschichte. 2 St. Deutsche Geschichte nach Kohlrausch, von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1789. Die Wiederholungen wurden theilweise in französischer Sprache angestellt. Schauenburg.

7. Geographie. 2 St. Topische und politische Geographie sämmtlicher germanischen Staaten in Europa, so wie Rußlands. Uebungen im Kartenzeichnen. Schauenburg.

B. Sprachen.

10 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 3 St. Wiederholung der gesammten Satzlehre. Synthetische Grammatik: Lautlehre, Wortlehre; Flexion, Wortbildung. Vorbereitendes über die gebräuchlichsten Versmaße. Uebungen im Declamiren so wie im freien mündlichen Vortrage prosaischer Stücke. Lectüre aus Pütz und Mager **III**. Alle 14 Tage ein Aufsatz. Schauenburg.

2. Französisch. 4 St. Aus dem Elementarbuch von Plötz (II. Theil) wurden die Regeln über den Gebrauch der Zeiten, über die Fürwörter und Verhältnißwörter, über die Rection der Zeitwörter und zuletzt die über das participe passé erklärt, memorirt und durch mündliches und schriftliches Uebersetzen eingeübt. Alle 8 Tage ein französisches Pensum.

Im Winter wurde aus Voltaire's Charles XII. Buch IV und V (nicht ganz), im Sommer aus Montesquieu's Considérations sur la grandeur des Romains Buch 7—13 (mit Ausschluß des 10.) übersetzt und großentheils auch retrovertirt. Zu mündlichen Sprachübungen der Schüler und zu freien Vorträgen wurde daneben der Rest des 5. und der größte Theil des 6. Buches von Charles XII. benutzt. Honigsheim.

3. Englisch. 3 St. Aus Wahlert's Lesebuch wurde der größte Theil der grammatischen Vorübungen, mit Hinweisung auf die Regeln der Aussprache, schriftlich übersetzt und retrovertirt; aus dem zweiten Theile wurden mehrere Stücke schriftlich übersetzt, retrovertirt und theilweise memorirt. Die Tragödie Dagobert wurde mündlich übersetzt.

Die Regeln aus Lloyd's Grammatik bis zu den zusammengesetzten Formen des Zeitwortes; die unregelmäßigen Zeitwörter wurden auswendig gelernt, die Uebungsstücke theilweise schriftlich übersetzt und korrigirt. Wirtz.

C. Fertigkeiten.

1. Zeichnen. 3 St. Fortsetzung der Uebungen in Quarta, Zeichnen von geometrischen Figuren mittelst Abscissen und Ordinaten, von Tangenten an gegebene Kreise, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln excentrischen Kurven. Erste Uebung in der Auffassung perspektivischer

Ansichten von Körpern nach Modellen, mit Angabe der einfachsten perspektivischen Konstruktionen, sowohl aus freier Hand, als mit Lineal und Zirkel. Conrad.

2. Schönschreiben. 1 St. S. Quarta. Erk.

3. Gesang. S. Sexta. Erk.

Secunda. Ordinarius: Dr. Philippi.

A. Wissenschaften.

15 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. a. Für die katholischen Schüler. 2 St. Die Lehre von den heiligen Sakramenten der Buße, der h. Oelung, der Priesterweihe und der Ehe; die Lehre von den letzten Dingen. Sodann aus der Sittenlehre: über Gesetz, Recht und Pflicht; Collision der Pflichten, Freiheit und Imputation, Tugend, Sünde und Laster, das Gewissen, die Akte der innern und äußern Gottesverehrung. Die je dritte Stunde wurde für die Kirchengeschichte verwandt. Die erste nnd zweite Periode derselben von Christus bis auf Constantin dem Großen und von Constantin bis zu Carl dem Großen. Langendorff.

b. Für die evangelischen Schüler. 2 St. Erklärung des Briefes Pauli an die Römer. Lectüre des Buches Hiob. Christliche Kirchengeschichte bis zum achten Jahrhundert. Krafft.

2. Mathematik. a. Geometrie. 1 St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums der Tertia. Heinen.

1 St. Ebene Trigonometrie mit vielen Anwendungen.

b. Algebra. 2 St. Die Lehre vom größten gemeinschaftlichen Theiler. Ausführliche Theorie der Potenzen und Wurzeln. Die Rechnungen mit Logarithmen und Gebrauch der Tafeln. Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten. Arithmetische und geometrische Progression nebst Aufgaben aus der Zinseszins- und Renten-Rechnung. Gebrauch der trigonometrischen Tafeln und Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Nach Heis' Sammlung und August's Logarithmentafeln. Duhr.

3. Praktisches Rechnen. 1 St. Münz-, Wechselreductions-, Arbitragen-, Wechselcommissions-Rechnung, Berechnung der Staatspapiere und Actien, Waarenrechnung. Stammer.

4. Naturlehre. a. Physik 2 St. Ueber Gleichgewicht und Bewegung fester und flüssiger Körper. Die Luftpumpe und das Barometer, insbesondere barometrische Höhenmessung. Die Wärmelehre. Heinen.

b. Chemie. 3 St. Vorkommen, Gewinnung und Eigenschaften der Metalloide und leichten Metalle und ihrer wichtigern Verbindungen, mit steter Rücksicht auf ihre technische Anwendung. Den Unterricht begleiteten Experimente, Aufstellung von Schematen und stöchiometrische Aufgaben. Handbuch Fürnrohr's technische Chemie. Stammer.

5. Geschichte. 2 St. Geschichte des Mittelalters, die deutsche ausführlich, die der andern Staaten mehr übersichtlich. Zu Grunde gelegt wurde das kleinere Handbuch von Pütz. Honigsheim.

6. Geographie. 1 St. Topische und politische Geographie von Asien, Afrika und Amerika, nebst Uebungen im Kartenzeichnen. Schauenburg.

B. Sprachen.

11 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 3 St. Lehre von den gebräuchlichsten Tropen und Figuren und vom Versbau; Lehre von den Dichtungsarten. Uebersicht der Litteraturgeschichte bis zum Zeitalter der Meistersänger. Lectüre altdeutscher Gedichtproben, besonders längerer Abschnitte aus dem Nibelungenliede. — Statarische Lectüre: Balladen von Bürger und Uhland; sodann Schillers Balladen und wichtigere Culturgedichte. Declamationsübungen, freie Vorträge, monatliche Aufsätze. Schauenburg.

2. Französisch. 5 St. a. Prosa und Stylübung. 4 St. Aus den leçons françaises von Noël und La Place wurde eine Reihe von Abschnitten zum Theil schriftlich, zum Theil nur mündlich übersetzt und rückübersetzt. Aus Schultheß' Uebungsstücken wurden ein- oder zweimal wöchentlich Uebersetzungen gemacht und in späterer Zeit hierzu der Abschnitt, welcher die Briefe enthält, gewählt; alle vierzehn Tage wurde eine Uebersetzung zur Correctur eingereicht. Für die vorgerückteren Schüler traten an die Stelle der Uebersetzungen zuweilen freie Ausarbeitungen. Eine Stunde wöchentlich wurde zur Wiederholung der französischen Grammatik und zu freien Vorträgen nach Lamé-Fleury's histoire Grecque verwendet.

b. Dichter. 1 Stunde wöchentlich wurden aus der poetischen Abtheilung der Sammlung von Noël und La Place verschiedne Abschnitte gelesen und theils nur mündlich, theils auch schriftlich und dann von einigen Schülern metrisch übersetzt und stellenweise auswendig gelernt. Philippi.

3. Englisch. 3 St. In 2 Stunden wöchentlich wurde W. Irwing's Columbus theils mündlich, theils schriftlich übersetzt. Ebenso wurden in 1 andern Stunde Herrig's Aufgaben zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Englische benutzt. Die Geübteren machten zuweilen freie Aufsätze statt der Uebersetzungen. Franklin's Leben, von ihm selbst verfaßt, diente als Grundlage zu Uebungen im Sprechen des Englischen. Philippi.

C. Fertigkeiten.

4—5 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 2 St. Fortsetzung der Uebungen in Tertia. Zeichnen von Cykloiden, Epicykloiden, Hypocykloiden die ersten

Elemente der Verzahnungen der Räder. Außerdem freies Handzeichnen. Conrad.

2. Schönschreiben. 1 St. Schreiben nach des Lehrers Vorschriften, sowie freie Uebungen bei den Geübteren. Erk.

3. Gesang. S. Sexta. Erk.

Prima. Ordinarius: **Der Director.**

A. Wissenschaften.

18 Stunden wöchentlich.

1. Religionslehre. 2 St. kombinirt mit Secunda.

2. Mathematik. 4 St. Konstruktion algebraischer Ausdrücke und Lösung geometrischer Aufgaben durch Algebra. Repetitionen über geometrische Oerter und einige Sätze der Geometrie; darauf aus der analytischen Geometrie: Gleichungen für die gerade Linie, für Parallelen und Senkrechte, Gerade, welche durch den Durchschnitt andrer, durch 2 Punkte &c. gehen, und Beweise für einzelne planimet. Sätze; Gleichungen der Ellipse, Parabel, Hyperbel, ihrer Tangenten, Subtangenten &c., ihre Gleichung auf zugeordnete Durchmesser, Asymptoten der Hyperbel. Anwendung auf Physik. — Schwierigere quadratische Gleichungen mit mehren Unbekannten; Exponential-Gleichungen. Die Binomial-Koeffizienten und figurirten Zahlen. Das Binom für alle Fälle nebst Anwendungen auf Wurzelausziehung. Polynom. Lehre von den Funktionen. Konvergirende und divergirende Reihen. Grenzen. Unendliche Größen: Methode der unbestimmten Koeffizienten. Exponentialgrößen. Logarithmische Reihen und Berechnung von Logarithmen. Die cyklischen und hyperbolischen Funktionen. Vielfache Bogen. Berechnung des Kreisbogens mittelst der Tangente und der Zahl π. Anfänge der Differential-Rechnung. Die Differentiale von Potenzen, Logarithmen, goniom. Funktionen &c., von Funktionen mit mehren Veränderlichen, Taylorsche Reihe nebst Anwendungen. Vom Größten und Kleinsten. —

3. Naturlehre. 6 St. a. Physik. 3 St. Schluß der Wärmelehre. — Fallgesetze; Gesetze für den vertikalen und schiefen Wurf. Fallmaschine. Arbeitsgröße. Masse. Schwingende Bewegung. Pendelgesetze. Mathematisches und physisches Pendel. Kompensation. Anwendungen des Pendels. Der Foucauld'sche u. a. Versuche. — Centrifugal- und Tangentialkraft. Die Kepplerschen Gesetze. Verschiedene Rotationsapparate. Reibung. Stoß. — Wellenbewegung. Die Weber'sche Wellenrinne. Interferenz in elliptischen, parabolischen &c. Gefäßen. Schwingungen von Saiten und Stäben. Klangfiguren. Luftwellen. Schallgeschwindigkeit und Stärke. Töne. Ihre Quantität und Qualität. Intervalle und Temperaturen. Interferenz und Beugung von Luftwellen. Echo. Kombinationstöne. Theorie der Pfeifen. Stimm- und Gehör-Organ. — Wellen des Lichtäthers. Intensität des Lichtes. Geschwindigkeit und Aberration. Brechung. Zerstreuung. Farben-Spektrum. Achromasie. Das Auge. Beugung

und Polarisation. Optische Instrumente. — Aus der populären Astronomie: Geographische und astronomische Ortsbestimmung. Die Bewegungen der Planeten, insbesondere der Erde und ihres Satelliten, sowie die der Sonne. Erläuterungen mittelst des Telluriums und Lunariums. Erklärung der gebräuchlichern astronomischen Instrumente in der Schule und auf der Sternwarte zu Bilk. Heinen.

b. Chemie. 3 St. Im ersten Monat Vervollständigung des Pensums der Secunda. Dann organische Chemie; Organische Elementar-Analyse, Verwandlungen der organischen Substanzen, Constitution der organischen Verbindungen, Chemie der wichtigern Familien, nach Schloßberger's Eintheilung. Besonders ausführlich wurden behandelt: die Kohlenhydrate, die Proteinverbindungen, die leimgebenden Substanzen, die fetten Säuren und ihre Verbindungen, die Alkohole nebst den damit zusammenhängenden Substanzen, die Farbstoffe, Alles mit fortwährender Beziehung auf Physiologie, Technologie und tägliches Leben. Stammer.

Die praktischen Uebungen im Laboratorium, an welchen im Winter die Oberprimaner und im Sommer auch noch einige Unterprimaner in zwei wöchentlichen Stunden Theil nahmen, bestanden theils in Wiederholung der Reactionen, theils in Ausführung leichterer qualitativer Analysen, theils in Darstellung von chemischen Präparaten, u. A. von Chromkalialaun, doppelt kohlensauerm Natron, salpetersauerm Strontian, salpetersauerm und salpetrigsauerm Bleioxyd, Chlorblei, Chlormagnesium, Platinchlorid, chemisch reinem Silber, Buttersäure, Benzoesäure, Ameisensäure, Aldehyd, Aether. Stammer.

4. Naturgeschichte. 1 St. Geologie (Petrographie, Geognosie und Geogenie) mit Benutzung der einschlägigen Sammlungen der Anstalt, nach Wälchner und Andern. — Wiederholungen aus dem Gebiete der Mineralogie. Duhr.

5. Geschichte. 2 St. Neuere Geschichte von der Reformation bis zur französischen Revolution und übersichtliche Darstellung der Ereignisse von da an bis zum Jahre 1815. Honigsheim.

6. Geographie. 1 St. Uebersichtliche Wiederholung der mathematisch-physischen Geographie; Handelsgeographie und genauere Wiederholung der politischen Geographie von Amerika, Asien, Africa und den europäischen Staaten, mit besonderer Berücksichtigung der Colonialbesitzungen. Lehrbuch: Sardou, Abrégé de Géographie. Schauenburg.

B. Sprachen.

11 Stunden wöchentlich.

1. Deutsch. 3 St. Geschichte der neueren deutschen Litteratur, mit häufiger Mittheilung von Proben aus den bedeutendsten Schriftstellern. — Gelesen und erläutert wurde: Göthe's Hermann und Dorothea; Iphigenie in Tauris; Schiller's Gedicht an die Künstler; Abhandlung über das Erhabene; Lessing's Laokoon. — Uebungen im freien mündlichen Vortrage; monatliche schriftliche Aufsätze. Schauenburg.

2. Französisch. 5 St. Von Guizot's Histoire générale de la civilisation en Europe wurden in 2 Stunden die zehn ersten Vorlesungen mündlich theils in's Deutsche, theils in's Englische übersetzt, den Schülern in französischer Sprache erklärt und von diesen ebenso auszugsweise wiederholt. In 1 Stunde wurden längere Abschnitte aus Herrig's Aufgaben zum Uebersetzen in das Englische zum Theil schriftlich, zum Theil nur mündlich übersetzt. Monatlich ein Mal wurde eine freie französische Ausarbeitung von den Schülern verfertigt und denselben korrigirt zurückgegeben. In 1 Stunde wurde die im vorigen Jahre begonnene Lectüre von Moliere's Avare wieder aufgenommen und beendet; hierauf wurden Racine's Athalie und Bruchstücke aus andern Tragödien Racine's gelesen. Eine Stunde wurde zur Besprechung und bruchstückweisen Mittheilung der bedeutendsten Erscheinungen der französischen Litteratur bis zum 18. Jahrhundert verwendet. Philippi.

3. Englisch. 3 St. In einer Stunde wurden ausgewählte Abschnitte aus W. Irwing's Sketchbook gelesen und mündlich übersetzt, in einer andern wurde die im vorigen Jahre begonnene Lectüre von Shakespeare's Richard II. beendet, nachdem die ersten Akte dieses Dramas cursorisch wiederholt worden waren. Ferner wurde Byron's Belagerung von Korinth übersetzt. Eine dritte wöchentliche Stunde diente zur mündlichen Uebersetzung von Schiller's Parasit (später wurden zu diesem Zweck Herrig's Aufgaben gebraucht) und zu freien Vorträgen nach Goldsmith's History of Greece. Monatlich ein Mal wurde von den Schülern eine freie englische Ausarbeitung verfertigt und denselben korrigirt zurückgegeben. Philippi.

C. Fertigkeiten.

4 Stunden wöchentlich.

1. Zeichnen. 2 St. Fortsetzung der Uebungen in Secunda. Projektivisches Zeichnen von Linien und Flächen in der verschiedensten Lage zu den Projektions-Ebenen; die verschiedenen Schrauben und Räder, sowie andere Maschinentheile mit Angabe der Schatten in Tusche. Architektonisches und freies Handzeichnen. Conrad.

2. Gesang. S. Sexta. Erk.

Latein.

V. oder unterste Abtheilung. 4 St.

Regelmäßige Formenlehre bis zum Deponens, nach Scheele's Vorschule I., eingeübt durch mündliches und schriftliches Uebersetzen der betreffenden Uebungsstücke von §. 1—25. Wöchentliche Pensa. Honigsheim.

IV. Abtheilung. 4 St.

Wiederholung der regelmäßigen und Einübung der unregelmäßigen Formenlehre nach Scheele's Vorschule I.; nochmalige Wiederholung der gesammten Formenlehre, angeknüpft an den zweiten Lehrgang der Uebungsstücke desselben Handbuches. Die nöthigsten Regeln aus der Casuslehre in Scheele II. nebst den zugehörigen Uebungsstücken. Wöchentliche Pensa. Schauenburg.

III. Abtheilung. 4 St.

Einübung der gesammten Casus- und Moduslehre aus Scheele II., Uebersetzung der zugehörigen Uebungsstücke. Wöchentliche Pensa. Schauenburg.

II. Abtheilung. 4 St.

a. 2 St. Grammatik. Repetition der Casuslehre und Durchnahme der Moduslehre; Uebersetzen der betreffenden Uebungsstücke aus Scheele II. Wöchentliche Pensa, abwechselnd mit Extemporalien. Aus Ovid's Metamorphosen Buch VII., 1—350 (Medea), VIII., 610 - 756 (Philemon und Baucis) gelesen. Aus ersterm wurde Vers 1—90 auswendig gelernt. Honigsheim.

I. oder oberste Abtheilung. 4 St.

3 St. In einer mit der zweiten Abtheilung combinirten Stunde wurde von Cäsar's Commentar. de bello gall., die zweite Hälfte des V. Buches und Buch VI gelesen, theilweise schriftlich übersetzt und retrovertirt. Mit der ersten Abtheilung allein wurde in einer wöchentlichen Stunde Sallustii bellum Jugurth. bis zu Cap. 35 incl. und die Reden in dem bell. Catilin. mündlich und theilweise auch schriftlich übersetzt und retrovertirt; in der andern wurden die Hauptregeln der lateinischen Syntax durch lateinische Scripta eingeübt. Philippi.

1 Stunde combinirt mit Abtheil. II. Die wichtigsten Regeln der Prosodie nach Siberti. Aus Virgil's Aeneide wurde das VI. Buch bis zu Ende übersetzt und erklärt und V. 1—450 des VI. B. theils auswendig gelernt, theils retrovertirt. Heinen.

Die Zahl der am lateinischen Unterrichte theilnehmenden Schüler betrug im Ganzen 83; davon gehörten 42 der fünften, 18 der vierten, 6 der dritten, 9 der zweiten und 8 der ersten Abtheilung an.

Gymnastische Uebungen.

Sämmtliche Schüler der Anstalt (mit Ausnahme von 26, denen wegen Kränklichkeit die Theilnahme nicht gestattet wurde) waren in 14 Riegen unter 28 Vorturnern vertheilt; die Uebungen fanden auf dem Turnplatze des Gymnasiums unter Leitung des Dr. Schauenburg und unter Beihülfe des Dr. Stammer, so wie unter Mitbeaufsichtigung des Herrn Conrad und mehrerer anderer Lehrer zweimal wöchentlich je zweistündig statt, und bestanden theils in Gerüstübungen, theils in Freiübungen, theils in militärischen Uebungen.

Themata.

zu den freien schriftlichen Arbeiten.

A. Deutsch.

In Prima:

1. Wer unter den Wölfen ist, muß mit heulen. Uebung im Disponiren und Ausführen.

2. u. 3. Was knüpft die Menschen aneinander?

4. Schilderung eines der Hauptcharaktere aus Göthe's Hermann und Dorothea.

5. Ueber das Göthesche Gedicht: Zueignung.

6. Freigewähltes Thema aus dem Kreise der im Unterrichte stattgefundenen Besprechungen. Gewählt wurden u. a.: Vergleichung der Iphigenie von Göthe mit dem gleichnamigen Drama von Euripides; Vergleichung zwischen den Anfängen der dramatischen Kunst bei den Griechen und der des deutschen Mittelalters.

7. Amtlicher Bericht über einen selbsterfundenen Anlaß.

8. Metrische Uebung: Räthsel nach Muster der Schillerschen Räthsel.

9. u. 10. Willst du dich selber erkennen, so sieh', wie die Andern es treiben;
Willst du die Andern verstehn, blick' in dein eigenes Herz.
(Schiller.)

11. Beschreibung der antiken Laokoongruppe.

In Secunda:

1. Der Apfel fällt nicht weit vom Stamm. Uebung im Disponiren und Ausführen.

2. Das Glück von Edenhall, Ballade von Uhland, als Mährchen behandelt.

3. Vergleichung zwischen Schiller's Ring des Polykrates und der betreffenden Erzählung bei Herodot.

4. Definition einer Anzahl gegebener Begriffe.

5. Metrische Uebung: Der Sonnenaufgang nach Rousseau.

6. Erzählung nach einer Reihe gegebener Wörter.

7. Der Alpenjäger von Schiller, verglichen mit dem Taucher und mit Bürgers wildem Jäger.

8. Brief an einen Freund in Amerika.

9. Das Ende der Burgunder im Hunnenlande, nach dem Nibelungenliede erzählt.

10. Ueber das Sprichwort: Noth kennt kein Gebot.

11. Ueber Schillers Spaziergang Vrs. 39—18.

B. Im Französischen.

1. Introduction dans l'histoire de la littérature française du XVI. siècle. 2. Esquisse sur Rabelais. 3. a) Le charmes et les plaisirs de l'hiver. b) Avant de rien entreprendre considérez en la fin. 4. a) Analyse de l'Avare de Molière. b) Caractère de l'Avare. 5. Vie et mort de Jaques I. roi d'Ecosse. 6. Une lettre d'affaire. 7. Réponse à la lettre anglaise Nr. 6. 8. Guerre pour la succession en Espagne. 9. Guerre de Pyrrhus contre les Romains. 10. Pourquoi Frédéric II. mérite-t-il le surnom du Grand. 11. Discours tenu à l'occasion de l'ouverture d'un chemin de fer.

C. Im Englischen.

1. Introduction to Shakespeare's King Richard II. 2. Wealth and riches. 3. The barricades of 1588. 4. u. 5. The first inhabitants of England and its conquest by the Anglo-Saxons. 6. A lettre tho a friend. 7. The ruins of Palmyra. 8. The contents of the Parasite. 9, The battle of Actium. 10. Why must youth be directed by advice and a man by his own judgement. 11. Letter in which a steam-boot and the travelers on the Rhine are described.

II. Chronik der Schule.

Von den vorgesetzten hohen Behörden sind folgende Verfügungen eingegangen:

1. Verordnung des Königl. Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten vom 27. April d. J. über die Ertheilung von Privatunterricht von Seiten der Lehrer an Schüler ihrer Klasse.

2. Verordnung derselben Behörde vom 20. Mai d. J., über die Ueberwachung und Beschränkung der schriftlichen Aufgaben und Ausarbeitungen.

Das neue Schuljahr begann am 8. Oktober mit der Anmeldung und Prüfung der aufzunehmenden Schüler.

Am 14. desselben Mts. ward Nachmittags die Vorfeier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs in bisheriger Weise mit Rede und Gesang begangen. Die Festrede hielt Herr Dr. Wirtz.

Das Kuratorium der Realschule ist unverändert geblieben; es zählt außer dem Vorsitzenden Herrn Bürgermeister Hammers zu seinen Mitgliedern die Herren: Konsistorialrath Budde, Dechant Joesten, Justizrath Friedrichs, Justizrath Kramer, Archivrath Dr. Lacomblet, Kaufmann Lupp, Kaufmann Sartorius, Kaufmann Trinkaus und den Berichterstatter.

Der ordentliche Lehrer Herr Dr. Schauenburg ward durch h. Ministerial-Rescript vom 15. Oktober zum „Oberlehrer" ernannt. Kurz nachher erhielt derselbe von dem Magistrate zu Colberg einen ebenso ehrenvollen als vortheihaften Ruf zur Uebernahme des Direktorats der dortigen höheren Bürgerschule, und so war die Anstalt wieder mit einem schmerzlichen Verluste, wie wir deren bereits manche zu berichten hatten, bedroht. Der hiesige Gemeinderath nahm indessen in dankenswerther Fürsorge für das städtische Institut Veranlassung, dem Herrn Dr. Schauenburg unter Anerkennung seiner verdienstlichen Wirksamkeit für den Fall seines Verbleibens an der Schule eine angemessene persönliche Gehaltszulage zu bewilligen, und dieser ward dem ihm liebgewordenen Wirkungskreise erhalten.

Eine Anerkennung andrer Art ward dem Berichterstatter zu Theil, zu welcher Lehrer und Schüler von dem Umstande Veranlassung nahmen, daß derselbe Ostern vor 25 Jahren seine öffentliche Lehrthätigkeit begonnen hatte. Die Feier, im Kreise der Schule in Innigkeit begangen, trug so ganz den Charakter eines Familienfestes, welches nur innere Motive kennt und von jeder Ostentation fern ist, daß man hoffentlich es wenigstens dem, dem das Fest galt, nicht verdenken wird, wenn es gegen den sonst im Programm wohl üblichen Brauch sich eines ausführlichern Berichtes über dasselbe enthält.*) Er kann es sich aber nicht versagen und es ist ihm eine wahre Herzens-

*) Für hiesige Freunde der Schule ward von einer anderen Hand eine Mittheilung über das Fest im hiesigen Kreisblatte Nr. 128 gegeben.

sache, Allen Denen, welche ihm die freudige Ueberraschung bereitet, sowohl den theuren Kollegen und lieben Schülern als auch den Eltern der letztern, welche mittelbar dazu beigetragen haben, hier seinen wärmsten Dank und die Versicherung auszusprechen, daß ihm unvergeßlich die Beweise von Pietät, Anhänglichkeit und Wohlwollen sind, welche er bei dieser Gelegenheit empfangen hat! —

Herr Dr. Wilhelm Stammer, bis dahin provisorischer Lehrer, ward auf den Grund der von der Königl. Regierung befürworworteten Anträge des Kuratoriums und des Gemeinderathes durch h. Ministerial-Verfügung vom 9. November 1853 zum ordentlichen Lehrer ernannt. Derselbe ist 1826 zu Luxemburg geboren, und bezog, nachdem er das dortige Gymnasium absolvirt und das Abiturienten-Examen an demselben abgelegt hatte, 1845 die Universität Bonn, um Mathematik und Naturwissenschenschaft zu studiren. Dort promovirte er Ostern 1849 und bestand im Herbste desselben Jahres vor der wissenschaftlichen Prüfungs-Kommission das Examen pro facultate docendi. Darauf setzte er seine Studien noch ein Jahr lang auf der Universität Berlin fort, trat inzwischen sein Probejahr am dortigen Cöllnischen Realgymnasium an und beendigte es an der höhern Bürger- und Gewerbschule zu Trier, wo er bis Mitte Juli 1851 eine vollständige Lehrerstelle interimistisch versah. Ostern 1852 wurde er an die hiesige Realschule als provisorischer Lehrer berufen.

Herr Dr. Krumm setzte auch in diesem Jahre einen Theil des Unterrichtes fort, welcher ihm mit Genehmigung der Königl. Regierung zur Hülfeleistung für den Oberlehrer Herrn Duhr (s. das vorigj. Programm) übertragen war; am Schlusse desselben schied er aus, um eine Lehrerstelle an dem Erziehungs-Institute des Herrn Ellenberger zu Workfop in England zu übernehmen.

Herr Gustav Kaiser, welcher auf der hiesigen Anstalt seine Schulbildung genossen und im Jahre 1849 das Abiturienten-Examen rühmlichst bestanden hatte, trat nach Beendigung seiner Berufsstudien auf der Universität Bonn und Ablegung des freiwilligen Dienstjahres mit dem Anfang des Schuljahres das Probejahr als Lehramts-Kandidat an, nachdem er bereits während gedachten Dienstjahres den Lehrstunden häufiger beigewohnt und an einzelnen sich auch, selbst unterrichtend, betheiligt hatte.

Da durch die Fürsorge der hohen erzbischöflichen Behörde der katholische Religionslehrer Herr Kaplan Langendorff für die Dauer des Gottesdienstes der Realschüler an Sonn- und Festtagen von seinen anderweitigen Amtsobliegenheiten entbunden ward, so konnte nunmehr der Wunsch der Anstalt, daß mit gedachtem Gottesdienste eine Erklärung des jedesmaligen Evangeliums verbunden werde, erfüllt werden; überdies ward der Gottesdienst während der Woche in der Art erweitert, daß die katholischen Realschüler, statt wie bisher einmal, seit Ostern zweimal wöchentlich vor Anfang der Schule, Dienstags und Donnerstags, der h. Messe beiwohnen. Die für das Orgelspiel erwachsenden Mehrkosten wurden von dem wohllöbl. Gemeinderathe bereitwilligst bewilligt.

Für die evangelischen Schüler sind von dem wohlehrwürdigen Presbyterium besondere Sitze in der größern Kirche eingeräumt worden, in welchen sie seit Pfingsten unter Aufsicht der evangelischen Lehrer der Schule dem Gottesdienste beiwohnen. Auch sind in Uebereinstimmung mit dem evangelischen Religionslehrer Herrn Pastor Krafft Schritte geschehen, um dieselben Mittwochs vor Anfang der Schule zu einer mit Gesang, Ansprache und Gebet zu begehenden Morgenandacht in der kleinen evangel. Kirche zu versammeln, und läßt sich hoffen, daß dieselbe baldigst begonnen werden könne.

Der Empfang der ersten h. Kommunion seitens der jüngern katholischen Realschüler fand am 14. Mai statt. Ihrer 19 an der Zahl begingen an diesem Tage, nachdem sie von Herrn Kaplan Langendorff den erforderlichen Vorbereitungsunterricht in besondern Stunden erhalten hatten, in Gemeinschaft mit ihren kath. Lehrern und den ältern Mitschülern die heil. Handlung.

Am 27. Juli fand unter dem Vorsitze des Kommissars der Königlichen Regierung, Herrn Regierungsrath Altgelt, und im Beisein des Kommissars des Kuratoriums die mündliche Prüfung der nachgenannten Abiturienten statt:

1. Ernst Jäger, 18 Jahr alt, aus Mainz, evangelischer Konfession, 8 Jahr auf der Schule, 3 Jahr in Prima.

2. Friedrich Steeg, genannt Klimpel, aus Trier, 16 Jahre alt, evangelischer Konfession, 7 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima.

3. Carl Schilling, aus Erkelenz, 17 Jahr alt, katholischer Konfession, 3 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima.

Sie erhielten das Zeugniß der Reife, und zwar Schilling mit dem Prädikate: „Vorzüglich", die beiden andern mit dem Prädikate: „Gut". Der erste wird die Bau-Akademie zu Berlin beziehen, Jäger Chemiker werden und Steeg sich dem Steuerfache widmen.

Die Turnübungen fanden in derselben Ausdehnung und mit gleich erfreulicher Theilnahme wie im verflossenen Jahr statt; desgleichen die botanischen Exkursionen unter Leitung der Herren Oberlehrer Duhr und Dr. Stammer.

Das Silentium für die drei untern Klassen unter Leitung des Reallehrers Herrn Erk, bewährt sich fortdauernd in seinem wohlthätigen Einflusse auf die Gewöhnung der Schüler zu geregelter Thätigkeit und gehöriger Vorbereitung für den Unterricht. 48 Schüler nahmen an demselben Theil.

Ostern veranstalteten die Herren Ordinarien der verschiedenen Klassen eine Sammlung zum Besten der Schüler-Bibliothek, bei welcher aus der I. 4 Thlr. 12 Sgr., aus II. 5 Thlr. 7 Sgr., aus III. 3 Thlr. 20 Sgr. 6 Pf., aus IV. 4 Thlr. 25 Sgr. 4 Pf., und aus V. 1 Thlr. 29 Sgr. einging. Von diesem Gesammtbetrage von 20 Thlr. 3 Sgr. 10 Pf. wurde dem Buchbinder bezahlt 3 Thlr. 1 Sgr. 6 Pf. und an die Schaubsche Buchhandlung 17 Thlr. 1 Sgr. Es verbleibt hiernach in der Casse 1 Sgr. 4 Pf.

Als Ordner haben folgende Schüler sich einer löblichen Erwähnung würdig gemacht: Siebel in I., Stein in II., Oxé in III., Tönnies, Mittendorf und Minjon in IV., Brandt und Johnen in V., Titz, Delbermann, Cramer in VI.

Die im vorigjährigen Programm bereits mitgetheilte Vereinbarung hiesiger Kaufleute und Fabrikanten sehen wir uns veranlaßt, hier wieder aufzunehmen. Sie lautet:

„Die unterzeichneten Kaufleute und Fabrikanten haben sich vereinbaret, für diejenigen jungen Leute, welche von der hiesigen Realschule nach Absolvirung der Prima mit dem Zeugnisse der Reife entlassen worden sind, falls sie in ihr Geschäft treten, die bei ihnen übliche Lehrzeit um ein Jahr zu verkürzen, welches sie hiermit zur öffentlichen Kenntnißnahme bringen.

Düsseldorf, den 2. August 1854.

Friedr. Aug. Deus. Lupp & Söhne. Gebr. Stein. A. Sartorius. Gebr. Westhoff. J. C. v. d. Beck. Jul. Wülfing et Cp. Wilh. Cleff. C. G. Trinkaus. C. Vogts. G. Lessing. Burberg & Kirdorf. C. Siebel. L. A. Jung. L. G. Cramer. J. D. Brinks jun. Peter Junkerstorff. C. & C. Thieme. L. W. Cretschmar.

III. Statistische Nachrichten.

Die Anstalt ward im verflossenen Schuljahre von 215 Schülern besucht; davon waren 16 in Prima, 29 in Secunda, 31 in Tertia, 52 in Quarta, 43 in Quinta, 44 in Sexta. Evangelischer Konfession waren 107, katholischer 104 und 4 israelitischen Glaubens, ferner 110 über 14 Jahre alt, und 33 auswärtige. Die Zahl der aufgenommenen betrug im Winter-Semester 43, im Sommer-Semester 11.

IV. Lehrmittel.

Es sind hinzugekommen:

1. Für Naturgeschichte.

Durch Schenkungen:

Kleines Wiesel von den Schülern der Quinta. Eine Mineralien-Sammlung von dem Kaufmann Herrn Bockmühl hierselbst.

2. Für Physik.

A. Durch Schenkung.

Ein Stereoskop nach Brewster mit einem photographischen und einem Daguerre-Bilde von den Schülern der Tertia, welche dem Berichterstatter 6 Thlr. 25 Sgr. übergaben, von denen 5 Thlr. 17 Sgr. verwandt wurden.

B. Durch Ankauf.

Eine Tangenten-Boussole. Ein Rheostat nach Wheatstone, ein Photometer nach Edge und ein (Segnerscher) Wasserkreisel von Mechanikus Hilt. — Ein Ventilator, eine Wheatstone'schen Spirale zur Erklärung des Foucauld'schen Versuchs, eine Mariottesche Röhre für 3 Atmosphären, Plücker's Universal-Apparat für die Inductionsgesetze, desselben rotirende Magnete, ein Ampère'sches Gestell, und Page's electromagnetische Maschine von Mechanikus Fessel zu Köln. — Ein gläserner Hohlspiegel. — Eine Kompressionspumpe von Mechanikus Etter zu Bonn.

3. Für Chemie.

Durch Ankauf:

Mehrere Flaschen und kleine Porzellanschalen, ein Exsiccator, ein Thermometer für Temperaturen bis 320° C., ein Oelbad nebst Ringen und Träger, ein Gestell zum Filtriren, ein Repositorium.

4. Zur Schulbibliothek.

A. Durch Schenkung.

Von einem hohen Königl. Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten: v. Quast, Denkmale der Baukunst in Preußen, Heft 1. E. Birchner, Thor's Donnerkeil und die neusteinernen Opfergeräthe des nord-germanischen Heidenthums. Neu-Strelitz 1853. Von der Verlagshandlung der Herren Winkelmann u. Söhne in Berlin: L. Winkelmann's Wandkarte des Preußischen Staates. Von Herrn Cohnitz hierselbst: Villefosse, de la richesse minérale, 3 voll. in 4to. Paris 1819. Christian, traité de mécanique industrielle, 3 voll. 4to. Paris 1822—25. Hassenfratz, la Sidérotechnie ou l'art de traiter les minérais de fer, 4 voll. in 4to. Paris 1812. Amtlicher Bericht über die allgemeine deutsche Gewerbe-Ausstellung in Berlin im Jahre 1844, 3 Bde. in 8vo. Berlin 1845—46. Von der Verlagshandlung von Vieweg zu Braunschweig: Gottliebs Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Braunschweig 1853. —

B. Durch Ankauf.

A. Beer, Einleitung in die höhere Optik, 1 Bd. 8vo. Braunschweig 1853. Kaltschmidt, sprachvergleichendes Wörterbuch der deutschen Sprache, 1. Bd. 8vo. Leipzig 1839. Müller's Handbuch der gesammten Preußischen Schulgesetzgebung, Lieferung 1. Berlin 1853. Ganot, traité de physique, 2me édit. 1 vol. 8vo. Paris 1853. Ohmann Wandkarte der östlichen Hemisphäre, desselben Wandkarte der westlichen Hemisphäre. De la Beche, Vorschule der Zoologie, frei bearbeitet von E. Dieffenbach, in 6 Lieferungen. Braunschweig 1852. Die Gesänge der Völker von W. Menzel, 1 Bd. 8vo. Leipzig 1851.

Als Fortsetzungen:

Liebig, Poggendorf und Wöhler, Handwörterbuch der Chemie, Bd. 5, L. 4—6. Supplement zu demselben Werk, L. 5 und 6. Knapp's Lehrbuch der chemischen Technologie Bd. 2. — Ritter's Erdkunde, Bd. 17. Schlossers Weltgeschichte, L. 28. Krönig und Bantz, Fortschritte der Physik in den Jahren 1850 und 51. Berlin 1854.

Aus dem Leseverein der Schule: Magazin für die Literatur des Auslandes 1853. Herrig's Archiv für die neuern Sprachen 1853. Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie 1853. Grunert's

Archiv der Mathematik und Physik 1853. Mager's pädagog. Revue 1853. Allgemeine Schulzeitung 1853.

7. Zur Schüler-Bibliothek.

A. Durch Schenkung:

Von der Stahlschen Buchhandlung (W. Kaulen) Gottlieb's Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. 1 Bd. 8. Braunschweig 1853.

B. Durch Ankauf:

O. Ule, das Weltall, 3 Bde. 8vo.. Halle 1853.. Das Buch dre Erfindungen von Thomas, 1 Bd. 8vo. Leipzig 1854. Das Buch der Arbeit von Bergmann, 1 Bd. 8vo. Leipzig 1854. Das Buch der Wunder von Thomas, 1 Bd. 8vo. Leipzig 1854. Das Buch der Thierwelt von Reichenbach, 1 Bd. 8vo. Leipzig 1854. Der Sternhimmel, beschrieben von Kaiser, nach dem Holländischen von Schlegel, 1 Bd. 8vo. Berlin 1850. Littrow, die Wunder des Himmels, vierte Auflage, Stuttgart 1854. Populäre Naturlehre von Becquerel, deutsch von Kißling, Stuttgart 1845. Die Thierwelt in Jagdscenen und Charakterbildern von Kletke. Berlin 1854.

Als Fortsetzung und Schluß:

Nieritz, Jugendschriften, 2 Bde., Berlin 1854. Harnisch Weltkunde, 2 Bde. Leipzig 1854.

Für die oben gedachten Geschenke sprechen wir hier nochmals Namens der Anstalt unsern aufrichtigsten Dank aus.

V. Unterricht für Handwerker.

Der unentgeltliche Unterricht für Gesellen und Lehrlinge aus dem Handwerkerstande wurde in folgender Weise ertheilt:

1. Sonntags von 9—12 Zeichnen in drei getrennten Klassen. Lehrer: Die Herren Maler Conrad, Bauunternehmer Fischer, Maler Holthausen und Maler Kost. Schülerzahl 176.

2. Sonntags im Winter von 12—1, einige Vorträge aus der Naturlehre, Lehrer: der Berichterstatter.

3. An Wochentagen:

a) im Winter in 3 getrennten Klassen, jede mit 4 wöchentlichen Stunden, Abends von 6—8 Uhr. In der I. Klasse — 23 Schüler — wurden die Anfangsgründe der Geometrie von Herrn Dr. Krumm, die Anfänge der Buchstabenrechnung, Ausrechnung des Inhaltes der Flächen und Körper nach algebraischen Formeln, ferner Geschäftsaufsätze und Erklärung von Lesestücken von Herrn Adolf vorgenommen; in der II. Klasse — mit 41 Schülern — Regeldetri, Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, Flächen- und Körperberechnung, ferner Aufsätze aus dem bürgerlichen Leben, Lesen und Erklärung des Gelesenen mit Bezug auf Rechtschreibung und Inhalt von Herrn Oxé; in der III. Klasse — mit 38 Schülern — die 4 Spezies mit benannten und unbenannten Zahlen, Lesen, Schreiben, Orthographie von Herrn Adolf.

b) im Sommer, Montags von 6—8, in zwei getrennten Klassen. In der obern — 19 Schüler — unterrichtete im Rechnen Herr Adolf, im Deutschen Herr Oxé; in der untern — 21 Schüler — im Rechnen ebenfalls Herr Adolf, im Deutschen Herr Oxé.

Für die Aufstellung der von dem Komité der stattgehabten Gewerbe-Ausstellung für Rheinland und Westphalen der Handwerker-Fortbildungsschule verehrten Gypsabgüsse sind zwei Schränke aus städtischen Mitteln angeschafft worden.

Von dem Präses der Prüfungs-Kommission für Bauhandwerker Herrn Polizei-Direktor von Falderen sind 7 Modelle, welche als Probearbeiten für die Meisterprüfung von Bauhandwerkern angefertigt waren, zur Benutzung beim Unterrichte überwiesen worden.

Die Probezeichnungen der Sonntagsschule liegen an den Prüfungstagen der Realschule zur Ansicht vor.

VI. Uebersicht der öffentlichen Prüfung

im Zeichensaale der Realschule.

Montag den 28. August.

Vormittags von 8—12 Uhr.

V. Abtheilung im Lateinischen. Honigsheim.

Sexta	Französisch. Wirtz. Rechnen. Stammer.	Quinta	Deutsch. Erk. Geographie. Stammer. Französisch. Wirtz.

Nachmittags von 3—6 Uhr.

Quarta	Botanik. Duhr. Französisch. Wirtz. Geschichte. Honigsheim.	Tertia	Geometrie. Kaiser. Geographie. Schauenburg.

Dienstag den 29. August.

Secunda	Deutsch. Schauenburg. Algebra. Duhr. Französisch. Philippi.

II. und I. Abtheilung im Lateinischen. Schauenburg.

Prima	Geschichte. Honigsheim. Englisch. Philippi. Chemie. Stammer.

Die Probeschriften und Zeichnungen der Realschüler liegen an beiden Tagen zur Einsicht offen.

Nachmittags um 3 Uhr.

Redeübung.

Gesang: Hymnus. Mel. von Schnabel, vierstimmig von L. Erk,
Stahl, VI. Der Maulwurf, von Kopisch.
Trinkaus, V. Zietsen, von Sallet.
Boode, IV Mes adieux du collége de Belly, par Lamartine.
E. Cohnitz, IV. Des fremden Kindes heil'ger Geist, von Rückert.
Vielhaber, III. Das Glück von Edenhall, von Uhland.
Klimpel, Abiturient: Eloge de Frédéric le grand. (Eigne Arbeit.)

Gesang: Frühlingsfeier. Musik von Friedr. Dietrich.

Huppertsberg, V. Treuer Tod, von Scheuerlin.
O. Lunnebach, VI Die kluge Maus, von Grimm.
Tönnies, IV. Die wiedergefundnen Söhne, von Herder.
Severin, II. The better land, by Fel. Hemans.
Schönfeld, III. Die Kreuzschau, von Chamisso.
Berger, II. Die Mähderin, von Uhland.
Pieper, I. Die Macht des Gesanges, von Schiller.
Gesang: Dem Einzigen. Musik von Chr. H. Rinck.

Stein, III. Le loup et le chien, par Lafontaine.
Titz, VI. Musikanten-Traum, von Kopisch.
Kleinhans, V. Die Elster, von Hagedorn.
Hütz, IV. Pipin der Kurze, von Streckfuß.
Bruchhausen, II. Ein Faustschlag, von Strachwitz.
Fournier, II. L' orage, par St. Lambert.

Gesang: Die Loreley. Mel. von Silcher, vierstimmig von Fr. Erk.

Oelbermann, VI. Die Rebe und die Tanne, von Kerner.
Fluß, III. Die alte Waschfrau, von Chamisso.
E. Siebel, I. Why must youth be directed by adrice and the man by ore judgement? (Eigne Arbeit.)
Abschiedsrede des Abiturienten C. Schilling, über Schillers Worte:
Nur Beharrung führt zum Ziel,
Nur die Fülle führt zur Klarheit,
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit. (Spr. d. Conf.)

Entlassung der Abiturienten.

Gesang: Harre des Herrn! Musik von Cäsar Malan.

Text der Gesänge.

1. Hymnus. Gedicht von S. G. Bürde.

1. Alles, was Odem hat, lobe den Herrn! Andacht und heilige Wonne durchdringe unser Aller Seelen ganz!

2. Schmecket und sehet, wie freundlich er ist! Lieb' und Erbarmung und Wahrheit und Gnade waltet ewig über uns.

3. Alles, was lieben kann, liebe den Herrn! Seraphim, Cherubim, Engel und Geister, Lieb' ist eure Seligkeit!

4. Dürsten doch unsere Seelen, wie ihr, selig und heilig und ewig zu lieben den, der uns aus Liebe schuf!

5. Doch auch im Staube schon lieben wir ihn, ihn, den Erbarmer, mit Thränen der Sehnsucht, die er selbst einst trocknen wird.

2. **Frühlingsfeier.** Gedicht von **J. F. W. Steinhausen.**

1. O nimm mich auf in deine heil'gen Hallen, in deinen Tempel nimm mich auf, Natur! Laß mich den Hain, das muntre Thal durchwallen, bewundern laß mich deine Frühlingsflur!

2. Erhabne Mutter aller ird'schen Wesen! unwandelbar verfolgst du deinen Lauf. Aus Winterschlaf erweckst du zum Genesen, rufst du den Staub zu neuen Blüthen auf.

3. O laß in frommes Staunen mich ergehen; wie wagt' ich, dich zu singen im Gedicht! Im Herzen nur kann ich dich wahr verstehen; das Wort verstummt, denn es erreicht dich nicht!

3. **Dem Einzigen.** Text von **J. W. L. Gleim.**

Der Einzige, der Allen Alles ist, ist unser Gott! Geschöpfe betet an!

4. **Die Lore-Lei.** von **H. Heine.**

1. Ich weiß nicht, was soll es bedeuten, daß ich so traurig bin; ein Mährchen aus alten Zeiten, das kommt mir nicht aus dem Sinn. Die Luft ist kühl und es dunkelt, und ruhig fließt der Rhein; der Gipfel des Berges funkelt im Abendsonnenschein.

2. Die schönste Jungfrau sitzet dort oben wunderbar, ihr goldnes Geschmeide blitzet, sie kämmt ihr goldenes Haar. Sie kämmt es mit goldenem Kamme und singt ein Lied dabei, das hat eine wundersame, gewaltige Melodei.

3. Den Schiffer im kleinen Schiffe ergreift es mit wildem Weh; er schaut nicht die Felsenriffe, er schaut nur hinauf in die Höh'. Ich glaube, die Wellen verschlingen am Ende Schiffer und Kahn; und das hat mit ihrem Singen die Lore-Lei gethan.

5. **Harre des Herrn!** Text von **Fr. Räder.**

1. Harre, meine Seele, harre des Herrn! Alles ihm befehle, hilft er doch so gern! Sei unverzagt, bald der Morgen tagt, und ein neuer Frühling folgt dem Winter nach! In allen Stürmen, in aller Noth wird er dich beschirmen, der treue Gott.

2. Harre, meine Seele, harre des Herrn! Alles ihm befehle, hilft er doch so gern! Wenn Alles bricht, Gott verläßt uns nicht; größer als der Helfer ist die Noth ja nicht! Ewige Treue, Retter in Noth, rett' auch unsre Seele, du treuer Gott!

Nach dem letzten Gesange versammeln sich die Schüler in den einzelnen Klassen, um ihre Zeugnisse zu empfangen und über ihre Versetzungsfähigkeit in höhere Klassen das Nähere zu vernehmen.

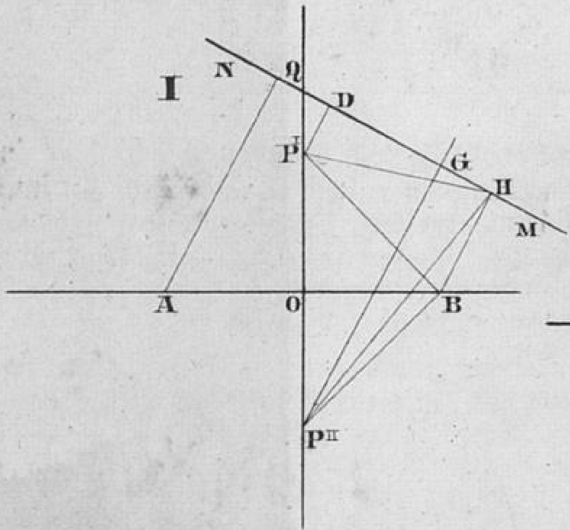
Mittwoch den 4. Oktober, Morgens zwischen 8—10 Uhr im Gebäude der Realschule, Anmeldung und von 10 Uhr an Prüfung der neu aufzunehmenden Schüler, welche, mit Zeugnissen versehen, und wo möglich, in Begleitung ihrer Eltern oder deren Stellvertreter sich einzufinden haben.

Donnerstag den 5. Oktober, Morgens 8 Uhr, haben sich sämmtliche Schüler zum Beginn des Unterrichts für das neue Schuljahr wieder einzufinden.

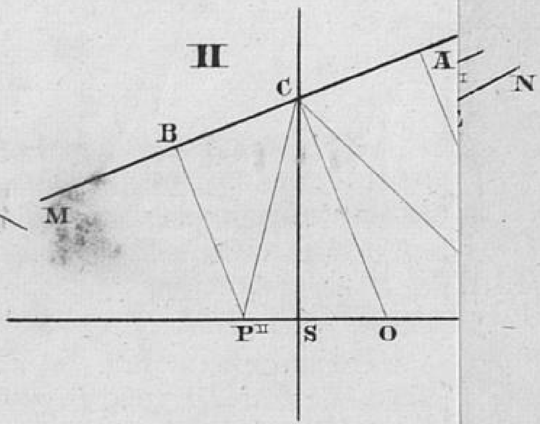
Der Direktor

Dr. Heinen.

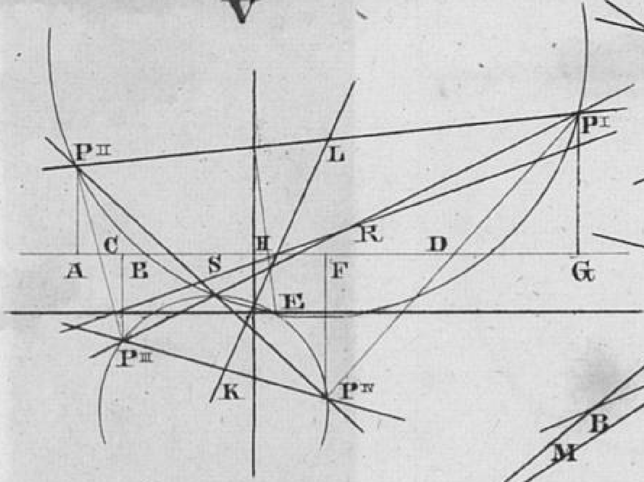
I



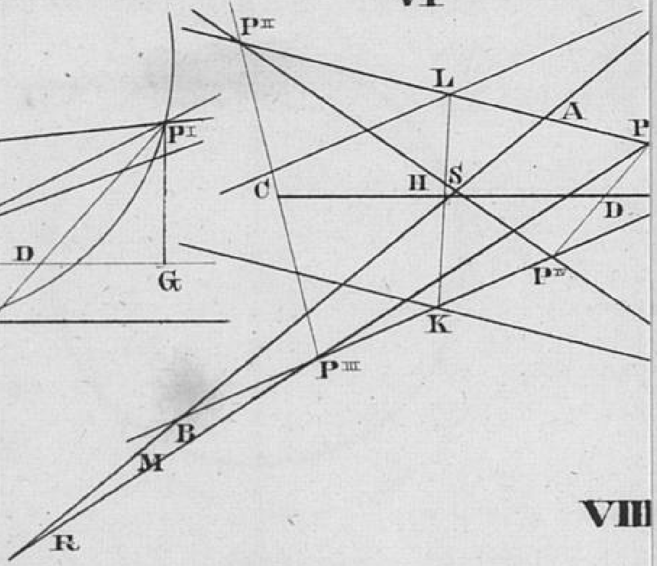
II



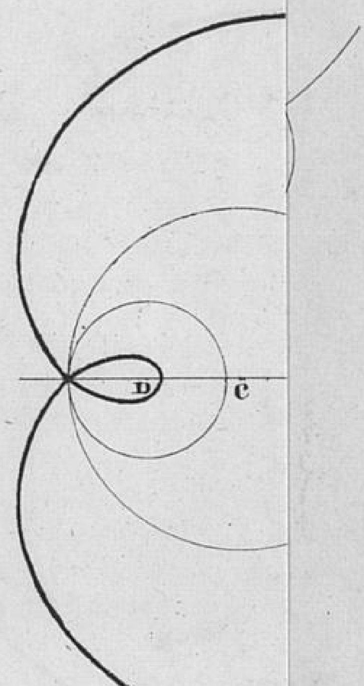
V



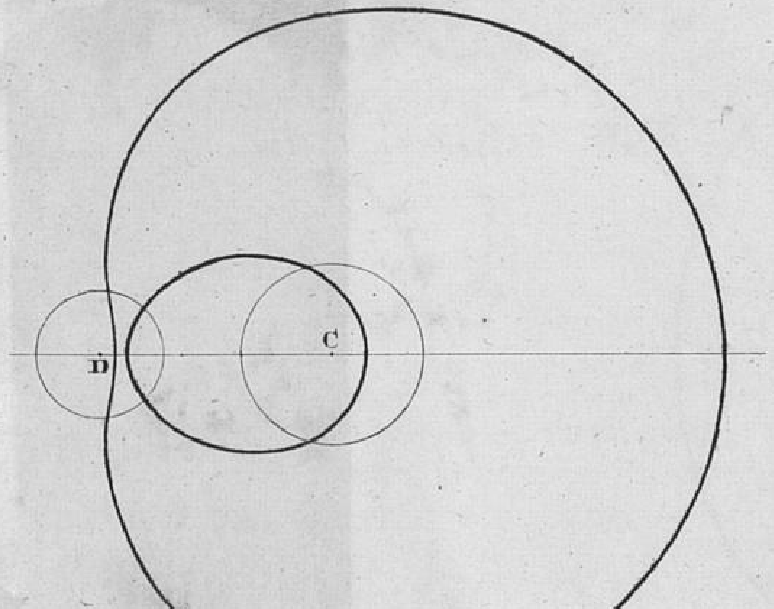
VI

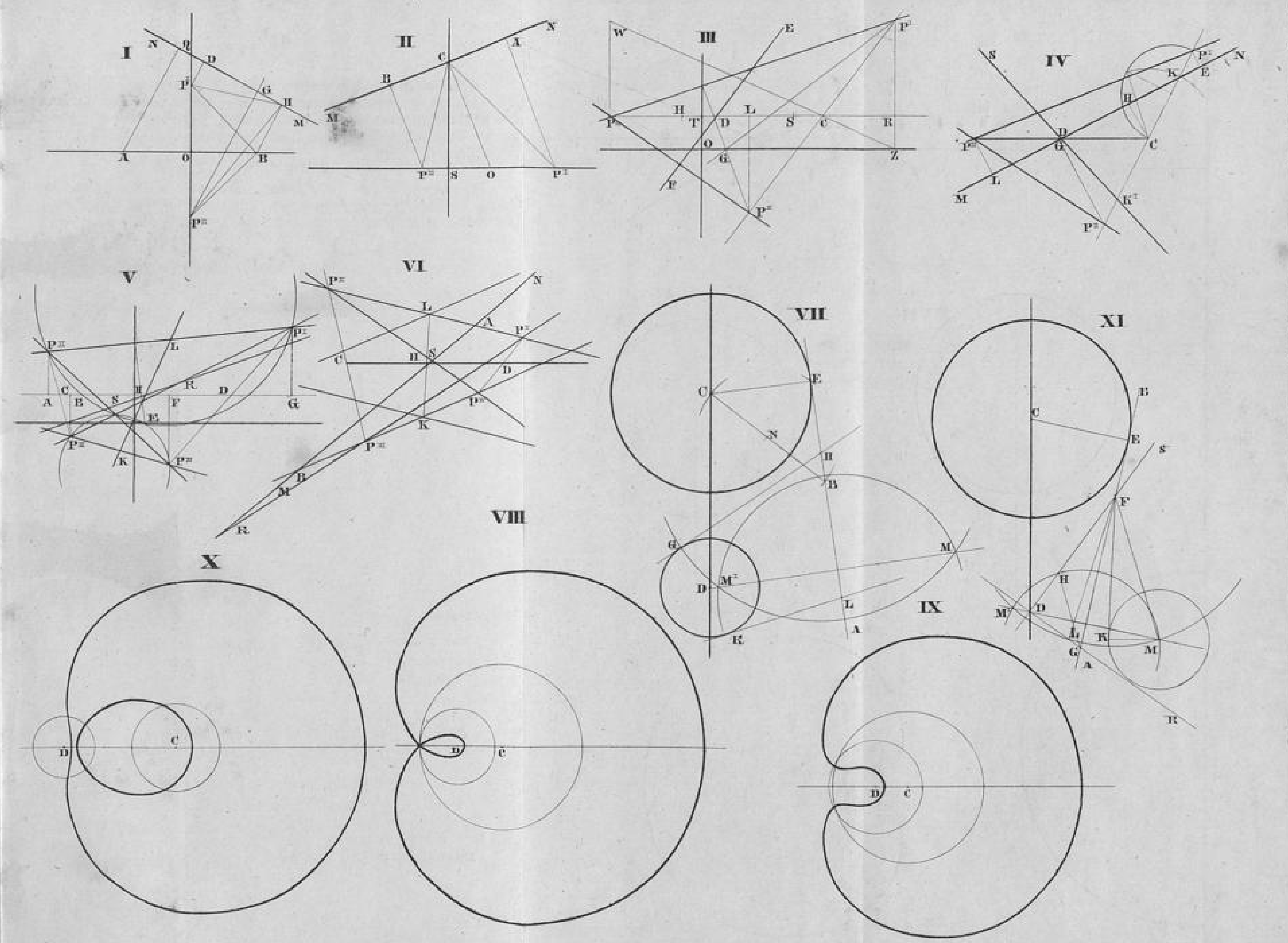


VIII



X





Lith. v. Th. Schulten