unter gewissen Umständen durch eine veränderte Anordnung seiner Moleküle verschiedene physikalische Eigenschaften erlangen und ein verschiedenes chemisches Verhalten zeigen kann. Solche allotrope und zugleich dimorphe Körper sind z. B. der Kohlenstoff, welcher als Diamant im regulären, als Graphit im hexagonalen Systeme krystallisiert; der Schwefel, welcher in der Natur in Rhombenoktaedern krystallisiert vorkommt und auch aus seiner Auflösung in Schwefelkohlenstoff in Krystallen dieser Art erhalten wird, während der geschmolzene Schwefel beim Erstarren klinorhombische Säulen bildet; ferner der kohlensaure Kalk, welcher als Kalkspat in der rhomboedrischen Abteilung des hexagonalen Systems krystallisiert, als Arragonit dagegen in Formen des rhombischen Systems. Der Phosphor (§ 19d) färbt sich rot, wenn er dem Sonnenlicht unter Wasser ausgesetzt wird, ebenso wenn er in einer indifferenten Gasart (Wasserstoff oder Leuchtgas) längere Zeit stark erhitzt wird. Es bildet sich ein fester, roter Körper, der ganz verschieden ist vom gelben Phosphor. Dieser rote Phosphor ist geruch- und geschmacklos, im Dunkeln nicht leuchtend, in Schwefelkohlenstoff unlöslich, nicht giftig, vom spec. Gew. 2,2; er entzündet sich erst bei 260°.

Umgekehrt kommt es nicht selten vor, dafs zwei verschiedene chemische Verbindungen von analoger Zusammensetzung in derselben Form krystallisieren. Solche Körper heifsen isomorph.

So fand Mitscherlich, dafs die schwefelsauren, selensauren, chromsauren und mangansauren Salze derselben Basis (z. B. K_2SO_4, K_2SeO_4, K_2CrO_4, K_2MnO_4) isomorph sind; ebenso die phosphorsauren und arsensauren Salze. Thonerde, Eisenoxyd und Chromoxyd (Al_2O_3, Fe_2O_3, Cr_2O_3) krystallisieren in Rhomboedern mit gleichen Kantenwinkeln, ferner die kohlensauren Salze der Kalkerde, Talkerde (Magnesiumoxyd), des Eisenoxyduls, Manganoxyduls und Zinkoxyds. Isomorphe Körper vermögen sich öfters in ihren Verbindungen gegenseitig zu vertreten und kommen in Mineralien häufig zusammenkrystallisiert vor, wie z. B. kohlensaure Kalkerde und Magnesia im Bitterspat oder Dolomit, welcher nicht selten auch kohlensaures Eisen- und Manganoxydul enthält.

Dritter Abschnitt.

Mechanik.

§ 27. Die Mechanik behandelt im allgemeinen die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper. Man unterscheidet die Statik oder Lehre vom Gleichgewicht und die Dynamik oder Lehre von der Bewegung.

Die Hydromechanik behandelt insbesondere die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung tropfbar flüssiger, die Aeromechanik oder Pneumatik die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung luftförmiger Körper. Erstere zerfällt in Hydrostatik und Hydrodynamik (Hydraulik), letztere in Aerostatik und Aerodynamik.

A. Allgemeine Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung, insbesondere Statik und Dynamik fester Körper.

§ 28. Ruhe und Bewegung. Ein Körper ruht, wenn er seine Lage im Raum beibehält, er bewegt sich, wenn er dieselbe verändert. Wir beurteilen die Ruhe oder Bewegung eines Körpers zunächst nach der Änderung seiner Lage gegen die umgebenden Körper, indes ist unser Urteil hierbei vielfachen Täuschungen ausgesetzt, da von vornherein nicht feststeht, welcher von zwei Körpern, die ihre gegenseitige Lage ändern, der ruhende und welcher der bewegte sei, oder ob sich endlich beide bewegen. Da wir stets nur die relative Ruhe und Bewegung der Körper beobachten können, so sind wir nicht selten geneigt, den ruhenden Körper für den bewegten zu halten und umgekehrt.

Täuschungen bei Kahn- und Eisenbahnfahrten. — Am unwiderstehlichsten ist die Täuschung, vermöge deren uns der Erdboden mit den auf demselben befindlichen Körpern zu ruhen und die Himmelskugel mit den Gestirnen sich um denselben zu drehen scheint. Jahrtausende waren erforderlich, bevor man auf Grund astronomischer Forschungen das Umgekehrte als richtig erkannte. (§ 352.)

§ 29. Einteilung der Bewegungen nach Richtung und Geschwindigkeit. Die Bewegung eines Körpers ist geradlinig oder krummlinig, je nachdem derselbe seine Richtung fortwährend unverändert beibehält, oder dieselbe stetig ändert. Der von dem Körper im Raume durchlaufene Weg heifst die Bahn der Bewegung. Betrachten wir zunächst der Einfachheit halber die Bewegung eines materiellen Punktes, oder eines Körpers von verschwindend kleinen Dimensionen, so reduziert sich seine Bahn auf eine gerade oder krumme Linie. Bei der krummlinigen Bewegung wird die Richtung in jedem Punkte der Bahn durch die an dieselbe gezogene Tangente angegeben.

Gleichförmig ist die Bewegung, wenn in gleichen Zeiten immer gleiche Strecken der Bahn zurückgelegt werden, ungleichförmig, wenn dies nicht der Fall ist. Eine ungleichförmige Bewegung heifst beschleunigt, wenn die in gleichen Zeitabschnitten zurückgelegten Strecken fortwährend wachsen, verzögert, wenn dieselben abnehmen. Das Verhältnis des in einem gewissen Zeitabschnitt zurückgelegten Weges zur Gröfse dieses Zeitabschnitts heifst Geschwindigkeit.

Es ist selbstverständlich, dafs, um Längen und Zeiträume in ein Verhältnis setzen zu können, eine bestimmte Längeneinheit und eine bestimmte Zeiteinheit gewählt werden mufs. Wählt man z. B. als Längeneinheit das Meter (§ 4) und als Zeiteinheit die Sekunde mittlerer Sonnenzeit (§ 359), so bewegt sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit 10, wenn er in jeder Sekunde 10 Meter, mithin in 2 Sekunden 20 m, in 3 Sekunden 30 m, u. s. w. durchläuft. Bei der gleichförmigen Bewegung bleibt das Verhältnis zwischen dem durchlaufenen Raum und der dazu erforderlichen Zeit ein unveränderliches. Die Geschwindigkeit wird daher durch den in einer Zeiteinheit (Sekunde) durchlaufenen Raum angegeben. Bei der ungleichförmigen Bewegung dagegen ist das Verhältnis ein stetig veränderliches. Um daher die Geschwindigkeit in einem gegebenen Zeitpunkt anzugeben, mufs das Verhältnis zwischen einer unendlich kleinen Wegstrecke und der unendlich kleinen Zeit ermittelt werden, welche erforderlich ist, um dieselbe zu durchlaufen. Es ist eine Aufgabe der Analysis, dieses Verhältnis, das Differential des Weges nach der Zeit, zu bestimmen. Aufserdem kann man bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkt als die Strecke erklären, welche der Punkt in einer Sekunde zurücklegen würde, wenn seine Bewegung in diesem Augenblick in eine gleichförmige überginge. (Vergl. § 32.)

§ 30. Gleichförmige Bewegung. Ein Körper, welcher sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von c Meter in jeder Sekunde bewegt, legt in 2 Sekunden $2c$, in drei Sekunden $3c$ Meter, u. s. w. zurück. Bezeichnet daher c (celeritas) die Geschwindigkeit der Bewegung und t (tempus) die Zeit, d. i. die Anzahl der Sekunden, welche erforderlich ist, um eine gewisse Strecke s (spatium) zu durchlaufen, so ist:

$$s = ct; \qquad c = \frac{s}{t}; \qquad t = \frac{s}{c}.$$

Um die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung zu bestimmen, hat man den Raum (in Metern) durch die Zeit (in Sekunden) zu dividieren. Legt z. B. ein Eisenbahnzug in 10 Sekunden eine Strecke von 125 m zurück, so ist seine Geschwindigkeit $c = 12{,}5$ und um 7500 m zu durchlaufen, würde derselbe $\frac{7500}{12{,}5} = 600$ Sekunden oder 10 Minuten gebrauchen.

Zusammenstellung von Geschwindigkeiten:

Fufsgänger	1,5 m	Büchsenkugel	400 m
Pferd im Trab	4 m	Granate der langen 15 cm-Ringkanone	500 m
Pferd im Galopp	6 m	Schall in der Luft	332 m
Rennpferd im Galopp	13 m	Punkt am Erdäquator	464 m
Eisenbahnzug	7—8 m	Mond um die Erde	1,01 km
Schnellzug	14 m	Erde um die Sonne	29,8 km
Dampfschiff	3—7 m	Sternschnuppen	52,6 km
Mäfsiger Wind	4—7 m	Licht	298000 km
Sturm	17—28 m		

§ 31. Beharrungsvermögen. Jede Änderung im Bewegungszustand eines Körpers kann nur durch eine auf denselben wirkende äufsere Ursache oder Kraft (§ 7) veranlafst werden. Es kann daher ein Körper weder aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung, noch auch umgekehrt aus Bewegung in Ruhe übergehen, ohne dafs eine Ursache dazu vorhanden ist. Ebenso kann die Geschwindigkeit oder die Richtung einer Bewegung nur durch eine äufsere Kraft abgeändert werden. Solange daher auf einen bewegten Körper keine Kraft wirkt, ist seine Bewegung eine gleichförmige und geradlinige. Die Eigenschaft der Materie, ohne Einwirkung äufserer Kräfte in ihrem Bewegungszustand zu beharren, heifst Beharrungsvermögen oder Trägheit.

Ein in Bewegung begriffener Eisenbahnzug mufs durch die Reibung der Bremsen zum Stillstehen gebracht werden. Der Reiter fliegt über den Kopf des Pferdes, wenn dieses im schnellen Lauf plötzlich anhält. Die Bewegungen der Körper auf der Erdoberfläche werden in der Regel durch die entgegenwirkenden Kräfte der Reibung und des Luftwiderstandes (§§ 42 und 87 Anm.) allmählich verzögert und aufgehoben. Bei den Bewegungen der Himmelskörper im Weltraum finden diese Bewegungshindernisse nicht statt, weshalb auch keine Verzögerung ihrer Bewegungen eintritt (§ 392,2).

§ 31a. Ungleichförmige Bewegung. Eine auf einen bewegten Körper wirkende Kraft vermehrt oder vermindert die Geschwindigkeit, je nachdem ihre Richtung mit derjenigen der bereits bestehenden Bewegung zusammenfällt, oder ihr entgegengesetzt ist. Die in einer gewissen Zeit erzeugte Änderung der Geschwindigkeit — Beschleunigung oder Verzögerung — ist um so gröfser, je stärker die beschleunigende oder verzögernde Kraft ist. Jene Änderung der Geschwindigkeit dient daher als Mafs für die Gröfse oder Intensität der Kraft (§ 32a). Eine Kraft ist doppelt so grofs als die andere, wenn sie in gleicher Zeit eine doppelt so grofse Geschwindigkeitsänderung zu erzeugen vermag.

Ist die Richtung der auf den bewegten Körper wirkenden Kraft derjenigen der bereits bestehenden Bewegung weder gleich noch entgegengesetzt, sondern gegen dieselbe unter einem beliebigen Winkel geneigt, so bewirkt dieselbe eine Änderung in der Richtung der Bewegung, und die Bewegung wird eine krummlinige (§ 35).

Bei gleichbleibender Intensität einer Kraft ist die durch dieselbe bewirkte Geschwindigkeitsänderung der Dauer ihrer Wirkung proportional. Eine Kraft von mäfsiger Intensität vermag daher in sehr kurzer Zeit nur eine sehr geringe Geschwindigkeit zu erzeugen. (Versuch mit einem unter einer Münze plötzlich fortgeschnellten oder langsam fortgezogenen Kartenblatt).

Diejenigen Kräfte, welche nur sehr kurze Zeit hindurch, aber mit grofser Intensität wirken, so dafs sie eine plötzliche Änderung der Richtung oder Geschwindigkeit der Bewegung herbeiführen, werden Momentankräfte genannt. Solche Momentankräfte kommen z. B. beim Stofse der Körper zur Wirkung (§ 65). Infolge ihrer kurzen Wirkungsdauer kann nur das Endresultat der Wirkung beobachtet werden, welches in der Erzeugung einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung besteht, wenn nicht noch andere, dauernde Kräfte vorhanden sind, welche die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung stetig abändern (Wurfbewegung §§ 33, 35). In der That findet auch im Augenblick des Stofses selbst nicht eine im mathematischen Sinne momentane, sondern eine stetige, aber in sehr kurzer Zeit sehr schnell verlaufende Änderung der Bewegung statt.

§ 32. Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Fallbewegung. Wächst die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers immer in gleichen Zeiten um gleich viel, so heifst seine Bewegung eine gleichförmig beschleunigte. Der Zuwachs der Geschwindigkeit während einer Sekunde heifst die Beschleunigung (acceleratio). Als Beispiel dient die vertikal abwärts gerichtete Bewegung eines unter dem Einflufs der Schwerkraft frei fallenden Körpers (§ 10). Dieselbe ist gleichförmig beschleunigt, weil die Schwerkraft fortwährend mit gleicher Stärke wirkt, mithin in gleichen Zeitteilen stets einen gleichen Zuwachs der Geschwindigkeit erzeugt. Die Beschleunigung durch die Schwerkraft ist an derselben Stelle der Erdoberfläche für alle Körper gleich grofs. Die von einem frei fallenden Körper nach einer Sekunde erlangte Endgeschwindigkeit beträgt (unter 45^0 Breite, im Meeresniveau — vergl. § 63):

$$9{,}808 \text{ m} = 30{,}193 \text{ par.}'$$

Dieselbe wird mit dem Buchstaben g (gravitas) bezeichnet. Die nach 2, 3, 4... t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit ist demnach $2g$, $3g$, $4g$ ... tg. Am Anfang der ersten Sekunde beginnt der fallende Körper seine Bewegung mit der Geschwindigkeit 0, am Ende der ersten Sekunde hat er die Geschwindigkeit g erreicht. Da die Geschwindigkeit gleichförmig wächst, so ist der in der ersten Sekunde durchlaufene Raum ebenso grofs, als ob sich der Körper während dieser Zeit mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}g$ bewegt hätte, d. h. gleich $\frac{1}{2}g$.

Ein strenger Beweis dieses Satzes beruht auf der folgenden Betrachtung. Man denke sich eine Sekunde in sehr viele gleiche Teile geteilt, deren Anzahl n sei. Dann sind, wie aus der Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgt, die Geschwindigkeiten am Ende dieser einzelnen Zeitabschnitte $1\frac{g}{n}, 2\frac{g}{n}, 3\frac{g}{n} \ldots n\frac{g}{n}$. Während der ersten $n$tel Sekunde wächst die Geschwindigkeit von 0 bis zu $\frac{g}{n}$, mithin ist der in dieser Zeit durchlaufene Raum > 0 und $< \frac{1}{n} \cdot \frac{g}{n}$ oder $< \frac{g}{n^2}$; ebenso liegt der in der zweiten $n$tel Sekunde durchlaufene Raum zwischen den Grenzen $\frac{g}{n^2}$ und $2\frac{g}{n^2}$ u. s. f., endlich der in der letzten $n$tel Sekunde durchlaufene Raum zwischen $(n-1) \cdot \frac{g}{n^2}$ und $n \cdot \frac{g}{n^2}$. Also ist der während der ganzen ersten Sekunde durchlaufene Fallraum

$$\text{gröfser als } (0 + 1 + 2 \ldots + n - 1)\frac{g}{n^2}$$

$$\text{und kleiner als } (1 + 2 + 3 \ldots + n)\frac{g}{n^2}$$

oder, indem man die in den Klammern stehenden arithmetischen Reihen summiert, gröfser als $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{2}$ und kleiner als $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{g}{2}$. Da man aber die Anzahl der Zeitabschnitte n beliebig grofs annehmen kann, so fallen beide Grenzwerte, wenn man n über jede Grenze wachsen läfst, in dem Wert $\frac{g}{2}$ zusammen.

Dieselben Betrachtungen kann man auf eine beliebige ganze und gebrochene Anzahl von Sekunden ausdehnen und erhält als Grenzwert für den in 2, 3, ...t Sekunden durchlaufenen Fallraum bezüglich

$$\frac{4}{2}g, \; \frac{9}{2}g, \; .. \; \frac{t^2}{2}g.$$

Es ergiebt sich demnach, dafs die am Schlufs der einzelnen Sekunden erlangten Endgeschwindigkeiten im einfachen Verhältnis der Fallzeiten, die ganzen Fallräume aber proportional den Quadraten der Fallzeiten wachsen. Bezeichnet v die nach t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit, s den Fallraum, so hat man die beiden Hauptformeln für die Fallbewegung:

$$1. \quad v = g\,t; \qquad\qquad 2. \quad s = \frac{1}{2}g t^2.$$

Daraus folgt ferner:

$$1\text{a.} \quad t = \frac{v}{g}; \qquad\qquad 2\text{a.} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}};$$

$$3. \quad v = \sqrt{2gs}; \qquad\qquad 3\text{a.} \quad s = \frac{v^2}{2g}.$$

Bedeutung und Gebrauch dieser Formeln können leicht in Worten angegeben werden. Als Zahlenbeispiele mögen die folgenden dienen, in denen zur Vereinfachung g = 10 m gesetzt werden mag:

1. Wie tief liegt der Wasserspiegel eines Brunnens, in welchen ein Stein 3 Sekunden fällt, und welche Geschwindigkeit hat dieser beim Aufschlagen?
2. In welcher Zeit erlangt ein Körper beim freien Fall die Geschw. 100 m, und welche Höhe ist er alsdann gefallen?
3. In welcher Zeit ist ein Körper eine Höhe von 120 m herabgefallen, und welche Geschwindigkeit hat er dabei erreicht?
4. In welcher Höhe hat die Explosion eines Meteorits stattgefunden, dessen Sprengstücke zugleich mit dem Schall (Geschw. 332 m) die Erde erreichen?
5. Wie tief liegt der Wasserspiegel eines Brunnens, auf welchem man einen Stein 4 Sekunden später, als man ihn hat fallen lassen, aufschlagen hört?

Galilei bediente sich zur Bestätigung der von ihm (1602) aufgefundenen Fallgesetze einer mit glattem Pergament ausgekleideten, unter einem kleinen Winkel gegen den Horizont geneigten Fallrinne, in welcher er Metallkugeln hinabrollen liefs (§ 41). Zur Veranschaulichung der gleichförmig beschleunigten Bewegung dient ferner Atwoods Fallmaschine (1784). An den Enden eines über eine Rolle geschlungenen Fadens sind zwei gleiche Massen aufgehängt, welche sich im Gleichgewicht befinden (§ 47). Durch ein auf eine von beiden gelegtes Übergewicht werden dieselben in Bewegung gesetzt. Die Bewegung, mit welcher das schwerere Gewicht herabsinkt, ist ebenfalls eine gleichförmig beschleunigte, die Beschleunigung ist aber um so kleiner, je kleiner das Übergewicht im Verhältnis zu den mitbewegten Massen, und kann durch verschiedene Gröfse des Übergewichts willkürlich abgeändert werden (§ 32a). Sinkt das Gewicht längs einer vertikalen in Centimeter geteilten Skala herab, so können die den einzelnen Sekundenschlägen eines Pendels (§ 63) entsprechenden Fallräume leicht abgelesen werden, oder man kann umgekehrt die Fallzeiten beobachten, welche erforderlich sind, damit das Gewicht von einer gegebenen Höhe herabsinke. Wird nach einer bestimmten Anzahl von Sekunden das Übergewicht vermittelst eines durchbrochenen Tellers entfernt, so geht von diesem Augenblick ab die beschleunigte Bewegung in eine gleichförmige über, so dafs man die erlangte Endgeschwindigkeit bestimmen kann (§ 29). Um den schädlichen Einflufs der Reibung zu beseitigen, hat man das herabsinkende Gewicht noch um ein kleines Friktionsgewicht zu vermehren, welches sich durch einen besonderen Versuch mit der Fallmaschine mit ausreichender Genauigkeit bestimmen läfst. (Vergl. § 32a).

Alle Körper erlangen durch die Schwerkraft gleiche Beschleunigung. Beim Fallen in der Luft wird jedoch ihre Bewegung durch den Widerstand der Luft (§ 87 Anm.) und den Gewichtsverlust der in ihr befindlichen Körper (§ 103) in ungleichem Mafse verzögert, und im besonderen hängt die Gröfse des Luftwiderstandes nicht allein von der Gröfse, sondern auch von der Gestalt der Oberfläche des fallenden Körpers ab. Eine Flaumfeder und ein Stück Blei fallen daher in der Luft mit ungleicher, im leeren Raum aber mit gleicher Geschwindigkeit (§ 98, 9).

§ 32a. Darstellung, Mafs der Kräfte. Um eine Kraft in ihrer Wirkungsart darzustellen, bedient man sich der geraden Linie, von welcher durch den einen Endpunkt der Angriffspunkt der Kraft, durch die Richtung und die Länge, die erstere genauer etwa noch durch eine Pfeilspitze angedeutet, die Richtung und die Intensität der Kraft bezeichnet werden sollen. Die durch eine Kraft in der Zeiteinheit bewirkte Zunahme oder Abnahme der Geschwindigkeit (§ 31) dient zur Messung der Kraftintensität, und es ergiebt sich, wenn auf den Körper die konstante Kraft P wirkt, welche einem jeden Massenpunkte die Acceleration a erteilen würde, wie in den §§ 11 und 12 bereits für die Wirkung der Schwerkraft dargestellt worden ist, die Masse m als das konstante Verhältnis von P zu a. Wenn also das Gewicht des Körpers durch Q bezeichnet ist, so wird

$$m = \frac{P}{a} = \frac{Q}{g}.$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen die Beschleunigung a durch $\frac{v}{t}$, entsprechend der Gleichung (1) in § 32, so erhält man:

$$P = \frac{mv}{t}.$$

Das Produkt aus der Masse m in die erlangte Endgeschwindigkeit wird die Bewegungsgröfse genannt, und es gilt demnach als die Einheit der Kraft diejenige, welche der Masseneinheit (§ 12) in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 erteilt, oder deren Bewegungsgröfse in einer Sekunde gleich 1 ist.

Anwendung auf die Bestimmung der Beschleunigung bei der Atwoodschen Fallmaschine (§ 32). Wird zunächst das Gewicht der Rolle vernachlässigt, so ist die bewegte Masse, wenn die anfänglich angehängten Gewichte jedes gleich Q mit der Masse M und das Übergewicht q mit der Masse m sind, $2\,M + m$ und die konstant wirkende Zugkraft

$$P = q = mg;$$

ist also a die Beschleunigung, so ergiebt sich:

$$P = (2\,M + m)\,a$$

d. h.

$$a = \frac{mg}{2\,M + m},$$

wo $\frac{m}{2\,M + m}$ auch durch $\frac{q}{2\,Q + q}$ ersetzt werden kann.

Wenn aber zugleich das Gewicht der Rolle — von ihrem Trägheitsmoment (§ 62) wird durchweg abgesehen, — in Betracht kommen soll, so sei etwa M_0 die in Bewegung gesetzte Masse, nämlich der beiden anfänglich angehängten Gewichte und der Rolle, und m die Masse des Übergewichts: alsdann ergiebt sich, wie vorher:

$$a = \frac{mg}{M_0 + m}.$$

Man kann nunmehr durch zwei Versuche den Wert von M_0 bestimmen: sind nämlich die den Übergewichten m_1 und m_2 zukommenden Beschleunigungen a_1 und a_2, so erhält man aus den beiden Gleichungen:

$$(M_0 + m_1)\, a_1 = m_1 g \text{ und } (M_0 + m_2)\, a_2 = m_2 g$$

$$M_0 = \frac{m_1\, m_2\, (a_2 - a_1)}{m_2\, a_1 - m_1\, a_2}.$$

Bestimmung des Friktionsgewichts. (§ 32). Sind, der vorigen Annahme entsprechend, Q jedes der anfänglich angehängten Gewichte und q das Übergewicht, so wird, wenn nach einem Fallraum von s cm das Übergewicht vermittelst des durchbrochenen Tellers abgenommen wird, beim Fehlen des Friktionsgewichts f, die Bewegung nunmehr eine verzögerte. Dieselbe höre nach einem neuen Fallraum von s_1 cm auf, so ergiebt sich, wenn man durch v die Geschwindigkeit im Augenblick der Abnahme des Übergewichts, durch a und a_1 bezüglich die Beschleunigung und Verzögerung der Bewegung vorher und nachher bezeichnet:

$$v^2 = 2as \text{ und } v^2 = 2a_1 s_1, \text{ d. h. } as = a_1 s_1.$$

Aufserdem hat man

$$a = \frac{(q-f)\, g}{2\,Q + q} \text{ und } a_1 = \frac{fg}{2\,Q},$$

folglich wenn man $2Q + q$ und $2Q$ als gleichwertig annimmt

$$\frac{a}{a_1} = \frac{q-f}{f} = \frac{s_1}{s}, \text{ d. h. } f = \frac{sq}{s + s_1}.$$

Ist also beispielsweise $Q = 100$ g, $q = 0{,}49$ g, $s = 50$ cm, $s_1 = 64$ cm, so wird $f = 0{,}215$ g. In der That ergeben sich bei der Beobachtung für $s + s_1$ Werte, die zwischen 111 und 115 schwanken, wonach f einen Wert zwischen 0,220 und 0,214 erhalten würde.

§ 33. Senkrechter Wurf. Unter Wurfbewegung versteht man im allgemeinen die Bewegung eines Körpers, welcher, nachdem er durch irgendwelche Ursache eine Anfangsgeschwindigkeit in beliebiger Richtung erhalten hat, der alleinigen Wirkung der Schwerkraft überlassen wird. Wird der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c vertikal abwärts geworfen, so erhält seine Geschwindigkeit, wie beim freien Fall, in jeder Sekunde den Zuwachs g (§ 32). Die Geschwindigkeit eines vertikal aufwärts geworfenen Körpers dagegen wird durch die seiner Bewegung entgegenwirkende Schwerkraft in jeder Sekunde um ebensoviel vermindert. Im ersten Fall ist die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, im letzteren eine gleichförmig verzögerte. Es ergiebt sich daher die Geschwindigkeit des Körpers nach 1, 2, 3 .... t Sekunden gleich $c \pm g$, $c \pm 2g$, $c \pm 3g \ldots . c \pm t.g$, wo die oberen Vorzeichen für den abwärts, die unteren für den aufwärts gerichteten Wurf gelten. Ferner ergeben sich, wie in § 32, die in den einzelnen Sekunden durchlaufenen Räume gleich $c \pm \frac{1}{2}g$, $c \pm \frac{3}{2}g$, u. s. f. und die ganzen seit Anfang der Bewegung durchlaufenen Räume $c \pm \frac{1}{2}g$, $2c \pm \frac{4}{2}g \ldots . t.c \pm \frac{1}{2}\, t^2.g$. Mithin erhält man für den senkrechten Wurf die Formeln:

1. $v = c \pm gt$
2. $s = ct \pm \frac{1}{2}gt^2$
3. $v^2 = c^2 \pm 2gs$

Der aufwärts geworfene Körper bewegt sich mit abnehmender Geschwindigkeit und kommt zur Ruhe, nachdem seine Geschwindigkeit durch die entgegenwirkende Schwerkraft ganz aufgehoben, oder wenn $v = 0$ geworden ist. Bezeichnet T die Zeit des Ansteigens, so mufs $c - gT = 0$, mithin:

$$T = \frac{c}{g}$$

sein. Die gröfste Höhe S, welche der geworfene Körper erreicht, ergiebt sich, indem man diesen Wert für t in die Formel 2 einsetzt:

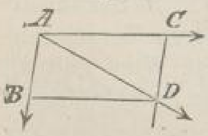
$$S = \frac{c^2}{2g}.$$

Zum Herabfallen von der Höhe S ist (nach Formel 2a, § 32) dieselbe Zeit erforderlich, welche der Körper zum Ansteigen brauchte, und die Endgeschwindigkeit, mit welcher er den Ausgangspunkt wiedererreicht, ist (Formel 3, § 32) gleich der Anfangsgeschwindigkeit c. Die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von einer Höhe S frei herabfällt, würde also hinreichen, um denselben wieder bis zu der Höhe S emporzutreiben.

Den Formeln 1 und 2 zufolge kann man die Bewegung des geworfenen Körpers aus der Summe oder Differenz zweier Bewegungen zusammengesetzt denken, von denen die eine, gleichförmige, durch die dem Körper mitgeteilte Anfangsgeschwindigkeit, die andere, gleichförmig beschleunigte, durch die Wirkung der Schwerkraft veranlafst wird.

§ 34. Zusammengesetzte Bewegung, Parallelogramm der Bewegungen. Wirken auf einen Körper gleichzeitig zwei Bewegungsursachen, so heifst seine Bewegung eine zusammengesetzte. Die Bewegungen, welche beide Ursachen einzeln wirkend ihm erteilt haben würden, heifsen die Komponenten der Bewegung, die aus beiden zusammengesetzte die Resultierende. Wirken beide Bewegungsursachen in gleicher Richtung, so ist die resultierende Geschwindigkeit gleich der Summe, wirken beide in entgegengesetzter Richtung, so ist sie gleich der Differenz der Geschwindigkeiten, welche beide Ursachen einzeln wirkend dem Körper erteilt haben würden.

Fig. 14.



Ein Punkt A (Fig. 14) bewege sich gleichförmig auf der Geraden AB, so dafs er in einer Sekunde von A nach B gelangt. Gleichzeitig aber werde diese Gerade gleichförmig in der Richtung AC fortbewegt, so dafs sie während einer Sekunde aus der Lage AB in die Lage CD übergeführt wird. Infolge dieser zusammengesetzten Bewegung ist der Punkt, wie leicht ersichtlich, während einer Sekunde von A nach D gelangt, und zwar hat er die Diagonale AD des Parallelogramms $A\,B\,C\,D$ gleichförmig durchlaufen.

Aus der Zusammensetzung zweier gleichförmigen Bewegungen von verschiedener Richtung resultiert demnach wieder eine gleichförmige Bewegung, welche der Richtung und Geschwindigkeit nach durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten die Richtungen und Geschwindigkeiten der Komponenten angeben. Dieses Parallelogramm heifst Parallelogramm der Bewegungen.

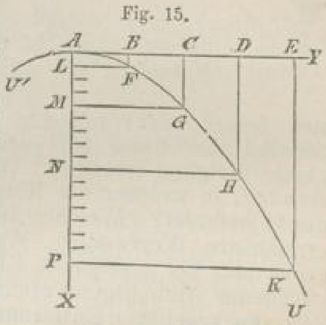
Die verschiedenen Fälle der Zusammensetzung der Bewegungen werden durch das Beispiel eines mit dem Strom, gegen den Strom, oder quer über den Strom geruderten Kahns erläutert.

Umgekehrt kann man sich jede gleichförmige Bewegung in zwei Komponenten von vorgeschriebener Richtung zerlegt denken.

Es ist klar, dafs aus der Zusammensetzung zweier geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegungen, welche in A mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnen, wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entspringt. Die Richtung und Beschleunigung dieser Bewegung werden durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen Seiten die Richtungen und Beschleunigungen der beiden Komponenten angeben.

§ 35. Horizontaler und schiefer Wurf. Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit c in horizontaler Richtung geworfener Körper wird durch die Wirkung der Schwerkraft stetig von seiner Bewegungsrichtung abgelenkt und beschreibt eine krummlinige Bahn, die Wurflinie, welche eine Parabel ist. Da der Körper in horizontaler Richtung in jeder Sekunde um die gleiche Strecke c fortrückt, während die in vertikaler Richtung durchlaufenen Strecken den Quadraten der Fallzeit proportional sind, so erhält man die Punkte der Bahn, welche der von A (Fig. 15) aus geworfene Körper nach 1, 2, 3, u. s. w. Sekunden erreicht hat, indem man auf der horizontalen Geraden AY von A aus die gleichen Strecken AB, BC, CD, u. s. w. gleich der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c aufträgt, auf der Vertikalen AX dagegen die Stücke $AL = \frac{1}{2}g$, $AM = 4 \cdot \frac{1}{2}g$, $AN = 9 \cdot \frac{1}{2}g$, u. s. w. abschneidet und die Rechtecke $ABFL$, $ACGM$ u. s. w. konstruiert.

Fig. 15.



Betrachtet man die Abschnitte auf AX als Abscissen, die in ihren Endpunkten errichteten Senkrechten LF, MG, u. s. w. als Ordinaten, so ergiebt sich aus dieser Konstruktion die geometrische Eigenschaft der Parabel, dafs die Abscissen den Quadraten der Ordinaten proportional sind. Bezeichnet x die Abscisse, y die Ordinate, so hat man nach t Sekunden:

$$y = ct, \qquad x = \frac{1}{2} g t^2,$$

mithin, durch Elimination von t,

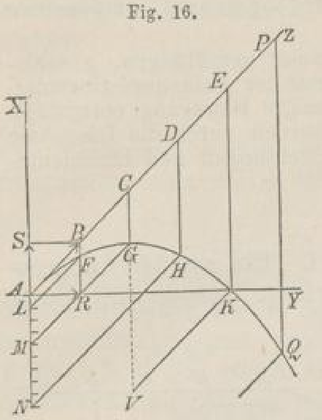
$$y^2 = \frac{2c^2}{g} \cdot x,$$

welche Beziehung zwischen x und y die Gleichung der Parabel ist und die soeben angegebene geometrische Eigenschaft ausdrückt. Der Punkt A heifst der Scheitel, AX die Axe der Parabel. Geometrisch betrachtet besitzt dieselbe aufser dem ins Unbegrenzte fortlaufenden (absteigenden) Zweig AKU noch einen zweiten, zu diesem symmetrischen (aufsteigenden) Zweig $U'A$.

Wird ein Körper in der gegen den Horizont geneigten Richtung AB (Fig. 16) aufwärts geworfen, so kann sein Ort am Ende einer beliebigen Zahl von Sekunden durch eine ähnliche Konstruktion wie oben gefunden werden. Die Wurfbahn ist in diesem Fall ebenfalls eine Parabel, deren Scheitel aber nicht im Anfangspunkt der Bewegung gelegen ist. Der Winkel ZAY, unter welchem die Richtung des Wurfs gegen die Horizontale geneigt ist, heifst der Elevationswinkel. Wird dieser mit α bezeichnet, so kann man sich die Anfangsgeschwindigkeit $AB = c$

nach § 34 in eine horizontale Komponente $AR = c \cos\alpha$ und eine vertikale $AS = c \sin\alpha$ zerlegt denken. Erstere wird durch die Schwerkraft nicht beeinflufst, letztere dagegen in jeder Sekunde um g vermindert. Für die horizontale und vertikale Entfernung vom Anfangspunkte A, welche der Körper nach t Sekunden erreicht hat, ergeben sich (§§ 30 u. 33) die Ausdrücke

Fig. 16.



$$y = c \cos\alpha \,.\, t,$$
$$x = c \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminiert man t aus diesen beiden Gleichungen, so läfst sich die Gleichung zwischen x und y leicht in die Form bringen

$$(y-b)^2 = \frac{2\, c^2 \cos\alpha^2}{g} (a-x),$$

wenn der Kürze wegen $\frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = b$, $\frac{c^2 \sin\alpha^2}{2g} = a$ gesetzt wird. Dieses ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel G in der horizontalen Entfernung b und in der vertikalen Höhe a über dem Anfangspunkt gelegen ist. Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich ferner leicht folgende Fragen beantworten: Nach welcher Zeit wird der Scheitel der Bahn bei gegebenem Elevationswinkel und gegebener Anfangsgeschwindigkeit erreicht? Wie grofs ist die horizontale Wurfweite oder die Entfernung, in welcher der Körper sich wieder in gleicher Höhe mit dem Ausgangspunkt befindet? Welches ist bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die gröfste erreichbare Wurfweite? Welchem Elevationswinkel entspricht dieselbe? Wie grofs mufs bei gegebenem Elevationswinkel die Anfangsgeschwindigkeit, oder bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit der Elevationswinkel gewählt werden, um ein Ziel von gegebener Entfernung und Höhe zu treffen? (Die letztere Aufgabe gestattet eine doppelte Lösung — flacher Schufs und Bogenschufs).

Einflufs des Luftwiderstandes (§ 87 Anm.) auf die Wurfbahn — Ballistische Kurve. — Die genaue Kenntnis der Flugbahn der Geschosse unter dem Einflufs des Luftwiderstandes ist von praktischer Wichtigkeit. Die Gesetze derselben werden äufserst kompliziert, namentlich wenn das Geschofs, wie es bei den gezogenen Geschützen der Fall ist, eine andere als kugelförmige Gestalt hat, und wenn demselben durch die Züge des Geschützrohres gleichzeitig mit der fortschreitenden Bewegung eine Rotationsbewegung um eine der Richtung des Rohres parallele Axe erteilt wird.

§ 35a. Horizontaler und schiefer Wurf (Fortsetzung). Auch die Geschwindigkeit und die Richtung des geworfenen Körpers läfst sich in jedem Augenblick seiner Bewegung, also an jeder Stelle seiner Bahn, sowohl durch Konstruktion als durch Rechnung, leicht darstellen. Es handle sich zunächst um den der Fig. 15 zugehörigen Fall des horizontalen Wurfes. Man setzt die sich gleichbleibende, horizontale Geschwindigkeit c mit der sich stetig ändernden, vertikalen Geschwindigkeit v, welche dem Körper nach 1, 2, 3, . . . Sekunden vermöge der Erdschwere zukommt, zusammen, indem man in den Punkten F, G, H, . . . die Rechtecke konstruiert aus den horizontalen Komponenten c und bezüglich den vertikal nach unten gerichteten Komponenten g, $2g$, $3g$, . . . Die zu F, G, H, . . . gehörigen Diagonalen dieser Rechtecke stellen alsdann durch ihre Länge und Richtung die Endgeschwindigkeit und die Richtung des Geschosses dar.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dafs diese Diagonalen die Tangenten sind der Bahn in den Punkten F, G, H, . . . und rückwärts verlängert die nach oben verlängerte Axe derartig durchschneiden, dafs der Scheitel A der Parabel in der Mitte liegt zwischen dem jedesmaligen Schnittpunkt der Tangente und dem Fufspunkt der zugehörigen Ordinate; denn man hat die Gleichungen:

$$\frac{FL}{2AL} = \frac{c}{g}, \qquad \frac{GM}{2AM} = \frac{c}{2g}, \qquad \frac{HN}{2AN} = \frac{c}{3g}, \ldots$$

und diese Eigenschaft gilt für jeden Punkt der Parabel und gestattet eine sehr einfache Konstruktion der Tangente an einem Punkte der Parabel.

Der allgemeinere Fall des schräg gegen den Horizont geworfenen Körpers (§ 16) gestattet ganz ähnliche Konstruktionen. Auf ihn bezieht sich, unter gleichen Annahmen wie in § 35, die folgende Rechnung, in der man nur den Elevationswinkel α gleich Null zu setzen hat, um die der Figur 15 entsprechenden Resultate zu erhalten. Im Punkte Q, den das Geschofs nach t Sekunden erreicht haben mag, sei die horizontale Komponente seiner Geschwindigkeit gleich v_1, die vertikale Komponente derselben gleich v_2 und φ der Winkel, den die Tangente in Q mit dem Horizont bildet, so hat man:

$$v_1 = c \cos\alpha, \qquad v_2 = c \sin\alpha - gt;$$

folglich ergiebt sich für die resultierende Geschwindigkeit v:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + c^2 - 2cgt \sin\alpha + g^2t^2$$

und

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{v_2}{v_1} = \frac{c \sin\alpha - gt}{c \cos\alpha}.$$

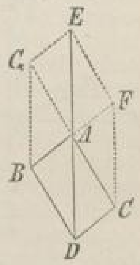
Auch diese Formeln führen zur Beantwortung einer Reihe von Fragen über Richtung und Geschwindigkeit des Geschosses, z. B. in dem höchsten Punkte seiner Bahn, für welchen $v_2 = 0$ ist. Zur Erweiterung der zugehörigen Untersuchungen sei nur noch die Gleichung

$$v^2 = c^2 - 2gx$$

hinzugefügt, in welche sich eine der vorhergehenden umformen läfst und die später (§ 43) eine erhöhte Bedeutung gewinnen wird. (Vgl. § 33, Gl. 3.)

§ 36. Gleichgewicht der Kräfte an einem Punkt. Parallelogramm der Kräfte. (Newton, 1686.) Wie zwei einem Körper gleichzeitig erteilte Geschwindigkeiten durch eine resultierende Geschwindigkeit ersetzt werden können (§ 34), so kann man auch, wenn ein Körper der Einwirkung zweier oder mehrerer Kräfte ausgesetzt ist, eine Mittelkraft oder Resultierende angeben, welche die Seitenkräfte oder Komponenten in ihrer gemeinschaftlichen Wirkung ersetzt. Wirken auf einen materiellen Punkt (§ 29) zwei gleich grofse, der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte, so bleibt der Punkt in Ruhe, oder er befindet sich im Zustand des Gleichgewichts (§ 11). Zwei in gleicher Richtung wirkende Kräfte können durch eine Resultierende ersetzt werden, welche ihrer Summe gleich ist. Die Resultierende zweier in entgegengesetzter Richtung wirkenden, ungleichen Kräfte ist gleich ihrer Differenz und nach der Seite der gröfseren von beiden gerichtet. Schliefsen endlich die Richtungen beider Komponenten einen beliebigen Winkel ein, so kann man dieselben ihrer Gröfse und Richtung nach durch die geraden Linien AB und AC (Fig. 17) darstellen. (§ 32a.) Die Diagonale AD des zwischen den Seiten AB und AC konstruierten Parallelogramms giebt dann der Gröfse und Richtung nach die Resultierende an. Fügt man zu den Kräften AB und AC noch eine dritte Kraft AE hinzu, welche der Resultierenden AD an Gröfse gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, so wird dadurch die gemeinschaftliche Wirkung der beiden Komponenten aufgehoben, und die drei Kräfte AB, AC, AE sind am Punkte A im Gleichgewicht.

Fig. 17.



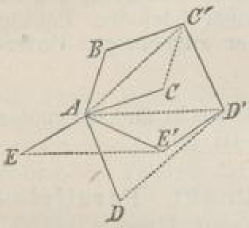
Da als Mafs der Kräfte die Geschwindigkeiten dienen, welche beide Kräfte dem Punkte A in der Zeiteinheit zu erteilen vermögen (§ 31a), so ergeben sich die ausgesprochenen Sätze als unmittelbare Folgerungen aus § 34. Der Punkt ist im Gleichgewicht, wenn die ihm von zwei Kräften erteilten Geschwindigkeiten gleich grofs und entgegengesetzt gerichtet sind; die Beschleunigung, welche zwei in gleicher oder entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte ihm erteilen, ist gleich der Summe oder Differenz der Beschleunigungen, welche beide Kräfte für sich hervorgebracht haben würden. Werden endlich die Beschleunigungen der Komponenten durch die Geraden AB und AC dargestellt, so stellt AD die resultierende Beschleunigung dar, welche durch eine gleich grofse und entgegengesetzte AE aufgehoben werden kann.

Sind die Kräfte AB, AC, AE im Gleichgewicht, so ist jede derselben gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Resultierenden der beiden anderen, also auch AB gleich und entgegengesetzt AF, AC gleich und entgegengesetzt AG. Zwischen drei im Gleichgewicht befindlichen Kräften und den von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkeln findet die leicht zu beweisende Beziehung statt:

$$\frac{AE}{\sin BAC} = \frac{AB}{\sin CAE} = \frac{AC}{\sin EAB}.$$

Wirken drei oder mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen Punkt, so kann man sich zunächst zwei derselben durch eine Resultierende ersetzt denken, diese mit einer dritten vereinigen u. s. f. Eine einfache Konstruktion der Resultierenden beliebig vieler Kräfte, deren Richtigkeit leicht einleuchtet, ist folgende: Es seien die in A (Fig. 18) angreifenden Kräfte AB, AC, AD, AE gegeben. Man ziehe von B aus BC' gleich und gleichstimmig parallel AC, sodann $C'D' =$ und $\parallel AD$, endlich $D'E'$ $=$ und $\parallel AE$, so stellt AE' die Resultierende der vier Kräfte dar. Es werden nämlich AB und AC durch AC', AC' und AD durch AD', AD' und AE durch AE' ersetzt. Fiele E' mit A zusammen, so wäre die Resultierende gleich Null, und die Kräfte wären im Gleichgewicht (Kräftepolygon).

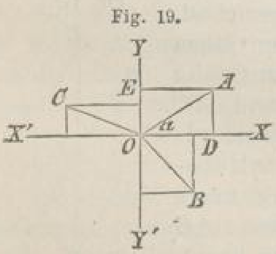
Fig. 18.



§ 37. Zerlegung der Kräfte. (Newton und Varignon, 1687). Wie man sich zwei auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte in eine Resultierende vereinigt denken kann, so kann man sich umgekehrt, wo es zweckmäfsig erscheint, die Wirkung einer Kraft durch die gleichzeitige Wirkung zweier Komponenten ersetzt denken. Besonders häufige Anwendung findet der Fall der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten, deren Richtungen einen rechten Winkel einschliefsen (§§ 41, 61 u. s. w.).

Soll die auf den Punkt O (Fig. 19) wirkende Kraft OA in zwei rechtwinklige Komponenten zerlegt werden, deren Richtungen OX und OY gegeben sind, so hat man von A aus auf OX und OY die Senkrechten AD und AE zu fällen. Wird die Gröfse der Kraft OA mit P und $\angle AOD$ mit α bezeichnet, so sind die Komponenten $OD = P\cos\alpha$ und $OE = P\sin\alpha$. Wirken auf den Punkt O beliebig viele Kräfte OA, OB, OC, deren Richtungen in einer Ebene liegen, so kann man sich jede derselben durch zwei rechtwinklige Komponenten ersetzt denken, deren Richtungen in die Linien XX' und YY' fallen. Betrachtet man dann die nach OX und OY gerichteten Komponenten als positiv, die nach OX' und OY' gerichteten als negativ, so kann man die in die Gerade XX' fallenden unter sich und die in YY' fallenden unter sich algebraisch summieren und endlich die beiden so erhaltenen Summen wieder zu einer einzigen Resultierenden vereinigen, welche alle Kräfte in ihrer Wirkung ersetzt. Sind die auf O wirkenden Kräfte P_1, P_2, P_3 .... und die Winkel, welche ihre Richtungen mit OX einschliefsen α_1, α_2, α_3 ...., so werden die Summen der nach OX und OY gerichteten Kräfte beziehungsweise

Fig. 19.



$$X_0 = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots.$$
$$Y_0 = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \ldots.$$

Dabei werden die Vorzeichen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für jede Kraft durch den Quadranten bestimmt, in welchem der Winkel α liegt, so dafs z. B. $\sin BOX$ negativ ist. Ist $X_0 = 0$ und $Y_0 = 0$, so findet Gleichgewicht zwischen den

Kräften statt; anderenfalls hat man, wenn P_0 die Gröfse der Resultierenden und α_0 den Winkel bezeichnet, welchen sie mit der Geraden OX einschliefst:

$$P_0 \cos \alpha_0 = X_0 \quad \text{und} \quad P_0 \sin \alpha_0 = Y_0,$$

woraus folgt:

$$P_0^2 = X_0^2 + Y_0^2;$$

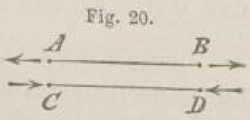
$$\cos \alpha_0 = \frac{X_0}{P_0}, \qquad \sin \alpha_0 = \frac{Y_0}{P_0}.$$

Es wird leicht ersichtlich, dafs diese Betrachtungen auch auf den Fall ausgedehnt werden können, dafs die Richtungen der Kräfte nicht in einer Ebene liegen, indem man dann jede Kraft nach drei auf einander senkrechten Richtungen in Komponenten zerlegen kann.

§ 38. Gleichgewicht entgegengesetzter Kräfte an einem Faden oder einer Stütze. Spannung des Fadens; Zug- und Druckkräfte. Ein an seinem oberen Ende befestigter, elastischer Faden wird durch eine angehängte schwere Masse ausgedehnt, indem seine Teilchen sich so weit von einander entfernen, bis die dadurch erzeugte Anziehung zwischen je zwei benachbarten Teilchen (§§ 7 und 8) der Wirkung der Schwerkraft auf die angehängte Masse das Gleichgewicht hält. Die Spannung des Fadens oder die Anziehung, welche in diesem Gleichgewichtszustand zwischen zwei benachbarten Teilchen desselben stattfindet, ist gleich dem Gewicht der angehängten Masse (§ 11). Werden mehrere schwere Massen an demselben Faden aufgehängt, so ist die Spannung des Fadens gleich der Summe ihrer Gewichte.

Infolge seiner Spannung übt der Faden an seinem Aufhängungspunkt einen Zug aus, welcher dieser Spannung oder dem Gewicht der angehängten Masse gleich ist. Der Faden AB (Fig. 20) ist im Gleichgewicht, wenn an beiden Enden desselben gleich grofse und der Richtung nach entgegengesetzte Zugkräfte wirken. Ebenso ist ein fester Stab oder eine Stütze CD im Gleichgewicht unter dem Einflufs zweier gleichen und entgegengesetzt gerichteten Druckkräfte.

Fig. 20.



Es ist zweckmäfsig, die Zug- oder Druckkräfte, welche der Spannung eines Fadens, oder dem Druck eines schweren Körpers auf seine Unterlage vergleichbar sind, also durch Gewichtseinheiten ausgedrückt werden, und welche in der Regel unmittelbar nur auf einzelne Punkte oder auf die Oberfläche der Körper wirken, von denjenigen Kräften zu unterscheiden, welche wie die Schwerkraft auf alle Massenteile des Körpers in gleicher Weise beschleunigend wirken. Für die Zusammensetzung und Zerlegung der auf einen Punkt wirkenden Zug- und Druckkräfte gelten dieselben Gesetze, welche oben (§§ 36 u. 37) für das Gleichgewicht der Kräfte an einem Punkt im allgemeinen entwickelt sind. Haben die auf die Teile eines festen Körpers wirkenden Zug- und Druckkräfte verschiedene Angriffspunkte, so kann das Gleichgewicht zwischen denselben nur mit Hilfe der Anziehungs- und Abstofsungskräfte herbeigeführt werden, welche zwischen den Teilen des festen Körpers in Wirkung treten, sobald man die Gestalt des Körpers zu ändern, mithin seine Teile von einander zu entfernen, oder einander zu nähern sucht. Ein durch zwei entgegengesetzte Kräfte gespannter Faden (Draht) erleidet jederzeit eine Dehnung, wenn diese auch in vielen Fällen so gering ist, dafs dieselbe ohne besonders geschärfte Beobachtungsmittel nicht bemerkt wird. Nur durch die Anziehungskräfte, welche aus der vergröfserten Entfernung der Teile des Fadens entspringen (§ 8), ist das Gleichgewicht der Teile möglich. Jedes einzelne Teilchen ist im Gleichgewicht, wenn es von den beiden benachbarten Teilchen gleiche Beschleunigungen in entgegengesetzten Richtungen erfährt. Die Anziehung je zweier auf einander folgenden Teilchen, oder die Spannung des Fadens mufs daher in der ganzen Länge desselben gleich grofs sein, und die beiden Endpunkte des Fadens müssen gleiche Beschleunigungen nach entgegengesetzten Richtungen erfahren. — Ist an einem Faden eine Masse von m Atomen aufgehängt, deren jedes durch die Schwerkraft die Beschleunigung g erfährt, so wird die Spannung des Fadens durch das Produkt $m \cdot g$ ausgedrückt. Denkt man sich am anderen Ende des Fadens eine Masse aus m' Atomen angebracht, deren jedes die Beschleunigung g' in entgegengesetzter Richtung erfährt, so ist zum Gleichgewicht erforderlich, dafs

$$m . g = m' . g'$$

sei, oder es müssen die Produkte aus den durch den Faden verbundenen Massen und den entsprechenden Beschleunigungen einander gleich sein.

Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich auf den Druck anwenden, welchen eine Stütze erleiden würde, um die Annäherung zweier einander anziehenden Massen, z. B. der Erde und des Mondes, zu verhindern. Besteht die Masse des Körpers A aus m Atomen, die des Körpers B aus m' Atomen, und ist k die Beschleunigung, welche jedes Atom dem anderen in der Entfernung erteilt, in welcher sich beide Körper befinden, so erfährt jedes der m' Atome des Körpers B von den m Atomen des Körpers A die Beschleunigung $g' = m . k$ in der Richtung nach A; jedes der m Atome des Körpers A dagegen erfährt von den m' Atomen des Körpers B im ganzen die Beschleunigung $g = m' . k$ in der Richtung nach B. Soll die Annäherung beider Körper durch eine zwischen ihnen angebrachte feste Stütze verhindert werden, so mufs diese von beiden Seiten den gleichen Druck

$$m . g = m' . g' = mm' . k$$

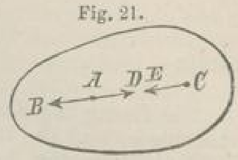
erleiden und die beiden einander anziehenden Massen befinden sich, mit Hilfe der Stütze, im Gleichgewicht, da die auf beiden Seiten wirkenden Druckkräfte einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Der Druck auf die Stütze oder die gegenseitige Anziehung zwischen beiden Massen wird durch das Produkt $mm' . k$ ausgedrückt.

Es ist hierbei vorausgesetzt worden, dafs die Anziehung, welche jedes Atom des Körpers A auf jedes Atom des Körpers B ausübt, derjenigen gleich ist, welche es selbst von ihm erfährt, so dafs die Beschleunigungen, welche beide Körper einander erteilen, ihren Massen proportional sind. Dieser bisher durch alle Erfahrungen bestätigte Satz ist unter dem Namen des Prinzips der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (Aktion und Reaktion) bekannt.

§ 39. Gleichgewicht der Kräfte an einem starren Körper. Zug- und Druckkräfte, welche auf verschiedene Punkte eines festen Körpers wirken, können, wie im vorhergehenden Paragraphen erläutert worden, nur mit Hilfe der Elasticitätskräfte im Gleichgewicht sein, welche zwischen den benachbarten Teilen des Körpers in Wirkung treten, deren Entfernungen die äufseren Kräfte zu vergröfsern oder zu verringern streben. In den meisten Fällen ist die Formänderung, welche der Körper dabei durch die äufseren Kräfte innerhalb der Elasticitätsgrenze (§ 8) erleidet, so gering, dafs sie bei vielen praktischen Fragen über das Gleichgewicht ganz aufser acht gelassen werden kann, oder dafs man die Gestalt des Körpers als starr und unveränderlich betrachten darf. Hat ferner ein elastischer Körper durch die Einwirkung im Gleichgewicht befindlicher, äufserer Kräfte eine merkliche Formänderung erlitten (wie z. B. ein gedehnter, elastischer Faden, eine gespannte Uhrfeder), so wird das Gleichgewicht noch bestehen, wenn man sich den Körper in seiner veränderten Form starr geworden, d. h. seine Teile auf unveränderliche Weise mit einander verbunden denkt.

Ist A (Fig. 21) der Angriffspunkt einer der an einem starren Körper im Gleichgewicht befindlichen Kräfte, welche ihrer Gröfse und Richtung nach durch die Gerade AB dargestellt wird, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn man den Angriffspunkt der Kraft AB nach irgend einem anderen Punkt C auf der Geraden AB oder ihrer Verlängerung verlegt, ohne dabei die Gröfse oder Richtung der Kraft zu ändern — wofern nur der Punkt C zu dem Körper gehört, oder mit demselben in starre Verbindung gesetzt wird. Denn denkt man sich zu den bereits vorhandenen Kräften, welche nach Voraussetzung im Gleichgewicht sind, noch die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte $AD = AB$ und CE hinzugefügt, so wird wegen der starren und unveränderlichen Verbindung der Punkte A und C das Gleichgewicht noch bestehen. Nun sind aber auch die beiden, im Punkt A angreifenden, gleichen und entgegengesetzten Kräfte AB und AD unter sich im Gleichgewicht; dieselben können also fortfallen, ohne dafs das Gleichgewicht der übrigen Kräfte gestört wird. Das Resultat ist also, dafs die Kraft AB durch die in C angreifende gleiche Kraft CE in ihrer Wirkung ersetzt ist.

Fig. 21.

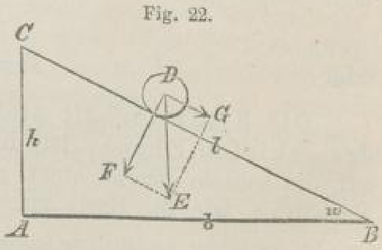


Anwendung der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung auf die einfachen Maschinen und auf die Theorie des Schwerpunktes.

§ 40. Maschinen sind im allgemeinen Vorrichtungen zur Übertragung der Wirkung von Kräften von einem Körper auf den anderen; man bedient sich derselben, um mittelst der zu Gebote stehenden Kräfte die beabsichtigten Bewegungen auf möglichst vorteilhafte Weise zustande zu bringen. Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Maschinen. Zu den einfachen Maschinen, auf deren Wirkung die aller Bestandteile der zusammengesetzten zurückgeführt werden kann, gehören zunächst die Vorrichtungen zur Übertragung der Kräfte in geradliniger Richtung, deren Wirkungsweise bereits oben (§ 38) erörtert worden ist, nämlich der Faden (Seil) und die Stütze (Stange, Strebe). Sodann rechnet man dazu die schiefe Ebene, die Schraube, den Keil, die Rolle, das Wellrad und den Hebel.

§ 41. Fall über die schiefe Ebene. Auf einer Ebene, welche unter dem Winkel w gegen die Horizontalebene geneigt ist, und welche durch die Hypotenuse BC des rechtwinkligen Dreiecks BAC (Fig. 22) dargestellt werden mag, befinde sich in D ein schwerer Körper. Die horizontale Kathete AB, welche die Horizontalebene vorstellt, soll die Basis der schiefen Ebene genannt und mit b bezeichnet werden; die vertikale Kathete $AC = h$ heifse die Höhe, endlich $BC = l$ die Länge der schiefen Ebene. Wird der Körper D, ohne dafs ihm eine Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird, der Wirkung der Schwere überlassen, so wird derselbe, da er durch den Widerstand der schiefen Ebene verhindert ist in der Richtung DE herabzufallen, sich in der Richtung von C nach B auf der schiefen Ebene abwärts bewegen. Die Beschleunigung $DE = g$, welche ihm die Schwere erteilen würde, wenn der Widerstand der schiefen Ebene nicht vorhanden wäre, kann man sich in die Komponenten DG und DF zerlegt denken (§ 37), von denen die erste der schiefen Ebene parallel, die zweite senkrecht zu derselben gerichtet ist. Letztere Komponente wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben (§ 11), und nur die Komponente DG kann zur Wirkung kommen. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DGE und CAB hat man dann

Fig. 22.



$DG : DE = CA : CB$ oder, wenn die Beschleunigung auf der schiefen Ebene DG mit g' bezeichnet wird,

$$g' : g = h : l,$$

mithin
$$g' = g \cdot \frac{h}{l} \text{ oder } g' = g \sin w.$$

Die Bewegung des Körpers auf der schiefen Ebene ist eine gleichförmig beschleunigte, und die in § 32 entwickelten Formeln für den freien Fall behalten ihre Gültigkeit für den Fall auf der schiefen Ebene, wenn nur anstelle von g überall g' oder $g \sin w$ gesetzt wird; es ist also insbesondere

$$v = g' t = gt \sin w; \qquad s = \frac{1}{2} g' t^2 = \frac{1}{2} gt^2 \sin w;$$

$$v = \sqrt{2 g' s} = \sqrt{2gs \sin w}.$$

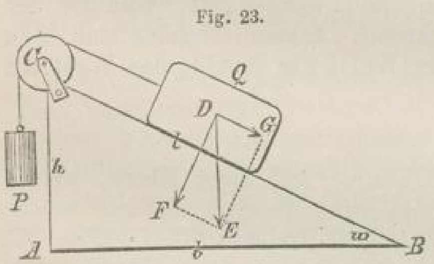
Beginnt der Körper seine Bewegung im Punkte C ohne Anfangsgeschwindigkeit, so ist die Endgeschwindigkeit, mit welcher er in B anlangt, nachdem er die ganze Länge der schiefen Ebene durchlaufen hat,

$$v = \sqrt{2g \frac{h}{l}\, l} \text{ oder } v = \sqrt{2gh},$$

d. h. der Körper langt am Fufs der schiefen Ebene mit derselben Endgeschwindigkeit an, als ob er von der Höhe h in vertikaler Richtung frei herabgefallen wäre (§ 32, Formel 3).

§ 42. Gleichgewicht auf der schiefen Ebene. Soll eine auf der schiefen Ebene CB (Fig. 23) im Punkt D ruhende Last, deren Gewicht gleich Q ist, durch eine in der Richtung DC, parallel der schiefen Ebene wirkende Kraft P im Gleichgewicht erhalten, oder am Herabgleiten von der schiefen Ebene verhindert werden, so kann man sich, um die Gröfse der erforderlichen Kraft zu finden, die Wirkung der Schwerkraft auf die Last oder ihr Gewicht Q, welches durch DE vorgestellt wird, in die beiden Komponenten DG und DF zerlegt denken. Die Komponente DF wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben und stellt den Druck dar, welchen die schiefe Ebene von der Last zu erleiden hat. Die Komponente DG mufs durch die ihr gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft P aufgehoben werden. Es ergiebt sich (vergl.) § 14

Fig. 23.



$$P : Q = h : l$$

oder
$$P = Q \cdot \frac{h}{l} = Q \sin w.$$

Die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene. Die Komponente $DF = Q \cos w$ oder der Druck auf die schiefe Ebene steht zum ganzen Gewicht der Last in demselben Verhältnis, wie die Basis zur Länge der schiefen Ebene.

Es ist leicht ersichtlich, welche Änderungen die Komponenten DG und DF erleiden, wenn man sich den Neigungswinkel w von 0° bis 90° wachsend denkt. — Ist die Kraft P, durch welche das Gleichgewicht hervorgebracht werden soll, nicht parallel der schiefen Ebene gerichtet, sondern unter einem beliebigen Winkel gegen dieselbe geneigt, so kann man sich die Kraft ebenfalls in eine der schiefen Ebene parallele und eine zu derselben senkrechte Komponente zerlegt denken, von denen nur die erste zur Wirkung kommt und gleich $Q \sin w$ sein mufs, während die letztere nur die Gröfse des Drucks auf die schiefe Ebene beeinflufst. Anwendungen der schiefen Ebene beim Auf- und Abladen von Lasten, Gebirgsstrafsen u. s. w.

Infolge der von der Rauhigkeit der Berührungsflächen herrührenden Reibung erleiden die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung auf der schiefen Ebene eine Modifikation. Die Reibung mufs nämlich als eine Kraft betrachtet werden, welche jederzeit der wirklich stattfindenden oder beabsichtigten Bewegung entgegenwirkt. Darum erfordert auch die Fortbewegung einer Last auf einer horizontalen Ebene einen Kraftaufwand, welcher bei der gleitenden Reibung gröfser ist als bei der rollenden Reibung (Walzen, Wagenräder, Friktionsrollen) und bei der ersteren durch Schmiermittel verringert werden kann. Die Erfahrung hat gelehrt, dafs die Reibung dem Druck proportional ist, aufserdem ist dieselbe von der Substanz und dem Grade der Rauhigkeit der geriebenen Flächen abhängig. Die Reibung im Zustand der Ruhe ist gröfser als die Reibung, welche stattfindet, wenn die Last einmal in Bewegung gesetzt ist; die letztere ist, aufser für sehr geringe Geschwindigkeiten [bis 3 mm in der Sekunde (Thomson)], unabhängig von der Geschwindigkeit.

Ein Körper, der nicht rollen kann, bleibt infolge der Reibung auf einer schiefen Ebene in Ruhe, solange der Neigungswinkel einen gewissen Grenzwert nicht überschreitet. Dieser Grenzwert des Neigungswinkels w, bei welchem der Körper zu gleiten beginnt, kann dazu dienen, den Reibungskoefficienten, d. h. das Verhältnis zwischen Reibung und Druck, zu bestimmen. Es ist nämlich der Druck $L = Q \cos w$, während die Reibung R eben noch hinreicht, um der Komponente $P = Q \sin w$ das Gleichgewicht zu halten, mithin der Reibungskoefficient $\frac{R}{L} = \operatorname{tang} w$. Man nimmt an, dafs bei der Bewegung eines Lastwagens auf guter, ebener Chaussee die Reibung etwa $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$, auf Eisenbahnen aber nur $\frac{1}{200}$ der Last betrage.

Die Triebräder der Lokomotive müssen auf den Schienen, die Treibriemen einer Maschine auf den Wellen oder Riemscheiben mit hinreichender Reibung haften, um das Gleiten zu verhindern.

§ 43. Mechanische Arbeit; Prinzip der Erhaltung der Arbeit; lebendige Kraft. Um eine Last Q auf eine bestimmte Höhe h zu heben, ist eine gewisse Arbeit erforderlich, welche durch das Produkt $Q \cdot h$ gemessen wird. Umgekehrt vermag das Gewicht Q, indem es von der Höhe h herabsinkt, eine gleiche Arbeit zu leisten, z. B. ein gleiches Gegengewicht auf dieselbe Höhe zu heben (§ 47). Die Arbeit, welche erforderlich ist, um 1 Kilogramm auf die Höhe von 1 Meter zu heben, wird ein Kilogrammmeter (kgm) genannt und dient als Einheit bei Vergleichung von Arbeitsgröfsen. Unter der Arbeit einer Kraft versteht man allgemein das Produkt aus der Kraft in den Weg ihres Angriffspunktes.

Im allgemeinen findet stets ein Verbrauch von Arbeit statt, wo ein Körper der Richtung einer auf ihn wirkenden Kraft entgegen bewegt, oder der Widerstand dieser Kraft überwunden werden mufs. Zur Fortbewegung einer Last auf einer horizontalen Ebene ist nur die zur Überwindung der entgegenwirkenden Reibung verbrauchte Arbeit erforderlich. Soll dagegen die Last Q (§ 42) längs einer schiefen Ebene aufwärts bewegt werden, so mufs dabei, abgesehen von der Reibung, der Widerstand der Kraft P überwunden werden, und wenn die Bewegung von B bis C (Fig. 23), also durch die Wegstrecke l stattfinden soll, so ist die dazu erforderliche Arbeit $P \cdot l$. Sollte dieselbe Last Q bis zur Höhe der schiefen Ebene h, oder von A bis C senkrecht emporgehoben werden, so wäre die dazu verbrauchte Arbeit $Q \cdot h$. Nach § 42 ist aber $P \cdot l = Q \cdot h$, oder die Arbeit ist in beiden Fällen die gleiche. Wird die Last Q, wie in Fig. 23 angedeutet, durch ein herabsinkendes Gewicht P auf der schiefen Ebene emporgezogen, so ist die durch das Herabsinken des Gewichts gewonnene Arbeit Pl gleich der zum Emporheben der Last verbrauchten Arbeit Qh. Es ist daher, wenn man sich zum Heben einer Last einer schiefen Ebene bedient, zwar eine geringere Kraft zur Bewegung der Last erforderlich, da aber der zu durchlaufende Weg genau in demselben Verhältnis sich vergröfsert, in welchem die erforderliche Kraft sich verringert, so findet weder ein Gewinn noch ein Verlust an Arbeit statt. Dieser wichtige Satz, welcher nicht nur für die schiefe Ebene, sondern in entsprechender Weise für alle anderen einfachen und zusammengesetzten Maschinen gilt, ist unter dem Namen des Prinzips der Erhaltung der Arbeit bekannt.

Infolge dieses Prinzips ist es nicht möglich, durch irgend eine Kombination von Maschinen einen Arbeitsgewinn ohne entsprechenden Arbeitsverbrauch zu erzielen, oder ein sogenanntes Perpetuum mobile herzustellen, welches nicht nur sich selbst im Gange zu erhalten, sondern auch ohne äufsere Triebkraft ins Unbegrenzte Arbeit zu leisten imstande wäre. Inwiefern dieses hier zunächst nur für mechanische Kräfte aufgestellte Prinzip auch auf diejenigen Maschinen Anwendung findet, welche durch Wärme, wie z. B. die Dampfmaschinen, durch Elektricität, u. s. w. in Bewegung gesetzt werden, wird unten (§§ 241, 344) erörtert werden.

In der Technik pflegt man die Arbeitsleistung der Maschinen nach Pferdekräften zu berechnen, indem man annimmt, dafs eine Pferdekraft in einer Sekunde eine Arbeit von annähernd 75 kgm zu leisten imstande sei. (§ 223.)

Fällt ein Körper, dessen Masse m, dessen Gewicht p also gleich mg ist, von der Höhe h herab, so erlangt derselbe die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ (§ 32). Dieselbe Geschwindigkeit erlangt der Körper beim Herabgleiten von einer schiefen Ebene, deren Höhe h ist (§ 41), wenn kein Geschwindigkeitsverlust durch Reibung stattfindet. Die in beiden Fällen gewonnene Arbeit wird durch das Produkt $p.h$ dargestellt. Dieselbe ist verbraucht worden, um der Masse m die Geschwindigkeit v zu erteilen. Umgekehrt würde diese Geschwindigkeit hinreichen, um den Körper wieder bis zur Höhe h emporzutreiben (§ 33), oder die Masse m ist infolge der erlangten Geschwindigkeit fähig, die Arbeit $p.h$ zu leisten. Es ist aber

$$2gh = v^2,$$

mithin

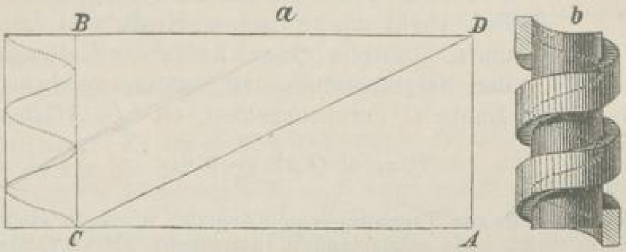
$$p.h = mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Man kann daher sagen, dafs, um der Masse m die Geschwindigkeit v zu erteilen, eine Arbeitsgröfse gleich $\frac{1}{2}mv^2$ erforderlich sei, und dafs umgekehrt die Masse m, welche sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, infolge derselben eine gleiche Arbeit zu leisten fähig ist. — Das halbe Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit, $\frac{1}{2}mv^2$, wird mit dem Namen der lebendigen Kraft bezeichnet. Beim Herabfallen eines Körpers wird die von ihm geleistete Arbeit als lebendige Kraft gewonnen, beim Emporsteigen wird die lebendige Kraft zur Leistung von Arbeit verbraucht (Prinzip der lebendigen Kräfte). In gleicher Höhe über dem Horizont hat ein Geschofs dieselbe lebendige Kraft. (Vergl. die letzte Gleichung in § 35a).

Zur Fortbewegung eines Körpers auf einer horizontalen Ebene wird wegen der dabei stattfindenden Reibung eine Arbeitsmenge verbraucht, ohne dafs gleichzeitig ein entsprechender Gewinn an Arbeit stattfindet. Dieser Arbeitsverbrauch bei der Reibung findet seine Erklärung in der Wärmelehre (§ 241).

§ 44. Die Schraube. Denkt man sich ein Rechteck $ABDC$ (Fig. 24a) um einen geraden Kreiscylinder gewunden, so bildet die Diagonale CB auf der Cylinderfläche eine in schiefen Windungen ansteigende Schraubenlinie. Eine Windung der Schraubenlinie heifst ein Schraubengang, der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen die Höhe eines Schraubenganges. Die Höhe eines Schraubenganges steht zu seiner Länge in demselben Verhältnis, wie im rechtwinkligen Dreieck ABC die Kathete AB zur Hypotenuse CB. Wird nun auf die Windungen der Schraubenlinie ein rechteckiger Wulst aufgesetzt (Fig. 24b), indem etwa ein kleineres Rechteck so bewegt wird, dafs die eine Seite mit einer Seite des Cylinders zusammenfällt und ihr Mittelpunkt die Schraubenlinie beschreibt, während die Ebene des Rechtecks fortdauernd durch die Axe des Cylinders geht, so entsteht eine Schraubenspindel. Ein den erhabenen

Fig. 24a.



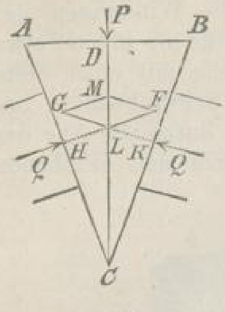
Windungen der Schraubenspindel entsprechendes, vertieftes Schraubengewinde auf der Innenfläche eines Hohlcylinders eingeschnitten, so dafs Wulst und Vertiefung genau in einander passen, bildet die Schraubenmutter. Bei jeder Umdrehung der Schraubenspindel in der feststehenden Schraubenmutter wird die erstere um die Höhe eines Schraubenganges in der Richtung ihrer Axe verschoben, und es kann mittelst einer Kraft, die am Umfang der Schraubenspindel oder eines an ihr angebrachten Knopfes wirkt, ein Druck in der Richtung der Axe der Schraubenspindel ausgeübt, oder eine an derselben aufgehängte Last gehoben werden. Das Gleiten der Windungen der Schraubenspindel auf denen der Schraubenmutter kann mit der Bewegung einer Last auf einer schiefen Ebene verglichen werden, so dafs mit einer gegebenen Kraft eine um so gröfsere Last gehoben, oder ein um so gröfserer Druck in der Richtung der Axe ausgeübt werden kann, je kleiner die Höhe im Verhältnis zur Länge eines Schraubenganges, oder zum Umfang der Schraube ist.

Es ist jedoch zu bemerken, dafs erstens die Kraft in der Regel nicht am Umfange der Schraubenspindel selbst, sondern an einem Schraubenkopf von gröfserem Durchmesser, oder an einem mit der Schraubenspindel verbundenen Hebel wirkt, weshalb bei Beurteilung der Wirkung der Schraube auch die Gesetze des Hebels (§ 49) in Betracht zu ziehen sind, und dafs andererseits die Reibung beim Gebrauch der Schraube von grofsem Einflufs zu sein pflegt.

Anwendung der Schraube bei Pressen, zur Befestigung, ferner zur Erzeugung feiner Bewegungen und zur Messung sehr kleiner Gröfsen, als Mikrometerschraube; Sphärometer.

§ 45. Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Querschnitt (in der Regel) ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Die von den gleichen Seitenflächen AC und BC gebildete Kante C (Fig. 25) heifst die Schneide, die gegenüberliegende Fläche AB der Rücken des Keils. Wirken auf die Seitenflächen des Keils in H und K gleiche Druckkräfte, so kann man sich die Angriffspunkte derselben nach dem auf der Mittellinie CD gelegenen Punkt L verlegt denken. Die beiden Kräfte LF und LG können dann durch eine Resultierende LM ersetzt werden, welche durch eine gleich grofse und entgegengesetzte Kraft, die senkrecht gegen den Rücken des Keils wirkt, im Gleichgewicht gehalten wird. Dasselbe gilt für die auf je zwei andere, symmetrisch gelegene Punkte der Seitenflächen wirkenden Druckkräfte. Ist Q der gesamte Druck auf jede der beiden Seitenflächen, P die auf den Rücken des Keils wirkende Kraft, so hat man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke LMG und ABC

Fig. 25.



$$P : Q = AB : BC$$

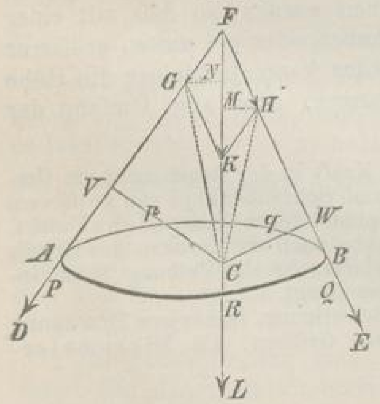
oder, die Kraft verhält sich zur Last, wie die Breite des Rückens zur Seitenlinie des Keils. Das Verhältnis zwischen Kraft und Last ist daher um so günstiger, je schärfer der Keil, oder je kleiner der Neigungswinkel ist, unter welchem die Seitenflächen sich in der Kante C durchschneiden, ist $\angle ACB = \gamma$, so ist

$$P = 2\, Q \sin \frac{1}{2} \gamma.$$

Der Keil dient teils zur Trennung von Körpern, wie beim Holzspalten, teils zum Zusammenpressen. Alle schneidenden Instrumente (Messer, Meifsel u. s. w.) wirken als Keile. Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Arbeit (§ 43) auf den Keil. — Die sogenannte Kniepresse ist in ihrer Wirkungsweise dem Keil ähnlich.

§ 46. **Gleichgewicht eines um eine feste Axe, um einen festen Punkt drehbaren Körpers.** Ein um eine feste Axe drehbarer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte sich durch eine Resultierende ersetzen lassen, welche durch die Umdrehungsaxe geht. In diesem Falle wird nämlich die Resultierende durch den Widerstand der festen Axe aufgehoben. Wirkt eine einzige Kraft auf den Körper, so mufs die Richtung derselben die Umdrehungsaxe schneiden. — Ist ein Körper **um den festen Punkt** C (Fig. 26) drehbar, und sind A und B die Angriffspunkte zweier Kräfte, **deren Richtungen nebst dem Umdrehungspunkte** C **in einer Ebene liegen**, und befinden sich diese Kräfte im Gleichgewicht, so kann man sich (§ 39), ohne das Gleichgewicht zu stören, die Angriffspunkte beider Kräfte nach dem Durchschnittspunkt ihrer Richtungen F verlegt denken, indem man sich den Punkt F mit dem Körper fest verbunden denkt. Ist demnach

Fig. 26.



$FG = P$, $FH = Q$, so stellt die Diagonale FK des zwischen beiden konstruierten Parallelogramms die Resultierende beider Kräfte dar. Die Verlängerung dieser Diagonale mufs also, wenn Gleichgewicht bestehen soll, durch den Punkt C gehen. Fällt man von C aus auf die Richtungen der beiden Kräfte die Lote p und q und zieht aufserdem die Geraden CG und CH, so ist $\triangle\ CGF = \frac{1}{2}\ Pp$, $\triangle\ CHF = \frac{1}{2}\ Qq$. Diese beiden Dreiecke sind aber flächengleich, da sie, wenn man FC als gemeinschaftliche Grundlinie betrachtet, gleiche Höhe haben. Mithin ist

$$Pp = Qq$$

oder

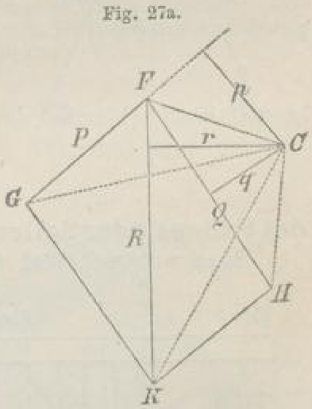
$$P : Q = q : p.$$

Es müssen also die Kräfte P und Q, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, im umgekehrten Verhältnis der vom Umdrehungspunkt auf ihre Richtungen gefällten Lote stehen, oder die Produkte aus den Kräften und den entsprechenden Loten müssen einander gleich sein. Man nennt diese Produkte die statischen Momente der beiden Kräfte in Beziehung auf den Umdrehungspunkt, wonach die angegebene Gleichgewichtsbedingung kürzer so lautet, dafs die statischen Momente beider Kräfte in Beziehung auf den Umdrehungspunkt einander gleich sein müssen.

Über den besonderen Fall, dafs die Richtungen beider Kräfte parallel sind, vergleiche § 49a.

Anmerkung 1. Es sei ein Parallelogramm $FGHK$ (Fig. 27a und b) und in der Ebene desselben ein beliebiger Punkt C gegeben. Auf die Seiten $FG = P$, $FH = Q$ und auf die Diagonale $FK = R$ seien von C aus die Lote p, q, r gefällt, und aufserdem sei C mit den vier Eckpunkten des Parallelogramms verbunden, so ist

Fig. 27a.



$$\triangle\ FCG = \frac{1}{2}\ Pp,\ \triangle\ FCH = \frac{1}{2}\ Qq,$$

$$\triangle\ FCK = \frac{1}{2}\ Rr.$$

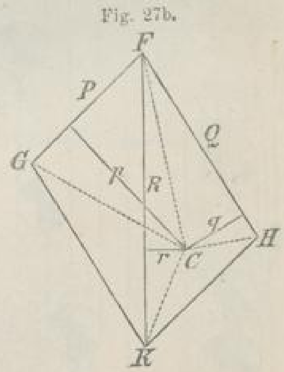
Es ist leicht zu erweisen, dafs das letztere Dreieck gleich der Summe oder der Differenz der beiden ersten ist, je nachdem der Punkt C aufserhalb oder innerhalb des von den Geraden FG und FH eingeschlossenen Winkelraumes liegt. (Betrachtet man nämlich FC als gemeinschaftliche Grundlinie der Dreiecke, so überzeugt man sich leicht, dafs das von K aus auf FC oder ihre Verlängerung gefällte Höhenlot im ersten Fall gleich der Summe, im letzten gleich dem Unterschied der von G und H aus gefällten Lote ist.) Es ist daher im ersten Fall

$$Rr = Pp + Qq,$$

im zweiten Fall

$$Rr = Pp - Qq.$$

Fig. 27b.



Stellen also P und Q zwei Kräfte vor, welche auf einen um C drehbaren Körper wirken, so ergiebt sich der Satz:

Das statische Moment der Resultierenden zweier Kräfte in Beziehung auf den Umdrehungspunkt ist gleich der Summe oder Differenz der statischen Momente der Komponenten, je nachdem beide Kräfte eine Drehung des Körpers in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne zu bewirken streben.

Wirken auf einen um C drehbaren Körper beliebig viele Kräfte, deren Angriffspunkte und Richtungen mit C in einer Ebene liegen, so ist zum Gleichgewicht erforderlich, dafs die Summe der statischen Momente der Kräfte, welche den Körper in einem Sinne zu drehen streben, gleich sei der Summe der statischen Momente der in entgegengesetztem Sinne wirkenden Kräfte. In diesem Fall ist nämlich das statische Moment der Resultierenden sämtlicher Kräfte gleich Null, d. h. die Resultierende ist entweder selbst gleich Null, oder sie geht durch den Umdrehungspunkt und wird durch den Widerstand des festen Punktes aufgehoben. Giebt man den Momenten entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem sie einer Drehung nach rechts oder links entsprechen, so kann man die Gleichgewichtsbedingung noch kürzer aussprechen: die algebraische Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf den Umdrehungspunkt mufs gleich Null sein.

Anmerkung 2. Es ist leicht zu erweisen, dafs das Prinzip der Erhaltung der Arbeit (§ 43) bei allen auf das Gleichgewicht eines drehbaren Körpers bezüglichen Fällen seine Gültigkeit behält. Denkt man sich den Körper um einen kleinen Winkel α gedreht, so läfst sich zeigen, dafs $\alpha . Pp$ die dabei von der Kraft P geleistete Arbeit ausdrückt, mithin besagt obige Gleichgewichtsbedingung, dafs die Summe der bei der Drehung gewonnenen Arbeit gleich der Summe der verbrauchten Arbeit ist.

§ 47. Die Rolle ist eine kreisrunde Scheibe (Fig. 28), welche um eine durch ihren Mittelpunkt C gehende, feste Axe drehbar ist, und um deren Umfang ein biegsamer Faden geschlungen ist. Die Kräfte P und Q, welche die Rolle zu drehen streben, wirken an den Enden des Fadens oder Seiles, also in der Richtung der Tangenten AP, BQ. Da die vom Umdrehungspunkt C auf die Richtungen der Kräfte gefällten Lote CA, CB als Radien eines Kreises einander gleich sind, so ist die zum Gleichgewicht erforderliche Bedingung (§ 46), dafs die an beiden Enden des Fadens oder Seiles wirkenden Kräfte einander gleich seien.

Fig. 28.

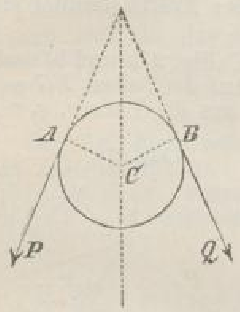
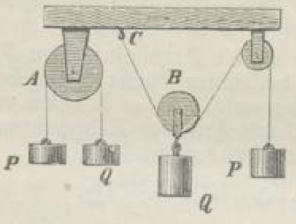
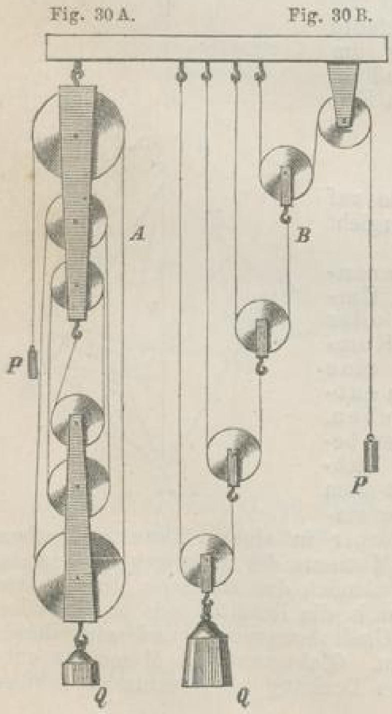


Fig. 29.



Man unterscheidet feste und bewegliche Rollen. Bei der festen Rolle (Fig. 29 A) ist die Umdrehungsaxe unverrückbar befestigt, die Kraft P wirkt an dem einen, die Last Q an dem anderen Ende des um die Rolle geschlungenen Seiles. Dieselbe kann daher nicht dazu dienen, an Kraft zu sparen, wohl aber die Richtung der Kraft auf zweckmäfsige Weise abzuändern. Bei der beweglichen Rolle dagegen (Fig. 29 B) ist die Last Q an der Axe der Rolle aufgehängt. Das eine Ende des um die Rolle geschlungenen Seiles ist bei C unverrückbar befestigt, während am anderen Ende des Seiles die Kraft P entweder unmittelbar oder, wie in der Figur angedeutet, mit Hilfe einer zweiten, festen Rolle wirkt. Durch die Befestigung des Seiles bei C wird eine gleich grofse, in diesem Punkte an dem Seile wirkende Kraft ersetzt. Die Last Q mufs im Fall des Gleichgewichts der Resultierenden der an beiden Enden des Seiles wirkenden Kräfte gleich sein. Im günstigsten Fall, wenn nämlich beide Teile des Seiles parallel sind, ist $Q = 2\,P$,

Fig. 30 A. Fig. 30 B.



oder die zur Erzielung des Gleichgewichts erforderliche Kraft gleich der Hälfte der Last.

Über die Zusammensetzung paralleler Kräfte vergl. unten § 49a.

Eine Verbindung mehrerer, teils fester, teils beweglicher Rollen, welche häufig zum Heben von Lasten gebraucht wird, heifst ein Flaschenzug. Der gemeine Flaschenzug (Fig. 30 A) besteht aus gleich vielen festen und beweglichen Rollen, welche in einem festen und einem beweglichen Kloben vereinigt sind. Beide Kloben sind unter einander durch ein Seil verbunden, von welchem das eine Ende an dem unteren Ende des festen Klobens befestigt, und welches dann der Reihe nach um je eine Rolle des beweglichen und des festen Klobens geschlungen ist. Die Last Q ist am beweglichen Kloben aufgehängt, die Kraft P wirkt am freien Ende des Seiles. Da im Fall des Gleichgewichts alle Teile des Seiles gleich stark gespannt sein müssen, so verteilt sich die Last gleichmäfsig auf so viel parallele Seile, als zusammen feste und bewegliche Rollen vorhanden sind, oder wenn jeder Kloben n Rollen enthält, so vermag ein Gewicht von 1 kg eine Last von $2n$ kg im Gleichgewicht zu erhalten.

Der Potenzflaschenzug besteht aus einer festen und mehreren beweglichen Rollen, die unter einander auf die in Fig. 30 B angedeutete Weise verbunden sind. Es ist klar, dafs die unterste Rolle mit dem ganzen Gewicht der Last Q, die nächste nur mit $\frac{1}{2}\,Q$, die folgende mit $\frac{1}{4}\,Q$, u. s. w. belastet ist, dafs also im allgemeinen, wenn n bewegliche Rollen vorhanden sind, ein Gewicht von 1 kg hinreicht, um eine Last von 2^n kg im Gleichgewicht zu erhalten. Daher der Name Potenzflaschenzug. — Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Arbeit auf den gemeinen und den Potenzflaschenzug.

§ 48. Das Wellrad. Sind zwei Rollen von verschiedenem Durchmesser auf einer gemeinsamen Axe befestigt (Fig. 31), und sind um dieselben zwei Seile in entgegengesetzter Richtung geschlungen, an welchen die Gewichte P und Q aufgehängt sind, so müssen beide Gewichte, damit Gleichgewicht bestehe, im umgekehrten Verhältnis der Halbmesser beider Rollen stehen (§ 46).

Fig. 31.

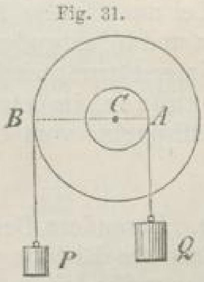
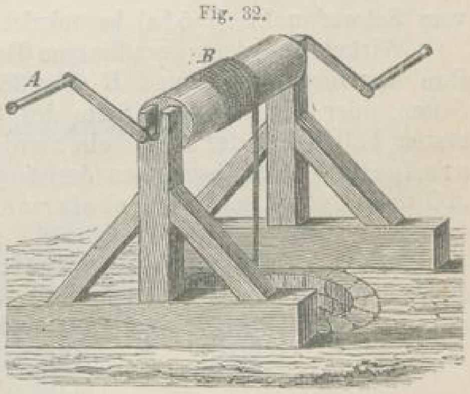


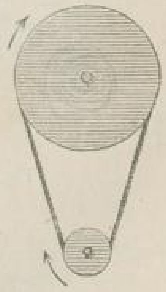
Fig. 32.



Bei der Winde (Fig. 32) wirkt die Kraft am Ende A eines mit der Welle B verbundenen Hebels, während die Last an einem um die Welle geschlungenen Seile aufgehängt ist.

Fig. 33.

Fig. 34.



Verbindungen von Rädern von verschiedenem Durchmesser werden beim Getriebe der Uhrwerke und anderer zusammengesetzten Maschinen vielfach angewendet, um teils das Verhältnis zwischen Kraft und Last, teils das Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeiten beliebig abzuändern. Dieses geschieht entweder, indem man die auf verschiedenen Axen befestigten Räder mittelst am Umfange angebrachter Zähne in einander greifen läfst (Fig. 33), oder indem man einen Treibriemen um zwei Wellen oder Riemscheiben von verschiedenem Durchmesser legt (Fig. 34). Die

Umdrehungsgeschwindigkeiten beider Räder oder Wellen stehen dann im umgekehrten Verhältnis ihres Umfanges, beziehungsweise der Anzahl der in einander greifenden Zähne.

§ 49. Der Hebel. Man nennt eine unbiegsam und gewichtslos gedachte, um einen festen Punkt drehbare gerade Linie einen mathematischen Hebel. Ein physischer Hebel ist eine der Schwere unterworfene Stange, oder im allgemeinen ein beliebig gestalteter, fester Körper, der sich unter dem Einfluſs gegebener Kräfte um einen festen Unterstützungspunkt oder eine feste Axe drehen kann. Die allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht zweier Kräfte am Hebel ist in dem oben (§ 46) entwickelten Satze enthalten, daſs die Momente der Kräfte in Beziehung auf den Umdrehungspunkt einander gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt sein müssen. Es bleibt also nur noch übrig, die wichtigsten besonderen Fälle zu betrachten, wobei vorläufig von der Wirkung der Schwere auf die Teile des drehbaren Körpers abgesehen werden soll, da dieselbe erst unten in der Lehre vom Schwerpunkt (§ 51a) berücksichtigt werden kann.

Fig. 35a.

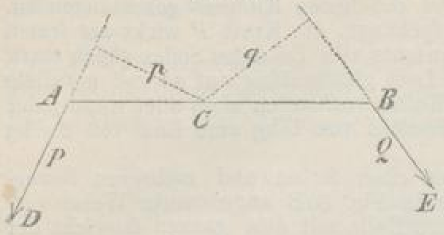
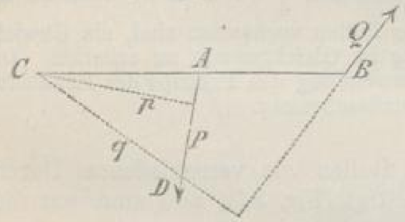


Fig. 35b.



Wirken auf einen geradlinigen Hebel zwei Kräfte P und Q, so können ihre Angriffspunkte A und B (Fig. 35a und b) entweder auf verschiedenen Seiten, oder auf derselben Seite des Unterstützungspunktes C liegen. Im ersten Fall heiſst der Hebel ein zweiarmiger, im letzteren Fall ein einarmiger. Die Entfernungen der Angriffspunkte vom Unterstützungspunkt AC und BC heiſsen die Hebelarme.

§ 49a. Fall paralleler Kräfte. Besondere Berücksichtigung verdient der häufig vorkommende Fall, daſs die Richtungen aller an einem Hebel angreifenden Kräfte einander parallel sind. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Kräfte durch Gewichte erzeugt werden, die an verschiedenen Punkten des Hebels aufgehängt sind, mithin sämtlich in vertikaler Richtung wirken. Wirken an dem geradlinigen Hebel ACB (Fig. 36a und b) die parallelen Kräfte P und Q, so fallen die vom Unterstützungspunkt C auf die Richtungen beider Kräfte gefällten Lote in eine gerade Linie VCW zusammen. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ACV und BCW hat man dann, wenn die Lote mit p, q, die Hebelarme mit a, b bezeichnet werden, $a : b = p : q$,

Fig. 36a.

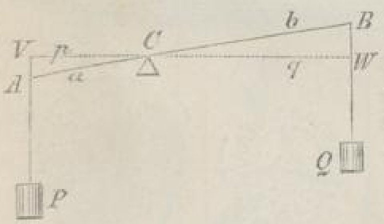
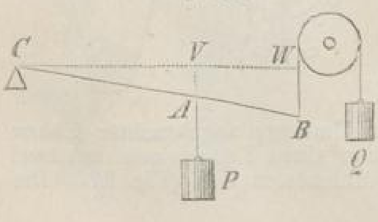


Fig. 36b.



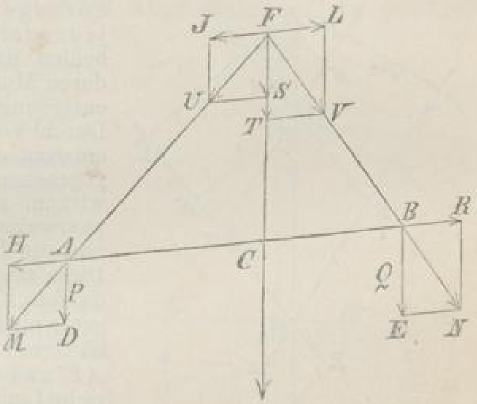
mithin die Bedingung des Gleichgewichts

$$P : Q = b : a$$

oder Kraft und Last müssen im umgekehrten Verhältnis der Hebelarme stehen (Hebelgesetz des *Archimedes*).

Die in § 46 angegebene Konstruktion der Resultierenden, auf welcher der Beweis des Satzes über die statischen Momente beruht, findet auf den Fall paralleler Kräfte keine unmittelbare Anwendung, da ihre Richtungen, unbegrenzt verlängert, sich nicht schneiden. Die *Resultierende paralleler Kräfte*, welche auch die *Mittelkraft der parallelen Kräfte* genannt wird, kann aber leicht durch folgende Betrachtung gefunden werden. Es seien (Fig. 37) A und B die Angriffspunkte der parallelen Kräfte $AD = P$ und $BE = Q$, die am Hebel AB im Gleichgewicht sein sollen, so kann man, ohne das Gleichgewicht zu stören, in den Endpunkten der geraden Linie AB die gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte AH und BK hinzufügen, welche sich gegenseitig aufheben (§ 38). Denkt man sich nun die beiden in A angreifenden Kräfte zu einer Resultierenden AM und die in B angreifenden Kräfte zu einer Resultierenden BN vereinigt, so müssen auch diese im Gleichgewicht sein. Verlegt man ferner die Angriffspunkte beider Resultierenden nach dem Durchschnittspunkt ihrer Richtungen F und denkt sich in diesem Punkte jede der beiden Kräfte wieder durch ihre Komponenten ersetzt, so heben sich die Komponenten FJ und FL als gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf, und es sind die ursprünglich gegebenen Kräfte durch die Summe der Komponenten $FS = P$ und $FT = Q$ ersetzt. Die *Mittelkraft*, welche die gemeinsame Wirkung der parallelen Kräfte P und Q ersetzt, ist also gleich der *Summe* (oder im Fall entgegengesetzt paralleler Kräfte gleich dem *Unterschied*) beider. Die Richtung der Mittelkraft ist der Richtung der gegebenen Kräfte parallel. Die Bedingung des Gleichgewichts ist, daß der Unterstützungspunkt des Hebels auf der Geraden FC liege. Ist der Hebel ein geradliniger, so muß C der Unterstützungspunkt sein. Da US und TV parallel AB sind, so ist

Fig. 37.



$$AC : CF = US : SF$$
$$BC : CF = VT : TF$$

mithin, da $US = VT$ ist, $AC \,.\, SF = BC \,.\, TF$, oder

$$AC : BC = Q : P,$$

d. h. die Hebelarme müssen im umgekehrten Verhältnis der Kräfte stehen.

Die Mittelkraft $P + Q$ giebt den Druck an, welchen der Unterstützungspunkt des Hebels zu erleiden hat. Bringt man in C (Fig. 38) eine Kraft R an, welche der Mittelkraft der beiden Kräfte P und Q gleich und entgegengesetzt gerichtet ist, so sind die Kräfte P, Q, R an der Geraden AB im Gleichgewicht, und es ist

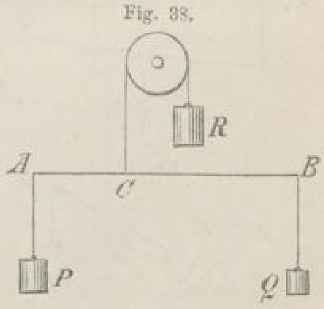
$$AC : BC = Q : P,$$

woraus ferner folgt:

$$AC + BC : BC = P + Q : P$$

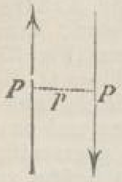
oder
$$AB : BC = R : P$$
und
$$AB : AC = R : Q.$$

Fig. 38.



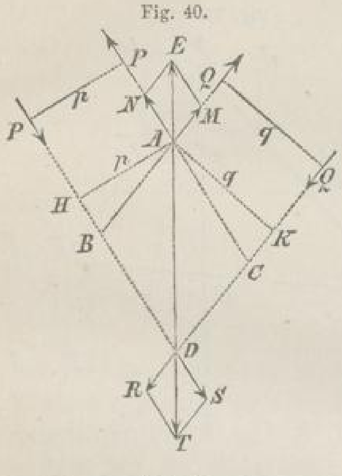
§ 50. *Kräftepaare.* (*Poinsot*, 1804). Sind die Kräfte P, Q, R (Fig. 38) an der Geraden AB im Gleichgewicht, so ist jede derselben der Resultierenden der beiden anderen entgegengesetzt gleich. Es ist also z. B. B der Angriffspunkt der Resultierenden der Kräfte P und R. Da $AB : BC = R : P$ ist (§ 49a), so wird sich das Verhältnis $AB : BC$ um so mehr der Einheit nähern, je weniger R und P von einander an Größe verschieden sind. Denkt man sich die Gerade AB ins Unbegrenzte verlängert, so wird der Angriffspunkt B immer weiter hinausrücken und sich über jede angebbare Grenze entfernen, wenn $R = P$ wird. Es läfst sich also in diesem Fall eine Resultierende, welche beide Kräfte in ihrer Wirkung ersetzt, oder eine dritte Kraft, welche beide im Gleichgewicht hält, nicht mehr angeben. *Zwei gleiche, parallel aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche in verschiedenen Punkten eines völlig frei beweglichen, festen Körpers angreifen, können demnach nicht durch eine Resultierende ersetzt, daher auch nicht durch eine einzige dritte Kraft im Gleichgewicht gehalten werden.* Ein System zweier solchen gleichen und entgegengesetzt parallelen Kräfte PP (Fig. 39) heifst ein *Kräftepaar*. Der Abstand p ihrer parallelen Richtungslinien heifst der *Hebelarm*, das Produkt aus Kraft und Hebelarm Pp das *Moment*, eine auf der Ebene der beiden Kräfte senkrechte Gerade die *Axe* des Kräftepaares.

Fig. 39.



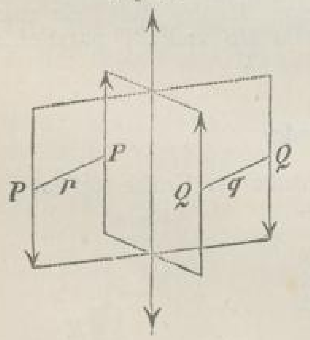
Zwei in einer Ebene wirkende Kräftepaare, deren Momente gleich grofs und entgegengesetzt sind, halten einander jederzeit im Gleichgewicht. Es seien die beiden Kräftepaare Pp, Qq (Fig. 40) gegeben, deren Momente einander gleich seien, die jedoch entgegengesetzte Drehrichtung haben mögen. Durch Verlängerung der Richtungen der Kräfte entsteht das Parallelogramm $ABCD$. Da die vier gegebenen Kräfte an demselben festen Körper wirken, so darf man sich ihre Angriffspunkte paarweise nach A und nach D verlegt denken und die Resultierenden AE und DT aufsuchen. Diese sind gleich und entgegengesetzt gerichtet, da ihre Komponenten, einzeln verglichen, gleich grofs sind und gleiche Winkel einschliefsen. Es ist ferner leicht zu beweisen, dafs ihre Richtungen AE und DT mit der Diagonale AD in eine gerade Linie fallen. Fällt man nämlich von A aus die Lote AH und AK, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABH und ACK, dafs $AB : AC = p : q$, und da nach Voraussetzung $Pp = Qq$ ist, $AB : AC = Q : P$. Es ist mithin Parallelogramm $ABCD$ ähnlich den kongruenten Parallelogrammen $AMNE$ und $DRST$. Also fallen die Diagonalen EA, AD, DT in eine gerade Linie, und die entgegengesetzt gleichen Kräfte AE und DT sind im Gleichgewicht, was zu beweisen war.

Fig. 40.



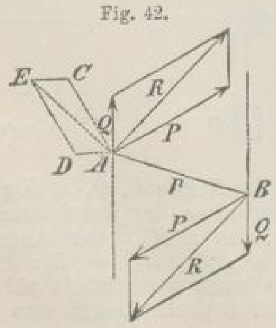
Es folgt daraus, dafs jedes Kräftepaar durch ein gleiches, beliebig in derselben Ebene gelegenes Kräftepaar ersetzt werden kann. Zwei in einer Ebene wirkende Kräftepaare können jederzeit durch ein drittes ersetzt werden, dessen Moment gleich der Summe oder der Differenz ihrer Momente ist, je nachdem beide in gleichem oder entgegengesetztem Sinne wirken.

Fig. 41.



Es lassen sich ferner folgende Sätze über die Kräftepaare erweisen. *Zwei entgegengesetzt gleiche, in parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare heben einander auf* (Fig. 41).

Fig. 42.

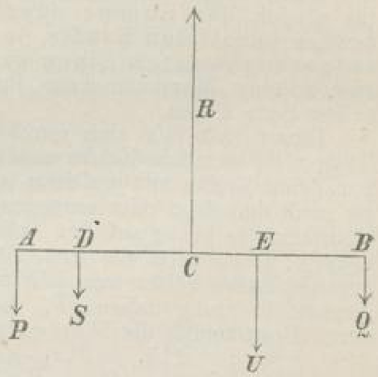


Zwei Kräftepaare, deren Ebenen und Axen unter einem beliebigen Winkel gegen einander geneigt sind, können durch ein resultierendes Kräftepaar ersetzt werden; indem man auf den Axen beider Kräftepaare ihren Momenten proportionale Strecken aufträgt. Die Diagonale des aus beiden konstruierten Parallelogramms giebt die Axe und das Moment des resultierenden Kräftepaars an. (In Fig. 42 stellt AB den in der Durchschnittskante beider Ebenen liegenden gemeinschaftlichen Hebelarm der Kräftepaare PP, QQ dar. AC, AD, AE sind die Axen der beiden gegebenen und des resultierenden Kräftepaars RR, welche auf ihren Ebenen senkrecht sind.) Kräftepaare können daher nach denselben Gesetzen wie einfache Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden.

Mit Hilfe der Theorie der Kräftepaare ist es leicht, die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts der an einem festen Körper angreifenden Kräfte abzuleiten, worauf hier aus Mangel an Raum verzichtet werden mufs.

§ 51. Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wirken auf eine starre Gerade AB (Fig. 43) beliebig viele parallele und gleich gerichtete Kräfte P, Q, S, ... in den Punkten A, B, D, ..., so können dieselben durch ihre Mittelkraft ersetzt werden, welche gleich der Summe der Kräfte $P + Q + S + \ldots$ ist, und deren Angriffspunkt C so gewählt werden mufs, dafs die Summe der Produkte aus Kräften und Hebelarmen auf beiden Seiten gleich grofs ist. Ist die Gerade im Punkt C unterstützt, oder fügt man eine der Mittelkraft entgegengesetzt gleiche Kraft R hinzu, so bleibt die Gerade in jeder Lage im Gleichgewicht. Da die Lage des Punktes C nur von dem Gröfsenverhältnis und der Lage der Angriffspunkte der Kräfte P, Q, u. s. w. abhängt, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn die Gerade beliebig um den Punkt C gedreht wird, wofern nur die Kräfte unter sich parallel und ihre Gröfse und Angriffspunkte unverändert bleiben. Der Punkt C heifst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. In gleicher Weise läfst sich, wenn beliebig viele parallele Kräfte auf die verschiedenen Punkte eines festen Körpers wirken, stets ein Punkt angeben, in welchem unterstützt der Körper in jeder Lage im Gleichgewicht bleibt.

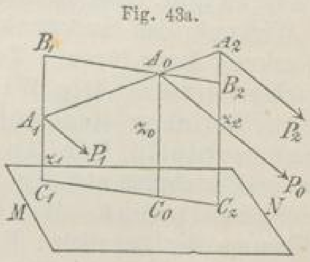
Fig. 43.



Bestimmung der Lage des Mittelpunktes paralleler Kräfte durch Rechnung. Es handle sich zunächst um zwei gleichgerichtet parallele Kräfte P_1 und P_2, deren Angriffspunkte A_1 und A_2 von einer gegebenen Ebene MN die Entfernungen z_1 und z_2 haben mögen, und es sei der auf A_1A_2 liegende Angriffspunkt A_0 der Mittelkraft P_0 zu bestimmen, d. h. die Entfernung z_0 des Punktes A_0 von der Ebene MN. Die drei Lote z_1, z_0, z_2 liegen in der Projektionsebene der Linie $A_1A_0A_2$ auf MN, die Projektion sei $C_1C_0C_2$ und es sei $B_1A_0B_2$ parallel $C_1C_0C_2$ gezogen. Weil P_0 die Mittelkraft ist von P_1 und P_2, so ergiebt sich (§ 49a):

$$P_1 \cdot A_1A_0 = P_2 \cdot A_2A_0,$$

Fig. 43a.



und weil vermöge der ähnlichen Dreiecke $A_0A_1B_1$ und $A_0A_2B_2$ sich verhält wie $A_1A_0 : A_2A_0 = A_1B_1 : A_2B_2$, so ist auch:

$$P_1 \cdot A_1B_1 = P_2 \cdot A_2B_2, \text{ d. h. } P_1\,(z_0 - z_1) = P_2\,(z_2 - z_0),$$

oder

$$P_0 z_0 = P_1 z_1 + P_2 z_2, \text{ wo } P_0 = P_1 + P_2.$$

Sind die Kräfte P_1 und P_2 entgegengesetzt parallel und etwa $P_2 > P_1$, so ergiebt sich für den Angriffspunkt A_0 ihrer Mittelkraft $P_0 = P_2 - P_1$ auch hier, wie die Fig. 43b zeigt, die unter denselben Voraussetzungen wie Fig. 43a gezeichnet ist:

$$P_1 \,.\, A_1A_0 = P_2 \,.\, A_2A_0 \text{ und } P_1 \,.\, A_1B_1 = P_2 \,.\, A_2B_2,$$

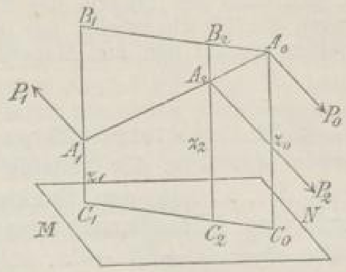
d. h.

$$P_1 \,.\, (z_0 - z_1) = P_2\,(z_0 - z_2),$$

oder:

$$P_0z_0 = P_2z_2 - P_1z_1, \text{ wo } P_0 = P_2 - P_1.$$

Fig. 43b.



In beiden Fällen ist die Lage des Mittelpunktes der parallelen Kräfte unabhängig von der Richtung dieser Kräfte. Denkt man sich also die Kräfte, unter Beibehaltung ihrer parallelen Lage, um ihre Angriffspunkte so gedreht, daſs sie parallel der Ebene MN werden, so sind z_0, z_1, z_2 die Entfernungen der Kräfte P_0, P_1, P_2 von dieser Ebene. Man nennt die Produkte P_0z_0, P_1z_1, P_2z_2 die statischen Momente und z_0, z_1, z_2 die Hebelarme der Kräfte P_0, P_1, P_2 in bezug auf die Ebene MN, die Momentenebene, und hat demnach den Satz:

Das statische Moment der Mittelkraft zweier parallelen Kräfte ist gleich der Summe oder Differenz der statischen Momente der beiden parallelen Kräfte, je nachdem diese Kräfte in gleichem oder entgegengesetztem Sinne wirken, — die statischen Momente bezogen auf eine beliebige Momentenebene, für welche die Angriffspunkte der Kräfte auf derselben Seite liegen.

Dieser Satz läſst sich durch allmähliche Hinzunahme neuer Kräfte auf beliebig viele parallele Kräfte ausdehnen. Sind P_1, P_2, P_3 . . . P_n die gegebenen parallelen Kräfte mit positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem sie nach derselben oder entgegengesetzter Richtung wirken, z_1, z_2, z_3 . . . z_n ihre Hebelarme in bezug auf eine beliebige Momentenebene MN, ebenfalls positiv oder negativ, je nachdem die Angriffspunkte der Kräfte auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von MN liegen, d. h. die Lote z gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, P_0 die Mittelkraft, z_0 ihr Hebelarm, so hat man zu deren Bestimmung die Momentengleichung:

$$P_0z_0 = P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots + P_nz_n,$$

wo

$$P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n.$$

Ausgeschlossen jedoch ist bei dieser Darstellung der Fall, wo P_0, die algebraische Summe der zusammenzusetzenden parallelen Kräfte, gleich Null ist, also wenn es sich schlieſslich um gleiche und entgegengesetzt-parallele Kräfte, ein Kräftepaar (§ 50), handelt. In diesem Falle hat die Momentengleichung keine Bedeutung, weil z_0 dann den Wert unendlich erhält. Es giebt also keine Mittelkraft für parallele Kräfte, deren algebraische Summe gleich Null ist. In der That ist die gemeinschaftliche Wirkung solcher Kräfte eine Drehung.

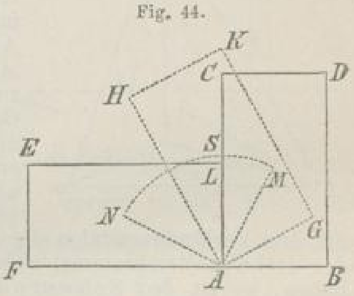
§ 51a. Schwerpunkt; stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht. Alle bekannten Körper bestehen aus Massenteilen, welche der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sind. Die Richtung der Schwerkraft kann für alle Teile eines und desselben Körpers als parallel betrachtet werden. Die Wirkungen der Schwerkraft auf alle einzelnen Teilchen des Körpers können in eine Mittelkraft vereinigt werden. Der Angriffspunkt dieser Mittelkraft, dessen Lage in Beziehung auf den festen Körper eine unveränderliche ist, heiſst der Schwerpunkt, die Gröſse der Mittelkraft, welche gleich der Summe der parallelen Kräfte ist, das Gewicht des Körpers. Man kann sich also das Gewicht aller einzelnen Teile eines festen Körpers in seinem Schwerpunkt vereinigt denken. Wird der Körper in seinem Schwerpunkt unterstützt, so ist derselbe unter dem Einfluſs der Schwerkraft in jeder Lage im Gleichgewicht. Die Unterstützung kann aber auch in einem Punkte stattfinden, welcher in vertikaler Richtung über oder unter dem Schwerpunkt liegt (§ 39). Ersteres ist der Fall bei einer an einem Faden aufgehängten, letzteres bei einer auf einer horizontalen Ebene ruhenden Kugel.

Man unterscheidet stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht. Stabil heifst das Gleichgewicht, wenn der Körper, ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, durch den Einflufs der auf ihn wirkenden Kräfte wieder in dieselbe zurückgeführt wird, labil, wenn derselbe bei einer beliebig kleinen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage nicht in dieselbe zurückkehrt, sondern in eine neue (stabile) Gleichgewichtslage übergeht, indifferent, wenn weder eins noch das andere stattfindet, sondern der Körper auch in der neuen, ein wenig veränderten Lage im Gleichgewicht zu beharren vermag.

Ein um eine feste, horizontale Axe drehbarer, schwerer Körper ist im stabilen, labilen oder indifferenten Gleichgewicht, je nachdem der Schwerpunkt unter, über oder in der Umdrehungsaxe liegt. Eine homogone Kugel ist auf einer Horizontalebene im indifferenten, auf dem höchsten Punkt einer konvexen Fläche im labilen, auf dem tiefsten Punkt einer konkaven Unterlage im stabilen Gleichgewicht. — Beim stabilen Gleichgewicht nimmt der Schwerpunkt die relativ tiefste, beim labilen die relativ höchste Lage ein, beim indifferenten Gleichgewicht bleibt die Höhe des Schwerpunktes durch eine kleine Verschiebung ungeändert.

Ein mit drei Punkten auf einer Horizontalebene ruhender Körper ist im stabilen Gleichgewicht, wenn die durch seinen Schwerpunkt gezogene Vertikallinie die Horizontalebene in einem Punkte trifft, welcher innerhalb des von den Unterstützungspunkten gebildeten Dreiecks liegt. (Welchen Teil der Last hat jeder der drei Stützpunkte zu tragen?) Der Grad der Stabilität des Gleichgewichts kann verschieden sein. Das Gleichgewicht eines vierkantigen Balkens, dessen Querschnitt $ABDC$ (Fig. 44) sei, ist stabiler, wenn derselbe auf der breiten Seitenfläche AF, als wenn er auf der schmalen Fläche AB ruht. Zwischen beiden stabilen Gleichgewichtslagen liegt nämlich die labile Gleichgewichtslage $AGKH$, bei welcher der Schwerpunkt S die höchste Lage einnimmt. Denkt man sich den Balken um die Kante A gedreht, so wird im ersten Fall eine gröfsere Drehung um den Winkel NAS und eine beträchtliche Hebung des Schwerpunktes erforderlich sein, um das Zurückkehren in die anfängliche Lage zu verhindern, während im letzteren Fall die kleinere Drehung MAS schon hinreicht, um den Schwerpunkt senkrecht über die Umdrehungsaxe zu bringen. Aus den Gesetzen der Stabilität ergeben sich praktische Regeln für die Baukunst, das Beladen von Wagen, u. s. w.

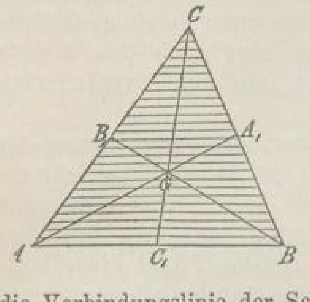
Fig. 44.



§ 52. Schwerpunktsbestimmung. Die Lage des Schwerpunktes eines gegebenen Körpers kann durch den Versuch ermittelt werden, indem man den Körper mittelst eines Fadens nach einander an zwei verschiedenen Punkten aufhängt. Denkt man sich jedesmal die Richtung des Fadens durch den Körper hindurch verlängert, so ist der Durchschnittspunkt der so erhaltenen Richtungen der Schwerpunkt. Derselbe liegt nicht notwendig innerhalb der Masse des Körpers (z. B. bei einem Ring oder einer Hohlkugel). In vielen Fällen kann die Lage des Schwerpunktes regelmäfsig gestalteter Körper durch geometrische Konstruktion oder durch Rechnung gefunden werden.

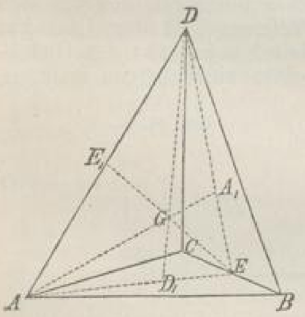
Der Schwerpunkt einer ihrer ganzen Länge nach gleichmäfsig mit Masse belasteten geraden Linie ist ihr Mittelpunkt. — Der Schwerpunkt eines Dreiecks, welches seiner ganzen Fläche nach gleichmäſsig mit Masse belastet ist, ist der Durchschnittspunkt der drei Transversalen, welche die Eckpunkte des Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden. Denkt man sich nämlich die Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 45) durch Parallelen mit einer Seite AB in unendlich schmale Streifen zerlegt, so liegen die Mitten, also auch die Schwerpunkte sämtlicher Streifen, auf der Transversalen CC_1. Denkt man sich demnach das Gewicht jedes Streifens in einem Punkte der Geraden CC_1 vereinigt, so ist klar, daſs der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks auf dieser Transversalen liegen muſs. Dieselbe Betrachtung ist auf jede der beiden anderen Transversalen anwendbar, mithin ist ihr Durchschnittspunkt G der Schwerpunkt des Dreiecks. Die drei Transversalen teilen einander bekanntlich im Verhältnis von 1 : 2.

Fig. 45.



Den **Schwerpunkt eines Vierecks** findet man, indem man sich seine Fläche durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt denkt. Das Gewicht jedes Dreiecks kann man sich dann in seinem Schwerpunkt vereinigt denken, und da die Gewichte den Flächen der Dreiecke proportional sind, so hat man die Verbindungslinie der Schwerpunkte im umgekehrten Verhältnis der Flächen zu teilen. Da die Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke auf doppelte Weise möglich ist, so ergiebt sich daraus eine besonders einfache Konstruktion des Schwerpunktes für das Viereck. Auf ähnliche Weise können die Schwerpunkte aller ebenen Polygone durch Zerlegung in Dreiecke konstruiert werden.

Fig. 45a.



Der **Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide** ist der Durchschnittspunkt der vier Transversalen AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, welche die Ecken der Pyramide mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Flächen verbinden. Diese Transversalen teilen einander im Verhältnis von 1 : 3, und darum ist der Schwerpunkt G von jeder Fläche der Pyramide um $^1/_4$ der zugehörigen Höhe entfernt. — Andererseits liegen die Transversalen zu zwei (wie AA_1 und DD_1) in der Ebene (ADE), welche die zugehörige Kante (AD) und den Mittelpunkt (E) der Gegenkante, also auch die Verbindungslinie (EE_1) der Mittelpunkte zweier Gegenkanten (AD und BC) enthält, in welcher sich zwei solche Ebenen (ADE und BCE_1) durchschneiden; darum liegt der Schwerpunkt selbst auf dieser Verbindungslinie. Weil nun die drei Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenkanten die Diagonalen sind der drei Parallelogramme, welche die Mitten der Kanten der Pyramide zu Ecken haben, so ist der **Schwerpunkt G der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Mittellinien der Gegenkanten, also auf der Mittelebene zwischen jeden zwei Gegenkanten gelegen.**

Da alle ebenflächigen Körper in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden können, so kann der Schwerpunkt jedes **homogenen Polyeders** durch Konstruktion gefunden werden. (§ 52a.)

Der **Schwerpunkt eines Prismas oder Cylinders** ist der Mittelpunkt der die Schwerpunkte der parallelen Grundflächen verbindenden Axe; der **Schwerpunkt eines Kegels oder einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche** liegt auf der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet, um $^1/_4$ der Höhe des Körpers von der Grundfläche entfernt.

§ 52a. **Schwerpunktsbestimmung durch Rechnung.** Es handle sich ausschlieſslich um homogene Körper und um gleichmäſsig belastete Flächen und Linien. Man sucht den Körper, die Fläche oder die Linie, deren Schwerpunkt zu bestimmen ist, als Summe oder Differenz darzustellen von Körpern, Flächen oder Linien, für welche man die Lage des Schwerpunktes kennt, und denkt sich dann in dem Schwerpunkte eines jeden

Teiles das zugehörige Gewicht vereinigt, so bilden diese Gewichte ein System von parallelen Kräften, deren Mittelpunkt (§ 51) der gesuchte Schwerpunkt ist.

1. Der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks. Die Schwerpunkte der drei Seiten sind deren Mittelpunkte, also wird die Momentengleichung, bezogen auf die senkrecht zur Ebene des Dreiecks durch die Seite a gelegte Ebene, wenn h die zugehörige Höhe, b und c die beiden übrigen Seiten sind:

$$(a + b + c) \cdot z_0 = (b + c) \cdot \frac{h}{2}, \text{ d. i. } z_0 = \frac{(b + c)\, h}{2\,(a + b + c)};$$

der Schwerpunkt ist der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises desjenigen Dreiecks, welches durch die Verbindungslinien der Mitten der drei Seiten gebildet wird. (Geometrische Herleitung).

2. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt zunächst auf dem Mittelradius CD; denkt man sich weiter den Bogen $ADB = b$ in sehr viele und sehr kleine Teile $b_1, b_2, b_3, \ldots$ zerlegt, welche als geradlinig anzusehen sind, deren Schwerpunkte also mit ihren Mittelpunkten zusammenfallen, und sind die Entfernungen dieser Punkte von der senkrecht zu CD durch C gelegten Momentenebene bezüglich $z_1, z_2, z_3, \ldots$, so wird die Momentengleichung

$$b z_0 = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + \ldots$$

Sind $EF = b_k$ (Fig. 45b) ein beliebiges Bogenteilchen, E_1F_1 seine Projektion auf A_1B_1, M und M_1 die Mittelpunkte von EF und E_1F_1, ferner HF parallel und gleich $E_1F_1 = p_k$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CMM_1 und EFH, deren Seiten auf einander senkrecht stehen:

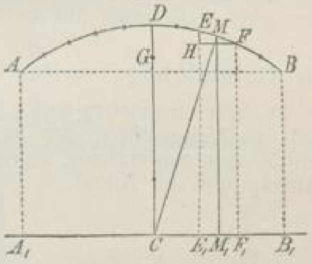
$EF : CM = HF : MM_1$, d. i. $b_k z_k = r p_k$,

folglich wird:

$$b z_0 = r p_1 + r p_2 + r p_3 + \ldots$$
$$= r\,(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) = r \cdot AB,$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes eines Kreisbogens vom Mittelpunkt des Kreises verhält sich zum Radius, wie die Sehne zum Bogen. Für den Halbkreisbogen ist $z_0 = \frac{2r}{\pi}$, nahezu $= {}^2/_3 r$.

Fig. 45b.



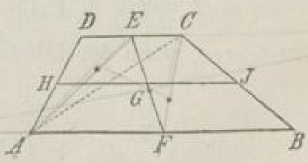
3. Der Schwerpunkt eines Trapezes liegt auf der Verbindungslinie EF der Mittelpunkte der parallelen Seiten (Fig. 45c). Durch die Diagonale AC zerfällt das Trapez in zwei Dreiecke, deren Schwerpunkte von der Mittellinie HJ die Entfernung $\frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$ haben: darum ist die Momentengleichung für die durch HJ senkrecht zur Ebene des Trapezes gelegte Ebene, wenn $a > b$ ist und T der Inhalt des Trapezes:

$$T \cdot z_0 = \left(\frac{ah}{2} - \frac{bh}{2}\right) \cdot \frac{h}{6}, \text{ d. i. } z_0 = \frac{a - b}{a + b} \cdot \frac{h}{6};$$

hieraus ergiebt sich weiter für die Abstände des Schwerpunktes von den beiden parallelen Seiten a und b bezüglich $\frac{(a + 2b)\, h}{3\,(a + b)}$ und $\frac{(b + 2a)\, h}{3\,(a + b)}$, woraus deren Verhältnis und eine einfache Konstruktion des Punktes G leicht herzuleiten sind.

4. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes. Man zerlegt den Ausschnitt durch Teilung des Centriwinkels in sehr viele, einander gleiche Ausschnitte, welche schliefslich als kongruente Dreiecke mit der Höhe r anzusehen sind. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen auf einem concentrischen Kreisbogen mit dem Radius $\frac{2r}{3}$; denkt man sich diesen Bogen mit den Gewichten der Dreiecke gleichmäfsig belastet, so fällt sein Schwerpunkt mit dem des Kreisausschnittes zusammen; es ist also sein Abstand vom Mittelpunkt des Kreises:

Fig. 45c.



$$z_0 = {}^2/_3\, r \cdot \frac{s}{b},$$

wo s und b als Sehne und Bogen dem Kreisausschnitt zugehören. Für den Halbkreis wird $z_0 = \frac{4r}{3\pi}$, nahezu $= {}^2/_5 r$.

5. Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes. Man stellt den Kreisabschnitt als Unterschied dar des zugehörigen Kreisausschnittes und Dreiecks und erhält durch die Momentengleichung für die Entfernung z_0 des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Kreises:

$$z_0 = \frac{s^3}{12 A},$$

wo s die Sehne, A den Inhalt des Kreisabschnittes bezeichnen.

6. Der Schwerpunkt einer Kugelkappe. Die Kugelkappe zerfällt durch Ebenen, welche, senkrecht zur Höhe, diese in gleiche Abschnitte teilen, selbst in gleiche Teile, deren Schwerpunkte auf der Höhe liegen; die Kugelkappe ist also durch die gleichmäfsig belastete Höhe zu ersetzen und darum ist der Mittelpunkt der Höhe zugleich der Schwerpunkt der Kugelkappe.

7. Der Schwerpunkt eines Kugelausschnittes. Man denke sich die zugehörige Kugelfläche mit sehr vielen und kleinen, einander gleichen Dreiecken bedeckt, welche schliefslich als eben anzusehen sind und erweitert Tangentialebenen der Kugel werden, so ergeben diese Dreiecke als Grundflächen mit dem Mittelpunkt der Kugel als gemeinschaftlicher Spitze ebensoviel gleiche Pyramiden mit der Höhe r, deren Schwerpunkte also auf einer concentrischen Kugelkappe vom Radius ${}^3/_4 r$ liegen; denkt man sich diese mit den Gewichten der zugehörigen Pyramiden, also gleichmäfsig belastet, so ist ihr Schwerpunkt zugleich der des Kugelausschnittes, also seine Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel:

$$z_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} h + \frac{3}{4}(r-h) = \frac{3}{8}(2r-h);$$

für die Halbkugel $= {}^3/_8 r$

8. Der Schwerpunkt eines Kugelabschnittes. Der Kugelabschnitt läfst sich als Unterschied des zugehörigen Kugelausschnittes und Kegels darstellen. Die Momentengleichung ergiebt alsdann für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt der Kugel.

$$z_0 = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$$

9. Der Schwerpunkt eines Prismatoids, d. h. eines ebenflächigen Körpers, dessen Ecken in zwei parallelen Ebenen, den beiden Grundflächen, liegen. Die Grundflächen G_1 und G_2 mögen bezüglich n_1 und n_2 Kanten haben, und ihr Abstand, die Höhe des Prismatoids, sei h. Wählt man einen beliebigen Punkt P auf G_2 als Eckpunkt einer Pyramide, deren Grundfläche G_1 ist, und verbindet P mit den Eckpunkten von G_2, so läfst sich das Prismatoid darstellen als Summe einer Pyramide mit der Grundfläche G_1 und der Spitze P und n_2 dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen die Teile der Grundfläche G_2 und deren Spitzen Eckpunkte von G_1 sind. Das Gesamtmoment dieser n_2 Pyramiden, welche alle die gleiche Höhe h besitzen, kommt überein mit dem einer einzigen Pyramide von derselben Höhe h, deren Grundfläche gleich ist der Summe der Grundflächen aller n_2 Pyramiden, d. h. gleich G_2. Endlich bleibt für das Prismatoid noch ein Restkörper übrig, der sich in n_1 dreiseitige Pyramiden zerlegen läfst, von denen je zwei Gegenkanten auf G_1 und G_2 liegen, auf G_1 als die Kanten dieser Grundfläche, auf G_2 als die Verbindungslinien von P mit den Ecken von G_2. Die Schwerpunkte aller dieser n_1 Pyramiden liegen nach § 52 auf der Mittelebene zwischen G_1 und G_2. Es sei $G_1 > G_2$, so ist die Momentengleichung in Beziehung auf die Mittelebene, wenn der Inhalt des Prismatoids durch V bezeichnet wird:

$$V \cdot z_0 = \frac{G_1 h}{3} \cdot \frac{h}{4} - \frac{G_2 h}{3} \cdot \frac{h}{4},$$

und weil $V = \frac{h}{6}(G_1 + 4\,M + G_2)$ ist, wo M den Mittelschnitt des Prismatoids bezeichnet

$$\text{I.} \qquad z_0 = \frac{(G_1 - G_2)\,h}{2\,(G_1 + 4\,M + G_2)};$$

also liegt der Schwerpunkt in der Mittelebene des Prismatoids selbst, wenn die beiden Grundflächen G_1 und G_2 einander gleich sind. Für die abgestumpfte Pyramide, bei welcher $2\sqrt{M} = \sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}$ ist, ergiebt sich hieraus:

$$z_0 = \frac{(G_1 - G_2)\, h}{2\,(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)};$$

ebenso für den abgestumpften Kegel, dessen Grundkreise die Radien r_1 und r_2 haben mögen,

$$z_0 = \frac{(r_1^2 - r_2^2)\, h}{2\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}$$

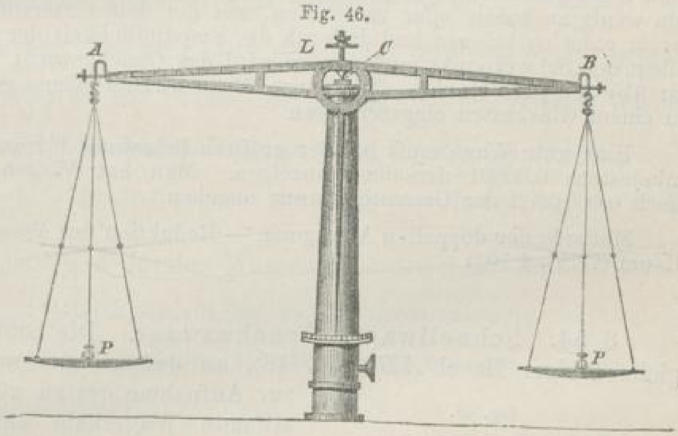
immer bedeutet z_0 den Abstand des Schwerpunktes von der Mittelebene des Körpers, auf der Seite der gröfseren Grundfläche. Ist x_0 der Abstand des Schwerpunktes des Prismatoids von der Grundfläche G_1, so ergiebt sich:

$$\text{II.} \qquad x_0 = \frac{(2\,M + G_2)\, h}{G_1 + 4\,M + G_2}.$$

Anm. Die Formeln I und II lassen sich auch zur Bestimmung des Schwerpunktes von Kugelstücken zwischen Parallelebenen, also auch eines Kugelabschnittes (8.), anwenden, wie sich aus der Vergleichung einer Kugel mit einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder) bei gleichen Parallelschnitten, mit Hilfe des Cavalerischen Prinzipes, ergiebt.

§ 53. Die Wage ist das vorzüglichste Instrument zur Vergleichung der Massen und Gewichte der Körper (§ 11). Ihr wesentlichster Teil, der Wagebalken AB (Fig. 46), ist ein zweiarmiger und gleicharmiger Hebel (§ 49), welcher mittelst einer stählernen Schneide bei C auf einer horizontalen Unterlage ruht. An zwei Endschneiden A und B, welche von der mittleren genau gleichweit entfernt, derselben parallel sein und mit ihr in einer Ebene liegen müssen, sind die beiden Wagschalen aufgehängt. Der Wagebalken soll, wenn beide Schalen mit gleichen Gewichten P belastet sind, in horizontaler Lage in stabilem Gleichgewicht sein. Dazu ist erforderlich, dafs der Schwerpunkt S (Fig. 47) vertikal unter dem Unterstützungspunkt C liege (§ 51).

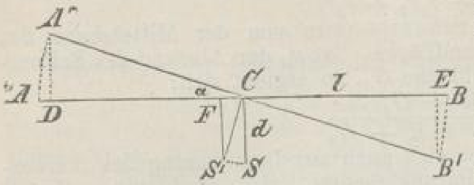
Fig. 46.



Wird auf einer Seite ein Übergewicht p hinzugefügt, so neigt sich der Wagebalken nach der Seite des Übergewichts und geht in die Lage $A'B'$ über. Der Winkel $ACA' = SCS'$, um welchen sich der Wagebalken gedreht hat, heifst der Ausschlagswinkel. Eine geringe Neigung des Wagebalkens wird mittelst eines an demselben befestigten Zeigers, der Zunge, sichtbar gemacht, deren Spitze sich bei genauen Wagen vor einem geteilten Gradbogen (Fig. 46) bewegt. Je gröfser der Ausschlagswinkel für ein gleiches Übergewicht, desto empfindlicher ist die Wage. Die Erfordernisse, welche erfüllt sein müssen, damit die Wage möglichst empfindlich sei, sind, dafs 1) die Länge des Wagebalkens möglichst grofs, 2) sein Gewicht bei hinreichender Festigkeit möglichst klein sei, und dafs 3) der Schwerpunkt möglichst nahe unter dem Unterstützungspunkt liege.

Es bezeichne $2l$ die Länge des Wagebalkens, d die Entfernung des Schwerpunkts S vom Unterstützungspunkt C, P die auf beiden Seiten gleiche Belastung, mit Einschlufs des Gewichts der Wagschalen, p das auf einer Seite hinzugefügte Übergewicht, q das Gewicht des Wagebalkens. Fällt man von A', B', S' auf AB die Lote $A'D$, $B'E$, $S'F$, so ergiebt sich als Bedingung für das Gleichgewicht des Wagebalkens (§ 46) $(P + p) \cdot CE = P \cdot CD + q \cdot CF$ oder da $CD = CE$ ist: $p \cdot CE = q \cdot CF$. Wird der Ausschlagswinkel mit α bezeichnet, so ist $CE = l \cos \alpha$, $CF = d \sin \alpha$, mithin $pl \cos \alpha = qd \sin \alpha$ oder

Fig. 47.



$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{p \cdot l}{q \cdot d}.$$

Bei gleichem Übergewicht p ist also der Ausschlagswinkel um so gröfser, je gröfser die Länge des Wagebalkens l, je kleiner sein Gewicht q und je kleiner die Entfernung d ist. Der Ausschlagswinkel würde von der Gröfse der Belastung P unabhängig sein, wenn der Wagebalken völlig starr wäre. In Wirklichkeit aber erleidet jeder Wagebalken eine geringe, der Belastung proportionale Biegung, durch welche die Entfernung d vergröfsert, mithin die Empfindlichkeit der Wage verringert wird.

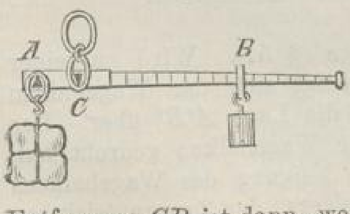
Damit der Wagebalken bei möglichster Leichtigkeit der Biegung hinreichenden Widerstand leiste, giebt man ihm am besten eine schmale, hohe, rhombische Gestalt (Fig. 46) und arbeitet ihn bei genauen Wagen durchbrochen, aus Aluminium. Zur Schonung der Schneide C kann dieselbe, solange die Wage nicht gebraucht wird, durch eine (in der Figur weggelassene) Arretierung vom Lager abgehoben werden. Das Gewichtchen L, welches an einer Schraubenspindel höher und tiefer geschraubt werden kann, dient dazu, den Schwerpunkt des Wagebalkens ein wenig zu heben oder zu senken, um ihn dem Unterstützungspunkt C möglichst nahe zu bringen und dadurch die Empfindlichkeit der Wage zu regulieren. Liegt der Schwerpunkt zu hoch, so wird das Gleichgewicht labil, und die Wage ist überempfindlich. — Die ganze Wage ist zum Schutz gegen Luftströmungen in einem Glaskasten eingeschlossen

Eine gute Wage mufs bei der gröfsten Belastung, für welche sie bestimmt ist, mindestens 0,00001 derselben anzeigen. Man hat Wagen konstruiert, welche noch 0,0000002 der Gesamtbelastung angeben.

Methode der doppelten Abwägung. — Reduktion der Wägungen auf den leeren Raum (vergl. § 103).

§ 54. Schnellwage. Brückenwage. Die Schnellwage ist ein ungleicharmiger Hebel AB (Fig. 48), an dessen kürzerem Arm bei A die zur Aufnahme des zu wägenden Körpers bestimmte Wagschale aufgehängt ist. Der längere Arm ist vom Unterstützungspunkt C aus in gleiche Teile geteilt und auf demselben kann ein Laufgewicht B, das mit einer Schneide auf dem Wagebalken ruht, verschoben werden, bis der Hebel in horizontaler Lage im Gleichgewicht ist. Die Entfernung CB ist dann, wenn C der Schwerpunkt des Hebels ist, der auf die Wagschale gelegten Belastung proportional, und die Gröfse der letzteren kann an der Teilung des Wagebalkens abgelesen werden.

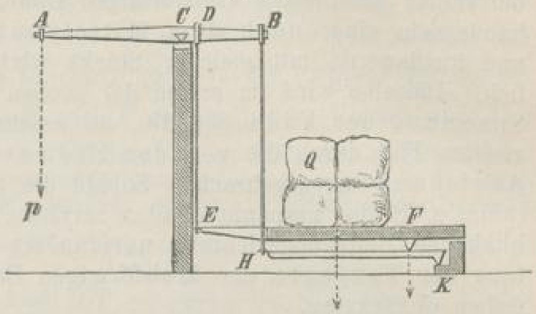
Fig. 48.



Bei feinen chemischen Wagen, z. B. der Mohrschen Wage, ist der eine Arm in 10 gleiche Teile geteilt und läfst sich ein kleines Gewicht, ein Centigramm oder Milligramm, der sogenannte Reiter, an die einzelnen Teilpunkte verschieben. Der Verschiebung um einen Teil entspricht eine Änderung der Belastung um 0,1 des Reiters.

Die **Brückenwage** (Decimalwage, Centesimalwage) dient zum bequemen Abwägen gröſserer Lasten. Die horizontale Brücke EF (Fig. 49) ist mit ihrem vorderen Ende bei E an der vertikalen Stange DE aufgehängt, während das hintere Ende bei F mittelst einer Schneide auf dem einarmigen Hebel KH ruht. Dieser dreht sich um die Schneide K, während sein vorderes Ende an der Stange HB hängt, welche frei durch eine Öffnung in der Brücke EF hindurchgeht und bei B am Wagebalken befestigt ist. Dieser trägt bei A die zur Aufnahme der Gewichte bestimmte Wagschale. Bei unbelasteter Schale und Brücke muſs der Wagebalken AB in horizontaler Lage im Gleichgewicht sein. Die Verhältnisse der Hebelarme sind so gewählt, daſs $CD : CB = KF : KH = 1 : n$ ist. Die in Q auf der Brücke ruhende Last wird teils von der Stange DE, teils von der Schneide F getragen. Ist p der Zug an der Stange, q der Druck auf die Schneide, so ist $Q = p + q$. Die in D am Wagebalken angreifende Kraft p kann (§ 49) durch eine $n$mal kleinere in B wirkende Kraft $\frac{1}{n}p$ ersetzt werden. Ebenso erzeugt der in F auf den Hebel HK wirkende Druck q einen Zug gleich $\frac{1}{n}q$ an der Stange BH, mithin ist die gesamte Wirkung der Belastung Q auf den Wagebalken so groſs, als ob bei B ein Gewicht $\frac{1}{n}p + \frac{1}{n}q = \frac{1}{n}Q$ angehängt wäre. Ist z. B. $n = 5$ und $AC = 2\ CB$, so wird ein Gewicht $\frac{1}{10}Q$ in der Wagschale hinreichen, um die Last Q auf der Brücke im Gleichgewicht zu halten (Decimalwage). Hätte man $n = 10$ und $AC = 10 BC$ gemacht, so wäre bei A nur ein Gewicht $\frac{1}{100}Q$ erforderlich (Centesimalwage).

Fig. 49.



Bei der Hebung und Senkung bleibt die Brücke stets sich selbst parallel. Es ist gleichgültig, in welchem Punkt die Last Q auf der Brücke ruht. — Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Arbeit (§ 43) auf die Brückenwage.

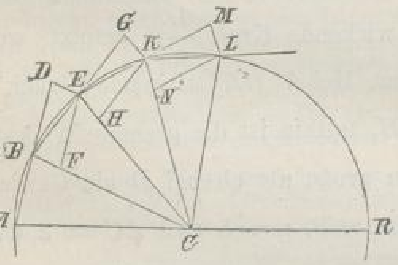
Der Gebrauch der **Federwagen** beruht darauf, daſs die Ausdehnung oder Biegung elastischer Federn innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität (§ 8) dem dehnenden Gewicht proportional ist. Dieselben finden vielfache praktische Anwendung, sind jedoch für genaue Wägungen nicht geeignet und werden durch längeren Gebrauch und zu starke Belastung leicht unrichtig, indem die Feder eine bleibende Dehnung erleidet.

Gesetze der Centralbewegung und Pendelbewegung. Allgemeine Massenanziehung.

§ 55. **Kreisförmige Centralbewegung, Centralkraft.** Die Bewegung eines Körpers, welchem durch irgend eine Ursache eine Geschwindigkeit erteilt worden ist, bleibt eine geradlinige und gleichförmige, solange keine Kraft auf ihn wirkt, welche die Richtung oder die Geschwindigkeit seiner Bewegung ändert (§ 31). Zu jeder Bewegung in krummliniger Bahn ist daher das Vorhandensein einer Kraft erforderlich, welche die stetige Richtungsänderung herbeiführt, wie z. B. die Schwerkraft bei der parabolischen Wurfbewegung (§ 35). Damit insbesondere ein Körper eine kreisförmige Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufe, wie z. B. eine an einem Faden im Kreise geschwungene Kugel, oder der Mond bei seiner (annähernd) kreisförmigen Bewegung um die Erde, ist das Vorhandensein einer nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichteten und fortdauernd mit gleicher Stärke wirkenden Centralkraft erforderlich. Dieselbe wird im ersten der soeben angeführten Beispiele durch die Spannung des Fadens (§ 38), an welchem der Körper befestigt ist, im zweiten Fall durch die von der Erdmasse auf den Mond ausgeübte Anziehung hervorgebracht. Sobald die Centralkraft zu wirken aufhörte (wenn z. B. der gespannte Faden zerrisse), würde der Körper seine augenblickliche Bewegungsrichtung unverändert beibehalten, also in der Richtung der Tangente der kreisförmigen Bahn sich vom Mittelpunkt derselben entfernen.

Das lediglich aus der Eigenschaft des Beharrungsvermögens (§ 31) entspringende Bestreben der Teile rotierender Körper, sich in der Richtung der Tangente vom Mittelpunkt der Bewegung zu entfernen, kann durch Versuche an der sogenannten Centrifugalmaschine erläutert werden, bei welcher, mittelst zweier durch einen Schnurlauf verbundenen Räder von verschiedenem Durchmesser (§ 48), eine Axe und die auf ihr befestigten Gegenstände in schnelle Rotation versetzt werden können. Vielfache Anwendung findet diese Eigenschaft rotierender Körper in der Technik, z. B. bei Centrifugalpumpen, Centrifugalgebläsen, Trockenmaschinen, den Centrifugalapparaten der Zuckersiedereien u. s. w.*)

Fig. 50.



Um die Gröfse der Centralkraft zu bestimmen, welche erforderlich ist, um einen Körper in seiner kreisförmigen Bahn zu erhalten, denke man sich die stetig wirkende Kraft zunächst durch eine Reihe in sehr kurzen Zeitintervallen wirkender Momentankräfte (§ 31a) ersetzt. Der Körper, dessen Dimensionen der Einfachheit wegen als verschwindend klein betrachtet werden mögen, durchlaufe die Sehne AB des Kreises (Fig. 50) in $\frac{1}{n}$ Sekunde mit der Geschwindigkeit v, so

*) Ist ein Körper gezwungen, sich auf einer vorgeschriebenen Bahn zu bewegen, indem er z. B. durch einen Faden verhindert wird, sich vom Mittelpunkt der Kreisbahn zu entfernen, so übt er seinerseits infolge seines Beharrungsvermögens einen Druck auf die Bahn, oder einen Zug an dem Faden aus, den man Centrifugalkraft nennen kann, und welcher der auf den bewegten Körper wirkenden Centralkraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist, indem auch hier das Prinzip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§ 38) Anwendung findet. Man darf aber nicht, wie häufig mifsverständlich geschieht, die Centrifugalkraft als eine auf den im Kreise bewegten Körper wirkende Kraft betrachten. Wirkten Centripetalkraft und Centrifugalkraft auf denselben Körper, so würden sie sich gegenseitig aufheben, und der Körper müfste sich in gerader Linie bewegen. Der Angriffspunkt der Centrifugalkraft ist vielmehr im angeführten Falle der Endpunkt des Fadens, an welchem der Körper befestigt ist, oder mittelbar der Mittelpunkt des Kreises, in welchem der Faden befestigt ist. Bei der Bewegung des Mondes um die Erde ist überhaupt keine Centrifugalkraft vorhanden, wenn man nicht die Anziehung, welche der Mond auf die Erde ausübt, als solche bezeichnen will.

dafs also $AB = \frac{v}{n}$ ist (§ 30). In der nächsten $n$tel Sekunde würde er, wenn keine Kraft auf ihn wirkte, die Strecke $BD = AB$ durchlaufen. Macht man $BE = BD$ und zieht DE, so ist $\triangle\, DBE$ gleichschenklig, mithin $\angle\, ABE = 2\, BDE$ und $\angle\, ABC = BDE$, folglich $\triangle\, DEB \sim ABC$, da beide Dreiecke gleichschenklig sind und gleiche Basiswinkel haben. Aus der Gleichheit der Gegenwinkel ABC und BDE folgt, dafs $DE \parallel BC$ ist. Zieht man also noch $EF \parallel DB$, so ist $BDEF$ ein Parallelogramm. Wird dem bewegten Körper im Augenblick, wo er in B angelangt ist, eine Geschwindigkeit in der Richtung BC erteilt, infolge deren er in $\frac{1}{n}$ Sekunde die Strecke BF zurücklegen würde, so setzt sich diese mit der bereits vorhandenen Geschwindigkeit in der Richtung BD so zusammen, dafs der Körper in $\frac{1''}{n}$ von B nach E gelangt (§ 34). Ebenso mufs dem Körper, wenn er der Reihe nach die gleichen Sehnen EK, KL u. s. f. durchlaufen soll, am Ende jeder $n$tel Sekunde eine gleiche Geschwindigkeit in der Richtung nach dem Mittelpunkt C erteilt werden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BEF und BCE folgt $BF : BE = BE : BC$, oder da $BE = \frac{v}{n}$, so ist, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, $BF = \frac{v^2}{n^2 r}$. Da der Körper infolge eines Stofses in $\frac{1''}{n}$ die Strecke BF durchlaufen soll, so mufs die durch jeden Stofs ihm erteilte Geschwindigkeit $n \,.\, BF = \frac{v^2}{nr}$ sein, und da in einer Sekunde n solcher Stöfse erfolgen, so würden diese ihm zusammen in einer Sekunde die Geschwindigkeit $\frac{v^2}{r}$ in der Richtung nach dem Mittelpunkte C zu erteilen vermögen. Denkt man sich nun, um von der unstetigen Bewegung zur stetigen Kreisbewegung überzugehen, die Zeitintervalle unendlich kurz, oder ihre Anzahl n über jede Grenze wachsend, so folgt, dafs, um den Körper in seiner kreisförmigen Bahn zu erhalten, eine stetige, nach dem Mittelpunkte C gerichtete Kraft auf ihn wirken mufs, welche demselben in einer Sekunde die Beschleunigung

$$1. \qquad \gamma = \frac{v^2}{r}$$

zu erteilen vermag. Die durch die Centralbewegung erzeugte Spannung eines Fadens, an welchem eine Masse m befestigt ist, die sich mit der Geschwindigkeit v in einem Kreise vom Halbmesser r bewegt, ist demnach (§ 38)

$$m\gamma = m\,\frac{v^2}{r}.$$

Dieselbe ist also der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit direkt, dem Halbmesser des Kreises umgekehrt proportional*).

Bezeichnet T die Umlaufszeit, in welcher die kreisförmige Bahn durchlaufen wird, deren Länge $2\pi r$ ist, so ist $v = \frac{2\pi r}{T}$, oder wenn man diesen Wert für v in den obigen Ausdruck der Centralkraft γ einsetzt,

$$2. \qquad \gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Rotiert ein Körper um eine feste Axe, so beschreiben alle Teile desselben Kreisbahnen von verschiedenem Halbmesser, die aber sämtlich in gleicher Zeit durchlaufen werden. Die Geschwindigkeit der Bewegung der einzelnen Teilchen wächst mit der Entfernung von der Drehungsaxe. Unter der Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung versteht man die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher sich in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe befindet. Wird dieselbe mit

*) Bezeichnet $p = mg$ das Gewicht der am Faden befestigten Masse, so ist die Spannung des Fadens, in Gewichtseinheiten ausgedrückt, gleich $\frac{p}{g} \,.\, \frac{v^2}{r}$.

ω bezeichnet, so ist die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r von der Umdrehungsaxe $v = r\omega$ oder umgekehrt

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T},$$

und es ergiebt sich:

3. $$\gamma = r\omega^2.$$

Bei gleicher Winkelgeschwindigkeit der Drehung oder bei gleicher Umlaufszeit ist also die zur Erhaltung der Kreisbewegung erforderliche Centralkraft dem Halbmesser der Bahn proportional.

§ 56. Beispiele der Anwendung der Gesetze der Kreisbewegung.

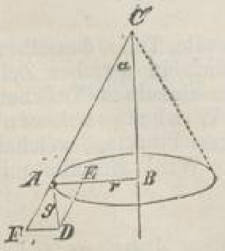
1. Einflufs der Rotation der Erde auf die Schwerkraft und die Gestalt des Erdkörpers. Die Erde vollendet ihre Axendrehung in 24 Stunden Sternzeit = 86164*) Sekunden, der Umfang des Erdäquators beträgt 40070 km. Wie grofs ist demnach die aus der Rotationsbewegung entspringende Verminderung der Schwerkraft am Äquator? Wie grofs ist die Änderung der Gröfse und Richtung der Schwerkraft unter der geographischen Breite φ?

Am Äquator ergiebt sich die Verminderung der Schwerkraft 33,9 mm oder gleich $\frac{1}{289}$ des ganzen Betrages. Bei 17 mal gröfserer Rotationsgeschwindigkeit würde demnach die Schwerkraft gerade nur noch hinreichen, um die Körper an der Entfernung von der Erdoberfläche zu verhindern. Aufser der unmittelbaren Verminderung der Schwere am Äquator durch die Axendrehung der Erde ergiebt sich noch ein mittelbarer Einflufs aus der ebenfalls von der Axendrehung herrührenden sphäroidischen Gestalt des Erdkörpers. Da sich nämlich die Erde ursprünglich im feuerflüssigen Zustand befand (§ 240), und noch gegenwärtig der gröfste Teil ihrer Oberfläche mit Flüssigkeit bedeckt ist, so hat dieselbe, infolge ihrer Axendrehung, die Gestalt eines an den Polen abgeplatteten Umdrehungsellipsoids angenommen. Nach Bessel (§ 350) ist der Polardurchmesser des Erdsphäroids um $\frac{1}{299{,}1528}$ oder um etwa 42,66 km kürzer, als der Durchmesser des Äquators. Infolgedessen erleidet ein Körper am Pol eine um $\frac{1}{576}$ gröfsere Anziehung von der Erdmasse als am Äquator so dafs, infolge beider Ursachen, die Schwerkraft am Äquator um $\frac{1}{192}$ geringer ist als am Pol. — Die Abnahme der Schwerkraft vom Pol nach dem Äquator kann aus leicht begreiflichen Gründen durch die gewöhnliche Wage nicht nachgewiesen werden, wohl aber würde dies mittelst einer Federwage (§ 54) möglich sein. Das am meisten geeignete Instrument jedoch zur Vergleichung der Intensität der Schwere an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche ist das Pendel (s. unten § 63).

2. Mit welcher Geschwindigkeit müfste eine Kanonenkugel in horizontaler Richtung abgeschossen werden, damit sie in kreisförmiger Bahn um die Erde liefe? Wie grofs wäre demnach ihre Umlaufszeit? (Es wird angenommen, dafs kein Luftwiderstand stattfinde.)

3. Die siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde (§ 381) beträgt 27 Tage $7^3/_4$ Stunden, seine Entfernung vom Erdmittelpunkt ist gleich 60 Erdhalbmessern. Wie grofs ist demnach die Anziehung, welche die Erde auf den Mond ausüben mufs, um ihn in seiner kreisähnlichen Bahn zu erhalten?

Fig. 51.



4. Das siderische Sonnenjahr dauert 365 Tage 6 St. 9 Min. (§ 358). Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 149,5 Millionen Kilometer. Welche Anziehung mufs die Sonne auf die Erde ausüben, um dieselbe in ihrer Bahn zu erhalten?

5. Konisches Pendel. Ein schwerer Körper A (Fig. 51) ist an einem gewichtslosen Faden l aufgehängt. Welche Geschwindigkeit mufs demselben in der Richtung der Tangente des mit dem Halbmesser BA konstruierten

*) Ein Sterntag ist um 3′55,9″ mittl. Sonnenzeit kürzer als ein mittl. Sonnentag (§ 359).

Kreises erteilt werden, damit er sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in immer gleichem Abstand um die Vertikallinie CB bewege?

Denkt man sich die Schwerkraft $AD = g$ durch die Komponenten AF und AE ersetzt, so wird die erstere durch den Widerstand des Fadens aufgehoben und giebt die Spannung an, welche der Faden während der Bewegung erleidet. Die Komponente AE mufs, wenn sie den Körper in seiner kreisförmigen Bahn, deren Halbmesser $AB = r$ ist, erhalten soll, gleich $\frac{v^2}{r}$ sein. Ist Winkel $ACB = ADE = \alpha$, so ist $AE = g \operatorname{tang} \alpha$, und da $r = l \sin \alpha$ ist, $v^2 = gl \sin \alpha . \operatorname{tang} \alpha$. Die Umlaufszeit wird $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cos \alpha$. Wird CB mit h bezeichnet, so ist $T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$. Die Umlaufszeit ist also nur von der Intensität der Schwerkraft und von der Höhe h abhängig und ist für verschiedene Längen des Fadens l dieselbe, wenn h denselben Wert besitzt. Ist der Winkel α nur klein, so ändert sich $\cos \alpha$ und daher auch T nur sehr wenig mit wachsendem Werte von α (vergl. § 61).

§ 57. Kepplers Gesetze der Planetenbewegung.

1. Die Planeten bewegen sich um die Sonne in elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

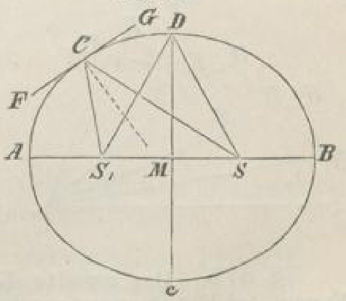
2. Der *Radius vector* eines Planeten durchstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der grofsen Halbaxen ihrer Bahnen oder ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. (Vergl. § 379).

Nikolaus Kopernikus (geb. 1473, † 1543) erkannte, dafs die Sonne der Centralkörper unseres Planetensystems sei, und lehrte, dafs die Erde und die übrigen Planeten sich in kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen. Gestützt auf die genaueren Beobachtungen von Tycho Brahe entdeckte Johannes Keppler (geb. 1571, † 1630), dafs die Planetenbahnen nicht genaue Kreise, sondern kreisähnliche Ellipsen von geringer Excentricität sind, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Besonders waren es Tychos Beobachtungen des Planeten Mars, durch welche Keppler zu seiner Entdeckung geführt wurde, indem unter den Bahnen der damals bekannten gröfseren Planeten die des Mars am meisten von der Kreisgestalt abweicht (§ 378). — Durch das dritte der von Keppler aus den Beobachtungen abgeleiteten Gesetze gelangte Isaak Newton (geb. 1642, † 1727) zur Erkenntnis des Gesetzes der allgemeinen Massenanziehung oder Gravitation (§ 58) und leitete die Kepplerschen Gesetze als notwendige Folgerungen aus diesem Gesetze ab.

§ 57a. Einige der wichtigsten geometrischen Eigenschaften der Ellipse.

Fig. 52.



1. Man kann sich die Ellipse durch Bewegung eines Punktes C (Fig. 52) entstanden denken, dessen Abstände von zwei in einer Ebene gegebenen festen Punkten S und S_1 immer dieselbe Summe geben, so dafs z. B. $SA + AS_1 = SC + CS_1 = SD + DS_1 = SB + BS_1$ ist. Die festen Punkte S und S_1 heifsen die Brennpunkte der Ellipse, die von einem Punkte C nach den Brennpunkten gezogenen Geraden CS und CS_1 sind seine Brennstrahlen. Insbesondere heifst der vom Ort eines Planeten nach der Sonne S gezogene Brennstrahl der *Radius vector* oder Leitstrahl des Planeten. Aus der Symmetrie in Beziehung auf die beiden Brennpunkte folgt, dafs $AS = BS_1$ ist, mithin die konstante Summe der Brennstrahlen $AS + AS_1 = BS + BS_1 = AB$, d. i. gleich dem durch die beiden Brennpunkte gezogenen gröfsten Durchmesser oder der grofsen Axe der Ellipse.

Der im Mittelpunkt M senkrecht auf der großen Axe errichtete Durchmesser DE ist der kleinste Durchmesser und wird die **kleine Axe** genannt. Die Entfernung des Mittelpunktes von jedem der beiden Brennpunkte $MS = MS_1$ heißt **Excentricität**. Die Ellipse ist um so kreisähnlicher, je kleiner ihre Excentricität im Verhältnis zur großen Axe. Im besonderen Falle, daß die Excentricität gleich Null ist, oder daß beide Brennpunkte zusammenfallen, geht die Ellipse in einen Kreis über. Wird die große Halbaxe MA mit a, die kleine Halbaxe MD mit b, die Excentricität MS mit e bezeichnet, so ist $SD + DS_1 = 2a$, mithin $SD = a$, und aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks SMD folgt, daß $e^2 = a^2 - b^2$ ist.

2. Eine andere wichtige Eigenschaft der Ellipse, welche in der Akustik (§ 123) und Optik (§ 140) zur Anwendung kommt, ist die, **daß die Winkel, welche die vom Punkte C aus gezogenen Brennstrahlen CS, CS_1 mit der in diesem Punkte an die Ellipse gezogenen Tangente FCG einschließen, einander gleich sind.**

3. Die Ellipse ist einer der drei **Kegelschnitte** (Ellipse, Parabel, Hyperbel), oder derjenigen Kurven, in welchen der Mantel eines (geraden oder schiefen) Kreiskegels von einer Ebene durchschnitten wird, je nachdem dieselbe mehr oder minder gegen die Axe des Kegels geneigt ist. (Bei der Ellipse ist die **Summe**, bei der Hyperbel die **Differenz** der nach zwei festen Punkten gezogenen Brennstrahlen konstant. [Vergl. auch § 35.])

Fig. 52a.

4. Projiziert man einen Kreis auf eine Ebene, die unter einem beliebigen Winkel gegen die Ebene des Kreises geneigt ist, indem man von jedem Punkte der Peripherie des Kreises ein Lot auf die Projektionsebene fällt, **so ist die von den Fußpunkten sämtlicher Lote gebildete Projektion des Kreises eine Ellipse.**

Ist AP_1B die Projektion des Halbkreises APB vom Halbmesser a, M der Mittelpunkt, PP_1 lotrecht zur Ebene AP_1B, ferner $PQ \perp AB$, so ist PQP_1 der Neigungswinkel α der beiden Ebenen. Es seien jetzt auf dem Durchmesser AB die beiden Punkte S und S_1 so bestimmt, daß MS gleich $MS_1 = e = a \sin \alpha$ ist, und S und S_1 mit P und P_1 verbunden; endlich sei KPK_1 eine Kreistangente, d. h. $KK_1 \perp MP$, $SK \parallel S_1K_1 \parallel MP$ und $LM \parallel KP$, so sind die rechtwinkligen Dreiecke MSL und PMQ ähnlich, weil Winkel $S = M$, als Gegenwinkel, folglich ist:

$$ML : MS = PQ : PM,$$

d. i.

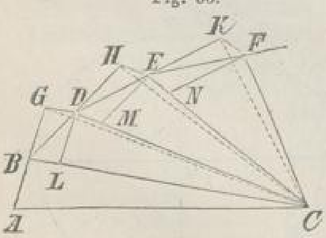
$$ML : e = PQ : a,$$

und weil nach der Konstruktion $\sin \alpha = \frac{PP_1}{PQ} = \frac{e}{a}$ ist, so ist auch:

$$PP_1 : e = PQ : a,$$

folglich:

Fig. 53.



$ML = PP_1$ und demnach auch $PK = PP_1$; also $\triangle PKS \backsim \triangle PP_1S$ und $P_1S = KS$. Ebenso läßt sich beweisen, daß $P_1S_1 = K_1S_1$ ist, und weil, im Trapez SKK_1S_1, $KS + K_1S_1 = 2PM = 2a$ ist, ergiebt sich auch

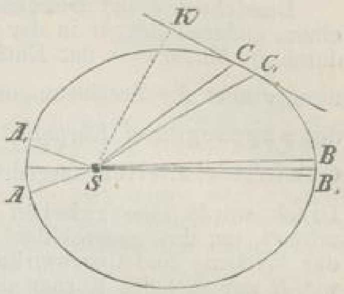
$$P_1S + P_1S_1 = 2a,$$

also ist (nach 1) der Ort von P_1, d. h. die Projektion des Kreises, eine Ellipse.

§ 57b. Das **zweite Kepplersche Gesetz**, welches auch unter dem Namen des **Flächensatzes** bekannt ist, gilt allgemein für jede Art der Centralbewegung. Denkt man sich nämlich, wie in § 55, die stetig wirkende, nach dem Punkte C (Fig. 53) gerichtete Centralkraft durch eine Reihe in gleichen Zeitintervallen aufeinanderfolgender Impulse ersetzt, und stellen AB, BD, DE, . . die in gleichen Zeiträumen durchlaufenen Wegstrecken vor, die im allgemeinen unter einander an Größe verschieden sein werden, so ist, wie sich aus der Konstruktion ergiebt, $\triangle\ ACB = BCG$ (weil $BG = AB$) und $BCG = BCD$ (weil $GD \parallel BC$), mithin $\triangle\ ACB = BCD$, ebenso $\triangle\ BCD = DCE$, u. s. f. Diese Dreiecke stellen aber die vom *Radius vector* in gleichen Zeiten durchstrichenen Flächenräume dar. (Vergl. § 379.)

Steht die Sonne im Brennpunkt S (Fig. 54), so befindet sich der Planet bei A in der Sonnennähe oder im Perihel, bei B in der Sonnenferne oder im Aphel. Sind AA_1, CC_1, BB_1 drei kleine Bahnstrecken, welche in gleichen Zeiträumen durchlaufen werden, so sind nach dem zweiten Kepplerschen Gesetz die Dreiecke ASA_1, CSC_1, BSB_1 flächengleich, mithin die Grundlinien der Dreiecke den Höhen SA, SK, SB, d. h. die Geschwindigkeiten des Planeten in beliebigen Punkten den Entfernungen der Sonne von den zugehörigen Tangenten umgekehrt proportional. Die Geschwindigkeit ist also am gröfsten im Perihel, am kleinsten im Aphel, und zwar stehen beide Geschwindigkeiten im Verhältnis von $(a + e) : (a - e)$. Die Excentricität der Erdbahn beträgt $\frac{1}{60}$ der grofsen Axe (§ 378). Die Erde befindet sich am 1. Januar im Perihel, am 2. Juli im Aphel (§ 362). Wahre und mittlere Anomalie. Mittelpunktsgleichung des Planeten. Zeitgleichung. (§ 359).

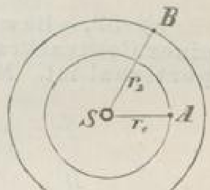
Fig. 54.



Die elliptische Bewegung der Planeten ist eine Folge des Newtonschen Gravitationsgesetzes (§ 58). Es läfst sich nämlich erweisen, dafs ein Punkt, welcher von einem anderen festen Punkte nach diesem Gesetz angezogen wird, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel beschreiben mufs. (§ 379.)

§ 58. **Newtons Gravitationsgesetz. Allgemeine Massenanziehung.** Sind r_1 und r_2 (Fig. 55) die Halbmesser der Bahnen zweier Planeten, die der Einfachheit halber als kreisförmig betrachtet werden sollen, T_1 und T_2 ihre Umlaufszeiten, so sind die Anziehungen, welche beide Planeten von der Sonne erfahren müssen, um in ihren kreisförmigen Bahnen zu beharren (§ 55, 2),

Fig. 55.



$$\gamma_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2},$$

mithin:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{r_1}{T_1^2} : \frac{r_2}{T_2^2}.$$

Nach dem dritten Kepplerschen Gesetz (§ 57) ist aber:

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3,$$

woraus folgt:

$$\gamma_1 : \gamma_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2},$$

oder die Anziehungen, welche zwei Planeten vom Centralkörper erfahren, stehen im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen.

Dasselbe Gesetz gilt für die Trabanten eines und desselben Planeten (Jupiter, Saturn). Vergleicht man ferner die Anziehung, welche die Erde auf den Mond ausübt (§ 56, 3), mit derjenigen Anziehung, welche die Körper auf der Erdoberfläche erfahren, so ergiebt sich, dafs diese Kräfte ebenfalls im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen stehen. Durch diese Betrachtungen wurde Newton zu dem Gesetz der allgemeinen Massenanziehung oder Gravitation geführt:

Alle Teile der Materie ziehen einander an mit einer Kraft, welche den anziehenden Massen direkt, den Quadraten der Entfernungen aber umgekehrt proportional ist. (§ 387.)

Es ist ohne weiteres klar, dafs bei gleicher Entfernung die doppelte Masse eine doppelte, die $n$fache Masse eine $n$fache Anziehung ausübt. In doppelter Entfernung würde eine 4fache, bei dreifacher Entfernung eine 9mal gröfsere Masse erforderlich sein, um die gleiche Anziehung hervorzubringen.

Bezeichnet k die **Beschleunigung**, welche ein Körper von der Masse 1 einem anderen Körper in der Entfernung 1 zu erteilen vermag, so wird letzterer durch die Masse m in der Entfernung 1 die Beschleunigung $k \,.\, m$, in der Entfernung r aber die Beschleunigung $\gamma = k \,.\, \frac{m}{r^2}$ erfahren. Ist ferner m' die Masse des **angezogenen** Körpers, so ist die Anziehung, welche derselbe erfährt, in **Gewichtseinheiten** ausgedrückt (§ 38), $p = m' \,.\, \gamma = k \frac{mm'}{r^2}$, oder diesen Druck würde eine zwischen beiden Körpern befindliche feste Strebe erleiden müssen, um ihre gegenseitige Annäherung zu verhindern. Prinzip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§ 38). A übt auf B dieselbe Anziehung aus, wie B auf A, beide Körper sind also mit Hilfe der Strebe im Gleichgewicht.

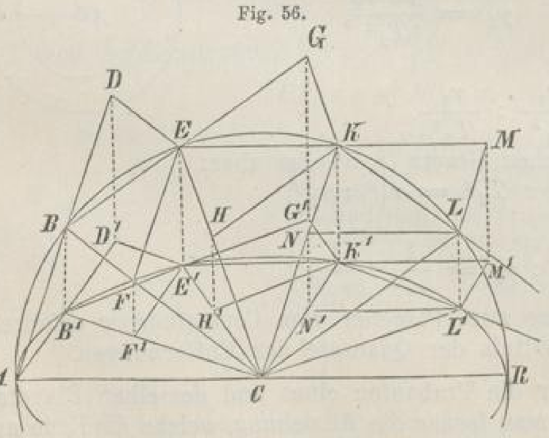
Folgerungen, welche sich aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz in betreff der relativen Massen der Sonne, der Erde und der übrigen mit Trabanten versehenen Planeten ableiten lassen. Versuche von Reich, Cavendish, u. s. w. zur Bestimmung der Masse und Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage ($d = 5{,}6$).

Eine Folge des Newtonschen Gesetzes ist die, **dafs eine homogene oder aus concentrischen Schichten von gleichförmiger Dichtigkeit zusammengesetzte Kugel einen aufserhalb derselben befindlichen Körper ebenso anzieht, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre.**

Die Anziehungen der Teile einer homogenen hohlen Kugelschale auf einen innerhalb der Höhlung gelegenen Punkt heben einander gegenseitig auf. Daraus zu ziehende Folgerungen über die Abnahme der Schwere im Innern des Erdkörpers.

§ 59. **Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflufs einer Centralkraft, die der Entfernung von einem festen Punkte proportional ist.** Man denke sich durch den Durchmesser des Kreises AR (Fig. 50 in § 55) eine Ebene gelegt, welche unter einem beliebigen Winkel gegen die Ebene des Kreises geneigt ist, und projiziere jene Figur, wie dies in Fig. 56 geschehen ist, auf diese Ebene, indem man sich von sämtlichen Punkten der Figur Lote auf die Projektionsebene gefällt denkt. Die dadurch entstandene Projektion des Kreises ist eine Ellipse (§ 57a), deren grofse Axe AR ist. Da die Projektionen paralleler Linien wieder parallel sind, so bleiben die Parallelogramme $BDEF$, u. s. w. auch in der Projektion Parallelogramme, doch sind dieselben unter einander nicht mehr kongruent. Die Linien $B'F'$, $E'H'$, u. s. w., welche die von der Centralkraft dem beweglichen Punkte in gleichen Zeitintervallen erteilten Impulse darstellen, werden durch die Projektion in demselben Verhältnis verkürzt, wie die entsprechenden Halbmesser der Ellipse $B'C$, $E'C$, u. s. w. Die Projektionsfigur stellt also die Centralbewegung eines Punktes unter dem Einflufs einer Centralkraft vor, welche der Entfernung von dem festen Mittelpunkt C propor-

Fig. 56.



tional ist. Es ergiebt sich demnach durch dieselben Betrachtungen wie in § 55, dafs ein materieller Punkt, welcher von einem festen Centrum C mit einer der Entfernung proportionalen Kraft angezogen wird, eine Ellipse um den Mittelpunkt C beschreibt. Ist a die Länge der grofsen Halbaxe der Ellipse CA, und bezeichnet k die Anziehung, welche der Punkt in der Entfernung 1 erfährt, also $k\,a$ die Anziehung in der Entfernung a, so ist die Umlaufszeit T gleich derjenigen eines Punktes, welcher sich in einer kreisförmigen Bahn vom Halbmesser a unter dem Einflufs der Centralkraft $\gamma = k\,a$ bewegt. Aus Formel 2 in § 55 ergiebt sich aber diese Umlaufszeit

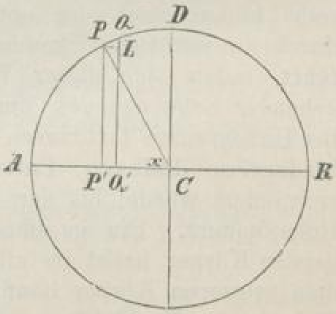
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{\gamma}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Es folgt hieraus der wichtige Satz, dafs die Umlaufszeit einzig und allein von der durch die Gröfse k ausgedrückten Intensität der Centralkraft, nicht aber von den Dimensionen der Bahn abhängt, und dafs dieselbe der Quadratwurzel aus der Gröfse k umgekehrt proportional ist. Alle materiellen Punkte, welche sich unter dem Einflufs derselben der Entfernung proportionalen Kraft um das Centrum C bewegen, durchlaufen demnach ihre Bahnen, seien dieselben an Gröfse und Excentricität noch so verschieden, in gleicher Zeit.

Die erwiesenen Sätze finden ihre Anwendung insbesondere in der Theorie der Schwingungen elastischer Körper, indem die Teilchen eines solchen, wenn sie durch Einwirkung einer äufseren Kraft eine Verschiebung erlitten haben, mit einer der Gröfse der Verschiebung proportionalen Kraft nach ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage zurückgetrieben werden (§ 8) und infolgedessen eine Reihe von Schwingungen oder Oscillationen um die Gleichgewichtslage vollführen, die im allgemeinen elliptisch sind. Wird die kleine Axe der Ellipse gleich Null, so reduziert sich die Bahn auf eine gerade Linie. Da dieser Fall besonders häufige Anwendung findet, so wird derselbe im folgenden Paragraphen besonders behandelt werden.

§ 60. Geradlinige Schwingungsbewegung. Im Fall, dafs die Projektionsebene des vorigen Paragraphen auf der Ebene des projizierten Kreises senkrecht steht, verschwindet die kleine Axe der durch die Projektion des Kreises entstandenen Ellipse, und die Bewegung des Punktes reduziert sich auf eine geradlinig hin- und hergehende Oscillationsbewegung. Ist der bewegliche Punkt durch eine äufsere Kraft aus seiner Gleichgewichtslage C (Fig. 57) bis zum Punkte A entfernt worden, und wird derselbe jetzt ohne Anfangsgeschwindigkeit der Wirkung der nach C gerichteten Centralkraft überlassen, so bewegt er sich von A bis C mit zunehmender Geschwindigkeit. Da aber die Wirkung der Centralkraft der Entfernung von C proportional abnimmt und in C selbst gleich Null wird, so ist seine Beschleunigung eine ungleichförmige. Im Punkte C hat die Geschwindigkeit ihren gröfsten Wert erreicht. Infolge der erlangten Geschwindigkeit geht der Punkt über C hinaus und bewegt sich von C bis R mit ungleichförmig verringerter Geschwindigkeit, indem diese durch die entgegenwirkende Centralkraft in demselben Mafse vermindert wird, wie sie auf dem Wege AC vermehrt wurde. In R angelangt, hat der Punkt seine Geschwindigkeit verloren und kehrt in derselben Weise über C bis nach A und in derselben Zeit zurück, welche zur Bewegung von A bis R erforderlich war. Die Zeit, welche zum Hin- und Rückgang erforderlich ist, heifst eine ganze oder vollständige Schwingungsdauer. Die zur Bewegung von A nach R oder von R nach A erforderliche Zeit ist demnach eine halbe Schwingungsdauer. Die gröfste Entfernung aus der Gleichgewichtslage $CA = CR$ heifst die Amplitude oder Schwingungsweite. Denkt man sich auf der Kreisperipherie APR den Punkt P mit gleichförmiger Geschwindigkeit so bewegt, dafs er während einer hin- und hergehenden Schwingung die ganze Kreisperipherie durchläuft, so wird, wie aus den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen folgt, der auf dem Kreis-

Fig. 57.



durchmesser unter Einfluſs der Centralkraft schwingende Punkt P' in seiner Bewegung immer mit der Projektion des Punktes P übereinstimmen, so daſs z. B. der Kreisbogen PQ in derselben Zeit durchlaufen wird, wie die Projektion $P'Q'$. Die augenblickliche Entfernung des beweglichen Punktes P' vom Mittelpunkt C, CP', heiſst seine Elongation, der Centriwinkel $ACP = x$, welcher während einer vollständigen Schwingung von 0° bis 360° wächst, heiſst die dem Punkt P' der Bahn entsprechende Schwingungsphase. Setzt man die Schwingungsamplitude $AC = PC = a$, so ist die Elongation $CP' = a' = a \cos x$. Sind v und v' die Geschwindigkeiten der Punkte P und P', und ist PQ ein unendlich kleiner, daher als geradlinig zu betrachtender Kreisbogen, so ist, da die Strecken PQ und $P'Q'$ in gleicher Zeit durchlaufen werden,

$$\frac{v'}{v} = \frac{P'Q'}{PQ}.$$

Zieht man $PL \parallel P'Q'$, so ist $PL = P'Q'$, und da im rechtwinkligen Dreieck PLQ Winkel $PQL = x$, so wird $PL = PQ \sin x$, mithin die Geschwindigkeit

$$v' = v \sin x.$$

Da die Geschwindigkeit v, mit welcher der Punkt P sich auf der Kreislinie bewegt, eine gleichförmige ist, so ist die Geschwindigkeit des Punktes P' an einer beliebigen Stelle seiner Bahn dem Sinus der Schwingungsphase, oder der Ordinate PP' proportional. Dieselbe hat ihren gröſsten Wert $\pm v$ im Punkte C, sie ist Null in den beiden Punkten der gröſsten Elongation A und B. Das negative Vorzeichen des Sinus im dritten und vierten Quadranten entspricht der entgegengesetzten Richtung der Bewegung. Die ganze Dauer einer Schwingung ist, wie in § 59 gezeigt, von der Schwingungsamplitude unabhängig und hat den Wert

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}},$$

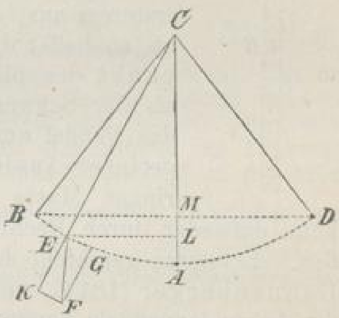
wenn k die Gröſse der nach C gerichteten Centralkraft in der Entfernung 1 bezeichnet.

§ 61. Pendelbewegung. Ein an einem Faden aufgehängter schwerer Körper befindet sich unter dem Einfluſs der Schwerkraft im stabilen Gleichgewicht, wenn die Richtung des Fadens vertikal ist, und der Schwerpunkt des Körpers vertikal unter dem Aufhängungspunkte liegt (§ 51). Wird der Körper aus dieser Gleichgewichtslage entfernt und der Wirkung der Schwere überlassen, so kehrt er in die Gleichgewichtslage zurück, geht aber infolge der dabei erlangten Geschwindigkeit über dieselbe hinaus nach der entgegengesetzten Seite, bis die Geschwindigkeit durch die entgegenwirkende Schwerkraft aufgehoben worden ist, und vollführt, indem sich dieser Vorgang wiederholt, eine Reihe hin- und hergehender Schwingungen um die Gleichgewichtslage (vergl. § 60), welche ins Unbegrenzte fortdauern würden, wenn nicht durch äuſsere Bewegungshindernisse (Reibung, Luftwiderstand) die Schwingungsweite immer mehr vermindert würde, bis der Körper endlich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe kommt. Ein in dieser Weise um seine Gleichgewichtslage schwingender Körper heiſst im allgemeinen ein physisches Pendel. Man giebt dem schweren Körper häufig die Gestalt einer Kugel, deren Durchmesser klein ist im Verhältnis zur Länge des Aufhängungsfadens, oder hängt (bei Pendeluhren) einen zur Verminderung des Luftwiderstandes linsenförmigen Körper an einer Pendelstange von verhältnismäſsig geringem Gewicht auf, die ihrerseits frei drehbar auf einer Schneide ruht, oder mittelst einer dünnen, elastischen Feder aufgehängt ist. Denkt man sich der Einfachheit halber die Masse des schweren Körpers in einem Punkt vereinigt, welcher an einem unausdehnbar und gewichtslos gedachten Faden aufgehängt ist, so hat man ein mathematisches Pendel. Die Schwingungsgesetze des physischen Pendels können, wie unten gezeigt wird, auf die des mathematischen zurückgeführt werden. Galilei fand (1602), dafs die Schwingungsdauer des Pendels 1) von der Masse und Substanz des schweren Körpers, sowie 2) von der Schwingungsweite unabhängig ist, solange letztere die Gröfse von einigen Bogengraden nicht überschreitet, dafs dieselbe dagegen von der Pendellänge abhängt, indem 3) die Schwingungsdauer ungleich langer Pendel im direkten Verhältnis der Quadratwurzel aus der Pendellänge steht. Läfst man endlich dasselbe Pendel an zwei verschiedenen Orten schwingen, wo die Schwerkraft ungleiche Intensität besitzt (§ 56, 1), so ist 4) die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Intensität der Schwere umgekehrt proportional.

Die Dauer einer vollständigen Schwingung (eines Hin- und Rückganges) wird, wenn l die Pendellänge, g die Intensität der Schwerkraft (§ 32) bezeichnet, durch die Formel ausgedrückt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Fig. 58.



Es sei CA (Fig. 58) die Gleichgewichtslage des mathematischen Pendels, CB seine Lage zur Zeit der gröfsten Elongation, mithin AB die Schwingungsweite, so wird sich das Pendel während einer halben Schwingung von B über A bis D bewegen, so dafs $AD = AB$ ist, indem die Bewegung während des Aufsteigens von A bis D durch die Schwerkraft in demselben Mafse verzögert wird, wie sie während des Herabsinkens von B bis A beschleunigt wurde. Ist E ein beliebiger Punkt der Bahn des Pendels, und zerlegt man die Schwerkraft $EF = g$ in die rechtwinkligen Komponenten EK und EG, so wird die Komponente EK durch den Widerstand des unausdehnsamen Fadens aufgehoben, während die Komponente EG die Beschleunigung angiebt, mit welcher das Pendel nach der Gleichgewichtslage A getrieben wird. Es ist aber $EG = g \sin EFG$, oder da $\angle EFG = ECL$ ist, $EG = g \cdot \frac{EL}{EC} = \frac{g}{l} \cdot EL$. Ist die Schwingungsweite so klein, dafs ohne merklichen Fehler die Länge der halben Sehnen BM, EL mit der der Bogen BA, EA verwechselt werden darf, so kann die Bewegung des Pendels mit der geradlinigen Bewegung eines Punktes verglichen werden, welcher von dem festen Punkte A mit einer der Entfernung proportionalen Kraft $\frac{g}{l} . EA$ angezogen wird. Die Schwingungsdauer eines solchen Punktes wird aber nach § 60 durch die Formel $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ausgedrückt, woraus sich die oben ausgesprochenen Gesetze ergeben. Die Zeit T ist die Dauer einer vollständigen oder Doppelschwingung des Pendels. Die Dauer eines einfachen Hin- und Rückganges ist mithin

$$t = \frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Geschwindigkeit des Pendels im Punkte E seiner Bahn ist gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangen würde, wenn er in vertikaler Richtung durch die Strecke ML frei herabfiele (vergl. §§ 32, 41) oder $v = \sqrt{2g . ML}$. Im tiefsten Punkte A erlangt die Geschwindigkeit den gröfsten Wert $\sqrt{2g . MA}$. Infolge der erlangten Geschwindigkeit ist der schwere Körper fähig, wieder bis zu derjenigen Höhe emporzusteigen, von welcher er herabgefallen ist (vergl § 33). Beim Herabfallen des Pendels wird eine gewisse Arbeit geleistet und dadurch eine Bewegung erzeugt, die während des Emporsteigens wieder zur Erzeugung von Arbeit verbraucht wird (§ 43).

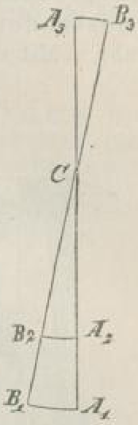
§ 62. **Physisches Pendel.** Die im vorhergehenden Paragraphen für die kleinen Schwingungen des einfachen oder mathematischen Pendels aufgestellten Gesetze behalten ihre Gültigkeit im wesentlichen auch für das zusammengesetzte oder physische Pendel. Da bei der Drehung des letzteren um den Aufhängungspunkt alle Teile desselben infolge ihrer festen Verbindung eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit (§ 55) und Schwingungsdauer haben müssen, so werden sie sich in ihrer Bewegung gegenseitig so beeinflussen, daſs die Geschwindigkeit der vom Umdrehungspunkt entfernteren Teile durch die näheren vermehrt, die der näheren durch die entfernteren verringert wird. Es läſst sich jederzeit die Länge eines mathematischen Pendels so wählen, daſs seine Schwingungen mit denen des gegebenen physischen Pendels übereinstimmen. Die Länge dieses mathematischen Pendels heiſst die **reduzierte Pendellänge.** Trägt man auf der durch den Aufhängungspunkt und den Schwerpunkt des physischen Pendels gezogenen Geraden, von ersterem aus, eine Strecke gleich der reduzierten Pendellänge ab, so heiſst der Endpunkt dieser Strecke der **Schwingungspunkt** des physischen Pendels. Derselbe liegt etwas tiefer als der Schwerpunkt, liegt demselben aber sehr nahe, wenn das Pendel aus einem schweren Körper von verhältnismäſsig geringer Ausdehnung besteht, der an einem Faden von geringer Masse aufgehängt ist. Die reduzierte Pendellänge kann entweder durch Rechnung, oder durch den Versuch gefunden werden. Letzteres geschieht bei dem sogenannten **Reversionspendel** von **Bohnenberger** (1811), welches **Kater** (1818) zur Bestimmung der Länge des Sekundenpendels benützte. Der Gebrauch desselben beruht auf dem Satze, daſs **die Schwingungsdauer eines physischen Pendels unverändert bleibt, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängungspunkt macht** (**Huygens**, 1673), so daſs also dann der Aufhängungspunkt zum Schwingungspunkt wird. An der Pendelstange sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen gekehrte Schneiden A und B (Fig. 59) und auſserdem zwei verschiebbare Massen C, D angebracht, deren Stellung so reguliert werden kann, daſs das Pendel gleiche Schwingungsdauer besitzt, mag es auf der Schneide A oder B aufgehängt werden. Der Abstand der beiden Schneiden AB giebt dann die reduzierte Pendellänge an.

Fig. 59.

An einer unbiegsamen Geraden, welche um den festen Punkt C (Fig. 60) drehbar ist, seien in den Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ angebracht, deren Entfernungen vom Drehungspunkt C beziehungsweise $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sind. Soll der Geraden in einer Sekunde die Winkelgeschwindigkeit ω erteilt werden, so sind die Geschwindigkeiten, welche die einzelnen Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ dadurch in tangentialer Richtung erlangen (§ 55), beziehungsweise gleich $r_1\omega, r_2\omega, r_3\omega, \ldots$ Um den Massen in der Zeiteinheit diese Geschwindigkeiten zu erteilen, müssen auf dieselben beziehungsweise die (in Gewichtseinheiten [§ 38] ausgedrückten) Kräfte $m_1r_1\omega, m_2r_2\omega, m_3r_3\omega, \ldots$ wirken. Diese Kräfte können aber nach § 46 durch eine einzige Kraft ersetzt werden, deren **Moment** in Beziehung auf den Drehungspunkt C gleich ist der Summe der Momente aller einzelnen Kräfte. Diese Momente sind $m_1r_1^2\omega, m_2r_2^2\omega, m_3r_3^2\omega, \ldots$, mithin muſs das Moment der Kraft, welche in der Zeiteinheit dem Körper die Drehungsgeschwindigkeit ω zu erteilen vermag, gleich $\omega \,.\, \Sigma mr^2$ sein. Denkt man sich nun das Pendel um den Winkel α aus der Gleichgewichtslage gedreht, so sind die tangentialen Komponenten der durch die Schwere auf die Massen m_1,

m_2, m_3, ... ausgeübten Kräfte (§ 61), in Gewichtseinheiten ausgedrückt, gleich $m_1 g \sin\alpha$, $m_2 g \sin\alpha$, $m_3 g \sin\alpha$, ... und ihre Momente gleich $m_1 r_1 g \sin\alpha$, $m_2 r_2 g \sin\alpha$, $m_3 r_3 g \sin\alpha$, ..., wobei, um die Vorzeichen der Momente zu berücksichtigen, die Entfernungen der Massen, welche, wie m_3, oberhalb des Drehungspunktes angebracht sind, als negativ in Rechnung gebracht werden. Alle diese Momente können aber durch eine einzige Kraft ersetzt werden, deren Moment in Beziehung auf den Drehungspunkt gleich $g \sin\alpha\, \Sigma m r$ ist. Indem man diesen Ausdruck mit dem obigen vergleicht, ergiebt sich zur Bestimmung des durch dieses Drehungsmoment erzeugten Zuwachses der Winkelgeschwindigkeit die Gleichung

Fig. 60.



$$\omega \Sigma m r^2 = g \sin\alpha \Sigma m r,$$

woraus

$$\omega = g \sin\alpha \,.\, \frac{\Sigma m r}{\Sigma m r^2}.$$

Für ein **einfaches** Pendel von der Länge L reduziert sich jede der Summen im Zähler und Nenner dieses Ausdrucks auf ein einziges Glied, und es wird

$$\omega = g \sin\alpha \,.\, \frac{m L}{m L^2} = g \sin\alpha \,.\, \frac{1}{L}.$$

Das **zusammengesetzte** Pendel wird also in seinen Schwingungen übereinstimmen mit einem einfachen Pendel, dessen Länge

$$L = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r},$$

oder dies ist der Ausdruck für die **reduzierte Pendellänge.**

Die den **Zähler** dieses Ausdrucks bildende Summe der Produkte aus den Massen und den **Quadraten** ihrer Entfernungen von der Drehungsaxe heifst das **Trägheitsmoment** des Pendels. Dasselbe drückt die doppelt genommene **Arbeitsgröfse** aus, welche erforderlich ist, um dem Körper die Drehungsgeschwindigkeit 1 um diese Axe zu erteilen. Da nämlich nach § 43 die Arbeit $\frac{1}{2} m v^2$ erforderlich ist, um der Masse m die Geschwindigkeit v zu erteilen, und da bei der Winkelgeschwindigkeit ω die Massen m_1, m_2, ... die Geschwindigkeiten $r_1\omega$, $r_2\omega$, ... besitzen, so ist zur Erzeugung dieser Winkelgeschwindigkeit die Arbeit $\Sigma \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \,.\, \Sigma m r^2$ erforderlich.

Der Nenner des Ausdrucks für L ist, wie leicht zu erweisen (vergl. § 51), gleich MR, wenn M die ganze Masse des Pendels, R die Entfernung seines Schwerpunktes vom Aufhängungspunkt bezeichnet. — Durch Massen, welche, wie m_3, oberhalb der Drehungsaxe angebracht werden, für welche also r negativ ist, wird der Nenner des Ausdrucks für L vermindert, der Zähler dagegen, da r^2 stets positiv ist, vergröfsert. Mithin wird durch solche Massen die reduzierte Pendellänge und die Schwingungsdauer stets vergröfsert und zwar um so mehr, je gröfser ihre Entfernung vom Drehungspunkte ist (Anwendung verschiebbarer Massen beim Taktzähler oder **Metronom**).

Kehrt man, wie oben beim Reversionspendel angegeben wurde, das Pendel so um, dafs der Schwingungspunkt zum Aufhängungspunkt wird, so treten anstelle von r_1, r_2, ... die Ausdrücke $L - r_1$, $L - r_2$, ... Mithin wird die reduzierte Länge des umgekehrten Pendels

$$L' = \frac{\Sigma m (L-r)^2}{\Sigma m (L-r)}.$$

Löst man die Klammern unter den Summenzeichen auf und bemerkt, dafs der Faktor L als unveränderliche und allen Gliedern gemeinsame Gröfse vor das Summenzeichen gesetzt werden darf, so erhält man:

$$L' = \frac{L^2 \Sigma m - 2L \Sigma m r + \Sigma m r^2}{L \Sigma m - \Sigma m r}.$$

Aus dem oben gefundenen Ausdruck für L folgt aber, dafs

$$\Sigma m r^2 = L \,.\, \Sigma m r$$

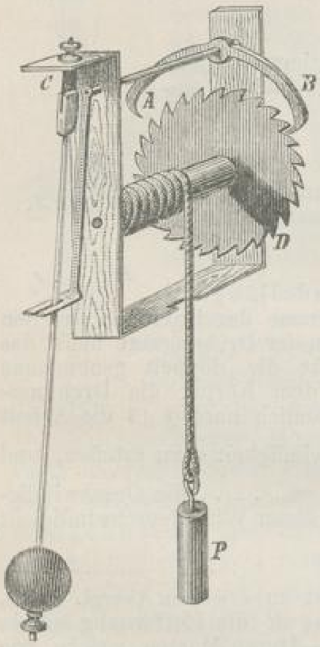
ist, mithin:

$$L' = \frac{L^2 \,.\, \Sigma m - L \,.\, \Sigma m r}{L \,.\, \Sigma m - \Sigma m r} = L,$$

oder die reduzierte Länge des umgekehrten Pendels ist gleich der des ursprünglichen, wie oben behauptet wurde.

§ 63. Anwendung des physischen Pendels, Pendeluhr, Sekundenpendel, Messung der Intensität der Schwerkraft. Auf der gleichmäſsigen Dauer der Pendelschwingungen, und namentlich auf der Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von geringen Änderungen der Schwingungsweite beruht die wichtige Anwendung des Pendels als eines zeitmessenden Instrumentes in der von Huygens (1657) erfundenen Pendeluhr. Mit dem an einer elastischen Stahlfeder bei C (Fig. 61) aufgehängten Pendel ist der metallische Bügel AB so verbunden, daſs die beiden Arme desselben bei jeder Pendelschwingung abwechselnd bei A und bei B in die Zähne des Steigrades D eingreifen, welches infolgedessen durch das Gewicht P bei jedem Hin- und Hergange des Pendels um einen Zahn weiter gedreht wird. Hat das Rad z. B. 30 Zähne, und ist die Dauer einer einfachen Pendelschwingung gleich einer Sekunde, so wird sich das Rad in einer Minute einmal um seine Axe drehen. Die Drehung dieses Rades wird durch das aus mehreren in einander greifenden Zahnrädern gebildete Getriebe der Uhr an die Räder übertragen, auf deren Axen die Zeiger befestigt sind.

Fig. 61.



Das treibende Gewicht P wirkt in der Regel nicht an der Axe des Steigrades selbst, wie in der Figur, der Einfachheit wegen, angenommen wurde, sondern an einer Welle, die durch ein oder mehrere Zahnräder mit dem Steigrade in Verbindung steht. Durch die Zähne des Steigrades erhält zugleich das Pendel bei jeder Schwingung einen kleinen Stoſs, welcher hinreicht, die durch Reibung und Luftwiderstand herbeigeführte Verminderung der Schwingungsweite zu ersetzen und das Pendel in gleichförmigem Gange zu erhalten. Über die Mittel, den störenden Einfluſs der Temperatur auf die Länge der Pendelstange zu kompensieren, s. unten § 199. — Bei Chronometern und Taschenuhren tritt anstelle des Pendels die sogenannte Unruhe, ein Rädchen, welches durch eine feine, elastische Spiralfeder in regelmäſsige Schwingungen versetzt wird. Das treibende Gewicht wird durch eine gespannte, spiralförmig gewundene Stahlfeder ersetzt, die in ein cylindrisches Federgehäuse eingeschlossen ist und dasselbe durch ihre Elasticität zu drehen strebt.

Ein Pendel, dessen (einfache oder halbe) Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, heiſst Sekundenpendel. Ist L die reduzierte Länge (§ 62) des Sekundenpendels, so ist (§ 61)

$$\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1$$

oder:

$$g = \pi^2 L,\ L = \frac{g}{\pi^2}.$$

Aus der beobachteten Länge des Sekundenpendels wird daher die Intensität der Schwerkraft durch Multiplikation mit π^2 gefunden. Nach Bessel beträgt die Länge des einfachen Sekundenpendels zu Berlin 994,26 mm, woraus für Berlin $g = 9{,}8125$ m folgt. Das Pendel ist das beste Instrument zur Ermittelung der Intensität der Schwere. Die genauesten Untersuchungen von Bessel haben den Satz bestätigt, daſs die Schwingungsdauer des Pendels von der Substanz des schweren Körpers unabhängig ist, oder daſs die Schwerkraft auf alle Stoffe mit gleicher Stärke wirkt. — Bei einer auf Veranlassung von Picard unternommenen Reise von Paris nach Cayenne machte der Astronom Richer i. J. 1672 die Beobachtung, daſs das Sekundenpendel seiner astronomischen Uhr zu Cayenne um

1,25 par.''' verkürzt und nach der Rückkehr nach Paris wieder um ebensoviel verlängert werden mufste, um die Uhr im richtigen Gange zu erhalten, woraus er auf eine Verminderung der Schwerkraft vom Pol nach dem Äquator schlofs (vergl. § 56, 1 und § 352, 4). Genaue Beobachtungen über die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche haben gelehrt, dafs die Intensität der Schwerkraft unter der geographischen Breite φ durch die Formel ausgedrückt wird

$$g = g_0 \left(1 - \frac{1}{384} \cos 2\varphi\right),$$

wo g_0 den mittleren Wert der Schwerkraft unter 45° Br., nämlich 9,808 m, bezeichnet. — Es ist leicht ersichtlich, welchen Einflufs die Erhebung über das Meeresniveau, oder das Hinabsteigen in Bergwerksschachte auf die Intensität der Schwerkraft ausüben mufs (§ 58).

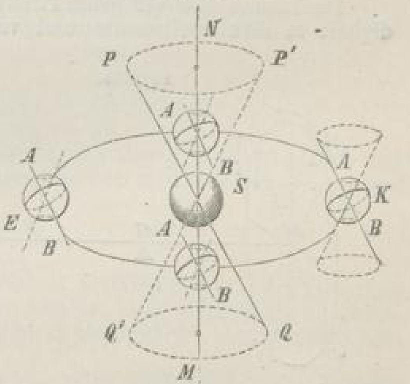
Foucaults Anwendung der Unveränderlichkeit der Schwingungsebene des Pendels zum Beweis für die Axendrehung der Erde (§ 352).

§ 64. **Umdrehung eines Körpers um eine Symmetrieaxe.** Dreht sich ein Körper um eine Axe, um welche seine Masse nach allen Seiten gleichmäfsig verteilt ist, so zeigt die Umdrehungsaxe das Bestreben, ihre Richtung im Raume unverändert zu erhalten, oder einen Widerstand gegen jede äufsere Kraft, welche diese Richtung zu ändern strebt. Ein auf seiner Spitze sich drehender Kreisel wird durch diese Eigenschaft am Umfallen gehindert, solange die Umdrehungsgeschwindigkeit hinreichend grofs ist. Rotiert ein in drei Ringen nach allen Richtungen frei drehbar aufgehängter kugelförmiger Körper (Fig. 62) um die Axe AB, so bleibt die Richtung dieser Axe im Raume unveränderlich, wie man auch das Gestell drehen und wenden möge, wenn der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt der Aufhängung zusammenfällt. Wird bei A ein Übergewicht angebracht, so sinkt das Ende A der Drehungsaxe nicht herab, wie es der Fall sein würde, wenn der Körper in Ruhe wäre, sondern die Drehungsaxe AB beginnt sich um die Vertikallinie langsam so zu bewegen, dafs sie, in immer gleicher Neigung gegen dieselbe verharrend, nach und nach einen Kegelmantel durchläuft.

Fig. 62.

Diese Eigenschaft rotierender Körper dient zur Erklärung der astronomischen Erscheinung der sogenannten **Präcession der Nachtgleichenpunkte** (§ 358). Die Erde dreht sich um eine Axe AB (Fig. 63), welche gegen die Ebene der Ekliptik oder der jährlichen Erdbahn EK unter einem Winkel von 66½° oder gegen deren Normale NM um 23½° geneigt ist. Während der jährlichen Umlaufsbewegung der Erde behält die Erdaxe ihre Richtung im Raume unveränderlich bei, oder ist stets nach demselben Fixstern (Polarstern P) gerichtet. Im Laufe einer langen Reihe von Jahren zeigt jedoch die Richtung der Erdaxe eine langsame, regelmäfsige Änderung. Diese wird dadurch hervorgebracht, dafs die Sonne und der Mond durch ihre Anziehung auf die Teile des an den Polen abgeplatteten Erdkörpers seine Axe senkrecht zur Ebene der Ekliptik zu stellen streben. Infolgedessen stellt sich die Erdaxe nicht wirklich senkrecht zur Ekliptik, sondern ihre Richtung PQ beschreibt um die Normale NM in der Zeit von etwa 26 000 Jahren einen Kegelmantel, indem der Pol der Erdaxe P sich um den Pol der Ekliptik N in immer gleichem Abstand von 23½° im Kreise bewegt. Eine Folge davon ist, dafs die sogenannten Frühlings- und Herbstnachtgleichenpunkte oder die Punkte, in welchen der Himmelsäquator die Ekliptik an der Himmelskugel durchschneidet, auf der letzteren langsam fortschreiten und in der Zeit von 26000 Jahren, nachdem sie die ganze Ekliptik durchlaufen haben, wieder zu ihrer ursprünglichen Stellung zurückkehren (siderisches und tropisches Sonnenjahr. [§ 358]).

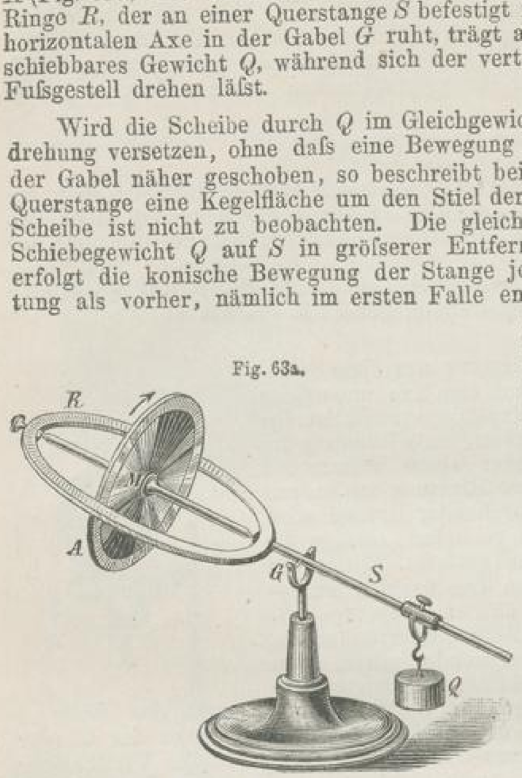
Fig. 63.



§ 64a. **Der Fesselsche Rotationsapparat.** Eine kreisförmige Scheibe A (Fig. 63a) mit schwerem Rand ruht mit ihrer Axe leicht drehbar in einem Ringe R, der an einer Querstange S befestigt ist. Diese Stange, welche auf einer horizontalen Axe in der Gabel G ruht, trägt am entgegengesetzten Ende ein verschiebbares Gewicht Q, während sich der vertikale Stiel der Gabel leicht in einem Fufsgestell drehen läfst.

Wird die Scheibe durch Q im Gleichgewicht gehalten, so läfst sie sich in Umdrehung versetzen, ohne dafs eine Bewegung der Stange S eintritt; wird aber Q der Gabel näher geschoben, so beschreibt bei lebhafter Rotation der Scheibe die Querstange eine Kegelfläche um den Stiel der Gabel als Axe, und ein Sinken der Scheibe ist nicht zu beobachten. Die gleiche Erscheinung tritt ein, wenn das Schiebegewicht Q auf S in gröfserer Entfernung von G befestigt wird; jedoch erfolgt die konische Bewegung der Stange jetzt in der entgegengesetzten Richtung als vorher, nämlich im ersten Falle entgegengesetzt der Rotationsrichtung des oberen Teils der Scheibe, im zweiten Fall mit dieser übereinstimmend. Erst wenn die Rotation der Scheibe langsamer wird, findet bezüglich ein Sinken oder Aufsteigen der Scheibe statt, und zwar unter gleichzeitiger Beschleunigung der Bewegung der Stange. Ist die Scheibe, wie bei dem Apparat in § 64 der kugelförmige Körper, in zwei Ringen aufgehängt, so behält die Umdrehungsaxe ihre Lage unverändert bei.

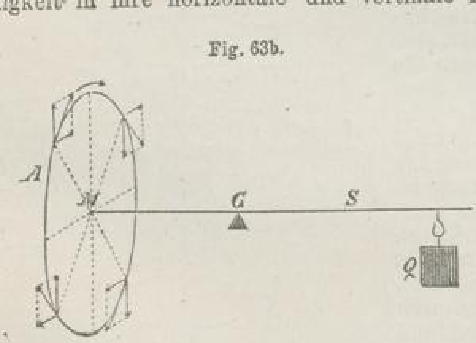
Fig. 63a.



Zur Vereinfachung der Erklärung dieser Erscheinung möge angenommen werden, dafs die Stange sich anfänglich in horizontaler Lage befinde, und soll nur der zweite Fall besprochen werden, wo bei der Weiterschiebung des Gewichtes Q ein Emporsteigen der Scheibe zu erwarten war.

Denkt man sich für jeden Punkt der Scheibe (Fig. 63b) die Umdrehungsgeschwindigkeit in ihre horizontale und vertikale Komponente zerlegt, so wirken diese, solange Q der Scheibe das Gleichgewicht hält, in der Ebene der Scheibe und halten dieselbe in der gleichen Lage fest. In dem Augenblick aber, wo durch die Weiterschiebung von Q sich die Scheibe zu heben beginnt, treten die aufwärts gerichteten Vertikalkomponenten auf die äufsere Seite der Scheibe hinaus, die abwärts gerichteten auf die innere, während die horizontalen Komponenten in der Ebene der Scheibe bleiben. Zerlegt man jetzt weiter die aus der Ebene der Scheibe hinaustretenden Vertikalkomponenten je in der der Axe parallelen Ebene in zwei andere Komponenten, die eine in der Ebene der Scheibe, die andere horizontal, so sind diese letzteren für die bei der Drehung sich aufwärts bewegende Hälfte der Scheibe nach aufsen, für die sich abwärts bewegende nach innen gerichtet, bewirken also **eine horizontale Bewegung der Scheibe und der Querstange S in dem Drehungssinne der oberen Hälfte der Scheibe.** Diese Bewegung erfolgt um so langsamer, je stärker bei schneller Umdrehung der Scheibe das durch ihr Trägheitsmoment bedingte Bestreben derselben ist, die anfängliche Lage festzuhalten, und erst wenn sich die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe verringert, bewegt sich die Querstange S mit der Gabel schneller um den vertikalen Stiel, steigt aber auch die mit der Scheibe versehene Seite von S aufwärts.

Fig. 63b.



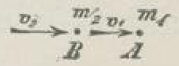
Gesetze des Stofses.

§ 65. **Stofs elastischer und unelastischer Körper.** Wenn zwei feste Körper, welche sich in verschiedenen Richtungen, oder mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, an einander **stofsen**, so findet zunächst zwischen den Oberflächenteilen beider Körper, wenn sie sich bis auf eine unmefsbar kleine Entfernung (d. i. bis zur sogenannten Berührung) genähert haben, eine Abstofsung statt, welche der weiteren Annäherung entgegenwirkt. Durch die zwischen den Teilen jedes festen Körpers wirksamen Molekularkräfte (§ 31 Anmerk.) wird sodann die Einwirkung auf die übrigen Massenteile des gestofsenen Körpers übertragen, wodurch im allgemeinen beide Körper eine Änderung ihrer Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung erfahren. Als allgemeines Prinzip gilt dabei das Gesetz der **Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung** (§ 38), nach welchem jedes Atom des Körpers A auf jedes Atom des Körpers B eine gleiche Einwirkung ausübt, wie es selbst von diesem erleidet. Die Gesetze des Stofses sind im allgemeinen so kompliziert, dafs wir uns auf die Betrachtung der einfachsten Fälle beschränken müssen.

Es sollen zunächst die Gesetze des Stofses zweier kugelförmigen Körper untersucht werden, deren Mittelpunkte sich auf derselben geraden Linie in gleicher oder entgegengesetzter Richtung bewegen (**centraler Stofs**), und deren Massen man sich der Einfachheit halber in zwei Punkten vereinigt denken kann (Stofs materieller Punkte). Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die einander stofsenden Körper elastisch oder unelastisch sind.

§ 66. **Centraler Stofs unelastischer Körper.** Sind beide Körper **unelastisch**, so dauert ihre gegenseitige Einwirkung nur so lange, bis dieselben ihre Geschwindigkeiten ausgeglichen haben. Beide Körper bewegen sich dann mit der erlangten gemeinsamen Geschwindigkeit in gleicher Richtung fort. Bewegen sich vor dem Stofs die Körper A und B (Fig. 64), deren Massen m_1 und m_2 sind, **in gleicher Richtung** und zwar A mit der Geschwindigkeit v_1, B mit der gröfseren Geschwindigkeit v_2, und ist die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stofs c, so hat A den Geschwindigkeitszuwachs $c-v_1$, B dagegen den Geschwindigkeitsverlust v_2-c erfahren. Bezeichnet λ die Einwirkung, welche jedes Atom eines Körpers während des Stofses auf jedes Atom des anderen ausübt, so hat jedes Atom des Körpers B von den m_1 Atomen des Körpers A die Einwirkung $m_1\lambda$, dagegen jedes Atom des Körpers A von den m_2 Atomen des Körpers B die Einwirkung $m_2\lambda$ erfahren, es ist

Fig. 64.



$$c - v_1 = m_2\lambda,\ v_2 - c = m_1\lambda,$$

woraus folgt:

$$\frac{c - v_1}{v_2 - c} = \frac{m_2}{m_1} \text{ oder } c = \frac{m_1\ v_1 + m_2\ v_2}{m_1 + m_2}.$$

Waren die ursprünglichen Bewegungsrichtungen **entgegengesetzt**, so hat man nur v_1 als negativ zu betrachten, oder anstelle von v_1 zu setzen $-v_1$, und man erhält

$$c = \frac{m_2\ v_2 - m_1\ v_1}{m_1 + m_2}.$$

Das positive oder negative Vorzeichen des Zählers bestimmt dann die Richtung der Bewegung nach dem Stofs. Beide Körper bleiben nach dem Stofs in Ruhe, wenn $m_1\ v_1 = m_2\ v_2$, oder wenn ihre Anfangsgeschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportional sind.

Ist $v_1 = 0$ und m_1 unendlich grofs gegen m_2, oder trifft der Körper B senkrecht gegen eine feste, unelastische Wand, so ist $c = 0$, und der Körper bleibt in Ruhe. — Trifft ein unelastischer Körper in schiefer Richtung gegen eine feste, unelastische Wand, so kann man seine Bewegung in eine senkrechte und eine zur Wand parallele Komponente zerlegen, von denen die erste durch den Widerstand der Wand vernichtet wird, und die zweite allein übrigbleibt.

Man nennt das Produkt aus der Masse und Geschwindigkeit eines bewegten Körpers seine **Bewegungsgröfse** (§ 32a). Es bleibt also beim Stofs die (algebraische) Summe der Bewegungsgröfsen ungeändert. Die Gesetze des Stofses unelastischer Körper finden eine Anwendung beim sogenannten **ballistischen Pendel**, welches zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Geschosse dient. — Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

§ 67. Centraler Stofs elastischer Körper. Sind die zusammenstofsenden Körper elastisch, so erleiden sie beim Stofse an der Berührungsstelle eine Zusammendrückung, welche zunimmt bis zu dem Augenblick, in welchem beide Massen ihre Geschwindigkeiten ausgeglichen haben. Infolge des Bestrebens beider Körper, ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, dauert aber die Wechselwirkung zwischen beiden noch fort, während sie bei unelastischen Körpern in diesem Moment aufhörte. Da während dieser zweiten Periode des Stofses die Vorgänge der Entfernung und Ausdehnung beider Körper genau in der umgekehrten Reihenfolge vor sich gehen, wie die der Annäherung und Zusammendrückung während der ersten Periode, so wird jede der beiden Massen während der letzten Hälfte der Dauer des Stofses nochmals eine kleine Geschwindigkeitsänderung erfahren, wie während der ersten Periode. Nehmen wir zunächst wieder beide Bewegungsrichtungen vor dem Stofs als gleich an und bezeichnen, wie oben, durch c die gemeinsame Geschwindigkeit im Augenblick der gröfsten Annäherung, durch c_1 und c_2 aber die Endgeschwindigkeiten nach der völligen Trennung, so ist der Geschwindigkeitszuwachs von m_1 während der ersten Periode $c - v_1$, mithin während der ganzen Dauer des Stofses $2\,(c - v_1)$ und demnach die Endgeschwindigkeit $c_1 = v_1 + 2\,(c - v_1) = 2\,c - v_1$ oder, wenn man den oben gefundenen Wert für c einsetzt:

$$c_1 = \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2}.$$

Der Geschwindigkeitsverlust von m_2 ist während der ersten Periode $v_2 - c$, während der ganzen Dauer des Stofses $2\,(v_2 - c)$, mithin $c_2 = 2\,c - v_2$ oder

$$c_2 = \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2}.$$

Ein negatives Vorzeichen des Wertes von c_2 würde anzeigen, dafs sich die Masse m_2 nach dem Stofse in entgegengesetzter Richtung bewegt.

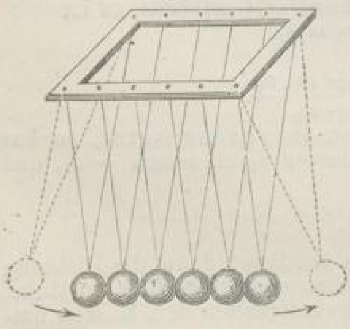
Sind die Bewegungsrichtungen beider Körper vor dem Stofse entgegengesetzt, so gelten dieselben Formeln, nur ist v_1 mit dem negativen Vorzeichen in Rechnung zu bringen.

Besondere Fälle beim Stofse elastischer Körper. 1) Sind die Massen beider Körper einander gleich oder ist $m_2 = m_1$, so wird

$$c_1 = v_2,\; c_2 = v_1,$$

d. h. beide Körper setzen ihre Bewegungen mit vertauschten Geschwindigkeiten fort. War die Masse m_1 vor dem Stofse in Ruhe, und wird sie von der gleichen Masse m_2 gestofsen, so ist $v_1 = 0$, mithin nach dem Stofse $c_1 = v_2$, $c_2 = 0$, d. h. die stofsende Masse bleibt nach dem Stofse in Ruhe, und die gestofsene setzt die Bewegung mit der Geschwindigkeit der ersteren fort. In gleicher Weise pflanzt sich der Stofs durch eine beliebige Anzahl ruhender elastischer Kugeln von gleicher Masse fort, die in gerader Linie aufgehängt sind, wie sich durch die Mariottesche Maschine (Fig. 65) darthun läfst. Wird eine der äufseren Kugeln von einer gleichen Kugel mit der Geschwindigkeit v getroffen, so giebt jede Kugel die erhaltene Geschwindigkeit an die folgende ab, und der Erfolg ist, dafs nach dem Stofse alle Kugeln in Ruhe bleiben, mit Ausnahme der letzten, welche die Bewegung der stofsenden mit gleicher Geschwindigkeit fortsetzt.

Fig. 65.



2) Ist die Masse des gestofsenen Körpers m_1 so grofs, dafs m_2 gegen m_1 vernachlässigt werden darf, so wird

$$c_1 = v_1,\; c_2 = 2v_1 - v_2,$$

d. h. der gestofsene Körper erleidet keine merkliche Änderung der Geschwindigkeit, der stofsende prallt mit der Geschwindigkeit $2v_1 - v_2$ zurück. Ist $v_1 = 0$ oder trifft der stofsende Körper senkrecht gegen eine feststehende, elastische Wand, so wird $c_2 = -v_2$. Trifft der Körper die elastische Wand in schiefer Richtung, so kann man seine Bewegung in eine senkrechte und eine zur Wand parallele Komponente zerlegen. Letztere wird durch den Stofs nicht geändert, erstere aber in die entgegengesetzte verwandelt, woraus leicht ersichtlich ist, dafs der Körper unter demselben Winkel von der Wand zurückprallt, unter dem er dieselbe getroffen hat.

§ 68. **Erhaltung der lebendigen Kräfte beim Stofs elastischer Körper.** Aus den obigen Ausdrücken

$$\begin{cases} c_1 = 2c - v_1 \\ c_2 = 2c - v_2 \end{cases} \text{folgt} \quad \begin{matrix} c_1^2 = 4c^2 - 4cv_1 + v_1^2 \\ c_2^2 = 4c^2 - 4cv_2 + v_2^2, \end{matrix}$$

mithin

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = 4c^2 (m_1 + m_2) - 4c (m_1 v_1 + m_2 v_2) + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Aus dem oben (§ 66) gefundenen Wert für c folgt aber, dafs die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sich gegenseitig aufheben, oder es ist

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2,$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte (§ 43) beider Massen ist nach dem Stofs ebenso grofs wie vorher, oder es hat beim Stofs kein Gewinn oder Verbrauch von Arbeit stattgefunden.

Dagegen ergiebt sich beim Stofs **unelastischer** Körper die Summe der lebendigen Kräfte **nach** dem Stofs

$$(m_1 + m_2)\, c^2 = \frac{(m_2 v_2 + m_1 v_1)^2}{m_1 + m_2} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2.$$

Es hat also beim Stofs ein **Verlust an lebendiger Kraft** oder ein **Verbrauch von Arbeit** stattgefunden. Trifft ein unelastischer Körper senkrecht gegen eine unelastische Wand, so geht seine ganze lebendige Kraft verloren. Dieser Arbeitsverbrauch erklärt sich dadurch, dafs die unelastischen Körper durch den Stofs eine bleibende Formänderung erlitten haben, bei welcher der Widerstand der Kohäsion ihrer Teile überwunden werden mufste. In der Wärmelehre wird gezeigt werden, dafs dabei gleichzeitig eine Umwandlung der sichtbaren Bewegung in eine andere Bewegungsform der Moleküle, nämlich in **Wärme**, stattgefunden hat (§ 241).

Die Gesetze des excentrischen Stofses kugelförmiger Körper lassen sich aus denen des centralen Stofses ableiten, indem man sich die Geschwindigkeit jedes Körpers im Augenblick des Stofses in eine centrale und eine tangentiale Komponente zerlegt denkt. Erstere bewirkt eine Änderung der Bewegung in der Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte, wie beim centralen Stofs. Gleichzeitig werden aber infolge der beim Stofs stattfindenden Reibung durch die Tangentialkomponenten Umdrehungsbewegungen beider Körper erzeugt.

B. Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung tropfbar flüssiger Körper (Hydromechanik).

Gleichgewicht flüssiger Körper, insbesondere unter dem Einflufs der Schwerkraft.

§ 69. **Verschiebbarkeit der Teile; horizontale Oberfläche.** Die wesentliche Grundeigenschaft der Flüssigkeiten ist die leichte Verschiebbarkeit ihrer Teile (§ 6). Jede noch so geringe Kraft reicht hin, ihre gegenseitige Lage zu ändern, so dafs die Flüssigkeiten keine selbständige, bleibende Gestalt besitzen, sondern ihre Form durch die der umgebenden, festen Körper und die jedesmalige Richtung der auf sie wirkenden Kräfte bestimmt wird. Die Wirkung der Schwerkraft ist hinreichend, um die Teile einer Flüssigkeitsmasse auf einer horizontalen Unterlage auseinander fliefsen zu lassen. In einem Gefäfs kann eine Flüssigkeit unter dem Einflufs der Schwerkraft nur im Gleichgewicht sein, wenn ihre freie Oberfläche **horizontal**, d. h. zur Richtung der Schwerkraft senkrecht ist, indem bei jeder anderen Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche ein Herabfliefsen eines Teils der Flüssigkeit von der höheren nach der tieferen Stelle erfolgen müfste.

Im allgemeinen ist eine von einer freien Oberfläche begrenzte Flüssigkeit unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Richtung der Resultierenden dieser Kräfte in jedem Punkte zur Flüssigkeitsoberfläche (oder zu der an dieselbe gelegten Tangentialebene) senkrecht ist. — Abweichungen vom vollkommenen Flüssigkeitszustande. Verschiedener Grad der **Zähigkeit** oder **Viscosität** der Flüssigkeiten (Äther, Weingeist, Wasser, Öl, Sirup, Teer).