Der Unterricht in der Algebra an den Höheren Bürgerschulen ohne Latein mit sechsjährigem Kursus, nebst einleitenden allgemeinen Bemerkungen über lateinlose Höhere Bürgerschulen.

Während in der gegenwärtigen Zeit das dem höheren Schulwesen zugewandte Interesse der Gebildeten von der Frage der Gleichberechtigung des Gymnasiums und der Realschule I. O. in Anspruch genommen wird, und während viele bedeutende Realschulmänner es als ihre Lebensaufgabe zu betrachten scheinen, der Realschule eine dem Gymnasium ebenbürtige Stelle zu erkämpfen, hat sich eine dritte Kategorie höherer Schulen entwickelt, welche niemals in die Lage kommen wird, in jenen Kampf gegen die bevorzugte Stellung des Gymnasiums mit einzutreten. Es sind dies die Höheren Bürgerschulen ohne Latein mit sechsjährigem Kursus. Das verhältnismäßig große Gebiet, welches sich diese Anstalten seit der Zeit ihres Bestehens erworben haben, und die günstigen Anzeichen, welche auf eine weitere Vergrößerung dieses Gebiets hinweisen, legen Zeugnis dafür ab, daß die Ansicht von der Zweckmäßigkeit solcher Schulen sich allgemeinerer Anerkennung erfreut; der Schule selbst erwächst aber dieser erfreulichen Erscheinung gegenüber die Pflicht, auch ihrerseits in weiteren Kreisen Verständnis und Interesse für sich durch Darlegung ihrer Ziele und Mittel zu erwecken.

I.

Der Charakter der lateinlosen Höheren Bürgerschulen läßt sich kurz durch folgende zwei Punkte zur Anschauung bringen:

1. Die lateinlose Höhere Bürgerschule gewährt in Bezug auf staatliche Berechtigungen ihren Zöglingen nach bestandener Abgangsprüfung nur die Berechtigung zum einjährigen Militärdienste. Eine Erweiterung der Berechtigungen — so wertvoll sie immerhin erscheinen mag — ist für das Fortbestehen und die weitere Entwicklung der Schulen nicht notwendige Bedingung.
2. Die lateinlose Bürgerschule ist eine höhere Schule, welche in der beschränkten Zeit von sechs Jahren ihren Zöglingen eine abgeschlossene höhere, d. h. über die Ziele der Volksschule hinausgehende Bildung geben will. Anerkannt ist diese Ansicht auch durch den Umstand, daß diese Schulen nicht den Bezirks-Regierungen, sondern wie alle übrigen höheren Bildungsanstalten für die männliche Jugend der Provinzial-Regierung, insbesondere dem Provinzial-Schulkollegium, unterstellt worden sind.

Für die innere Organisation der fraglichen Schulen ist die Thatsache maßgebend gewesen, daß ihre Zöglinge von vornherein für das praktische Leben bestimmt sind. Das Material für das geistige Exercitium ist daher unter Ausschluß der Bildungsmittel, welche das klassische Altertum darbietet, den Realien entnommen, um eine spätere Verwertung des auf der Schule Erlernten in ausgedehntem Maße zu ermöglichen. Da auch die

Realschule I. O. die Behandlung der realen Bildungsstoffe in den Vordergrund stellt, so erweckt es den Anschein, als ob die lateinlose Höhere Bürgerschule einer der Realschule I. O., vorzüglich in deren unteren Klassen, verwandte Anstalt sei und die Einrichtungen dieser im allgemeinen auf jene übertragen werden können. Eine nähere Betrachtung wird jedoch zeigen, daß die Verwandtschaft zwischen den sechs unteren Klassen einer Realschule I. O. und einer lateinlosen Höheren Bürgerschule nur eine sehr äußerliche ist, daß letztere vielmehr eine durchaus originelle Organisation für sich verlangt.

Am augenfälligsten tritt der Unterschied zwischen der Realschule I. O. und der lateinlosen Höheren Bürgerschule auf dem Gebiete des fremdsprachlichen Unterrichts hervor; Realschulen I. O., wie auch Gymnasien beginnen denselben mit dem Lateinischen und knüpfen naturgemäß an diese Sprache die Behandlung der übrigen. Alles, was für diese Schulen daher geleistet ist, um die fremden Sprachen der Geistesbildung der Jugend dienstbar zu machen, hat die Kenntnis des Lateinischen mehr oder weniger zur Voraussetzung; anerkannte Methoden in der Erteilung des Unterrichts, allgemein verbreitete Lehrbücher gründen sich auf die Resultate des vorangegangenen Studiums der lateinischen Sprache. Alles dies hat keinen Wert für die lateinlosen Schulen. Neue Methoden und neue, nach ganz anderen Grundsätzen ausgearbeitete Lehrbücher der französischen und englischen Sprache sind notwendige Erfordernisse. Der Wegfall des Lateinischen wirkt aber noch in anderer Weise modifizierend ein. Die von dem Realschüler auf das Lateinische verwendete Kraft kann hier für die übrigen Fächer nutzbar gemacht werden und ermöglicht in diesen im Vergleiche mit den entsprechenden Klassen der Realschule weiter hinausgeschobene Ziele; diese fordern nun eine besondere Verteilung des Stoffs auf die einzelnen Klassen, machen also hier die für die Realschule gültige Stoffverteilung untauglich.

Fast noch mehr als durch den Wegfall des Lateinischen auf den Höheren Bürgerschulen wird die Kluft zwischen diesen Anstalten und den Realschulen I. O. erweitert durch die hier auf neun Jahre festgesetzte, dort auf sechs Jahre beschränkte Kursusdauer. Während in den sechs unteren Klassen der Realschule I. O., um einen trivialen Vergleich zu gebrauchen, die Bausteine herbeigeschafft werden, um ihrer Verwendung zum Baue in den drei oberen Klassen zu harren, muß in den Bürgerschulen in den sechs Jahren das Gebäude schon fertig gestellt sein, welches der kürzeren Zeit entsprechend nur in bescheidenerem Umfange und einer anspruchsloseren Stilart aufgeführt werden kann. Abgeschlossene Bildung in engeren Grenzen ist somit das Streben der lateinlosen Schulen mit sechsjährigem Kursus. Der geforderte Abschluß soll sich aber nicht nur extensiv in der Absolvierung eines bestimmt vorgeschriebenen Pensums in jeder einzelnen Klasse zeigen, sondern auch intensiv durch ein vollständiges Durchdringen und Beherrschen des gesamten Lehrstoffs, von welchem durch die Ableistung eines am Ende der Schulzeit liegenden Examens Zeugnis abgelegt werden muß. Die Erreichung dieses Zieles zwingt aber die Schule, in Bezug auf Unterrichtsplan und Unterrichtsmethode Einrichtungen zu treffen, derer die Realschule in ihren sechs unteren Klassen nicht bedarf. Wie tief diese Einrichtungen in die Organisation des gesamten Unterrichts eingreifen, scheint leicht einer Unterschätzung und falschen Beurteilung ausgesetzt zu sein, und dieser Umstand giebt Anlaß, auf erwähnten Punkt etwas näher einzugehen.

Zu diesem Zwecke ist es zunächst unerläßlich, die Lehrziele der sechsklassigen Höheren Bürgerschulen anzugeben, wie sie für alle derartige Anstalten durch die Instruktion für die Abgangsprüfungen an der früheren Höheren Bürgerschule ohne Latein zu Kassel festgestellt sind.

Dieselben stellen sich in folgenden Anforderungen dar:

In der Religion haben die Examinanden eine zusammenhangende Kenntnis der Glaubenslehre der kirchlichen Konfession, welcher sie angehören, darzuthun; ferner Bekanntschaft mit den für die Glaubenslehre und die Geschichte des Reiches Gottes wichtigsten Teile der heiligen Schrift. Im Deutschen wird verlangt ein korrekter mündlicher und schriftlicher Ausdruck mit der Befähigung, ein dieser Bildungsstufe angemessenes Thema zu disponieren und zusammenhangend in klarer Ordnung schriftlich zu behandeln. Stilistische Übung im Übersetzen aus fremden Sprachen, die auf der Schule gelehrt werden. Gutes, richtig betonendes Lesen und der Nachweis, daß ein und das andere Schriftwerk aus unserer klassischen Litteratur mit verständiger Aufmerksamkeit gelesen ist. Im Französischen und Englischen: Richtige Aussprache und sichere Bekanntschaft mit den

Hauptteilen der Grammatik. Verständnis von Prosastücken, besonders historischen Inhalts und von leichten Dichterstellen und ein dazu ausreichender Vokabelvorrat. Fertigkeit im korrekten Nachschreiben eines französischen und englischen Diktats. In den vorgenannten zwei fremden Sprachen müssen die Abiturienten ein dieser Stufe angemessenes Exercitium ohne grobe Fehler schreiben können. In der Geschichte: Allgemeine Übersicht der Weltgeschichte. Die wichtigsten Thatsachen der griechischen Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen; der römischen bis zum Kaiser Marcus Aurelius. Spezielle Kenntnis der deutschen und preußischen Geschichte seit dem 30jährigen Kriege. In der Geographie: Anschauliche Kenntnis der wichtigsten Verhältnisse der Erdoberfläche und der Formation der Erdteile. Die topische und politische Geographie von Europa und spezieller die von Deutschland und Preußen. Das Wichtigste aus der Staatenkunde mit besonderer Rücksicht auf Kolonisation. Die Elemente der mathematischen Geographie. In der Naturkunde: Eine auf Anschauung gegründete Kenntnis der gebräuchlichsten botanischen, zoologischen und mineralogischen Systeme, Bekanntschaft mit den physiologischen und anatomischen Kennzeichen der Pflanzen und Tierfamilien, welche für Flora und Fauna der Umgegend, für die gewöhnlich im Handel und in der Technik vorkommenden exotischen Formen und für die Physionomie der botanischen und zoologischen Provinzen der Erde von besonderer Wichtigkeit sind. Aus der Physik: Die allgemeinen Eigenschaften der Körper. Der mechanische und chemische Teil der Physik. Die für die Kenntnis der wichtigsten Naturgesetze in Betracht kommenden Grundlehren der Chemie. In der Mathematik muß erreicht sein: Eine gründliche Kenntnis der ebenen und körperlichen Geometrie, der ebenen Trigonometrie, der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, der Potenzlehre, der Theorie und Anwendung der Logarithmen und der Progressionslehre. Fertigkeit in den vier Grundrechnungsarten sowohl in ganzen Zahlen, wie in gewöhnlichen und Decimal-Brüchen. Fähigkeit, Aufgaben aus der Gesellschafts-, Mischungs-, Münz- und Wechselrechnung mit Sicherheit des Verfahrens zu lösen. Im Zeichnen: Angemessene Übung im Freihandzeichnen. Kenntnis der Elemente der Perspektive.

Bei unbefangener Prüfung dieser Anforderungen wird der Kundige sicher die Richtigkeit der früher gemachten Bemerkung zugeben, daß im Vergleiche zu den sechs unteren Klassen einer Realschule I. O. mit Ausnahme des Lateinischen in allen Fächern die Lehrziele soweit gesteckt sind, daß der Ausfall dieser alten Sprache reichlich gedeckt wird.

Sodann enthält die Instruktion über die Art und Weise der Prüfung folgende Festsetzungen:

Die Aufgaben zu den schriftlichen Arbeiten werden von den betreffenden Lehrern gewählt und für jede Arbeit zwei vorgeschlagen, welche von den Schülern noch nicht behandelt worden sind. Dieselben werden von dem Rektor dem Königlichen Prüfungskommissar, welcher die Auswahl unter den Vorschlägen trifft, versiegelt übermittelt. Letzterer ist aber auch befugt, sämtliche oder einzelne Aufgaben selbst zu stellen. Alle gleichzeitig zu prüfende Schüler erhalten dieselben Aufgaben; die schriftliche Prüfung wird anberaumt, sobald die Entscheidung des Königlichen Kommissarius über die zu bearbeitenden Aufgaben eingetroffen ist. Diese erhält einzeln versiegelt der Rektor, welcher sie erst unmittelbar vor der einzelnen Prüfung und vor den Augen der Schüler eröffnet. Zu der schriftlichen Prüfung gehört a) ein deutscher Aufsatz, zu dessen Anfertigung eine Zeit von fünf Stunden verstattet wird. Der Gegenstand des Themas muß dem Schüler durch den Unterricht bekannt oder doch im Kreise seiner Anschauung und seines Nachdenkens mit Sicherheit vorauszusetzen sein; b) ein französisches und c) ein englisches Exercitium nach Maßgabe der in der Klasse gebrauchten Übungsbücher, dessen Zweck hauptsächlich die Prüfung der in diesen Sprachen erlangten grammatischen Sicherheit ist; es sind für dasselbe je drei Stunden Zeit zu verwenden, die Zeit des deutschen Diktats ungerechnet. Der Gebrauch von Lexikon und Grammatik ist dabei nicht gestattet. Die Vokabeln, deren Kenntnis der Lehrer bei den Schülern nicht voraussetzen zu können vermeint, sind bei dem deutschen Text der Aufgabe hinzuzufügen. Der Königliche Kommissarius kann außerdem, wo es ihm angemessen erscheint, eine Übersetzung aus der fremden Sprache in das Deutsche anordnen, für welche eine zweistündige Arbeitszeit angesetzt wird; d) die Bearbeitung von einer geometrischen, einer trigonometrischen, einer algebraischen, einer Rechen-Aufgabe, für welche zusammen vier Stunden Arbeitszeit gewährt werden. Die Fertigkeit im Freihandzeichnen wird durch vorgelegte Zeichnungen aus den zwei letzten Schuljahren dargethan.

Die Gegenstände der mündlichen Prüfung, welche den Zweck hat, die schriftliche zu ergänzen und den Nachweis zu liefern, daß die Schüler sich über vorgelegte Fragen korrekt, klar und zusammenhängend auszusprechen vermögen, sind: Religion, Geschichte und Geographie, die französische und die englische Sprache, Mathematik, Naturkunde. Examinatoren sind die das betreffende Fach in den obersten Klassen vertretenden Lehrer oder auch nach seinem Ermessen der Königliche Kommissarius. Methode der mündlichen Prüfung. Die mündliche Prüfung hat nicht sowohl den Charakter einer in Frage und Antwort rasch wechselnden Repetitionsstunde anzunehmen, als vielmehr dem Examinanden Gelegenheit zu geben, sich über einzelne ihm vorgelegte Fragen nach ruhiger Überlegung selbständig und zusammenhängend zu äußern. Es ist die Aufgabe des Prüfenden, so wenig wie möglich helfend oder lehrend einzugreifen. Bei der Prüfung in den fremden Sprachen werden dem Königlichen Kommissarius von dem prüfenden Lehrer einige noch nicht gelesene Abschnitte aus der in der Schule gebrauchten Anthologie oder einem dem Klassenstandpunkte entsprechenden leichteren Schriftsteller zur Auswahl für die Übersetzung in das Deutsche vorgelegt; es ist dabei durch Anknüpfen von grammatischen Fragen Gelegenheit zu geben, die erworbene Kenntnis und Sicherheit der Elementargrammatik weiter darzuthun. In der Geschichte ist außer einzelnen insbesondere chronologischen Fragen von dem Lehrer wenigstens eine Frage aus der deutschen und eine solche aus der preußischen Geschichte der letzten drei Jahrhunderte an jeden Examinanden zu stellen. In der Geographie ist bei der Stellung der Fragen die physische Geographie Europas und Deutschlands zu berücksichtigen. In der Naturkunde trifft der Königliche Kommissarius die Auswahl unter den Fächern der Physik, Chemie, Mineralogie, Botanik und Zoologie, von denen in jeder Prüfung nur zwei abwechselnd behandelt werden sollen.

Vergleicht man die formellen Bestimmungen über die Ableistung der Prüfung mit denen, welche für die Abgangsprüfungen an Gymnasien und Realschulen I. O. maßgebend sind, so wird sich ein irgendwie erheblicher Unterschied nicht auffinden lassen. Dort wie hier müssen zusammenhängende Klausurarbeiten ohne Benutzung irgend eines Hülfsmittels in bestimmter Zeit angefertigt werden; daß es das eine Mal sechs, das andere Mal nur vier sind, ändert an dem Wesen der Sache nichts. Dort wie hier ist eine mündliche Prüfung zu bestehen, welche eine gleiche Anzahl Fächer umfaßt und daher für den einzelnen Prüfling dieselbe Zeit erfordert; und auch an der Bürgerschule soll, wie die Prüfungsordnung ausdrücklich hervorhebt, „die mündliche Prüfung nicht den Charakter einer in Frage und Antwort rasch wechselnden Repetitionsstunde annehmen, sondern vielmehr dem Examinanden Gelegenheit geben, sich über einzelne ihm vorgelegte Fragen nach ruhiger Überlegung selbständig und zusammenhängend zu äußern."

Daß die Fähigkeit diesen formellen Anforderungen des Examens zu genügen, vorwiegend in den drei letzten Jahreskursen der neunjährigen Schulen erworben wird, dürfte allerseits zugegeben werden; daß erst in diesen drei letzten Jahren die Schüler die geistige Kraft, Ruhe und Sammlung sich aneignen, in kurzer Zeit unter besonderen Bedingungen ihren Wissensvorrat korrekt und — was besonders hervorgehoben werden mag — auch in einer äußerlich allen Anforderungen genügenden Form zu Papier zu bringen; daß sie hauptsächlich dann erst lernen, vorgelegte Fragen in der Weise, wie die Prüfungsordnung es verlangt, zu behandeln, liegt auf der Hand. Alle diese Fähigkeiten, deren Ausbildung auf Gymnasien und Realschulen I. O. den drei letzten Jahren zufällt, sollen aber auf den Schulen mit beschränkter Kursusdauer bereits in sechs Jahren entwickelt sein, und daher stellt sich die Forderung ein, daß die Schule auf dies Ziel durch eine zweckentsprechende Gestaltung ihres Unterrichts hinarbeiten muß.

In Bezug auf die schriftlichen Arbeiten muß von vornherein in allen Fächern auf eine möglichst sorgfältige Ausstattung geachtet werden und von den Schülern auch bei Anfertigungen von Arbeiten, die an und für sich dies gerade nicht verlangen, wie bei der Behandlung mathematischer Aufgaben, häufig zusammenhängende Darstellung gefordert werden; schließlich muß den Schülern in den beiden letzten Jahren einigemal Gelegenheit gegeben werden, unter den durch die Prüfungsordnung gegebenen Bedingungen schriftliche Arbeiten anzufertigen. In ähnlicher Weise mögen dann auch im mündlichen Unterricht schon auf der mittleren Stufe Wiederholungen in der Weise des Examens angestellt werden und so die Schüler Gelegenheit finden, sich zusammenhängend über umfassendere Gebiete auszusprechen.

Alle diese Übungen erfordern aber Zeit, welche dem fortschreitenden Unterricht entzogen wird; es bleibt für diesen daher eine kürzere Frist, als auf den entsprechenden Klassen anderer Anstalten. Mit diesem Übelstande hat sich die Schule abzufinden; sie wird ihn aber nicht beseitigen durch eine Überbürdung der Schüler, welche sich doch immer auch schon während der Schulzeit auf die eine oder andere Weise bitter rächt, sondern dadurch, daß sie ihren Zöglingen in geeigneter Weise bei der Bewältigung ihrer Aufgabe zu Hülfe kommt. Dies geschieht zunächst durch eine sehr wohl innerhalb der durch die Prüfungsordnung gegebenen Grenze mögliche Beschränkung des Stoffs; Alles, was in der Entwicklung des Lehrgebäudes nicht hauptsächlich und für das Folgende notwendige Voraussetzung ist, muß aus dem Unterrichtspensum ausgemerzt werden; ein näheres Eingehen auf irgend welche einzelne Kapitel, ein liebevolles Versenken in das Detail ist ein Luxus, den sich diese Anstalten der mangelnden Zeit wegen nicht erlauben können. Werden aber die eines jeden nebensächlichen Beiwerks entkleideten Hauptsachen immer von neuem hervorgehoben, wird durch wiederholte Darlegung des Zusammenhanges dieser Hauptsachen der Blick der Schüler für weitere Gebiete geschärft, so wird es gelingen, auch innerhalb der kurzen sechs Jahre materiell und formell einen Abschluß der allgemeinen Bildung zu erzielen, welcher mit dem Geiste der Prüfungsordnung sehr wohl im Einklange steht. Notwendig, oder doch in hohem Grade wünschenswert, ist hierbei noch, daß auch die verwendeten Lehrbücher diesen Prinzipien des Unterrichts genügen, daß sie nur gleichsam das Skelett der ganzen Wissenschaft enthalten und vor allem ihren Inhalt in einer Anordnung geben, welche es den 15—16jährigen Knaben ermöglicht, selbständige Repetitionen des gesamten Unterrichtsstoffs anzustellen.

Das Wesentlichste unserer Betrachtungen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Die Höhere Bürgerschule ohne Latein unterscheidet sich von den übrigen höheren Schulen:

1. durch den Wegfall des Unterrichts im Lateinischen;
2. durch die Aufgabe, ihren Schülern schon in sechs Jahren eine abgeschlossene Bildung zu geben und von ihnen als Beweis für die Erreichung des Abschlusses das Bestehen einer schriftlichen und mündlichen Prüfung zu verlangen.

Diese beiden Punkte üben einen entscheidenden Einfluß auf die Organisation dieser Schulen aus.

1. Der Ausfall des Unterrichts im Lateinischen bewirkt ein Hinausschieben der Ziele in den übrigen Unterrichtsfächern, er verlangt eine eigenartige Verteilung des Lehrstoffs auf die einzelnen Klassen, und bei der Erteilung des fremdsprachlichen Unterrichts eine eigenartige Methode.
2. Der in sechs Jahren mit 15- bis 16jährigen Knaben zu erreichende Abschluß der allgemeinen Bildung fordert eine Beschränkung des Stoffs auf die Hauptsachen und einen Unterricht, welcher in Anordnung und Methode sich durch größte Einfachheit und Klarheit auszeichnet.

II.

Nachdem durch das Vorhergehende die allgemeinen Anforderungen, welche an den Unterricht in den lateinlosen sechsklassigen Bürgerschulen gestellt werden müssen, bezeichnet und begründet sind, soll nun erläutert werden, in welcher Weise diesen Anforderungen in Bezug auf ein besonderes Fach, die Algebra, Genüge geschehen kann.

Daß jedem Unterricht, auch wenn er ein ganz neues Gebiet behandelt, doch als Ausgangspunkt etwas dem Schüler bereits Bekanntes dienen muß, dürfte wohl nicht bestritten werden, wie ebensowenig, daß dies Bekannte für das Gebiet der Algebra die durch den Rechenunterricht erworbenen Kenntnisse der Schüler sind, Vor der Beschäftigung mit der Algebra sind im Rechnen bereits behandelt: Die vier Grundoperationen und deren Anwendungen auf einfache Zahlen und Zahlenverbindungen (Summen, Produkte und Quotienten); es sind zum größten Teil die einschlägigen Regeln gegeben, das Wesen derselben erläutert und die Anwendung bis zu einer gewissen Geläufigkeit geübt. Der algebraische Unterricht hat die Aufgabe, diesen Bestand nach zwei Richtungen hin zu entwickeln.

1. Der algebraische Unterricht erweitert die durch den Rechenunterricht erworbenen Kenntnisse und bringt sie
2. in einen wissenschaftlich begründeten Zusammenhang.

An den sechsklassigen Schulen erstreckt sich die Erweiterung auf die Einführung und Verwendung der algebraischen Zahlen und auf die Vermehrung der vier bekannten algebraischen Operationen um drei weitere, die Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung; abgesondert von dieser unmittelbaren Fortsetzung des früheren Unterrichts kommen noch die Gleichungen und Progressionen hinzu.

Die wissenschaftliche Begründung und Anordnung des Stoffes verlangt, daß der Unterricht noch einmal von der Wurzel aus seinen Anfang nimmt. Die Wurzel der Algebra ist aber die natürliche Zahlenreihe; die Kenntnis dieser und die Fertigkeit, sich in ihr bewegen, d. h. zählen zu können, ist zu einer Beschäftigung mit dieser Wissenschaft erforderlich. Alles übrige soll sich hieraus von neuem und in einem helleren Lichte vor dem geistigen Auge des Schülers dadurch entwickeln, daß eins aus dem andern in streng logischer Folgerung abgeleitet wird. Die Einführung in die Algebra fordert von den Knaben eine bedeutende geistige Anspannung, weil unter der großen Zahl bekannter Regeln jetzt nur die beim weiteren Fortschreiten benutzt werden dürfen, welche bereits die Feuerprobe des mathematischen Beweises bestanden haben, daher in jedem Augenblicke eine strenge Sichtung von Bewiesenem und Unbewiesenem vorzunehmen ist. Die mathematischen Beweise fordern nach einer andern Richtung hin eine Erweiterung; sie können ihrer Allgemeinheit wegen nicht mit Hülfe der bestimmten Zahlen geführt werden, sondern zwingen zu der Einführung der Buchstabengrößen, welche als Repräsentanten jeder beliebigen bestimmten Zahl dienen. Die erzwungene Bildung neuer Zahlengrößen bringt aber den Vorteil mit sich, daß man mit den neuen Größen auch wirklich rechnet und so das eigentliche Gebiet der Algebra schafft, auf welchem eine freie Bewegung nur bei sicherer Kenntnis der abgeleiteten und bewiesenen Sätze möglich ist, während bei alleiniger Verwendung von bestimmten Zahlen die bequemeren mechanischen Regeln des Rechenunterrichts von den Schülern hervorgeholt werden würden und so der Hauptzweck der Algebra, das Verständnis für die Gesetze der Zahlen zu wecken, verfehlt sein dürfte.

Erweiterung und Vertiefung früher erworbener Kenntnisse ist der Zweck des algebraischen Unterrichts. Welche Rolle diese beiden Faktoren bei der Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Stufen zu spielen haben, bedarf einer weiteren Erörterung. Drei Fälle sind denkbar, von denen zwei die getrennte Behandlung der beiden angegebenen Punkte in der einen oder andern Reihenfolge ins Auge fassen, während der dritte sich als eine Kombination beider darstellt.

Jedoch wird wohl die Absicht, den algebraischen Unterricht an einer höheren Schule mit der stofflichen Erweiterung zu beginnen, also die höheren Operationen nach der Methode des Rechenunterrichts zu behandeln, von niemanden im Ernste gehegt werden.

Die Vereinigung beider Faktoren, d. h. eine derartige Einrichtung des Unterrichts, daß gleichzeitig mit der wissenschaftlichen Verarbeitung des bekannten Materials die den Schülern noch unbekannten Erweiterungen durchgenommen werden, daß z. B. nach Besprechung der Subtraktion sofort auch die Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen erfolgt, scheint das wissenschaftlich Berechtigtste zu sein, und in der That schlagen auch viel verwendete, angesehene Lehrbücher diesen Weg ein. Wenn trotzdem an dieser Stelle ein derartig gestalteter Unterricht nicht empfohlen, sondern vorgeschlagen wird, zunächst den Bestand an Kenntnissen wissenschaftlich zu begründen durch strenge Definitionen, Beweise und die hierdurch bewirkte Einführung in die Buchstabenrechnung, ohne stofflich Neues hinzuzunehmen, so beruht dies auf einer Besonderheit im Lehrplane der hiesigen Anstalt, welche eine nähere Auseinandersetzung verdient.

Der Unterricht in der Algebra wird an der hiesigen Anstalt bereits in der Quarta angefangen; doch nicht schon mit dem Beginne des Schuljahrs, sondern erst im letzten Quartale, um mit Rücksicht auf den auch in dieser Klasse beginnenden Unterricht in der Geometrie die Schüler nicht gleichzeitig in zwei — wenn auch immerhin verwandte — neue Gebiete einzuführen. Für die Geometrie ist in den drei ersten Vierteljahren bei vier wöchentlichen Stunden bereits eine sichere Grundlage gewonnen und bei zweckmäßiger Einteilung das Jahrespensum der Hauptsache nach absolviert. Tritt nun der Unterricht in der Algebra hinzu, so ist eine Überbürdung der Schüler durch eine zu große Fülle neuen Stoffes nicht mehr zu fürchten. — Die Lehrstunden für die Algebra werden auf die Weise gewonnen, daß dem geometrischen Unterrichte zwei Stunden entzogen werden, während der in den ersten drei Vierteljahren mit drei wöchentlichen Stunden bedachte Rechenunterricht eine Stunde hergiebt. Geometrie und Rechnen werden durch diese Entziehung von Lehrstunden nicht gefährdet, da, wie gesagt, um Weihnachten in diesen Fächern die Hauptarbeit des Jahres bereits vollendet sein kann; für die Algebra ergeben sich aber so etwa 35 Stunden.

Diese ganze Art und Weise der Einrichtung charakterisiert aber den algebraischen Unterricht der Quarta als einen vorbereitenden, der nicht am Anfange schon mit einem Schlage den Schüler in das neue Gebiet führen soll, sondern zunächst die Aufgabe hat, gewisse formale Schwierigkeiten, die beim Hauptunterrichte sich störend geltend machen könnten, zu beseitigen. Die Schwierigkeiten für den Schüler bestehen nun hauptsächlich in folgenden zwei Punkten: 1) in dem Zwange, an der Richtigkeit aller schon aus früherm bekannter Regeln zu zweifeln, so lange dieselben noch nicht mathematisch bewiesen sind, und 2) in der Gewöhnung, sich unter einem Buchstaben eine Zahl vorzustellen und die Überzeugung, auch mit Buchstaben rechnen zu können, zu gewinnen. Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten dient nach strenger Darlegung des Wesens und des Zusammenhangs der vier Spezies die Anwendung dieser Operationen auf Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten. Als Übelstand mag es bei der Durchnahme dieses Stoffes vielleicht empfunden werden, daß durch das Fehlen des Begriffs der algebraischen Zahlen, welcher die Summe und Differenz unter dem allgemeineren Gesichtspunkte der algebraischen Summe erscheinen läßt, sich die Anzahl der Sätze vermehrt, und hierdurch beim Vorrechnen verwickelterer Aufgaben eine gewisse Weitschweifigkeit unvermeidlich wird. Jedoch erscheinen diese Nachteile nicht so bedeutend, um den Grundsatz, im vorbereitenden Kursus sich nur auf bekanntem Gebiete zu bewegen, aufzugeben. Um so mehr, wenn man erwägt, daß auch die in größerer Anzahl auftretenden Sätze, betreffend das Rechnen mit Summen und Differenzen, beim Anfange als willkommenes Material zur Einübung des mathematischen Beweises dienen können, und auch bei einer gesunden Anordnung eine Überbürdung des Gedächtnisses nicht eintreten wird. Da in Bezug auf die Einübung des Stoffes nur die einfachsten Beispiele gewählt werden, so ist auch hierbei die Theorie der algebraischen Zahlen nicht unentbehrlich.

Daß ferner auch vorgeschlagen wird, das Rechnen mit Brüchen von dem Pensum der Quarta auszuschließen, findet zunächst in dem Zeitmangel seine Begründung, dann aber auch in dem Wunsche, die Erweiterung der Zahlenreihe durch die Division auf gleicher Stufe mit der durch die Subtraktion zu behandeln.

Wie so der vorbereitende Unterricht in der Quarta in seinem Bestreben, eine Gewöhnung an Buchstabenrechnung und mathematische Beweise zu erzielen, das Gebiet der natürlichen Zahlenreihe nicht überschritt, so beschäftigt sich der Hauptunterricht, der in der Tertia seinen Anfang nimmt, mit der Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe durch algebraische Zahlen und Brüche. Neben der Aufgabe, die schon hinlänglich bekannte Bruchrechnung in eine verallgemeinerte und wissenschaftlich begründete Form zu bringen, besteht die Hauptarbeit der Schüler darin, für das gesamte verarbeitete Material einen allgemeineren und höheren Gesichtspunkt aufzufinden, allgemeiner dadurch, daß für die Differenz $a - b$ und den Quotienten $c : d$ die beschränkenden Bedingungen $a > b$ und $c = n d$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, wegfallen; höher dadurch, daß die Differenz unter den erweiterten Begriff der Summe fällt und der Quotient als ein Produkt erscheint, dessen Faktoren der Dividend und der reciproke Wert des Divisors sind. Daß sich an diese Vertiefung und Erweiterung des theoretischen Teils schwierigere Aufgaben anschließen, scheint selbstverständlich. Das Pensum der Tertia wird sodann noch durch die Behandlung der Proportionen und der linearen Gleichungen mit einer Unbekannten erweitert.

Ein weiterer wichtiger Schritt in dem algebraischen Studium, welcher größere Ansprüche an die geistige Kraft der Schüler stellt, geschieht in der Sekunda, wo mit der Betrachtung der Potenzierung, Radizierung und

Logarithmierung ein auch aus dem früheren Rechenunterricht fast vollständig unbekanntes Gebiet betreten wird. Der Schüler tritt hier unter die Herrschaft des Exponenten, der anderen Gesetzen, als die gewöhnlichen Zahlen folgt und dessen Verwendung beim Rechnen schon ein größeres Abstraktionsvermögen verlangt. Auch die nur vorübergehende Erwähnung irrationaler und imaginärer Zahlen führt den Schüler auf Gebiete der reinen Wissenschaft. Neben der Beschäftigung mit diesem Stoffe bilden hier lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten den Gegenstand des Unterrichtes.

Der Prima bleibt es dann vorbehalten, die theoretischen Betrachtungen der vorigen Stufen zu einem einheitlichen Ganzen zu verschmelzen und die erlangte Übersicht des gesamten Gebiets durch die Fertigkeit im Lösen schwierigerer Aufgaben zu dokumentieren. Quadratische Gleichungen und Progressionen sind, um den Bestimmungen der Prüfungsordnung zu genügen, nebst den Anwendungen der letzteren auf Zinseszins- und Rentenrechnung durchzunehmen.

Daß diese Verteilung des algebraischen Lehrstoffes auf die einzelnen Klassen dem allgemeinen Unterrichtsprincipe, ohne Sprünge vom Leichtern zum Schwerern fortzuschreiten, genügt, wird zugegeben werden können; ferner ist auch ohne Überbürdung der Schüler eine Durchnahme der einzelnen Jahrespensen in der Weise möglich, daß am Ende des Schulkursus der gesamte Stoff wirklich geistiges Eigentum der Abiturienten geworden ist, wenn von vornherein innerhalb der einzelnen Kapitel eine thunlichste Beschränkung des Stoffes erstrebt wird. Im folgenden mögen kurz einige Punkte, in Bezug auf welche eine Beschränkung ausführbar ist, Erwähnung finden.

Bei der Behandlung der Brüche kann die Entwicklung der Brüche in unendliche Reihen entbehrt werden. Die gesamte Mathematik der Bürgerschule bewegt sich in der Endlichkeit, ein Überschreiten dieser Grenze würde auch hier keinen besonderen Zweck haben. — Auch in der Lehre von den Logarithmen erscheint eine Beschränkung möglich und wünschenswert. Die Logarithmen finden ihre hauptsächlichste Bedeutung doch nur als Hülfsmittel bei der Ausführung numerischer Rechnungen, und da hier nur die Logarithmen der Basis 10 auftreten, so genügt es auch, die theoretischen Erörterungen auf die Logarithmen dieser Basis zu beschränken. Es würde demnach nach einer kurzen allgemeinen Bemerkung das Folgende sich aufbauen auf der Erklärung: Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent der Potenz mit der Basis 10, welche gleich der Zahl ist. — Die Determinanten, deren Einreihung in den Unterrichtsstoff der Schulen mit neunjährigem Kursus selbst noch Gegenstand der Kontroverse ist, sind nicht zu berücksichtigen; bei den quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten genügt die Betrachtung des Falles, daß eine der beiden gegebenen Gleichungen linear ist. — Eine weitere Aufzählung von Kapiteln, welche sich auf ein geringeres Maß zusammenziehen lassen, würde zu sehr in Einzelheiten führen, was an dieser Stelle nicht beabsichtigt ist. Später wird sich noch Gelegenheit bieten, auf diesen Gegenstand zurückzukommen. Hier mag nur noch hervorgehoben werden, daß bei der Auswahl der Aufgaben zur Einübung der Theorie mit Vorsicht zu verfahren ist. Alle Beispiele, bei deren Bearbeitung eine große Anzahl von Sätzen und Regeln zur Verwendung kommen, sind als hindernde Störungen in dem gleichmäßig fortschreitenden Unterricht zu betrachten und auszuschließen, dagegen mögen Aufgaben, vorzüglich Gleichungen mit größeren numerischen Coeffizienten, schon um die Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen zu erhalten und zu erweitern, wohl zur Lösung gegeben werden.

III.

Die Überlegung, daß auch auf der lateinlosen Bürgerschule nicht die Vorkenntnisse für besondere Berufsarten erworben werden sollen, sondern daß in erster Linie der Zweck dieser Anstalten ist, ihren Zöglingen eine allgemeine geistige Bildung zu übermitteln, führt zu der Überzeugung, daß es nicht so sehr auf die Menge der erworbenen Kenntnisse, als auf die Art des Erwerbs ankömmt. Die Forderung, in sechs Jahren mit jugendlichen Schülern schon verhältnismäßig viel zu leisten, verleitet leicht zu der Anwendung einer mechanischen

Unterrichtsmethode, welche Wissen und Können vorzüglich auf das Gedächtnis gründet und für die eigentliche Geistesbildung nur wenig Erspießliches leistet. Indem ein derartig gestalteter Unterricht die Resultate als etwas Gegebenes vorlegt, beschränkt er die Thätigkeit des Schülers auf die gedächtnismäßige Aneignung des Vorgelegten und verhindert von vornherein eine tiefere Durchdringung des Stoffs. Eine Unterrichtsmethode kann nur insoweit eine gute genannt werden, wie es ihr gelingt, die gesamte geistige Kraft der Lernenden für ihren Stoff in Anspruch zu nehmen. Und dies geschieht am vollkommensten, wenn der Unterricht eine derartige Gestaltung erhält, daß alle Ergebnisse durch eigene Arbeit der Schüler gefunden werden und die Thätigkeit des Lehrenden sich nur darauf beschränkt, das Suchen nach neuen Resultaten vor der Verwandlung in ein planloses Hin- und Hertasten zu bewahren.

Bei keinem andern Fache scheint mir die Gefahr, in eine mechanische Unterrichtsmethode zu verfallen, größer, als bei der Algebra, und trotzdem eignet sich auch kein anderes Fach zur konsequenten Anwendung der zuletzt charakterisierten genetischen Methode besser, als eben die Algebra; zu ersterer verleiten leicht die große Anzahl von Regeln, die nur bei fortwährender Betonung des Zusammenhangs sich dem Geiste des Schülers als etwas Einheitliches und schön Gegliedertes darstellen; letztere verdankt ihre Anwendbarkeit dem Umstande, daß der vorangegangene Rechenunterricht bereits mit dem Stoffe des neuen Faches vertraut gemacht hat, daher an die Selbstthätigkeit der Schüler größere Ansprüche gestellt werden können.

Die Beschäftigung mit der Algebra setzt die Kenntnis der natürlichen Zahlenreihe voraus und die Fähigkeit, sich in derselben bewußt bewegen, d. h. zählen zu können. Beim Beginne des Unterrichts in der Algebra besitzen die Schüler bereits diese Kenntnis und diese Fähigkeit in einem Grade, um dem auf genetischer Methode beruhenden Unterrichte folgen zu können; es widerspricht daher dem Geiste dieser Methode, durch philosophische Erörterungen über das Wesen von Größen und Zahlen, welche die Schüler durch eigene Thätigkeit nicht produzieren können und welche im späteren nie wieder benutzt werden, den Lernenden die Freude an dem Unterrichte zu nehmen und dem noch lange nicht beseitigten Vorurteile von der sogenannten „besonderen mathematischen Begabung" den Schein der Berechtigung zu geben.

Die Bewegung in der Zahlenreihe von einer Zahl aus um eine gegebene Anzahl Schritte führt dann gleichsam von selbst zur Aufstellung der Erklärung der Addition. An der Hand von Beispielen in bestimmten Zahlen finden die Schüler selbständig die Definitionen der Subtraktion und Multiplikation. Indem sich nun die Subtraktion als die Umkehrung der Addition, die Multiplikation als ein besonderer Fall der Addition zeigt, erscheint ihnen der Zusammenhang der Operationen im hellen Lichte und giebt ihnen das Mittel an die Hand, durch eigene Überlegungen die Division und die Potenzierung* als weitere Glieder in der Kette der Operationen aufzufinden und die Erklärungen zu bilden. Daß in der Sekunda die geistig reiferen Schüler die Erklärungen von Radizierung und Logarithmierung, indem sie auf dem angegebenen Wege fortschreiten, ohne Schwierigkeit aufzustellen imstande sein werden, wird sich leicht bewahrheiten lassen.

Beispiele mit bestimmten Zahlen werden im weitern die Schüler wiederum darauf bringen, daß ein Fortschreiten stattfindet durch die Beantwortung der Frage: Welcher Umformung sind Zahlenverbindungen, welche durch die besprochenen Operationen gebildet wurden, fähig, wenn an Stelle einer Zahl in einer solchen eine Zahlenverbindung tritt?

Durch die feststehende Reihenfolge der Operationen ist hiermit der Gang der Untersuchungen vorgezeichnet und die lückenlose Ausnutzung dieses Gebiets bei Selbstthätigkeit des Schülers gesichert. Unter vorläufigem Ausschluß der Potenzierung eröffnet den Reigen die Summe, deren einer Summand wiederum eine Summe ist, folgt die Summe, deren einer Summand eine Differenz ist, bis den Schluß der Quotient, dessen Divisor

* Weil schon hier die Schüler von selbst dazu kommen, den Begriff der Potenzierung zu bilden, scheint es wünschenswert, diese fünfte Operation sofort mit in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen; natürlich nur die Definition und beim Rechnen mit Summen ꝛc. die beiden Sätze:

$$a^m . a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n},$$

zumal die Verwendung derselben selbst bei einfachen Aufgaben kaum zu entbehren ist.

wiederum ein Quotient ist, bildet. Daß in dieser Kette einige Glieder auftreten, — wie z. B. eine Summe, deren einer Summand ein Produkt ist, — welche im allgemeinen keine Umformung zulassen, ist durchaus kein Fehler, da derartige Fälle nur dazu dienen können, die Kritik der Schüler zu schärfen. Nachdem wiederum Beispiele in bestimmten Zahlen den Schülern Klarheit über die Ausführung der Umformungen gebracht haben, kommt es darauf an, die Umformungen als Sätze zu formulieren, in strenger Form den Beweis zu führen und schließlich den erlangten Vorrat von Wissen so anzuordnen, daß jedem Satze sofort seine Umkehrung folgt. Das erstere wird keine besonderen Schwierigkeiten verursachen und bedarf höchstens im Anfange in Bezug auf den sprachlichen Ausdruck einer Nachhülfe. Bei dem zweiten sind einige Winke nötig. Die Schüler haben zu unterscheiden, ob es sich bei der in die Form eines Lehrsatzes gebrachten Umformung um eine direkte oder inverse Operation handelt. Im ersteren Falle werden die Schüler selbständig den Beweis finden, wenn sie daran gewöhnt werden, sich immer die Frage vorzulegen, was bedeutet die Zahlenverbindung, welche mit der einfachen Zahl verbunden werden soll; durch Auflösen derselben in ihre Elemente werden sich dann aus dem Vorrate der bereits bewiesenen Regeln schon die ergeben, deren Anwendung zum Ziele führt. So wird bei der Multiplikation eines Produkts, das letztere von dem Schüler als Summe dargestellt, an dieser die Multiplikation ausgeführt und die sich ergebende Summe gleicher Summanden wieder in der Form eines Produkts geschrieben. Alles Schritte, welche der Schüler bei Kenntnis des Vorangegangenen ohne Hülfe ausführen kann. — Anders bei indirekten Operationen. Hier wendet man konsequent die sogenannte Probe an. Wenn die Erklärung der Subtraktion lautet: Eine Zahl von einer andern subtrahieren heißt eine dritte Zahl suchen, welche zu der ersten addiert die zweite ergiebt, so folgt daraus, daß eine Subtraktion nur dann richtig ausgeführt ist, wenn das Ergebnis, die Differenz, zu dem Subtrahenden addiert den Minuenden ergiebt und ähnlich bei allen indirekten Operationen, auch der Radizierung und der Logarithmierung. Die konsequente Anwendung dieses Verfahrens ist allein logisch gerechfertigt, ist überall durchführbar und gewährt den Schülern bedeutende Erleichterung, indem sie durch dieselbe vor dem mechanischen Auswendiglernen der Beweise geschützt bleiben.

Einige Beispiele aus diesem Gebiete mögen zur Illustration des Gesagten hier Aufnahme finden.

Behauptung: $a - (b + c) = a - b - c$.

Beweis: Indem man den Subtrahenden $(b + c)$ zu dem Ergebnisse der Subtraktion $a - b - c$ addiert, erhält man den Minuenden a; es ist nämlich:

$$a - b - c + (b + c) = a + b - b + c - c = a.$$

Behauptung: $ab : c = (a : c)\, b$.

Beweis: Multipliziert man das Ergebnis der Division $(a : c)\, b$ mit dem Divisor c, so ergiebt sich der Dividend ab; denn

$$(a : c)\, b \,.\, c = (a : c)\, c \,.\, b = ab.$$

Behauptung: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$.

Beweis: Die Behauptung ist bewiesen, wenn die n^{te} Potenz von $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$ gleich ab ist. Es ist aber

$$(\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \,.\, (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Behauptung: $\log a^n = n \log a$.

Beweis: Da nach der Erklärung der Logarithmus einer Zahl der Exponent der Potenz mit der Basis 10 ist, welche gleich der Zahl ist, so ist die Logarithmierung richtig, wenn $10^{n \log a}$ gleich a^n. Nun ist:

$$10^{n \log a} = (10^{\log a})^n = a^n.$$

Wenn sich das bisher über die Methode des algebraischen Unterrichts Angegebene hauptsächlich an den Unterrichtsstoff der Quarta lehnte und nur am Schlusse auf andere Gebiete übergriff, so soll doch besonders betont werden, daß dasselbe auch für die übrigen Klassen Gültigkeit behält. Nur eine Einschränkung einerseits, einige Erweiterungen andererseits fordern Erwähnung.

Es würde in der Sekunda zu weit führen und den Unterricht in allzu seichtes Fahrwasser geraten lassen, wenn man bei dem Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen alle möglichen Fälle, wie sie bei dem Rechnen mit Summen 2c. in der Quarta mit Gewinn durchgearbeitet wurden, betrachten wollte. Bedenkt man, daß die beiden Sätze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

bereits früher bewiesen sind, so erhält man alle notwendigen Regeln, wenn man die Schüler folgende Fragen an sich stellen läßt:

Welcher Umformung ist eine Potenz (Wurzel, Logarithmus) fähig, deren (dessen) Basis (Radikand, Logarithmand)

1) ein Produkt,
2) ein Quotient,
3) eine Potenz,
4) eine Wurzel,
5) eine algebraische Zahl ist?

Besondere methodische Schwierigkeiten stellen sich im Unterrichte ein bei Erweiterungen der Operationsbasis, die anfangs auf die natürliche Zahlenreihe beschränkt blieb. Hierbei ist vorzüglich da, wo die Schüler — wie bei der Einführung in die Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten — mit Begriffen bekannt gemacht werden sollen, für welche die Vorkommnisse des täglichen Lebens keine illustrierende Beispiele darbieten, ein Eingreifen des Lehrenden unvermeidlich. Trotzdem sollen die Definitionen der neuen Begriffe möglichst selbständig gefunden und in eine solche Form gebracht werden, daß das neue Gebiet in einem leicht erkennbaren Zusammenhange mit dem Früheren erscheint und so sich sofort den Schülern ein ergiebiges Feld eigener Thätigkeit öffnet.

Um den Lernenden den Begriff der positiven und negativen Zahlen näher zu bringen, bieten die allgemein bekannten Verhältnisse von Vermögen und Schuld, Temperaturgrade über und unter 0 u. s. w. willkommene Hülfsmittel dar, wobei gleichzeitig der Umstand Erwähnung findet, daß die Wissenschaft zur Bildung der algebraischen Zahlen durch das Streben für die Differenz $a - b$ die beschränkende Bedingung $a > b$ aufzuheben veranlaßt wurde. Sodann bleibt aber die Hauptsache die Aufstellung einer Definition, welche den oben mitgeteilten Ansprüchen genügt; für die folgende möchte ich diesen Vorzug in Anspruch nehmen.

Wie man von einer beliebigen Zahl ausgehend durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit die höheren Glieder der Zahlenreihe bilden kann, so ist es auch möglich, durch aufeinander folgendes Subtrahieren der Einheit von derselben Zahl aus die tieferen Glieder abzuleiten. So erhält man z. B. aus 5 durch Subtraktion der 1 4, aus 4 auf dieselbe Weise 3. Denkt man sich bei 1 angelangt diesen Vorgang nicht abgebrochen, so ergiebt sich zunächst die Differenz $1 - 1$, welche man $= 0$ setzt und weiter die Differenz $0 - 1$, welche abkürzend -1 geschrieben wird und den Namen „negative Einheit" bekömmt. Allgemein erhält man

$$\begin{aligned} 1 - 1 &= 0 \\ 0 - 1 &= -1 \\ -1 - 1 &= -2 \\ -2 - 1 = -1 - 1 - 1 &= -3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -\overset{1}{1} - \overset{2}{1} - \overset{3}{1} \ldots - \overset{a}{1} &= -a \end{aligned}$$

Es entsteht auf diese Weise eine Fortsetzung der natürlichen Zahlenreihe, welche für jedes Glied der letzteren ein entsprechendes enthält, das mit demselben Zahlzeichen geschrieben durch das vorgesetzte Zeichen — davon unterschieden ist. Zahlen mit dem Vorzeichen — heißen „negative Zahlen". Um den Gegensatz der ursprünglichen Zahlen zu den negativen hervorzuheben, versieht man dieselben mit dem Vorzeichen $+$ und nennt sie „positive Zahlen". Positive und negative Zahlen führen den gemeinsamen Namen „algebraische Zahlen". Zahlen ohne Vorzeichen heißen „absolute Zahlen".

Da

$$a = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots \overset{a}{1}$$

oder durch Hinzufügen des Zeichens $+$

$$+a = (+\overset{1}{1}) + (+\overset{2}{1}) + (+\overset{3}{1}) + \ldots .(+\overset{a}{1}),$$

so schreibt man der Gleichartigkeit wegen

$$-a = (-\overset{1}{1}) + (-\overset{2}{1}) + (-\overset{3}{1}) + \ldots . (-\overset{a}{1})$$

und sieht demnach die Subtraktion der $(+1)$ und die Addition der (-1) als gleichbedeutend an; somit ist die negative Zahl $-a$ die Summe von a negativen Einheiten.

Wirft man einen Blick auf die Gleichungen, welche die Größen a, $+a$ und $-a$ erklären, so wird zugegeben werden müssen, daß diese Erklärungen die neuen Zahlengrößen mit den bekannten in einen innigen Zusammenhang bringen. Betont man ferner, daß die Subtraktion der positiven Einheit gleichbedeutend mit der Addition der negativen Einheit ist, so ergiebt sich von selbst die Regel über die Addition algebraischer Zahlen, für welche mir die folgende Fassung am passendsten zu sein scheint:

Eine algebraische $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Zahl wird zu einer andern algebraischen Zahl addiert, indem man von der letztern aus um so viel Schritte in der Richtung der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Zahlen fortschreitet, wie die erstere absolute Einheiten enthält.

Der Wortlaut der Regel für die Subtraktion algebraischer Zahlen folgt leicht aus den Überlegungen, daß die Subtraktion 1) eine Bewegung innerhalb der Zahlenreihe in dem der Addition entgegengesetzten Sinne darstellt, 2) auf die Addition zurückzuführen ist. Der Beweis wird natürlich durch die Probe geführt.

Da auch die Regeln für die Multiplikation und Division algebraischer Zahlen, wobei Multiplikator bezüglich Divisor absolute Zahlen sind, sich ohne Mühe ergeben, so kann bei Zugrundelegung der obigen Definition die genetische Methode mit Erfolg auf dies Gebiet angewendet werden.

Des für Lehrer, wie auch für Schüler gleich unangenehmen Satzes über die Produkte mit algebraischer Zahl als Multiplikator, auf welche keine der geläufigen Definitionen über Multiplikationen so recht passen will, entledige ich mich auf die Weise, daß, nachdem die Identität der Differenz $a - b$ und der algebraischen Summe $(+a) + (-b)$ gezeigt ist, von der Formel:

$$(a - b)\,(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

ausgegangen wird. Dieselbe erscheint nach der neuen Auffassung in der Gestalt:

$$\left[(+a) + (-b)\right]\left[(+c) + (-d)\right] = (+ac) + (-bc) + (-ad) + (+bd)$$

woraus dann gefolgert wird:

$$\begin{aligned}(+a)(+c) &= +ac\\ (-b)(+c) &= -bc\\ (+a)(-d) &= -ad\\ (-b)(-d) &= +bd\end{aligned}$$

Mag die letzte Folgerung vielleicht nicht ganz einwurfsfrei sein, so ziehe ich doch diesen Beweis, der sich ohne Zwang dem Vorhergehenden anschließt, jedem andern vor, der bei seiner angeblichen Wissenschaftlichkeit so künstlich ausfällt, daß durch ihn der Schüler nur eine Beschwerung seines Gedächtnisses erleidet, aber keine Förderung seiner geistigen Kraft erfährt.

Bei dem Beginne der Bruchrechnung, zu welcher der Quotient, dessen Dividend nicht ein Vielfaches des Divisors ist, den äußeren Anlaß gegeben hat, werden die beiden Definitionsgleichungen:

$$1 : a = \frac{1}{a}$$

$$\overset{1}{\frac{1}{a}} + \overset{2}{\frac{1}{a}} + \ldots \overset{b}{\frac{1}{a}} = \frac{b}{a}$$

von den Schülern in Erinnerung an die Resultate des Rechenunterrichts leicht aufgefunden und interpretiert werden.

Da b eine allgemeine Zahl ist und ihr jeder beliebige bestimmte Wert beigelegt werden kann, so ergiebt sich, indem man an Stelle von b der Reihe nach sämtliche Zahlen der algebraischen Zahlenreihe setzt, eine neue Zahlenreihe, welche der bekannten Glied für Glied entspricht. Indem die Schüler aufgefordert werden, sich in dieser Bruchreihe gerade so zu bewegen, wie sie es in der algebraischen Zahlenreihe gethan haben, finden sie die Regeln über die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche und die innerhalb derselben Bruchreihe möglichen Fälle der Multiplikation und Division.

Da aber in $\frac{b}{a}$ auch a sämtliche Werte der Glieder der natürlichen Zahlenreihe annehmen kann, so ergiebt sich, daß es unendlich viele Bruchreihen giebt, unter welchen die natürliche Zahlenreihe, aufgefaßt als Bruchreihe mit dem Nenner 1, sich befindet.

Nach diesen Betrachtungen wird sich von selbst die Frage erheben: Wie kann eine Verbindung zwischen den einzelnen Bruchreihen hergestellt werden, oder auf welche Weise ist ein Übergang von einer Bruchreihe zu einer andern möglich? Die Antwort: durch das sogenannte Erweitern oder Kürzen der Brüche, und der mathematische Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens wird sofort von den Schülern gegeben werden, wie auch die sich hieran schließende Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche.

Die Multiplikation mit einem Bruche ist im Grunde genommen in Bezug auf eine sinngemäße Erklärung ebenso unangenehm, wie die Multiplikation mit einer algebraischen Zahl; auch hier will keine Erklärung der Multiplikation so recht ihre Dienste verrichten. Am einfachsten scheint es noch, den Bruchmultiplikator als Quotienten aufzufassen und auf diesen die — allerdings nur für ganzzahlige Quotienten bewiesene — Regel: Mit einem Quotienten wird multipliziert, indem man mit dem Dividenden multipliziert und das Product durch den Divisor dividiert, anzuwenden.

Zum Zwecke der Erweiterung des Potenzbegriffes nimmt die Untersuchung ihren Ausgangspunkt von der Reihe:

$$a^1, a^2, a^3, \ldots a^n,$$

in welcher die Glieder der natürlichen Zahlenreihe als Exponenten von Potenzen derselben Basis auftreten. Es entsteht die Frage, ob und wie sich mit dieser Zahlenreihe der Exponenten rechnen läßt. Der Weg der Betrachtungen ist durch das Frühere vorgezeichnet. Die Glieder dieser Zahlenreihe, die Exponenten, werden, während sie in steter Verbindung mit ihrer Basis bleiben, addiert, subtrahiert &c. und untersucht, welchen Einfluß diese Operationen mit den Exponenten auf die Potenzen selbst ausüben, um schließlich durch Subtraktion und Division zu dem erweiterten Potenzbegriffe vorzudringen.

An dieser Stelle finden die aus praktischen Gründen schon früher betrachteten Sätze:

$$a^{m+n} = a^m . a^n; \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

nebst ihren Umkehrungen ihren richtigen Platz im Systeme.

Wie durch allmähliches Rückwärtsschreiten in der natürlichen Zahlenreihe der Begriff der Null und der negativen Zahl entstand, so ergiebt sich hier in ganz analoger Weise durch die Beobachtung, daß ein in der Exponentenreihe nach rückwärts gemachter Schritt einer Division durch a entspricht, die Potenz mit Null und einer negativen Zahl als Exponenten.

Zur Auffindung der Erklärung von Potenzen mit gebrochenen Exponenten werden naturgemäß die Schüler auf die Definitionsgleichungen der Brüche verwiesen werden. Es wird sich dann zuerst der Fall: $a^{\frac{1}{n}}$ der

Betrachtung darbieten, welches, wie $\frac{1}{n}$ von 1, so von a^1 seinen Ursprung nehmen muß; $a^{\frac{1}{n}}$ geht aber durch Multiplikation des Exponenten $\frac{1}{n}$ mit n in a^1 über. Die Multiplikation des Exponenten einer Potenz mit n ist aber gleichwertig mit einer Potenzierung der Potenz mit n; da aber eine Veränderung von $a^{\frac{1}{n}}$ nicht beabsichtigt ist, so muß die Potenzierung mit n durch eine Radicierung n^{ten} Grades wieder aufgehoben werden, so daß nun sich ergiebt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n} \cdot n}} = \sqrt[n]{a}$$

Sind, wie mir scheint, die Schüler imstande, diese Schlußfolgerungen zu ziehen, so wird die Ableitung von $a^{\frac{m}{n}}$ und die Ausdehnung der Potenzsätze auf die Größen des erweiterten Potenzbegriffs ihnen keine Schwierigkeiten verursachen.

Die vielfach gemachte Bemerkung, daß die Gleichungen, soweit sie in den elementaren Unterricht fallen, mit einer gewissen Freudigkeit von den Schülern aufgegriffen werden und daß in diesem Kapitel auch schwächere Schüler Genügendes leisten, beweist wohl, daß die Schwierigkeiten hier sich verringert haben und daß ein Gebiet, welches an die Kräfte der Schüler und damit auch an die des Lehrenden geringere Anforderungen stellt, erreicht ist.

Eine spezielle Auseinandersetzung über die Methode des Unterrichts in diesem Kapitel kann füglicherweise fortfallen, zumal im folgenden Teile noch in anderer Beziehung auf diesen Punkt zurückgekommen werden soll.

IV.

Zur vollständigen Erledigung der mir gestellten Aufgabe erübrigt noch, einige Worte über die Hülfsmittel beim algebraischen Unterrichte in den sechsklassigen lateinlosen Höheren Bürgerschulen zu sagen. Zunächst das Lehrbuch. Meiner Ansicht nach ist dasselbe für den Schüler und nicht für den Lehrer da; pädagogische Anweisungen gehören in ein solches nicht hinein. Dem Schüler soll das Lehrbuch den Unterricht weder ersetzen, noch ergänzen; es soll überhaupt während des Unterrichts gar nicht gebraucht werden; seine Aufgabe ist allein, bei häuslichen Repetitionen die Erinnerung an die im Unterrichte gemachten Entwicklungen zu erwecken und die Ausfüllung etwaiger durch Versagen des Gedächtnisses entstandener Lücken zu ermöglichen. Der aufmerksame Schüler wird alles Erforderliche schon während des Unterrichts lernen und erst dann eines Lehrbuches bedürfen, wenn es sich um Wiederholungen größerer Abschnitte handelt. Im höheren Grade wird das Vorhandensein eines solchen aber bei den umfassenden Repetitionen in der Prima als Bedürfnis empfunden werden.

Nach diesem Gebrauche des Lehrbuches bestimmt sich nun die Einrichtung desselben. Es muß vor allem übersichtlich sein. Um dieser Forderung zu genügen, darf es nur den Stoff enthalten, dessen vollständige Kenntnis von den Schülern verlangt wird. Einzelheiten, deren Mitteilung zur Erlangung eines sicheren Verständnisses ihrer Zeit mit Erfolg gemacht wurden, welche aber nicht für unentbehrliche Bausteine im Lehrgebäude angesehen werden können; mehrfache Beweise derselben Sätze; alles, was in irgend einer Richtung über das Pensum der Schule hinausgeht, ist strengstens auszuschließen; denn nichts ist mehr geeignet, in den Köpfen der 16jährigen Knaben Verwirrung anzurichten und den roten Faden, der sich durch das ganze Gebiet hinzieht, zu verdecken, als die Notwendigkeit, bei selbständigen Repetitionen in dem Lehrbuch, welches als Wegweiser dient, hier einige Paragraphen, dort womöglich ein ganzes Kapitel überschlagen zu müssen. Aus diesem Grunde muß behauptet werden, daß von den vielen trefflichen Lehrbüchern der Algebra, die für den Gebrauch an Gymnasien und Realschulen geschrieben sind, sich keins für die sechsklassigen Bürgerschulen eignet.

Der Inhalt eines Lehrbuchs der Algebra für diese Schulen würde mit Rücksichtnahme auf die Gliederung in die einzelnen Jahreskurse folgender sein müssen:

Abschnitt I (Quarta).

Die natürliche Zahlenreihe.

Kapitel 1. Die arithmetischen Operationen. Bildung von Zahlenverbindungen durch dieselben.
Kapitel 2. Das Rechnen mit Zahlenverbindungen.

Abschnitt II (Tertia).

Die Erweiterungen der natürlichen Zahlenreihe.

Kapitel 1. Die algebraische Zahlenreihe.
Kapitel 2. Die Bruchreihe.

Abschnitt III (Sekunda).

Das Rechnen mit Exponenten.

Kapitel 1. Die Potenz mit absoluten, ganzzahligen Exponenten.
Kapitel 2. Die Wurzel.
Kapitel 3. Die Potenz mit algebraischen und gebrochenen Exponenten.
Kapitel 4. Der Logarithmus.

Abschnitt IV (Tertia—Prima).

Gleichungen und Progressionen.

Kapitel 1. Allgemeines. Proportionen.
Kapitel 2. Das Auflösen linearer und quadratischer Gleichungen.
Kapitel 3. Die Progressionen und deren Anwendungen.

Eine weitere Anforderung an ein praktisch verwendbares Lehrbuch würde die übersichtliche Darstellung des Stoffes betreffen. Eine solche ließe sich etwa in Bezug auf die Potenzsätze in folgender Weise erreichen:

Die Basis der Potenz ist:

1) **Ein Produkt.** Satz: Ein Produkt wird potenziert, indem man die Faktoren potenziert und die Potenzen mit einander multipliziert.

Behauptung: $(ab)^n = a^n . b^n$.

Beweis: $(ab)^n = \overset{1}{(ab)}\,\overset{2}{(ab)} \ldots \overset{n}{(ab)} = \overset{1}{a} . \overset{2}{a} \ldots \overset{n}{a} . \overset{1}{b}\,\overset{2}{b} \ldots \overset{n}{b} = a^n . b^n$.

Umkehrung: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen potenziert.

2) **Ein Quotient.** Satz: Ein Quotient wird potenziert, indem man Dividend und Divisor potenziert und die erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Behauptung: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Beweis: ähnlich wie bei 1.

Umkehrung: Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Grundzahlen potenziert.

3) **Eine Potenz.** Satz: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Produkte der Exponenten potenziert.

Behauptung: $(a^n)^p = a^{np}$.

Beweis: $(a^n)^p = \overset{1}{a^n} . \overset{2}{a^n} \dots \overset{p}{a^n} = a^{\overset{1}{n} + \overset{2}{n} + \dots \overset{p}{n}} = a^{np}$

Umkehrung: Eine Zahl wird mit einem Produkte potenziert, indem man mit den Faktoren der Reihe nach potenziert.

Zusatz: Die Reihenfolge, in welcher potenziert wird, ist beliebig.

4) **0, 1, — a.** Satz: Eine Potenz mit der Grundzahl 0 ist gleich 0, mit der Grundzahl 1 gleich 1; eine Potenz mit negativer Grundzahl ist positiv oder negativ, jenachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Behauptung: 1) $0^n = 0$

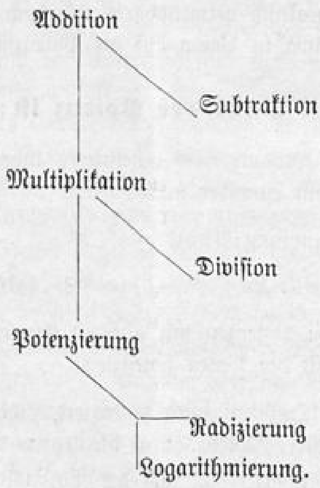
2) $1^n = 1$

3) $(-a)^{2n} = a^{2n}$; $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

Beweis: 1) und 2) Hinweis auf die einschlägigen §§.

3) Da $-a . -a = + a^2$, so erhält man, wenn in $(-a)^{2n}$ immer je 2 Faktoren zusammengefaßt werden $(+a^2)^n = a^{2n}$; $(-a)^{2n+1}$ entsteht aus $(-a)^{2n}$ durch Hinzufügen eines Faktors $-a$. Daher $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} . (-a) = a^{2n} . -a = -(a^{2n} . a) = -a^{2n+1}$

Auch den einzelnen Kapiteln angehängte Tabellen, welche den gesamten Stoff in seiner Hauptsache noch einmal zusammenfassen, dürften von Nutzen sein; dem Abschnitt I, Kapitel 1 könnte z. B. die folgende beigefügt werden, welche gleichsam den Stammbaum der arithmetischen Operationen versinnbildlichen soll.



Schließlich wird auch die Brauchbarkeit des Lehrbuchs noch dadurch erhöht werden, wenn es gelingt, den Stoff bei möglichster Klarheit in knappeste Form zu bringen. In welcher Weise ich mir die Ausführung dieser Forderung denke, wird auch wohl am besten durch ein Beispiel dargelegt werden und, ich wähle hierzu einen Teil des Abschnittes IV, von welchem vorher nur wenig die Rede war.

Proportionen.

Erklärungen. Eine Proportion ist eine Gleichung zwischen 2 Quotienten (Brüchen), z. B.

$$a : b = c : d \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ *$$

a, b, c, d Glieder der Proportion,
a und c, b und d homologe Glieder,
a und c Vorder-, b und d Hinterglieder,
a und d äußere, b und c innere Glieder.

Eine Proportion heißt stetig, wenn die inneren Glieder einander gleich sind, z. B.

$$a : b = b : c$$
$$3 : 6 = 6 : 12$$

b mittlere Proportionale.

Lehrsatz 1. Eine Proportion bleibt bestehen, wenn man ein inneres und ein äußeres Glied mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Voraussetzung: $a : b = c : d$.

Behauptung: 1) $na : nb = c : d$ 4) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$

2) $na : b = nc : d$ 5) $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$

3) $a : nb = c : nd$ 6) $a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$

Beweis: Angabe der einschägigen §§ aus der Rechnung mit Quotienten.

Lehrsatz 2. Das Produkt der äußeren Glieder einer Proportion ist gleich dem Produkte der inneren Glieder.

Voraussetzung: $a : b = c : d$.
Behauptung: $ad = bc$.
Beweis: $(a : b)\, bd = (c : d)\, bd$
$ad = bc$.

Lehrsatz 3. Sind 2 Produkte von je 2 Faktoren einander gleich, so bilden die Faktoren des einen die äußeren, die Faktoren des andern die inneren Glieder einer Proportion.

Voraussetzung: $ad = bc$.

Behauptung: 1) $a : b = c : d$ 5) $c : d = a : b$
2) $a : c = b : d$ 6) $b : d = a : c$
3) $d : b = c : a$ 7) $c : a = d : b$
4) $d : c = b : a$ 8) $b : a = d : c$

Beweis: 1) $ad : bd = bc : bd$
$a : b = c : d$.

Die Richtigkeit der übrigen Behauptungen folgt aus der Voraussetzung in ähnlicher Weise.

Zusatz: Eine Proportion bleibt bestehen, wenn 1) die inneren oder die äußeren Glieder vertauscht werden (2—4); 2) die Verhältnisse vertauscht werden (5—8).

* Der Quotient $a : b$ soll hier angeben, wie oft b in a enthalten ist; man bezeichnet ihn bei dieser Auffassung als das Verhältnis von a zu b. Die Proportion $a : b = c : d$ sagt demnach aus, daß b so oft in a enthalten ist, wie d in c.

Lehrsatz 4. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Voraussetzung: $a:b=c:d$.

Behauptung: $(a \pm c):(b \pm d)=a:b=c:d$.

Beweis: $ad=bc$

$$ad \pm cd = bc \pm cd$$
$$(a \pm c)d = (b \pm d)c$$
$$(a \pm c):(b \pm d) = c:d.$$

Zusatz 1. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des einen Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des andern Verhältnisses wie zwei homologe Glieder.

Beweis: Durch Vertauschung der inneren Glieder in $a:b=c:d$ und Anwendung des Lehrsatzes 4.

Zusatz 2. Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so verhält sich die Summe sämtlicher Vorderglieder zur Summe sämtlicher Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Voraussetzung: $a:b=c:d=e:f=$

Behauptung: $(a+c+e+\ldots):(b+d+f+\ldots)=a:b=c:d=\ldots$

Beweis: Durch wiederholte Anwendung von Lehrsatz 4.

Erklärung: Die Gleichheit mehrerer Verhältnisse:

$$a:b=c:d=e:f=\ldots$$

bringt man auch in folgender Weise zur Anschauung:

$$a:c:e:\ldots=b:d:f:\ldots$$

und nennt eine solche Proportion eine fortlaufende. Gemäß Zusatz 2 besteht auch hier die Beziehung:

$$(a+c+e+\ldots):(b+d+f+\ldots)=a:b=c:d=\ldots$$

Progressionen.

Erklärungen: 1) Eine Reihe von Zahlen, in welcher $\left\{\begin{matrix}\text{die Differenz}\\\text{der Quotient}\end{matrix}\right\}$ von je zwei einander folgenden Gliedern konstant ist, heißt eine $\left\{\begin{matrix}\text{arithmetische}\\\text{geometrische}\end{matrix}\right\}$ Progression.

$$\overset{1}{a},\ a\overset{2}{+}d,\ a\overset{3}{+}2d,\ a\overset{4}{+}3d,\ \ldots.\ a+(\overset{n}{n}-1)d$$
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots.\ aq^{n-1}$$

a Anfangsglied, $\begin{matrix}d\ \text{Differenz,}\\ q\ \text{Quotient,}\end{matrix}$ n Gliederzahl, $\left.\begin{matrix}a+(n-1)d=z\\ aq^{n-1}=z\end{matrix}\right\}$ n^{tes} oder Endglied.

2) Eine $\left\{\begin{matrix}\text{arithm.}\\\text{geometr.}\end{matrix}\right\}$ Progression heißt wachsend od. abnehmend, jenachdem $\left\{\begin{matrix}\text{die Differenz positiv oder negativ}\\\text{der Quotient größer od. kleiner als 1}\end{matrix}\right\}$ ist.

Lehrsatz. Die Summe der Glieder einer arithmetischen Progression ist:

$$\mathbf{s = \frac{1}{2} n\,(a+z)}$$

Beweis. Schreibt man die Progressionen in umgekehrter Ordnung, so erhält man:

$$s = z + (z-d) + (z-2d) + \ldots (z-[n-1]\,d) \text{ und da ferner:}$$
$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots (a-[n-1]\,d), \text{ so folgt durch Addition}$$
$$2s = (z+a) + (z+a) + (z+a) + \ldots (z+a) = n(z+a)$$
$$s = \frac{1}{2}\,n\,(z+a)$$

Folgerungen: 1) $z = \frac{2s}{n} - a$; 2) $a = \frac{2s}{n} - z$; 3) $n = \frac{2s}{z + a}$

Lehrsatz: Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression ist:

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

Beweis. Multipliziert man:

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots . aq^{n-1}$$

beiderseits mit $(q - 1)$, so ergiebt sich:

$$s(q - 1) = aq^n - a$$

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

Folgerungen: $a = \frac{s(q - 1)}{q^n - 1} = \frac{s(1 - q)}{1 - q^n}$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{s(q-1)}{a} + 1\right)}{\lg q} = \frac{\lg\left(1 - \frac{s(1-q)}{a}\right)}{\lg q}$$

Zinseszins-Rechnung.

Die Zinseszins-Rechnung beruht auf der Voraussetzung, daß die Zinsen, welche von einem Kapitale in einer bestimmten Zeit, z. B. in einem Jahre, aufkommen, nicht zur Auszahlung gelangen, sondern dem Kapitale hinzugefügt, dasselbe — und gleichzeitig seine Zinsfähigkeit für die folgende Zeit — vergrößern.

Bezeichnet k das Kapital, p den Zinsfuß in Bezug auf ein Jahr, so ist das um seine Zinsen vermehrte Kapital am Ende des ersten Jahres:

$$k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kf,$$

wenn f, der Zinsfaktor, gleich $1 + \frac{p}{100}$ gesetzt wird. f ist mithin die Größe, mit welcher ein Kapital multipliziert werden muß, um das um die einjährigen Zinsen vergrößerte Kapital zu finden. Da das im zweiten Jahre zur Verzinsung gelangende Kapital kf ist, so ergiebt sich als Summe (s) von Kapital und Zinsen am Ende des zweiten Jahres: $kf \,.\, f = kf^2$, am Ende des dritten Jahres: kf^3, kurz, am Ende des n^{ten} Jahres: kf^n.

$$1)\ s = kf^n;\quad 2)\ k = \frac{s}{f^n};\quad 3)\ n = \frac{\lg \frac{s}{k}}{\lg f}$$

Renten-Rechnung.

Wird ein auf Zinseszins ausstehendes Kapital k n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres um einen Betrag r vermehrt oder vermindert, so ist der Gesamtwert s am Ende des n^{ten} Jahres:

$$s = kf^n \pm [rf^{n-1} + rf^{n-2} + \ldots rf^2 + rf + r],$$

indem der am Ende des ersten Jahres fällige Betrag am Ende des n^{ten} Jahres durch die in $(n-1)$ Jahren aufkommenden Zinseszinsen zu rf^{n-1} angewachsen ist u. s. w. Führt man nun die Summierung der in Klammern eingeschlossenen geometrischen Progression aus, so entsteht

$$1)\ \mathbf{s = kf^n \pm \frac{r(f^n - 1)}{f - 1}}$$

woraus weiter folgt: $2)\ k = \frac{s(f-1) \mp r(f^n - 1)}{f^n(f-1)}$ $3)\ +r = \frac{(s - kf^n)(f-1)}{f^n - 1}$

$$-r = \frac{(kf^n - s)(f-1)}{f^n - 1}$$

$$4)\ n = \lg \left[\frac{s(f-1) \pm r}{k(f-1) \pm r}\right] : \lg f.$$

Besondere Fälle: 1) Der Fall, daß ohne anfänglich vorhandenes Kapital k alljährlich ein Betrag r eingezahlt wird, tritt bei den sogenannten Lebensversicherungen ein. ($k = 0$, r positiv.)

2) Der Fall, daß ein vorhandenes Kapital k durch einen alljährlich ausgezahlten Betrag aufgezehrt wird, tritt bei den sogenannten Jahresrenten ein. ($s = 0$, r negativ.)

Ein zweites für den Unterricht in der Algebra unentbehrliches Hülfsmittel ist die Aufgabensammlung. Der in dieser Beziehung vorhandene Bestand bringt einen Stoff, der auch nicht annähernd in der gegebenen Zeit zu bewältigen ist. Macht dieser Umstand nun die Bücher für die sechsklassigen Schulen nicht unbrauchbar, da ja immer die passende Auswahl in der Hand des Lehrers liegt und der Schüler doch wohl eine Repetition der Lösungsmethoden an der Hand von Aufgaben am besten nach eigenen Heften vornimmt, so verteuert er doch ohne besonderen Zweck dies Hülfsmittel für die meistens in dieser Beziehung schon hinreichend in Anspruch genommenen Eltern, daß der Wunsch, eine nur den Bedürfnissen dieser Schulen genügende Aufgabensammlung zu besitzen, gerechtfertigt erscheint.

Daß nur fünfstellige Logarithmentafeln zur Verwendung kommen, ist selbstverständlich, zumal durch höhere Verfügung der Gebrauch solcher auch für Gymnasien und Realschulen I. O. angeordnet oder doch empfohlen ist.

Indem ich im Vorstehenden den Versuch gemacht habe, meine durch Erfahrung gesammelten Ansichten über den Unterricht in einem bestimmten Fache darzulegen, hat es mir gleichzeitig am Herzen gelegen, auf eine Frage Rücksicht zu nehmen, die in lebhafter Weise die Gebildeten erregt und daher von keinem, der über derartige Gegenstände schreibt, außer Auge gelassen werden sollte, die sogenannte Überbürdungsfrage. Mag in dem gegenwärtigen Augenblicke schon eine Überbürdung der Schüler existieren, welche eine gedeihliche Entwicklung von Körper und Geist beschränkt, wie viele behaupten, oder mögen die im Rechte sein, welche das Vorhandensein einer solchen bestreiten, so viel ist jedenfalls gewiß, daß der Bildungsstoff der Realschulen, der den Entwicklungen der Neuzeit entnommen ist und ihnen folgt, sich noch von Jahr zu Jahr mehren wird und daß infolge hiervon eine Bewältigung desselben ohne eine Überbürdung nur möglich sein wird, wenn innerhalb des gegebenen Stoffs eine weise Beschränkung auf die Hauptsachen stattfindet und eine Unterrichtsmethode überall zur Anwendung kommt, welche unter Anspornung des Schülers zu eigener geistigen Thätigkeit, doch das Eindringen in die Materie und das Durchdringen derselben möglichst erleichtert.

Dies scheint mir die Richtung zu sein, in welcher der Überbürdungsfrage vor der Hand näher zu treten möglich ist.

Auch die vorliegende Arbeit hat sich bemüht, einen Beitrag zur Lösung dieser Frage in dem angegebenen Sinne zu liefern; ob und inwieweit dies gelungen ist, darüber zu urteilen mag solchen überlassen bleiben, welche sich hierzu durch theoretisches Studium und praktische Erfahrung das Recht erworben haben.

Düsseldorf, im Februar 1882.

Dr. Lackemann.