Auszug
aus den
Anfangs-Gründen
aller
Mathematischen Wissenschaften,
zu
Bequemerem Gebrauche Der Anfänger
auf Begehren verfertiget
von

Christian Freyherrn von Wolff,
Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und Canzler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ & Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg, der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der Königl. Groß-Brittannischen und der Königl. Preußl. Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue und sehr verbesserte Auflage.

Mit Röm. Kaiserl. und Chursächsischen PRIVILEGIIS.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in der Rengerischen Buchhandlung.
1772.

Vorrede.

Ich pflege die Mathematick aus zwey Ursachen zu recommendiren: einmahl wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführet; darnach wegen ihrer Lehren, welche so wohl in gründlicher Erkenntniß der Natur und Kunst, als im menschlichen Leben vielfältig genutzet werden. Die Ordnung ist dasjenige, warum ich die Mathematick einem jeden, der studiret, nothwendig zu seyn erachte. Denn ich bin mit PHILIPPO MELANCHTHONE der gewissen Meinung, es könne niemand etwas in gründlicher Ordnung ausführen, welcher nicht in der Mathematick sich mit Fleiß geübet. Und deswegen billige ich die Gewohnheit der Griechischen Weltweisen, welche niemanden zum Studiren liessen, der nicht vorher die Arithmetick und Geometrie erlernet hatte. Nemlich, wer was gründliches erlernen will, der muß eine Fertigkeit haben, alles deutlich zu begreifen, und genau zu untersuchen, ob dasjenige, was er höret oder lieset, der Wahrheit gemäß sey, oder nicht. Ja auch diejenigen, welche die Wahrheiten der Christlichen Religion gründlich einzusehen haben, müssen nicht mit einem blinden Kohler-Glauben zu ihren Lehrern kommen, und etwas bloß deswegen für wahr annehmen, weil es der hochgelehrte Mann, an den man sie zum nöthigen Unterricht verwiesen hat, für wahr ausgiebet. Es ist nicht genug, daß er ihnen die Wahrheit saget, sondern sie müssen es auch begreifen, daß es Wahrheit sey, das ist, daß die von ihm gemachte Erklärung der Schrift richtig, und die von ihm behauptete Sätze aus dieser richtigen Erklärung durch bündige Schlüsse folgen. Denn da Paulus nicht leiden will, daß die Gläubigen sollen **Kinder am Verständniß** werden (a), das ist, wie die Kinder ohne Ueberlegung annehmen, was ihnen von einem vorgesaget wird, von dem sie eine gute Meinung haben, und aus dem Gedächtniß nachsagen, wovon nichts in den Verstand kommen ist; so kan auch kein Lehrer, der Paulisch gesinnet ist, von seinen Zuhörern begehren, daß sie sich wie die kleinen Kinder einwickeln lassen, wie es ihm gefället. Sol-

che

(a) 1 Cor. XIV 24. conf. *Hammodi* Paraphrasis.

che Kinder müssen sich wägen und wiegen lassen von allerley Wind der Lehre (b), weil der wahre Lehrer nichts vor sich hat, warum er dieses fordern könnte, das nicht auch der Verführer für sich anführen konnte, als welcher so wohl die Wahrheit zu haben vermeinet, als der andere, dem etwan das blinde Glück darzu verholfen. Alle Fertigkeit kommet durch die Uebung, nicht aber durch Erlernung der Regeln, die man in Acht nehmen muß. Derowegen, wenn gleich in der Vernunftlehre alle Regeln auf das gründlichste erkläret werden, die man, Sachen deutlich zu begreifen und vollständig zu erweisen, in Acht nehmen muß; so kan doch die Vernunftlehre niemanden das Vermögen geben, die Regeln in fertige Uebung zu bringen. Es verhält sich hier nicht anders, wie mit dem Gesetze. Das Gesetz zeiget zwar, was gut und böse ist, und kommet dannenhero daraus Erkenntniß der Sünde; aber es giebet nicht das Vermögen zu einem tugendhaften Wandel. Die Uebung nun in deutlichen Begriffen und ausführlichen Beweisen hat man in der Mathematick, wenn man sie mit gehörigem Fleisse erlernet, und daher giebet sie das Vermögen, die Vernunftlehre ohne einigen Fehltritt auszuüben.

(b) Eph. 4, 14.

Und um dieser Ursachen willen muß die Mathematick vor der Vernunftlehre erlernet werden, wenn man in richtiger Ordnung, ohne einigen Zeit-Verlust, studiren will. Es ist aber ohne mein Erinnern klar, daß man diesen Nutzen von der Mathematick nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte Lehrart in allem auf das sorgfältigste in Acht genommen wird: denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fället dieser Nutzen der Mathematick weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträget, nach welcher sie mehr in das Gedächtniß, als in den Verstand gefasset werden. Dieses war die Ursache, warum ich meine Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften herausgab, und darinnen auch bey solchen Sachen, die in mathematischer Gewißheit völlig abzuhandeln viel zu weitläuftig fallen würden, die in der Geometrie bey den Alten übliche Ordnung, so viel möglich, in Acht nahm. Ja weil es denen, welche die Wahrheit einzusehen anfangen, nicht anders ergehet, als einem, der aus dem Dunkelen ins Helle kommet, daß er nemlich den allzugrossen Glanz des Lichtes nicht vertragen kan, sondern dadurch einigen

gen Schmerz in seinen Augen empfindet; so habe ich auch in den deutschen Anfangs-Gründen die völlige Schärfe weder im Erklären, noch im Beweisen in Acht genommen, hingegen diesen Mangel, den Anfänger und in gründlicher Erkenntniß ungeübte für eine Vollkommenheit ansehen, in dem Lateinischen Werke, sonderlich den beiden Grund-Säulen der mathematischen Wissenschaften, der Arithmetick und Geometrie, ersetzet, da ich so wohl im Erklären, als im Beweisen so weit gegangen, als immer jemand fordern kan. Nemlich die Natur thut weder in der Seele, noch in dem Cörper einen Sprung; sondern alle Veränderungen geschehen nach und nach. Derowegen wenn der Verstand des Menschen geändert werden soll, kan er nicht auf einmal zu dem höchsten Grade der Vollkommenheit gebracht werden; vielmehr muß der Anfang zur Vollkommenheit unter vielen rückständigen Unvollkommenheiten gemacht werden. Unterdessen aber muß doch der Anfang auch ein Anfang seyn, und nicht allein einer heissen, das ist, auch bey der ersten Erlernung der Mathematick muß einige Veränderung im Verstande vorgehen, und dadurch einige Fertigkeit erreichet werden, zu welcher man nicht würde kommen seyn, wenn man an deren statt etwas anderes getrieben hätte. Demnach muß die Mathematick mit den ersten Anfängern dergestalt vorgenommen werden, daß sie unvermerkt das Bild der richtigen Ordnung in ihrem Verstande erblicken, und von der Gründlichkeit einigen Geschmack bekommen. Derowegen weil vielen meine Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften zu weitläuftig geschienen, als daß sie mit Anfängern in der gemeiniglich ihnen vorgesetzten Kürze der Zeit könnten durchgegangen werden; über dieses auch einigen zu theuer vorkommen, und daher begehret worden, daß ich einen Auszug zu bequemerem Gebrauche der Anfänger, sonderlich auf Schulen, verfertigen möchte; so habe ich wegen der grossen Begierde, die ich bey mir spüre, Verstand und Tugend unter den Menschen zu einem höhern Grade zu bringen, als bisher unter ihnen angetroffen wird, mich leicht dahin bewegen lassen, diese Arbeit dergestalt über mich zu nehmen, daß ich ihnen einen Auszug gewähren möchte, der an Grösse nicht die Hälfte der Anfangs-Gründe erreichte, und doch in Ansehung des Hauptnutzens ihnen nichts nachgäbe. Damit aber dieser Nutzen nicht aussen bleibe, so achte für nöthig, noch etwas von dem rechten Gebrauch dieses Buchs zu erinnern. Man muß vor allen Dingen dahin sehen, daß die Anfänger in der Arithmetick, Geometrie und Trigonometrie wohl geübet werden. Und kan man den Anfang schon mit den kleinen Knaben machen, welche die Anfangs-Gründe der lateinischen Sprache auswendig lernen. Mit diesen nimmet man aus der Arithmetick bloß das Aussprechen der Zahlen und die vier Rechnungs-Arten in ganzen Zahlen vor, jedoch dergestalt, daß man sie allezeit fraget, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen, und sie daher besser behalten, sondern auch angewöhnet werden, nichts ohne Grund von jemanden anzunehmen; ingleichen in allem, was sie sehen und hören, um seinen Grund sich zu bekümmern: als welche Aufmunterung des Verstandes ein lehrbegieriges Gemüthe machet, und zur Besserung des Verstandes mehr beyträget, als Unerfahrne glauben dürften. Wenn sie eine Rechnungsart wohl verstehen, muß man sie auf die Erklärung führen, die davon im Anfange des Buches gegeben worden, und durch Gegenhaltung der von ihnen gemachten Exempel zeigen, wie sie dasjenige darinnen erblicken, was in der Erklärung stehet. Hierdurch werden sie lernen einen Unterscheid machen zwischen dem, was sie deutlich und undeutlich begriffen; dabey unvermerkt erlernen, wie man aus einzelen Exempeln den darinnen verborgenen allgemeinen

nen Begriff heraussuche; und zugleich sich gewöhnen, auf ihr Thun und Lassen Acht zu haben, auch nichts ohne Verstand vorzunehmen. Hören sie nun nach der Zeit bey reiferem Verstande die Regeln, nach welchen er in Erkenntniß der Wahrheit sich richtet, und die ich in meinem Buche von den Kräften des menschlichen Verstandes vorgetragen habe; so wird ihnen das durch vorige Uebung erlangte Bild bald vor Augen schweben, und werden ihnen die Exempel, darauf sie sich besinnen, alles klar und verständlich machen. In der Geometrie lehret man Anfängern anfangs nur die Figuren kennen, jedoch dergestalt, daß sie nicht allein den Namen zu nennen wissen, wenn man ihnen die Figur zeiget, sondern auch dasjenige hersagen können, woraus sie die Figur erkennen und von andern unterscheiden; zu welchen Fragen die daselbst gegebene Erklärungen dienlich sind. Hierdurch lernen sie deutliche Begriffe von undeutlichen unterscheiden: welches das erste ist, so in gründlicher Erkenntniß der Wahrheit zu beobachten. Nach diesem muß man sie auf die Zeichnung der Figuren führen, wodurch sie erkennen, wie sie möglich sind, und zugleich inne werden, daß man alsdenn erst eine Sache recht begreife, wenn man verstehet, wie sie seyn kan. Alsdenn kan man auch die Lehrsätze und die übrigen Aufgaben vornehmen, jedoch auf solche Weise, daß man nach den Bedingungen der Lehrsätze die Figuren zeichnen lässet, und nach diesem durch Hülfe der Instrumente versuchet, ob der Satz richtig befunden wird, und dasjenige eintrifft, was in der Aufgabe aufgegeben worden: welche Proben dergestalt einzurichten sind, daß sie so viel von dem Beweise in sich enthalten, als möglich ist. Ein mehreres findet man von diesen mechanischen Beweisen, wie ich sie zu nennen pflege, unter dem Worte *demonstratio mechanica* in meinem Lexico mathematico. Endlich kan man zuletzt die Geometrie durchgehen, wie sie in dem Buche gedruckt ist, jedoch dergestalt, daß man die Beweise durch Fragen durchnimmet, in der Ordnung, wie die Vördersätze mit ihren Hintersätzen in denen dazu nöthigen Schlüssen in einer unverrückten Reihe aufeinander folgen. Da man denn allezeit von demjenigen den Anfang machen muß, was entweder die Betrachtung der Figur, oder die Bedingungen der Lehrsätze und die Auflösung der Aufgabe an die Hand geben, und dadurch sich anderer Sätze erinnert, die vorhin ausgemacht worden, damit man etwas neues daraus schliessen kan: wie solches in meinem Lexico mathematico unter dem Worte *demonstratio* deutlicher gewiesen. Und finde ich es sehr dienlich, wenn man alle Sätze ordentlich

lich unter einander hinschreibet, wie man darauf kommet. Auf solche Weise wird man nicht allein einen Geschmack von gründlicher Erkenntniß bekommen, sondern auch zugleich einer Sache ordentlich nachzudenken angeführet werden. Hat man die Arithmetick und Geometrie auf eine solche Art nach und nach durchgenommen; so wird man auch ohne Anstoß in denen übrigen Disciplinen fortkommen können. Jedoch wollte ich rathen, daß man in denselben durch nöthige Experimente oder Versuche erläuterte, was sich dadurch zeigen lässet: welches schon vorher geschehen konnte, ehe man in der Geometrie sich an die ernsthaften Beweise wagete. Wenn man dieses Buch auf die vorgeschriebene Weise brauchen wird, so zweifele ich nicht, es werde mit dem Studiren bald ein anderes Aussehen gewinnen. GOtt gebe, daß es bald geschehen möge! Noch muß ich dieses erinnern, daß in der andern Auflage hin und wieder einiges verbessert, auch einiges von neuem hinzugesetzet, und einige wenige Druckfehler, welche in die erste Auflage eingeschlichen waren, so wohl im Texte, als den Figuren geändert worden. Halle, den 21. Jul. 1713.

Zusatz.

In neuer Auflage hat man die fehlende Beweise §. 198. 199. 203. 206. Geom. aus denen Anfangs-Gründen hinzugefüget; und weil zu denenselben solche Lehrsätze, die sich in dem Auszuge nicht befanden, nöthig waren, so sind einige mit einem * bemerkte §§. aus denen Anfangs-Gründen zwischen den §. 197. und 198. imgleichen zwischen den §. 205. und 206. eingerückt worden. Die dazu gehörigen Kupfer sind gleichfalls hinzugefügt, und nur die Zeichnung zum Beweis des 31sten Lehrsatzes, vom Verhältnis der Kugel gegen den Cylinder etwas geändert und deutlicher gemacht worden. Man hofft, hierdurch nicht nur Anfängern, sondern auch Lehrenden einen Gefallen erwiesen zu haben, welche sonst genöthiget sind, die fehlenden Beweise bey Erklärung des Auszuges darzu zu dictiren. Halle, den 15. April 1755.

Inhalt.

Inhalt
des ganzen Werks.

PRIVI-

Kurzer Unterricht von der Mathematischen Lehr-Art.

§. 1.

Die Lehr-Art der Mathematicorum, das ist, die Ordnung, deren sie sich in ihrem Vortrage bedienen, fänget an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grund-Sätzen, und hiervon weiter zu den Lehr-Sätzen und Aufgaben: überall aber werden Zusätze und Anmerkungen nach Gelegenheit angehänget.

§. 2. Die **Erklärungen** (*Definitiones*) sind deutliche Begriffe, dadurch die Sachen von einander unterschieden werden, und daraus man das übrige herleitet, was man von ihnen erkennet. Es sind aber dieselben zweyerley: Entweder Erklärungen der Wörter (*definitiones nominales*), oder Erklärungen der Sachen (*definitiones reales*).

§. 3. Die **Erklärungen der Wörter** geben einige Kennzeichen an, daraus die Sache erkannt werden kan, die einen gegebenen Nahmen führet. Als wenn in der Geometrie gesagt wird: ein Quadrat sey eine Figur, welche vier gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

§. 4. Die **Erklärungen der Sachen** sind ein klarer und deutlicher Begriff von der Art und Weise, wie die Sache möglich ist. Als wenn in der Geometrie gesaget wird: ein Circul werde beschrieben, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct beweget.

§. 5. Wir nennen einen **Begriff** eine jede Vorstellung in dem Verstande.

§. 6. Es ist aber mein **Begriff klar**, wenn meine Gedanken machen, daß ich die Sache erkennen kan, so bald sie mir vorkommt; als z. E. daß ich weiß, es sey diejenige Figur, welche man einen Triangel nennet.

§. 7. Hingegen ist der **Begriff dunkel**, wenn meine Gedanken nicht zulangen, die Sache, so mir vorkommt, zu erkennen. Als wenn mir eine Pflanze

Pflanze gezeiget wird, und ich bin zweifelhaft, ob es eben dieselbige sey, die ich zu anderer Zeit gesehen, und die diesen oder jenen Namen führet.

§. 8. Der **klare Begriff** ist **deutlich**, wenn ich einem sagen kan, aus was für Merkmaalen ich die vorkommende Sache erkenne. Als wenn ich sage, ein Circul sey eine Figur, die in eine in sich selbst laufende krumme Linie eingeschlossen, deren jeder Punct von dem Mittelpuncte derselben gleich weit weg ist.

§. 9. Ein **klarer Begriff** aber ist **undeutlich**, wenn man einem die Merkmaale nicht sagen kan, daraus man die vorkommende Sache erkennet: dergleichen ihr von der rothen Farbe habet.

§. 10. Es ist ein deutlicher **Begriff vollständig**, wenn man auch von den Merkmaalen, die er einschließt, deutliche Begriffe hat. Als wenn man in der angegebenen Erklärung des Circuls (§. 8.) auch einen deutlichen Begriff von der geraden Linie, von dem Puncte, von einem festen Puncte und von der Bewegung um denselben hat.

§. 11. Hingegen ist er **unvollständig**, wenn man von den Merkmaalen, die er in sich fasset, keine deutliche Begriffe hat.

§. 12. In den mathematischen Wissenschaften befleißiget man sich vor allen Dingen auf deutliche und vollständige Begriffe, sowohl in den Erklärungen der Sachen, als in den Erklärungen der Wörter.

§. 13. Daher findet man in den folgenden Erklärungen keine Wörter, welche nicht entweder schon in den vorhergehenden wären erläutert worden, oder als anders woher bekannt angenommen werden können.

§. 14. Ja wenn man in einigen Fällen mit einem undeutlichen Begriffe vergnüget seyn kan, so muß er so beschaffen seyn, daß man dazu bald ohne Mühe gelangen kan, und dannenhero von einer Sache, um deren Gegenwart man sich nicht sonderlich zu bemühen hat.

§. 15. Was die Erklärungen der Sachen betrift, so zeigen dieselbigen, wie eine Sache möglich ist, das ist, auf was für Art und Weise sie entstehen kan (§.4.). Und derowegen hat man bey denselben auf zweyerley zu sehen, nemlich auf diejenigen Dinge, welche zu ihrer Möglichkeit etwas beytragen, und auf dasjenige, was sie dazu beytragen. Z. E. wenn ein Circul erkläret wird, daß er entstehe, wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punct herum beweget; so erfordert man zu seiner Möglichkeit einen Punct und eine gerade Linie; der Punct soll unbeweglich seyn, und also die Bewegung der Linie reguliren; die gerade Linie aber soll sich dergestalt bewegen, daß sie wieder an den Ort kommt, wo die Bewegung sich angefangen hatte.

§. 16. Die Erklärungen, sowohl der Wörter, als der Sachen, können entweder vor sich insbesondere erwogen, oder mit andern verglichen werden. Betrachtet ihr dasjenige, was in den Erklärungen enthalten ist, und schliesset etwas unmittelbar daraus; so nennen wir solches einen **Grundsatz**. Z. E. wenn ihr bey der Erklärung des Circuls bedenket, daß die Linie, welche sich um den Mittelpunct herum beweget, immer einerley Länge behält: so werdet ihr bald begreifen, daß alle Linien, welche aus dem Mittelpuncte an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Diese Wahrheit nun ist ein Grundsatz. In diesem Verstande brauchet der Herr von Tschirnhausen dieses Wort; insgemein aber nennet man einen Grundsatz einen allgemeinen Satz, den man ohne Beweis einräumet. Und so nehmen das Wort *Euclides* und alle alte und neue Geometrae.

§. 17. Die Grundsätze zeigen, entweder daß etwas sey, oder daß etwas könne gethan werden. Ein Grundsatz von der ersten Art ist, den wir erst aus der Erklärung des Circuls hergeleitet, daß nemlich alle Linien, die aus dem Mittelpunct an die Peripherie gezogen werden, einander gleich sind. Hingegen ein Grundsatz von der andern Art ist, der aus der Erklärung der geraden Linie fliesset, daß nemlich von einem jeden Puncte zu einem jeden Puncte eine gerade Linie könne gezogen werden. Im Lateinischen nennet man die Grundsätze der ersten Art *Axiomata*; die Grundsätze aber der andern Art *Postulata*.

§. 18. Weil nun die Grundsätze unmittelbar aus den Erklärungen gezogen werden, haben sie keines Beweises nöthig, sondern ihre Wahrheit erhellet, so so bald man die Erklärungen ansiehet, daraus sie fliessen. Man kan demnach nicht eher versichert seyn, ob der Grundsatz wahr sey oder nicht, bis man die Möglichkeit der Erklärungen untersuchet hat. Sonst weiß man nichts mehr, als daß die Grundsätze richtig sind, woferne die Erklärungen möglich sind. Man siehet hieraus zugleich die Ursache, warum **Tschirnhausen** die Grundsätze als solche Sätze beschrieben, die durch eine Erklärung begriffen werden (§. 16).

§. 19. Mit den Grundsätzen werden unterweilen die Erfahrungen vermenget. Man nennet aber eine **Erfahrung** dasjenige, welches man erkennet, wenn man auf seine Empfindungen Acht hat. Z. E. ich sehe, daß, wenn ein Licht angezündet wird, alle Dinge, die um mich sind, sichtbar werden; diese Erkenntniß wird eine Erfahrung genennet. Und demnach sind die Erfahrungen Sätze von einzeln Dingen; weil ich nichts als einzele Dinge empfinden kan.

§. 20 Wenn man verschiedene Erklärungen gegen einander hält, und daraus schliesset, was durch einzele Betrachtungen zu erkennen unmöglich war, so nennet man solches einen **Lehrsatz** (Theorema). Z. E. wenn man in der Geometrie einen Triangel mit einem Parallelogrammo vergleichet, welches mit ihm einerley Grund-Linie und Höhe hat, und in dieser Vergleichung theils unmittelbar aus den Erklärungen dieser beiden Flächen, theils aus andern Eigenschaften derselben, die aus ihren Erklärungen schon vorher gefunden worden, schliesset, daß der Triangel nur halb so groß ist, als das parallelogrammum; wird dieser Satz: **der Triangel ist die Hälfte eines** *Parallelogrammi*, **welches mit ihm einerley Grund-Linie und Höhe hat**, ein Lehrsatz genennet.

§. 21. Es ist aber bey jedem Lehrsatz auf zweyerley zu sehen, nemlich einmal auf den Satz, darnach auf den Beweis. Jener saget aus, was einer Sache unter gewissen Bedingungen zukommen könne oder nicht: dieser aber erkläret, wie unser Verstand dazu gebracht wird, daß er sich solches von der Sache gedenken kan.

§. 22. Die Gründe des Beweises sind theils die Erklärungen derjenigen Wörter und Sachen, die in dem Lehrsatze enthalten sind, theils auch die aus gedachten Erklärungen von eben diesen Sachen schon vorhin hergeleitete Eigenschaften. Weil man nun in der Mathematik nichts zu den Gründen annehmen lässet, als was entweder in den vorhergesetzten Erklärungen, oder daher geleiteten Grund- und Lehrsätzen enthalten; so pfleget man die Erklärungen und Lehrsätze jederzeit anzuführen, auf welche man den Beweis gründet; theils damit ein jeder siehet, daß die angenommene Gründe des Beweises ihre Richtigkeit haben; theils damit diejenigen, welche die Gründe noch nicht erkannt, oder auch wol wieder vergessen haben, nachschlagen können und sich ihrer Gewißheit versichern.

§. 23. Die Art und Weise, aus den gesetzten Gründen zu schliessen, ist keine andere, als die längst in allen Büchern von der Logica oder Vernunft-Kunst beschrieben worden. Es sind die Beweise oder Demonstrationes der Mathematicorum nichts anders, als ein Haufen nach den Regeln der Vernunft-Kunst zusammengesetzter Schlüsse. Daß demnach in denselben alles durch die so genannten Syllogismos geschlossen wird; nur daß man zuweilen, oder wol meistens, einen von den Vördersätzen weglässet; weil er entweder dem Leser, der sich den Beweis zu gedenken bemühet, vor sich einfället, oder aus der beygefügten Citation leicht kan errathen werden. Dieses hat nicht allein *Clavius* an dem Beweise des ersten Lehrsatzes in den Elementis *Euclidis*; sondern auch *Herlinus* und *Dasypodius* durch einige Bücher dieser Elementorum, und *Henischius* durch die ganze Rechen-Kunst gewiesen.

§. 24. Die Aufgaben handeln von etwas, so gethan oder gemacht werden soll, und werden in drey Theile eingetheilet, in den Satz, die Auflösung, und den Beweis. In dem Satze geschiehet der Vortrag von dem, was gemacht werden soll. Die Auflösung erzählet alles, was man thun muß, und wie man eines nach dem andern zu verrichten hat, damit geschehe, was man verlanget. Endlich der Beweis führet aus: wenn das geschiehet, was in der Auflösung vorgeschrieben wird; so müsse man auch nothwendig erhalten, was man in dem Satze verlangte. Solchergestalt wird jede Aufgabe in einen

nen Lehrsatz verwandelt, wenn sie bewiesen werden soll. Es heisset nemlich überhaupt: Wenn man alles thut, wie es die Auflösung erfordert; so geschiehet, was man thun solte.

§. 25. Zuweilen geschiehet es, daß man um besonderer Ursachen willen einen Satz auf einen besondern Fall appliciret, oder auch aus demselben einen andern Satz herleitet. Dergleichen Arten der Wahrheiten werden Zusätze (Corollaria) genennet.

§. 26. Endlich in den Anmerkungen, die sowol den Erklärungen, als Grund- und Lehrsätzen, imgleichen den Aufgaben beygefüget werden, pfleget man dasjenige, was noch dunkel seyn möchte, zu erläutern; den Nutzen der vorgetragenen Lehren anzudeuten; die Historie der Erfindung benzubringen, und was etwa sonst nützliches zu wissen vorfället.

§. 27. Wer die bisher erläuterte Methode oder Lehr-Art betrachtet, wird ohne Mühe innen werden, daß sie allgemein ist, und in allen Wissenschaften gebrauchet werden soll, wenn man anders richtige Erkenntniß der Dinge verlanget. Man nennet es aber die mathematische, zuweilen auch gar die geometrische Methode oder Lehr-Art, weil bisher fast die Mathematici allein, sonderlich in der Geometrie, sich derselben bedienet.

§. 28. Und darum, weil in der Mathematik diese Lehr-Art auf das allergenaueste in Acht genommen wird, rühmet man von ihr, daß sie den Verstand des Menschen schärfe, das ist, geschickt mache, in alle Dinge, die er erkennen lernet, tiefer und richtiger einzusehen, als ein anderer, der sich so genau und ordentlich zu denken nicht angewöhnet.

§. 29. Es werden also dieses vortreflichen Nutzens diejenigen nicht theilhaftig, welche blos einige mathematische Aufgaben und andere im menschlichen Leben zwar nützliche, aber vor und an sich selbst zur Mathematik eigentlich nicht gehörige Sachen lernen, oder auch von den mathematischen Wahrheiten nur eine gemeine Erkenntniß erlangen.

Ende
des
Unterrichts von der Lehr-Art.

Anfangs-

Anfangs-Gründe der Rechen-Kunst.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Rechenkunst ist eine Wissenschaft zu rechnen, das ist, aus einigen gegebenen Zahlen andere zu finden, von denen eine Eigenschaft in Ansehung der gegebenen Zahlen bekannt gemacht wird. Z. E. man soll eine Zahl finden, die so groß ist, wie 6 und 8 zusammen.

Anmerkung.

2. Die Wissenschaft bedeutet eine Fertigkeit, alles dasjenige, was man von einer Sache behauptet, aus unumstößlichen Gründen darzuthun.

Die 2. Erklärung.

3. Wenn man viele einzele Dinge von einer Art zusammennimmt, entstehet daraus eine Zahl. Z. E. wenn man zu einer Kugel noch eine andere leget, so hat man zwey Kugeln. Leget man noch eine darzu, so hat man drey, u. s. w.

Der 1. Zusatz.

4. Also erfordert jede Zahl eine gewisse Einheit, und lassen sich keine Zahlen mit einander vergleichen, auch nicht zusammensetzen, welche nicht aus einerley Einheiten entstanden. Z. E. wenn ich sage 6;

so

so muß eine jede Einheit, die zu dieser Zahl genommen wird, ein Ding von einer Art, als etwan ein Hund, ein Apfel, ein Haus, ein Thaler, ein Groschen seyn 2c.

Der 2. Zusatz.

5. Eine Zahl wird grösser gemacht, oder vermehret, wenn man andere Zahlen von ihrer Art hinzusetzet: hingegen wird sie vermindert, wenn man eine oder mehrere Zahlen von ihrer Art wegnimmt. Und weiter kan man keine Veränderung mit den Zahlen vornehmen. Es sind aber Zahlen von einerley Art, die aus einerley Einheiten bestehen (§. 4).

Der 3. Zusatz.

6. Wenn eine Zahl vermehret wird, sind die Zahlen, so zu derselben gesetzt werden, entweder alle vor sich derselben gleich; als wenn man 6 etliche mal nimmt: oder sie sind grösser und kleiner als dieselbe; als wenn man 6, 3, 5 2c. zusammennimmt. Und dannenhero sind zwey verschiedene Arten, eine Zahl zu vermehren.

Der 4. Zusatz.

7. Eben so ist klar, daß, wenn eine Zahl vermindert wird, man entweder eine oder mehrere kleinere Zahlen nach einander von derselben wegnimmt; oder auch nur eine Zahl so viel mal von ihr wegthut, als man kan. Und demnach sind zwey verschiedene Arten, eine Zahl zu vermindern.

An=

Anmerkung.

8. Hieraus sind die vier Rechnungs-Arten, nemlich Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren entstanden, wie aus folgenden Erklärungen abzunehmen.

Die 3. Erklärung.

9. Addiren heisset eine Zahl finden, welche verschiedenen Zahlen von einer Art zusammengenommen gleich ist. Die gegebene Zahlen werden die summirenden; die gefundene aber wird die Summe, oder das Aggregat genennet.

Zusatz.

10. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten zusammengesetzet ist (§. 3.): so geschiehet das Addiren, wenn man zu der einen gegebenen Zahl die Einheiten der anderen nach und nach zählet.

Anmerkung.

11. Die Einheiten der Zahlen stellet man sich anfangs durch die Finger vor, und verrichtet das zum Addiren nöthige Zählen so lange durch die Finger, bis man in dem Gedächtnisse behalten, wie viel eine jede kleine Zahl, zu einer anderen Zahl genommen, ausmachet; z. E. daß zwey und drey fünfe, sechs und achte aber vierzehn ist.

Die 4. Erklärung.

12. Subtrahiren oder abziehen ist so viel als eine Zahl finden, welche mit einer gegebenen Zahl von einer Art zusammengenommen, einer andern gegebenen Zahl gleich ist. Die Zahl, welche durch Subtrahiren gefunden wird, heisset die Differenz, oder der Unterscheid der gegebenen Zahlen.

Zusatz.

Zusatz.

13. Weil eine jede Zahl aus vielen Einheiten bestehet (§. 3.): so geschiehet das Subtrahiren, wenn man von der einen gegebenen Zahl die Einheiten der andern nach und nach wegnimmt.

Anmerkung.

14. Was in der Anmerkung über die vorhergehende Erklärung von dem Addiren (§. 11.) erinnert worden, findet auch hier bey dem Subtrahiren statt.

Die 5. Erklärung.

15. Multipliciren ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen, in welcher die eine gegebene so vielmal enthalten ist, als die andere von den gegebenen Eines in sich begreift. Die Zahl, so gefunden wird, heisset das Product, oder *FACTVM:* die gegebenen Zahlen werden die *FACTORES* genennet.

Zusatz.

16. Multipliciren ist also nichts anders, als eine Zahl etliche mal zu sich selbst addiren (§. 9.).

Die 6. Erklärung.

17. Dividiren ist eine Zahl finden aus zwey gegebenen Zahlen, welche andeutet, wie vielmal die eine gegebene Zahl in der andern enthalten ist, und dannenhero Quotus, oder der Quotient, unterweilen auch der Exponent genennet wird.

Der 1. Zusatz.

18. Also ist dividiren nichts anders, als eine Zahl von einer andern etliche mal subtrahiren. (§. 12.).

Der 2. Zusatz.

19. Und wie vielmal die eine gegebene Zahl (welche *Divisor* genennet wird) in der anderen (die man den *Dividendum* nennet) enthalten ist, so vielmal muß Eines in dem Quotienten enthalten seyn.

Der 1. Grundsatz.

20. **Eine jede Zahl und Grösse ist ihr selber gleich.**

Anmerkung.

21. Dieser Grundsatz hat seinen Nutzen, weil man eine Zahl ansehen kan, wie sie durch verschiedene Zusammensetzungen oder Veränderungen anderer Zahlen herauskommt. Z. E. Sechs entstehet, wenn ich 4 und 2 addire; wenn ich 3 durch 2 multiplicire; wenn ich 2 von 8 subtrahire; wenn ich 12 durch 2 dividire. Also sind vermöge unseres Grundsatzes die Summe von 4 und 2, das Product aus 3 und 2, die Differentz zwischen 2 und 8, der Quotient aus 12 und 2 einander gleich.

Der 2. Grundsatz.

22. **Wenn zwey Zahlen oder Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.**

Anmerkung.

23. Ich habe z. E. drey Haufen Geld. In dem ersten sind so viel Thaler, als wie in dem andern; in dem dritten gleichfalls so viel als in dem andern. Also muß auch so viel in dem dritten als in dem ersten seyn. Exempel machen die Erklärungen und Grundsätze klar, welches ich einmal für allemal erinnere.

Der 3. Grundsatz.

24. Wenn man gleiches zu gleichem addiret, so kommen gleiche Summen heraus. Wenn man aber gleiches zu dem grössern und zu dem kleinern addiret: so ist die Summe in dem ersten Falle grösser, als in dem anderen.

Der 4. Grundsatz.

25. Wenn man gleiches von gleichem subtrahiret: so bleibet gleiches übrig. Wenn man aber gleiches von dem grösseren und kleineren subtrahiret: so bleibet in dem ersten Falle mehr übrig, als in dem andern.

Der 5. Grundsatz.

26. Wenn man gleiches durch gleiches multipliciret: so kommen gleiche Producte heraus. Wenn man aber das grössere und das kleinere durch gleiches multipliciret: so ist das Product in dem ersten Falle grösser, als in dem anderen.

Der 6. Grundsatz.

27. Wenn man gleiches durch gleiches dividiret: so sind die Quotienten einander gleich. Wenn man aber das grössere und das kleinere durch gleiches dividiret: so ist der Quotient in dem ersten Falle grösser, als in dem anderen.

Zusatz.

28. Daher, wenn zwey ein Exempel rechnen, und keiner von beiden fehlet, muß einerley herauskommen: so sie aber verschiedenes herausbringen, muß einer von beiden gefehlet haben.

Der 7. Grundsatz.

29. Was grösser ist als eine von zwey gleichen Grössen, das ist auch grösser als die andere von denselben.

Der 8. Grundsatz.

30. Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich; und also grösser als ein jedes von seinen Theilen.

Der 1. willkührliche Satz.

31. Man gehe im Zählen nicht weiter fort, als bis auf zehen. Wenn man bis zehen gezählet, so fange man wieder von neuem an, nur daß man jederzeit dazu setze, wie vielmal man schon zehen gezählet.

Anmerkung.

32. Dieses ist das allgemeine Gesetz, darnach man sich im Zählen richtet: und weil wir desselben von Jugend auf so gewohnt sind, scheinet es eine Nothwendigkeit zu haben. Die Ursache aber, warum man nur bis auf zehen zählet, ist sonder Zweifel daher zu holen, weil die Menschen die Sachen an ihren Fingern zu zählen pflegen, ehe sie sich im Rechnen geübet (§. 11.).

Zusatz.

33. Also hat man für jede von den zehen Zahlen einen besondern Namen vonnöthen, und wiederum andere Namen, dadurch die Vielheit der Zehner bemerket wird. Jene sind eines, zwey, drey, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehen; diese aber zwanzig,

dreyßig, vierzig, funfzig, sechzig, siebenzig, achzig, neunzig, hundert.

Der 2. willkührliche Satz.

34. Gleichwie man zehenmal zehen hundert nennet; also nenne man ferner zehenmal hundert tausend; tausendmal tausend eine Million; tausendmal tausend Millionen eine Billion; tausendmal tausend Billionen eine Trillion, oder dreyfache Million, u. s. w.

Anmerkung.

35. Diese Benennung geschiehet bloß zu dem Ende, damit man sich in grossen Zahlen nicht verwirre, sondern von jedem Theile derselben einen deutlichen Begriff formiren könne.

Der 3. willkührliche Satz.

36. Die neun Zahlen bemerke man mit folgenden Zeichen: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Damit man aber auch die Zehener, Hunderte, Tausende u. s. w. dadurch andeuten könne, so gebe man ihnen ihre Bedeutung von der Stelle, in welcher sie stehen. Nemlich wenn sie entweder allein, oder in der ersten Stelle zur Rechten anzutreffen sind, sollen sie Einer bedeuten, in der anderen Zehener, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende u. s. w. Die leeren Stellen werden mit der Nulle 0 vollgefüllet, welche nemlich andeutet, daß darinnen keine Zahl anzutreffen.

Die

Die 1. Aufgabe.

37. **Eine geschriebene Zahl auszusprechen, das ist, einem jeden Zeichen in derselben seinen Werth zuzueignen.**

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen, von der Rechten an gegen die Linke zu, vermittelst kleiner Strichlein, und eignet jeder Classe drey Stellen zu. Am Ende gegen die Linke mögen drey oder wenigere übrig bleiben.
2. Ueber die Zahl, welche nach dem andern Strichlein kommt, machet einen Punct, und über die, so nach dem vierten folget, zwey Puncte, u. s. w.
3. Sprechet ein blosses Strichlein durch **Tausend** aus, einen Punct durch **Million**, zwey Puncte durch **Billion**, u. s. w. Hingegen die erste Zahl gegen die Linke in einer Classe, durch **Hunderte**; die mittlere durch **Zehener**, und die letzte durch **Einer**. So ist geschehen, was man verlangte. Z. E. Wenn ihr folgende Zahl aussprechen wollet, 2⋰, 125, 473⁚, 613, 578˙, 432, 597. so saget: zwey Trillionen, hundert und fünf und zwanzig tausend, vierhundert und drey und siebenzig Billionen, sechshundert und dreyzehen tausend, fünfhundert und acht und siebenzig Millionen, vierhundert zwey und dreyßig tausend, fünfhundert sieben und neunzig.

Beweis.

Es ist alles klar aus den vorhergesetzten willkührlichen Sätzen (31. 34. 36.).

Die 2. Aufgabe.

38. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1. Schreibet die gegebenen Zahlen dergestalt unter einander, daß die einfache unter den einfachen, die Zehener unter den Zehenern, die Hunderte unter den Hunderten u. s. w. zu stehen kommen (§. 4.).
2. Ziehet unter den geschriebenen Zahlen einen Strich, um die Verwirrung zu vermeiden: und
3. Zählet besonders zusammen die Einer, und schreibet unter sie ihre Summe. Enthält die etliche Zehener in sich, so zählet dieselben zugleich mit den gegebenen Zehenern zusammen, und setzet ihre Summe gleichfalls unter die Reihe der Zehener. Wenn ihr so fortfahret, werdet ihr endlich die verlangte Summe aller Zahlen heraus bekommen.

Oder: Streichet in jeder Reihe so vielmal zehen weg, als ihr könnet, und zählet stets so viel Einheiten zu der folgenden, wie vielmal ihr zehen weggestrichen: was übrig bleibet, setzet unter den Strich an seinen gehörigen Ort, wie vorhin.

Z. E. wenn ihr folgende Zahlen addiren sollet,

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 524 \\ 63 \\ \hline 4165 \end{array}$$

so sprechet: 4 und 3 ist 7, noch 8 darzu ist 15. Setzet 5 unter die Einer: den 1 Zehener aber zählet zu den gegebenen Zehenern, und sprechet ferner: 1 (nemlich Zehener) und 6 sind 7 (Zehener), noch 2 darzu sind 9, noch 7 dazu sind 16 (Zehener). Setzet die 6 Zehener unter die Zehener der gegebenen Zahlen, und die übrigen 10 Zehener, das ist 1 Hundert, zählet zu den Hunderten der gegebenen Zahlen 2c.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung enthält die gefundene Zahl in sich alle Einer, alle Zehener, alle Hunderte, alle Tausende u. s. w. der vorgegebenen Zahlen, das ist, alle ihre Theile. Und also ist sie so groß, wie alle gegebene zusammengenommen (§. 30.): folgends sind die gegebenen Zahlen zusammen-addiret worden (§. 9.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

39. Wenn ihr alle Theile der gegebenen Zahlen als lauter Einer ansehet, so werdet ihr wahrnehmen, daß ihr in die Summe nur allezeit den Ueberschuß der summirten Zahlen über 9 schreibet. Denn an statt funfzehen schreibet ihr die Zahlen 1 und 5, welche 6 machen, wenn man sie beide für Einer hält, und also der Ueberschuß der Zahl funfzehen über neune sind. Eben so schreibet ihr an statt sechzehen unter die Reihe der Zehener 6, und unter die Hunderte 1, welche beide Zahlen zusammengenommen 7 ausmachen, wenn man sie für Einer ansiehet, und demnach der Ueberschuß von sechzehen über neune sind u. s. w. Hieraus ist klar, daß man bey Summirung der Zahlen bey jeder Reihe so viel Neunen wegläßet, als man Einheiten zu der folgenden Reihe zählet.

Die 2. Anmerkung.

40. Wollet ihr demnach wissen, ob die gefundene Zahl so groß sey, wie die gegebenen zusammengenommen, so merket (1) die besagten Einheiten auf der Seite, und nach vollbrachter Rechnung zählet sie zusammen, damit ihr sehet, wie vielmal 9 im Summiren weggelassen worden. (2) Werfet über dieses noch aus der Summe so vielmal 9 weg, als ihr könnet, und zählet die im Summiren weggelassenen mit dazu; die Zahl aber, so übrig bleibet, merket sowohl, als die Anzahl der weggeworfenen Neunen. (3) Endlich gebet auch Acht, wie vielmal ihr aus den gegebenen Zahlen 9 wegwerfen könnet, und was zuletzt für eine Zahl übrig bleibet. Denn, so die Anzahl der weggeworfenen Neunen beiderseits gleich ist, auch einerley Zahl beiderseits übrig bleibet, so ist die gefundene Zahl so groß, wie die gegebenen zusammengenommen (§. 25.), und ihr seyd daher gewiß, daß ihr nach der Regel richtig verfahren (§. 38). Als, in dem vorigen Exempel sind währender Rechnung drey Neunen weggelassen worden: und eine lässet sich noch von der gefundenen Summe wegwerfen, worauf 7 übrig bleiben. Wenn man aber aus den gegebenen Zahlen, die über der Linie stehen, gleichfalls 4 mal 9 ausstreichet, bleiben auch 7 übrig. Demnach ist recht addiret worden. Man kan sich auch der Richtigkeit im Rechnen versichern, wenn man ein Exempel auf verschiedene Art rechnet, entweder auf beide vorgeschriebene Manieren, oder daß man einmal von unten hinauf, das anderemal von oben herunter die Zahlen in einer Reihe zusammenzählet. Denn einerley Irrthum lässet sich nicht wohl begehen, wenn man auf verschiedene Art rechnet.

Die 3. Anmerkung.

41. Die Mathematici haben ein besonderes Zeichen, dadurch sie die Addition andeuten, nemlich das Zeichen †, welches sie durch mehr aussprechen. Demnach schreiben sie die Summe zweyer Zahlen, als 3 und 7, also: 3 † 7.

Die 4. Anmerkung.

42. In benannten Zahlen streichet man so viele aus, als zusammen ein Ganzes von der grösseren Art ausmachen, und setzet dafür eines zu der folgenden Reihe. Z. E. von den Pfennigen streichet man so vielmal 12 aus, als man kan, und setzet dafür jedesmal 1 zu den Groschen, weil 12 Pfennige einen Groschen machen. Von den Groschen wirfet man auf ein-

einmal 24 weg, und schreibet dafür 1 zu den Thalern, weil 24 Groschen einen Thaler machen. Und auf eine gleiche Art verfähret man in andern Fällen. Als:

15 Thlr.	20 gr.	10 pf.
28	14	2
30	16	6
75 Thlr.	3 gr.	6 pf.

Die 3. Aufgabe.

43. **Eine kleinere Zahl von einer grössern zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Schreibet die kleinere Zahl unter die grössere, auf die Art, wie im Addiren geschehen (§. 38.).
2. Ziehet unter die geschriebenen Zahlen eine Linie.
3. Subtrahiret besonders die **Einer** von den **Einern**, die **Zehener** von den **Zehenern**, die **Hunderte** von den **Hunderten** u. s. w. und setzet allezeit die Zahl, so übrig bleibet, an ihren gehörigen Ort unter die Linie: nemlich was bey den **Einern** übrig bleibet, unter die **Einer**; was bey den **Zehenern** übrig bleibet, unter die **Zehener** u. s. w.
4. Geschiehet es aber, daß eine grössere Zahl von der kleinern weggenommen werden soll; so nehmet aus der folgenden Reihe eines weg, und setzet es in die vorhergehende, wo es zehen gilt (§. 36). Also kan von der um zehen ver-

vermehrten Zahl die Subtraction geschehen: die Zahl aber in der folgenden Stelle, ist um eines kleiner worden, welches durch einen Punct bemerket wird.

5. Endlich wenn in der folgenden Stelle zur Linken 0 stehet, gehet so weit fort gegen die Linke, bis ihr eine Zahl antreffet, und nehmet von derselben 1 weg, so ist es eben so viel, als wenn ihr in alle leere Stellen 9, und in die, wo man nicht subtrahiren konnte, 10 setzet (§. 36).

Nach diesen Regeln kan man eine jede gegebene Zahl subtrahiren. W. Z. E.

Z. E. wenn ihr folgende Zahlen von einander subtrahiren sollet,

$$\begin{array}{r} 9800403459 \\ 4743865263 \\ \hline 5056538196 \end{array}$$

so sprechet: 3 von 9 lässet 6, und schreibet 6 unter die Linie in die Stelle der Einer. Sprechet ferner: 6 (nemlich Zehener) von 5 kan ich nicht (wegnehmen). Borget demnach 1 von 4 in der folgenden Stelle; so bleibet in derselben 3, und ihr habet 15 an statt der 5. Nun nehmet 6 von 15, so bleiben 9 übrig, welche ihr wiederum unter die Linie in die Stelle der Zehener schreibet. Hierauf fahret fort, und sprechet: 2 von 3 lässet 1; 5 von 3 kan ich nicht (subtrahiren), derowegen borge ich 1 von 4, und setze es in die leere Stelle, so habe ich in derselben 10; davon nehme ich 1 weg, so bleibet in derselben 9, und an statt 3 bekomme

komme ich 13. Nun nehmet 5 von 13, so bleiben 8 übrig, und 6 von 9 lässet 3. Weil 8 von 3 wieder nicht angehet, so nehmet 1 von 8, und setzet es in die erste leere Stelle, so habet ihr daselbst 10 und dorten noch 7. Von den 10 nehmet 1 weg, und setzet es in die andere leere Stelle gegen die Rechte, so bleiben an statt 10 noch 9, und in dieser habt ihr 10. Davon nehmet wieder 1 weg, so bleiben in derselben noch 9, und an statt 3 bekommet ihr 13. Sprechet nun: 8 von 13 lässet 5; 3 von 9 lässet 6; 4 von 9 lässet 5; 7 von 7 lässet 0; 4 von 9 lässet 5. Wenn ihr nun das übrige allezeit unter die Linie an seinen gehörigen Ort schreibet, so habet ihr die verlangte Zahl gefunden.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung hält die gefundene Zahl in sich den Rest aller Einer, aller Zehener, aller Hunderte, aller Tausende u. s. w. das ist, den Rest aller Theile. Da nun der Rest aller Theile zusammen dem ganzen Reste gleich ist (§. 30.); so ist die gefundene Zahl der Rest, welcher übrig bleibet, wenn man eine Zahl von der andern wegnimmt, und folgends mit der weggenommenen Zahl zusammen der andern gegebenen Zahl gleich. Derowegen geschiehet durch die gegebenen Regeln die Subtraction (§. 12.); W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

44. Wollet ihr wissen, ob ihr recht gerechnet, so addiret, nach der zweyten Aufgabe (§. 38), die gefundene Zahl zu der kleineren von den gegebenen; die Summe ist die grössere (§. 12.).

98.0.0.4.0.3 4.5 9
4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
5 0 5 6 5 3 8 1 9 6
9 8 0 0 4 0 3 4 5 9

Die 2. Anmerkung.

45. Das Zeichen der Subtraction ist —, welches man durch weniger ausspricht: daher schreibet man den Unterscheid zweyer Zahlen, als 8 und 5, also: 8 — 5, und spricht ihn aus: 8 weniger 5.

Die 3. Anmerkung.

46. In benannten Zahlen ist die Subtraction von der vorigen nur darinnen unterschieden, daß die von einer grösseren Art geborgte Zahl nicht 10, sondern so viel gilt, als die grössere die kleinere in sich begreifet. Z. E. 1 von denen Groschen geborget, gilt in der Stelle der Pfennige 12; hingegen 1 von den Thalern geborget, in der Stelle der Groschen 24: 1 von den Pfunden geborget, in der Stelle der Lothe 32, als:

von	12 Thlr.	18 gr.	4 pf.	von 32 Pf.	17 L.
abgezogen	8	20	6	12	24
bleiben	3 Thlr.	21 gr.	10 pf.	19 Pf.	25 L.

Die 4. Aufgabe.

47. **Das Einmal Eins aufsetzen, das ist, ein Täflein verfertigen, in welchem alle Producte zu finden, die herauskommen, wenn man die Einer durch einander multipliciret.**

Auflösung.

1. Theilet jede Seite eines Quadrats in 9 gleiche Theile, und zerschneidet es durch Querstriche in lauter kleine Fächer.

2. Oben

2. Oben in der ersten Reihe derselben und zur Linken schreibet die Zahlen von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung.
3. Addiret 2 zu sich selbst, und setzet das Product 4 unter die 2: dazu addiret noch 2, so ist 6 das Product aus 3 in 2: zu 6 addiret noch einmal 2, so habet ihr 8, das Product aus 2 in 4.
4. Wenn ihr nun auf gleiche Weise die übrigen Zahlen findet, und in ihre gehörige Fächer eintraget; so ist das **Einmal Eins** fertig, welches man machen solte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Anmerkung.

48. Das Einmal Eins muß man auswendig lernen, wenn man im Multipliciren und Dividiren hurtig fortkommen will. So lange man es aber noch nicht inne hat, muß es jederzeit, wenn man multipliciret oder dividiret, bey der Hand seyn.

Die 5. Aufgabe.

49. Eine gegebene Zahl durch eine andere gegebene Zahl zu multipliciren.

Auflösung.

1. Schreibet die eine Zahl dergestalt unter die andere, wie in der Addition geschehen (§. 38.).
2. Unter die geschriebenen Zahlen ziehet eine Linie.
3. Schreibet aus dem Einmal Eins darunter alle Producte aus jedem Theile der unteren Zahl in jeden von der oberen, und zwar dergestalt, daß ihr allezeit die Zehener von einem Producte zum folgenden Producte zählet, und jede Reihe der Producte um eine Stelle weiter hineinrücket.
4. Endlich addiret (§. 38.) die Producte zusammen: so ist die Summe derselben das Product, welches man finden solte.

Z. E. wenn ihr 38476 durch 35 multipliciret, so schreibet die Zahlen folgender Gestalt unter einander:

$$\begin{array}{r} 38476 \\ 35 \\ \hline 192380 \\ 115428 \\ \hline 1346660 \end{array}$$

und sprechet: 5 mal 6 ist 30. Schreibet die 0 unter die 5 und sprechet weiter: 5 mal 7 ist 35, 3 dazu (so euch zuvor überblieb) ist 38. Schreibet 8 neben 0 gegen die Linke, und sprechet ferner:

4 mal

4 mal 5 ist 20, 3 dazu ist 23. Schreibet 3 neben 8, und saget: 5 mal 8 ist 40, 2 dazu ist 42. Schreibet 2 neben 3, und saget abermal: 3 mal 5 ist 15, 4 dazu ist 19. Schreibet 19 neben 2, so habet ihr die obere Zahl 5 mal genommen. Verfahret nun auf gleiche Weise mit 3, und saget: 3 mal 6 ist 18. Schreibet 8 um eine Stelle weiter hinein gegen die Linke, und sprechet ferner: 3 mal 7 ist 21, 1 dazu ist 22. Schreibet 2 neben die 8 gegen die Linke, u. s. w. Endlich addiret die beiden gefundenen Zahlen, so ist die Summe 1346660 das gesuchte Product.

Beweis.

Vermöge der geschehenen Rechnung und des Einmal Eins (§. 47.) begreifet die erste Reihe der Zahlen, die addiret werden, die obere Zahl so vielmal in sich, als die erstere von der unteren gegen die Rechte Eines in sich enthält. Und weil die folgenden Reihen immer um eine Stelle weiter hinein gerücket werden, so begreifet jede von denselben die obere Zahl so vielmal in sich, als jede von den folgenden der unteren Eines in sich enthält (§. 36.). Derowegen, wenn man alle Reihen zusammen addiret, so muß die Summe die obere Zahl so vielmal in sich enthalten, als die untere Eines in sich begreifet (§. 9.). Folglich hat man die obere Zahl durch die untere multipliciret (§. 15.). W. Z. E.

Anmerkung.

50. Wenn an einer Zahl Nullen hangen, so darf man dieselben nur hinten an das Product der übrigen Zahlen an einander anhängen, wie aus beygesetzten Exempeln zu ersehen.

381	4750
200	300
76200	1425000

Sonst ist noch zu merken, daß das Zeichen der Multiplication ein bloßer (.) ist. Z. E. wenn ich bloß andeuten will, daß 3 durch 4 multipliciret werden soll; so schreibe ich 3. 4, welches so viel heisset, als 3 durch 4 multipliciret. Dividiret man (§. 51) das Product durch eine von den gegebenen Zahlen, z. E. 1346660 durch 35, so kommt die andere Zahl 38476 heraus. Und dieses ist die Probe, ob man recht gerechnet oder nicht (§. 15. 17.)

Die 6. Aufgabe.

51. **Eine gegebene Zahl durch eine andere kleinere Zahl zu dividiren.**

Auflösung.

Der erste Fall. Wenn der Divisor oder Theiler nur ein Einer ist, so

1. Setzet ihn unter die erste Zahl zur Linken, und fraget, wie vielmal er in derselben enthalten sey. Die Zahl, so solches andeutet, setzet an statt des Quotienten hinter den zur Rechten gemachten Strich.
2. Mit diesem Quotienten multipliciret den Divisorem, und ziehet das Product von der Zahl ab, die ihr dividiret, streichet dieselbe aus, und setzet, was überbleibet, darüber.
3. Rücket den Divisorem um eine Stelle fort, und fraget abermals, wie vielmal derselbe in der zur Linken übergebliebenen und zur Rechten

über ihm ſtehenden Zahl zuſammen enthalten ſey, und verfahret im übrigen wie vorhin.

Wenn ihr dieſes durch alle Zahlen fortführet, ſo werdet ihr den verlangten Quotienten finden.

Z. E. Man ſoll 7856 durch 3 dividiren. Setzet 3 unter 7, und ſprechet: 3 in 7 habe ich 2 mal. Schreibet 2 hinter den zur Rechten gemachten Strich, und ſprechet ferner: 2 mal 3 iſt 6: 6 von 7 läſſet 1. Rücket 3 unter 8, und ſaget: 3 in 18 habe ich 6 mal. Setzet 6 zu dem erſten Theile des Quotienten, und ſprechet: 3 mal 6 iſt 18; 18 von 18 hebet ſich auf. Wenn ihr nun auf gleiche Weiſe fortfahret, ſo findet ihr den gantzen Quotienten 2618, und bleiben 2 übrig. Daraus zu erſehen, daß die vorgegebene Zahl ſich nicht völlig in 3 Theile theilen läſſet.

~~1~~ ~~2~~2	
~~7856~~	2618
~~3333~~	

Beweis.

Weil man aus dem Einmal Eins wiſſen kan, wie vielmal eine Zahl aus der Claſſe der Einer in einer andern Zahl enthalten iſt, welche aus der Multiplication der Einer durch einander entſtanden (§. 47.); ſo iſt klar, daß die gefundene Zahl andeutet, wie vielmal der Diviſor in den Tauſenden, Hunderten, Zehenern und Einern, das iſt, in der vorgegebenen Zahl (§. 30.) enthalten ſey. Derowegen iſt ſie der geſuchte Quotient, und man hat die vorgegebene Zahl durch die andere dividiret (§. 17.). W. Z. E.

Der

Der andere Fall. Wenn der Divisor aus mehr als einem Theile bestehet, so

1. Fanget an, denselben unter der ersten Zahl zur Linken und so fort gegen die Rechte zu schreiben, und machet wie vorhin hinter die Zahl einen Strich; damit der Quotient nicht mit der Zahl, die man dividiren soll, vermenget werde.
2. Untersuchet durch Hülfe des Einmal Eins, wie vielmal die erste Zahl des Divisoris in der ersten Zahl der andern, die man dividiren soll, enthalten sey (§. 47.).
3. Multipliciret durch diesen Quotienten den ganzen Divisorem, und gebet Acht, ob sich das Product von den Zahlen, die über ihm stehen, abziehen lässet.
4. Wenn es angehet, so schreibet die vorhin gefundene Zahl in die Stelle des Quotienten hinter den Strich, und ziehet das Product würklich ab. Die Zahlen, von welchen ihr abziehet, streichet aus, und was übrig bleibet, setzet darüber. Gehet es aber nicht an, so nehmet zum Quotienten eines oder auch mehrere weniger, bis ihr das Product abziehen könnet.
5. Rücket euren Divisorem um eine Stelle fort gegen die Rechte, und verfahret wie vorhin, bis endlich der Divisor nicht weiter fortgerücket werden kan: so ist geschehen, was man verlangete.
6. Wollet ihr wissen, ob ihr recht gerechnet: so multipliciret den Quotienten durch den Divisorem, und addiret dazu, was überblieben ist: so

so kommet die Zahl heraus, die zu dividiren aufgegeben ward.

Z. E. Man soll 7856 durch 32 dividiren. Setzet 32 unter 78 und sprechet: 3 in 7 habe ich

$$\begin{array}{r|l} \cancel{1}1 & \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{7} & \\ \cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}6 & 245 \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} & \\ \cancel{3}\cancel{3} & \end{array}$$

2 mal. Multipliciret 2 mit 32, so kommet heraus 64. Weil nun dieses Product sich von 78 abziehen lässet: so schreibet 2 anstatt des Quotienten, und was nach geschehener Subtraction übrig bleibet, 14, schreibet über 78. Rücket euren Divisorem um eine Stelle fort, und sprechet 3 in 14 habe ich 4 mal. Multipliciret 4 mit 32, so kommet heraus 128. Weil nun dieses Product sich von 145 abziehen lässet; so schreibet 4 in die Stelle des Quotienten, und was nach geschehener Subtraction übrig bleibet, 17, schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Rücket euren Divisorem abermal um eine Stelle fort, und sprechet: 3 in 17 habe ich 5 mal. Multipliciret 32 mit 5. Weil das Product 160 sich von 176 abziehen lässet; so schreibet 5 zu dem Quotienten, und was nach geschehener Subtraction übrig bleibet, 16, schreibet über die ausgestrichenen Zahlen darüber. Die gefundene Zahl 245 ist der verlangte Quotient.

Probe:

```
  245
   32
 ----
  490
 735
 ----
 7840
   16
 ----
 7856
```

Beweis.

Der Beweis ist fast eben wie in dem ersten Falle. Nur ist zu merken, daß, weil man vermöge des Einmal Eins nicht wissen kan, wie vielmal der ganze Divisor in den darüber geschriebenen Zahlen enthalten ist, man setze, es stecke so vielmal darinnen, als die erste Zahl des Divisoris zur Linken in der über ihr geschriebenen Zahl. Denn ob dieses gleich nicht jederzeit eintrifft; so kann es einen doch nicht in Irrthum verleiten, weil die Probe gleich angestellet wird, wenn man den Divisorem durch den angenommenen Quotienten multipliciret, und ihn also vermittelst derselben so lange um eines vermindert, bis man den rechten Quotienten erhält. Die angegebene Probe ist aus den Erklärungen der Multiplication (§. 15.) und Division (§. 17.) klar.

Die 7. Erklärung.

52. Wenn man zwey Zahlen (4 und 12) dergestalt mit einander vergleichet, daß man

man auf ihren Unterschied (8) siehet, der durch die Subtraction gefunden wird, nennet man ihre Relation, die sie gegen einander haben, eine arithmetische Verhältniß: siehet man aber auf den Quotienten (3), der durch die Division gefunden wird, eine geometrische Verhältniß. Der Quotient, welcher andeutet, wie vielmal die kleinere Zahl in der grösseren enthalten ist, heisset der Name der Verhältniß (NOMEN sive EXPONENS RATIONIS).

Die 8. Erklärung.

53. Wenn in zweyen oder mehreren arithmetischen Verhältnissen (3. 5. und 6. 8.) der Unterschied der Glieder, in geometrischen (3. 12. und 5. 20.) der Name der Verhältniß einerley ist, so nennet man sie ähnlich, und ihre Aehnlichkeit eine Proportion. Die ähnliche Verhältnisse werden auch gleiche Verhältnisse genennet.

Anmerkung.

54. Die Zahlen, so eine arithmetische Proportion mit einander machen, schreibet man also: 3. 5 ˙.˙ 6. 8, oder besser, nach meiner Art: 3 — 5 = 6 — 8; die in einer geometrischen neben einander stehen, dergestalt: 3. 12 :: 5. 20. oder besser mit dem Herrn von Leibnitz: 3 : 12 = 5 : 20. In beiden spricht man: Wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so die dritte zu der vierten. Diese Redens-Art hat in dem ersten Falle den Verstand: Um wie viel die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel ist die dritte Zahl grösser oder kleiner, als die vierte. Hingegen in dem andern Falle muß man sie dergestalt erklären: Wie vielmal die erste Zahl die andere in sich enthält, oder in derselben enthalten ist, eben

so vielmal enthält die dritte Zahl die vierte in sich, oder ist in derselben enthalten.

Die 9. Erklärung.

55. Zuweilen vertrit das andere Glied zugleich die Stelle des dritten, und dann nennet man es PROPORTIONEM CONTINVAM. Ist nun dieselbe arithmetisch, so schreibet man sie also: ∸ 3.6.9. oder auch 3 — 6 = 6 — 9; ist sie geometrisch, folgender massen: ∺ 3.6.12. oder auch 3 : 6 = 6 : 12.

Die 10. Erklärung.

56. Eine Progeßion wird genennet eine Reihe Zahlen, die in einer arithmetischen oder auch geometrischen Verhältniß fortgehen; als im ersten Falle 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27: im andern 3. 6. 12. 24. 48. 96. Und zwar nennet man die erste eine arithmetische: die andere aber eine geometrische Progreßion.

Der 9. Grundsatz.

57. Wenn zwey Verhältnisse einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich. Z.E. 1:4 = 3 : 12 und 1 : 4 = 5 : 20. Derowegen ist 3 : 12 = 5 : 20.

Der 1. Lehrsatz.

58. Wenn man zwey Zahlen (3 und 6) durch eine Zahl (4) multiplicirer; so verhalten

halten sich die Producte (12 und 24), wie die multiplicirten Zahlen (3 und 6).

Beweis.

Denn wenn ich eine Zahl (4) durch zwey andere (3 und 6) multiplicire, so ist dieselbe in dem andern Product um so vielmal mehr enthalten, als in dem ersten, als die erste Zahl (3) in der anderen (6) enthalten ist (§. 15.). Als, weil in unserem Exempel 6 zweymal so groß ist als 3; so nehme ich auch 4 zweymal so viel, wenn ich durch 6 multiplicire, als wenn ich durch 3 multiplicire; massen das dreyfache zweymal genommen das sechsfache ausmachet. Nemlich im ersten Falle nehme ich 4 dreymal; im anderen Falle zweymal dreymal. Derowegen ist klar, daß das erste Product (12) in dem andern (24) so vielmal enthalten ist, als die erste multiplicirte Zahl (3) in der andern (6); als in dem ganzen Exempel zweymal. W. Z. E.

Zusatz.

59. Wenn man zwey Zahlen durch eine dritte dividiret, so müssen die Quotienten sich verhalten, wie die dividirten Zahlen: denn man kan sie ansehen, als wären sie durch Multiplication der Quotienten mit dem Divisore entstanden (§. 15. 17.).

Die 11. Erklärung.

60. **Wenn man ein Ganzes in gleiche Theile genau eintheilet, und nimmet einen oder etliche Theile derselben, so nennet man es einen Bruch.**

Der 4. willkührliche Satz.

61. Man schreibet ihn aber mit zwey Zahlen, so unter einander gesetzet und durch einen Strich von einander unterschieden werden, von denen die untere andeutet, in wie viel gleiche Theile das Ganze eingetheilet worden; die obere aber, wie viel solcher Theile mir zugehören. Jene wird der Nenner, diese der Zähler genennet. Z. E. der Thaler soll in drey gleiche Theile getheilet werden, und ich soll zwey derselben bekommen, so schreibe ich den Bruch also: $\frac{2}{3}$.

Der 1. Zusatz.

62. Daher urtheilet man die Grösse des Bruches aus der Verhältniß des Zählers zu dem Nenner. Denn stecket jener in diesem vielmal, so ist der Bruch klein, als $\frac{3}{37}$; stecket er wenigmal darinnen, so ist er groß, als $\frac{2}{3}$. Hingegen wenn die Zähler in ihren Nennern gleichvielmal enthalten sind, so sind die Brüche einander gleich, als $\frac{3}{6}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{5}{10}$. $\frac{25}{50}$. Und daher ist er mehr als ein Ganzes, wenn der Zähler grösser als der Nenner, als $\frac{35}{24}$. Denn $\frac{24}{24}$ ist ein Ganzes, und also habe ich $\frac{11}{24}$ über ein Ganzes.

Der 2. Zusatz.

63. Wenn man demnach den Nenner und Zähler eines Bruches ($\frac{4}{6}$) durch Eine Zahl (2) multipliciret oder dividiret; so sind die Brüche, so

so herauskommen ($\frac{8}{12}$ und $\frac{2}{3}$) dem gegebenen ($\frac{4}{6}$) gleich (§. 58. 59.).

Die 7. Aufgabe.

64. **Einen Bruch aufzuheben, das ist, an statt eines gegebenen Bruches ($\frac{20}{48}$) einen andern zu finden, der mit kleineren Zahlen geschrieben wird, aber dem gegebenen, dem Werthe nach, gleich ist.**

Auflösung.

Dividiret den Nenner (48) und den Zähler (20) des gegebenen Bruchs ($\frac{20}{48}$) durch einerley Zahl (4), so formiren (§. 63.) die herauskommenden Zahlen (12 und 5) den neuen Bruch ($\frac{5}{12}$).

Die 8. Aufgabe.

65. **Verschiedene Brüche unter einerley Benennung zu bringen, das ist, anstatt einiger Brüche, die verschiedene Nenner haben, andere zu finden, die einerley Nenner haben, und den gegebenen gleich sind.**

Auflösung.

1. Wenn zwey Brüche gegeben sind, so multipliret jeden Bruch durch den Nenner des andern.
2. Sind aber mehrere gegeben, so wird der Zähler und Nenner eines jeden Bruchs durch das Product aus den Nennern der übrigen multipliciret (§. 63.).

Exempel.

5) $\frac{2}{3}$. 3) $\frac{4}{5}=\frac{10}{15}.\frac{12}{15}$

24) $\frac{2}{3}$. 12) $\frac{1}{6}$. 18) $\frac{3}{4}=\frac{48}{72}.\ \frac{12}{72}.\ \frac{54}{72}$.

Die 9. Aufgabe.

66. **Brüche zu addiren.**

Auflösung und Beweis.

Weil die Nenner die Namen sind (§. 61.), so dürfet ihr nur die Zähler addiren. Da man aber nur Zahlen von Einer Art zusammensetzen kan (§. 4.), so müsset ihr erst die Brüche unter Eine Benennung bringen (§. 65.), wenn sie verschiedene Nenner haben.

Exempel.

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$ (§. 62.).

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{48}{72}+\frac{12}{72}+\frac{54}{72}=\frac{114}{72}=1\frac{42}{72}=1\frac{7}{12}$ (§. 62. 64.)

Die 10. Aufgabe.

67. **Einen Bruch von dem andern zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Bringet die Brüche unter Eine Benennung (§. 65.), wenn sie verschiedene Nenner haben.
2. Subtrahiret den Zähler des einen von dem Zähler des andern, und lasset den Nenner unverändert.

Z. E. $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=\frac{14}{21}-\frac{9}{21}=\frac{5}{21}$.

Beweis.

Der Beweis ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die

Die 11. Aufgabe.

68. **Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.**

Auflösung.

Multipliciret durch einander die Nenner, ingleichen die Zähler; so formiren die beiden Producte das verlangte Facit.

Z. E. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$.

Beweis.

Wenn man einen Bruch durch einen Bruch multipliciren soll, so soll man ein Stück von demselben geben (§. 15. 60.). Z. E. $\frac{4}{5}$ durch $\frac{3}{7}$ multipliciren, ist eben so viel, als $\frac{4}{5}$ in 7 Theile eintheilen, und drey solcher Theile davon nehmen (§. 61.), das ist, $\frac{4}{5}$ durch 7 dividiren, und den Quotienten durch 3 multipliciren. Weil nun der Nenner der blosse Name ist (§. cit.); so muß eigentlich der Zähler des zu multiplicirenden Bruches durch den Nenner des andern dividiret werden, als der Zähler 4 des Bruches $\frac{4}{5}$ durch den Nenner 7 des Bruches $\frac{3}{7}$. Damit er sich nun dividiren lässet, so muß der zu multiplicirende Bruch in einen andern verwandelt werden; welches geschiehet, wenn man ihn durch den Nenner des Multiplicanten 7 multipliciret (§. 63.), damit man $\frac{28}{35}$ anstatt $\frac{4}{5}$ erhält. Der siebente Theil hiervon ist $\frac{4}{35}$. Wenn man nun diesen Bruch dreymal nimmet, so bekommet man $\frac{12}{35}$.

Da es aber eine vergebliche Arbeit wäre, wenn man den Zähler 4 erst durch den Nenner 7 multipliciren, und darnach das Product wieder dadurch dividiren solte; so multipliciret man bloß den Nenner 5 durch 7, und gleich den Zähler 4 durch 3. W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

69. Es ist dannenhero nicht Wunder, daß in der Multiplication immer weniger herauskommet, als ein jeder von den Brüchen, die man durch einander multipliciret, indem es in der That eine Division ist. Denn wenn ich z. E. mit $\frac{1}{2}$ multiplicire, so nehme ich ein halbmal, was ich multipliciren soll; und also wird es in der That in zwey Theile getheilet, und ich bekomme einen davon.

Die 2. Anmerkung.

70. Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl multipliciren soll, so ist nicht nöthig erst zu erinnern, daß man nur den Zähler multipliciren darf; indem der Nenner nur der Name ist (§. 61.). Z. E. $\frac{3}{7}$ mit 2 multipliciret, bringen $\frac{6}{7}$. Und so haben wir es auch in dem Beweise gemacht.

Die 12. Aufgabe.

71. Einen Bruch ($\frac{4}{5}$) durch einen andern ($\frac{2}{3}$) zu dividiren.

Auflösung.

1. Kehret den Bruch, durch den man dividiren soll, um; z. E. anstatt $\frac{2}{3}$ schreibet $\frac{3}{2}$.
2. Multipliciret hierauf, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 68.); so kommet der Quotient $\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$ (§. 62.) $= 1\frac{1}{5}$ (§. 64.) heraus.

Be-

Beweis.

Wenn man einen Bruch durch einen andern dividiret, so fraget man, wie vielmal der eine in dem andern enthalten sey (§. 17.). Wenn man nun die Brüche zu gleichen Nennern bringet, so muß einer so vielmal in dem andern enthalten seyn, als der Zähler des einen in dem Zähler des andern; weil in dieser Vergleichung der gemeine Nenner, als der gemeine Name derer Dinge, die gezählet werden, nicht anzusehen (§. 61.). Allein, indem zwey Brüche zu Einer Benennung gebracht werden, erwächset der Zähler des ersten, wenn man seinen Zähler durch den Nenner des andern multiplicirt; hingegen der Zähler des andern, wenn man seinen Zähler durch den Nenner des ersten multipliciret (§. 65.). Also bekommet man die beiden Zahlen, so durch einander zu dividiren sind, wenn man den Divisorem umkehret, und hernach die Brüche in einander multipliciret. W. Z. E.

Die 12. Erklärung.

72. Wenn man eine Zahl (2) durch sich selbst multipliciret, so nennet man das Product (4) das Quadrat derselben Zahl; sie aber die Quadrat-Wurzel, in Ansehung dieses Quadrats.

Die 13. Erklärung.

73. Multipliciret man die Quadrat-Zahl (4) ferner durch ihre Wurzel (2); so heisset das neue Product (8) eine Cubic-Zahl,

Zahl, und in Ansehung derselben die Wurzel (2) nunmehro die Cubic-Wurzel.

Die 14. Erklärung.

74. Die Quadrat-Wurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, ist diejenige Zahl finden, die durch sich selbst multipliciret die gegebene Zahl hervorbringet.

Die 15. Erklärung.

75. Hingegen die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, heisset diejenige Zahl finden, die durch ihre Quadrat-Zahl multipliciret die gegebene Zahl hervorbringet.

Anmerkung.

76. Wenn man die Quadrat- und Cubic-Wurzel ausziehen will, muß man die Quadrat- und Cubic-Zahlen aller Zahlen von 1 bis 9 wissen. Darzu dienet folgendes Täfelein.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cub. Zahl	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Die 13. Aufgabe.

77. Aus einer gegebenen Zahl die Quadrat-Wurzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke zu, und gebet jeder

zwey

zwey Ziffern: denn so viel Theile hat die Wurzel, als Classen herauskommen. In der letzten Classe aber zur Linken kan auch Eine Ziffer stehen.

2. Suchet in dem **Wurzel=Täfelein** (§. 76.) das Quadrat auf, welches der Zahl in der ersten Classe am nächsten kommet, und ziehet es von derselben ab. Die dazu gehörige **Wurzel** aber setzet in die Stelle des Quotienten.

3. Hierauf dupliret den gefundenen Quotienten, und schreibet das Product unter die linke Zahl der folgenden Classe; und weiter fort zurücke gegen die Linke, wenn es aus viel Ziffern bestehet: dividiret auf gewöhnliche Weise, und setzet den Quotienten an gehörigen Ort, so habet ihr den andern Theil der Wurzel.

4. Eben diesen Quotienten setzet unter die rechte Zahl derselben Classe, und denn multipliciret mit dem gefundenen Quotienten die untergeschriebenen Zahlen, und ziehet das Product von den obern Zahlen des Quadrats ab.

5. Wenn ihr nun die dritte und vierte Regel bey allen Classen anbringet, so kommet die verlangte Quadrat=Wurzel heraus.

6. Wenn ihr aber die Wurzel durch sich selbst multipliciret, so kommet die gegebene Quadrat=Zahl wieder heraus. Und dieses ist die Probe, daraus ihr sehet, ob ihr recht gerechnet oder nicht (§. 74.).

1 | 79

1|79|56 (134	Probe: 134
1| :: ::	134
79 ::	536
~~23~~ ::	402
69 ::	134
10|56	17956
~~2~~|~~6~~4	
10 56	
0	

Anmerkung.

78. Wenn die vorgegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat ist, so kan man Zehen-Theilchen, Hundert-Theilchen, u. s. w. haben, wenn man 2, 4 u. s. w. Nullen hinten anhänget, und die Rechnung fortsetzet. Denn wenn man die Einheit in der Quadrat-Zahl in 100 gleiche Theile theilet (welches geschiehet, wenn man sie durch 100 multipliciret), so wird die Wurzel in zehen Theile getheilet (§. 72.); z. E. wenn man aus 345 die Wurzel ziehen soll, so geschiehet solches folgender massen:

3\|45

```
 3|45   (18 57/100
 1|::
 ----------------
 2|45
   28
 2 24
 ----------------
  2.1.|0.0
    3 6 8
   1 8 2 5
 ----------------
  2 7.5.|0.0.
    3 7 0 7
   2 5 9 4 9
 ----------------
   1 5 5 1
```

Will man die Probe anstellen, ob man recht gerechnet: so multipliciret man die gefundene Zahl durch sich selbst, und addiret zu dem Producte, was noch übrig geblieben war. Wenn nun die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen, als man anhänget, herauskommet; so ist die Rechnung richtig (§. 74.). Z. E.

```
      1857
      1857
   -------
     12999
     9285
    14856
    1857
   -------
   3448449
      1551
   -------
   3450000
```

Die

Die 14. Aufgabe.

79. Aus einer gegebenen Zahl die Cubicwurzel auszuziehen.

Auflösung.

1. Theilet die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke, und gebet jeder Classe drey Zahlen. Denn so viel Theile hat die Wurzel, als Classen herauskommen.
2. Suchet in dem Wurzel-Täfelein (§. 76.) die Cubic-Zahl, welche derjenigen, so in der letzten Classe zur Linken stehet, am nächsten kommt: ziehet dieselbe davon ab, und setzet die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des Quotienten. Solchergestalt habet ihr den ersten Theil der Wurzel.
3. Diesen multipliciret mit sich selbst, und das herauskommende Quadrat mit drey, setzet das Product unter die Cubic-Zahl anstatt des Divisoris, dergestalt, daß dessen letzte Zahl zur Rechten unter die erste zur Linken in der folgenden Classe zu stehen kommet, und dividiret gewöhnlicher maassen: so kommt der andere Theil der Wurzel heraus.
4. Alsdenn multipliciret den Divisorem in den neuen Quotienten, und schreibet das Product darunter: unter der mittlern Zahl derselben Classe fahet an von der Rechten gegen die Linke zu schreiben, das Product von dem Quadrate des neuen Quotienten dreymal genommen in den vorhergehenden: und endlich unter der dritten die Cubic-Zahl des neuen Quotienten-

ten. Addiret diese drey Producte, und ziehet die Summe ab von den in der gegebenen Zahl noch übrigen Ziffern.

Wenn man nun nach der dritten und vierten Regel bey den übrigen Classen fortfähret, so kommet endlich die verlangte Cubic-Wurzel heraus.

	47|437|928 (362
	27 ::: :::
	20|437 :::
Divisor	(27):: :::
Fact. ex Div. in N. Q.	16 2:: :::
— ex tr. □ N. Q. in P.	3 24: :::
Cubus novi Quoti	216 :::
Summa Factorum	19656 :::
	781|928
Divisor	(3888)::
Fact. ex Div. in N. Q.	777 6::
— ex tr. □ N. Q. in P.	4 32:
Cubus novi Quoti	8
Sum. Factorum	781 928
	000 000

Anmerkung.

80. Wenn man die Einheit in der Cubic-Zahl in 1000 gleiche Theile theilet (welches geschiehet, wenn man sie durch 1000 multipliciret); so wird die Wurzel in zehen Theile getheilet (§. 73.) Dannenhero, wenn eine gegebene Zahl keine vollkommene Cubic-Zahl ist, darf man nur 3 Nullen für die Zehen-Theilchen, noch 3 für die Hundert-Theilchen u. s. w.

anhängen, und die Rechnung nach der ordentlichen Regel fortsetzen. Z. E. es sey aus 3 die Cubic-Wurzel zu ziehen.

```
3|000|000 (1 44/100
1| : : :
2.0.0.0
 (3) : :
1 2 : :
  4 8 :
    64
1744
   256|0.00
   (58 8) : :
   235 2 : :
     6 72 :
        64
   241 984
    14 016
```

Will man wissen, ob man recht gerechnet, oder nicht, so muß man die gefundene Zahl in sich selbst, und das herauskommende Product noch einmal in dieselbe multipliciren, und was in der Rechnung übrig geblieben, dazu addiren. Denn wenn die vorgegebene Zahl mit so viel Nullen herauskommet, als man angehänget, so ist die Rechnung richtig (§. 75.).

Probe

Probe:

```
         144 Wurzel
         144
     ----------
         576
        576
       144
     ----------
       20736 Quadrat-Zahl
         144
     ----------
       82944
      82944
     20736
     ----------
     2985984
      14016
     ----------
     3000000 Cubic-Zahl.
```

Der 2. Lehrsatz.

81. In einer geometrischen Proportion, ist das Product des ersten Gliedes in das vierte, gleich dem Product aus dem andern in das dritte.

```
3. 6 : : 4. 8
   4        3
   --     --
   24  =  24
```

Beweis.

Das andere Glied entstehet, wenn man das erste, und das vierte, wenn man das dritte durch den Namen der Verhältniß multipliciret (§. 53.) Derowegen wenn man das erste Glied durch das vierte multipliciret, so ist das Product aus dem ersten und dritten Gliede und dem Namen der Verhältniß erwachsen. Multipliciret man das andere Glied durch das dritte, so ist das Product gleichfalls aus dem ersten und dritten Gliede und dem Namen der Verhältniß erwachsen. Derowegen müssen die beiden Producte gleich seyn (§. 26.). W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn demnach drey Zahlen proportional sind, daß die mittlere zwey Stellen vertritt (§. 55.); so ist das Product aus den beiden äussersten der Quadrat-Zahl der mittleren gleich (§. 72.).

Der 3. Lehrsatz.

83. **Wenn vier Zahlen oder Grössen proportional sind; so verhält sich auch wechselsweise, wie die erste zu der dritten, so die andere zu der vierten.**

Beweis.

Das andere Glied kommet heraus, wenn man das erste durch den Exponenten multipliciret, das vierte aber, wenn man das dritte durch eben denselben Exponenten multipliciret (§. 53.). Derowegen verhält sich das andere Glied zu dem vierten, wie das erste zu dem dritten (§. 58.). W. Z. E.

Die

Die 15. Aufgabe.

84. Zwischen zwey gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportional-Zahl zu finden.

Auflösung.

1. Multipliciret die beiden gegebenen Zahlen (8 und 72) durch einander.
2. Aus dem Product (576) ziehet die Quadrat-Wurzel (24) (§. 77.); so habet ihr die verlangte Zahl (§. 82.).

Die 16. Aufgabe.

85. Zu drey gegebenen Zahlen (3, 12, 5) die vierte, oder auch zu zweyen die dritte geometrische Proportional-Zahl zu finden.

Auflösung.

1. Multipliciret die andere (12) durch die dritte (5), oder, in dem andern Falle, die andere durch sich selbst;
2. das Product (60) dividiret durch die erste (3); so ist der Quotient (20) die vierte (§. 81.), oder, in dem andern Falle, die dritte (§. 82.).

Die 1. Anmerkung.

86. Die Auflösung dieser Aufgabe nennet man insgemein die Regel Detri, weil aus drey Zahlen die vierte gefunden wird. Und hat dieselbe einen unaussprechlichen Nutzen, sowohl in dem gemeinen Leben, als in allen Wissenschaften. Es ist aber aus der Aufgabe leicht zu ersehen, daß man die Regel Detri nirgend anbringen kan, als wo man vorher aus der Beschaffenheit der Sachen versichert ist, daß eine geometrische Proportion unter ihnen anzutreffen. Z. E. es ist ein grosses Gefässe mit Wasser angefüllet, und unten an dem Boden ein enges Löchlein, dadurch es herauslaufen kan. Man hat befun-

befunden, daß in 2 Minuten 3 Kannen herausgelaufen. Die Frage ist, wenn 200 Kannen herauslaufen werden? Hier sind drey Zahlen gegeben, die vierte soll man finden. Allein es ist bekant, daß das Wasser anfangs geschwinde, hernach langsam laufet, und also die Zahl der ausgelaufenen Kannen der Zeit, in welcher sie herauslaufen, keinesweges proportional. Derowegen kan man auch diese Frage durch die Regel Detri nicht auflösen.

Die 2. Anmerkung.

87. Allein im Handel ist der Werth der Waare allezeit ihrer Grösse gleich. Denn wenn einer zweymal so viel nimmet, zahlet er doppelt; nimmet er dreymal so viel als ein anderer, so zahlet er dreyfach Geld. Daher kan man aus dem gegebenen Werthe von einer gewissen Grösse einer Waare, den Werth einer andern Grösse, oder auch die Grösse der Waare von einem gegebenen Werthe finden. Z. E. 3 Pfund kommen 4 Thaler, wie viel kommen 17 Pfund? Hier ist klar, wie vielmal 3 Pfund in 17 Pfund enthalten sind, eben so vielmal die 4 Thaler, als der Werth der 3 Pfund, in dem Werthe der 17 Pfund enthalten seyn müssen, den ich suche, und nach der Regel Detri also finde:

3 Pf. — 17 Pf. — 4 Thl.

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 68 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (2 & \\ \cancel{6}\cancel{8} & 22\tfrac{2}{3}\ \text{Thl.} \\ \cancel{3}\cancel{3} & \end{array}$$

Oder: für 4 Thaler bekommt man 3 Pfund, wie viel wird man für $22\frac{2}{3}$ Thaler bekommen? Hier ist abermal klar, daß wie vielmal der Werth von 3 Pfund, nemlich 4 Thaler, in dem Werthe der gesuchten Pfunde, nemlich $22\frac{2}{3}$ Thaler enthalten, eben so vielmal die 3 Pfund in den gesuchten Pfunden enthalten seyn müssen, die man durch die Regel Detri solchergestalt findet.

4 Thl. — $22\frac{2}{3}$ Thl. — 3 Pf.

$$\frac{3}{68}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2} & \\ \cancel{68} & 17\ \text{Pf.} \\ \cancel{44} & \end{array}$$

Woraus zugleich zu ersehen, wie man in der Regel Detri die Probe anstellen kan, ob man recht gerechnet, oder nicht.

Die 3. Anmerkung.

88. Eben so verhält sich der Lohn der Arbeiter, wie die Zahl der Zeiten, in welchen sie gearbeitet, wenn man auf Tage oder Stunden mit ihnen gedungen. Ingleichen die Grösse der verrichteten Arbeit ist der Zeit proportional, wenn man eine Stunde so viel arbeitet, als die andere; ingleichen die Zahl der Arbeiter, wenn einer so viel arbeitet, als der andere, u. s. w. Z. E. in einer Stunde lieset einer 6 Blätter in einem Buche. Die Frage ist, in wieviel Stunden er 360 Blätter lesen wird? Die verlangte Zahl findet man nach der Regel Detri also:

6 Bl. — 360 Bl. — 1 St.

$$\frac{1}{}$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{360} & 60\ \text{St.} \\ \cancel{66} & \end{array}$$

Die 4. Anmerkung.

89. Unterweilen geschiehet es, daß zwischen den Zahlen keine solche Proportion zu finden, dergleichen zwischen den Sachen, die gezählet werden, anzutreffen, wenn nemlich nicht alle Zahlen von einerley Art sind. Da denn nöthig ist, daß sie zu einerley Art gebracht werden, ehe man die Regel Detri anbringen kan, als wenn man die Thaler in Groschen, die Groschen in Pfennige, die Pfunde in Lothe, die Stunden in Minuten, u. s. w. verwandelt. Z. E. 3 Pfund und 4 Loth kosten 2 Thaler 4 Groschen; was kommen 2 Pfund? Die Rechnung geschiehet also:

3 Pf. 4 L. — 2 Pf. — 2 Thl. 4 gr.

32	32	24
100 L. —	64 L. —	52 gr.

52

128

320

3328

$\frac{3328}{1100}$ | $33\frac{28}{100}$ gr.
oder $33\frac{7}{25}$ gr.
(§. 64.)

Die 5. Anmerkung.

90. Es geschiehet meistentheils, daß die übrigen Brüche eine ganz andere Eintheilung des Ganzen erfordern, als insgemein gebräuchlich. Als in dem vorhergehenden Exempel soll der Groschen in 25 Theile getheilet werden; wir aber theilen ihn in 12 ein. Derowegen muß man einen andern Bruch finden, der so viel gilt, wie der gegebene $\frac{7}{25}$ und zum Nenner 12 hat. Da nun der gesuchte Zähler des Bruchs in 12 so vielmal enthalten seyn muß, als der gegebene Zähler 7 in seinem Nenner 25 (§. 62); so kan auch diese Verwandelung durch die Regel Detri folgendergestalt geschehen (§. 85.):

25 — 7 — 12

7

84

$\frac{84}{25}$ | $3\frac{9}{25}$ pf.

Weil der Pfennig nicht weiter eingetheilet wird, so muß man die $\frac{9}{25}$, welche etwas mehr als $\frac{1}{3}$ von einem Pfennige sind, weglassen: sonst könte man ihren Werth gleichfalls nach der Regel Detri finden.

Die

Die 6. Anmerkung.

91. Man findet in den arithmetischen Schriften auch eine verkehrte Regel Detri, die man aber nicht nöthig hat, wenn man die Zahlen dergestalt neben einander setzet, wie es die Proportion erfordert. Z. E. 125 Soldaten werden mit einem Festungs-Bau innerhalb 6 Monaten fertig. Es ist aber die Frage: wie viel Soldaten muß man haben, daß der Bau innerhalb 2 Monaten fertig wird? Hier ist klar, daß, wie vielmal 2 Monate in 6 Monaten enthalten sind, eben so vielmal die Zahl der Soldaten, welche 6 Monate mit der Arbeit zubringen, in der Zahl derer enthalten sey, welche in 2 Monaten fertig werden soll. Denn je geschwinder die Arbeit fortgehen soll, je mehr Soldaten muß man dazu haben. Die Rechnung geschiehet demnach also:

2 Mon. — 6 Mon. — 125 Sold.

~~11~~		6
~~750~~	375 Sold.	750
~~222~~		

Die 7. Anmerkung.

92. Unterweilen muß man die Regel Detri zweymal anbringen, ehe man die verlangte Zahl finden kan. Woraus einige ohne Noth eine besondere Regel gemacht, und sie die Regel de quinque, ingleichen Regulam compositam genennet. Z. E. 300 Thaler bringen in 2 Jahren 36 Thaler Interesse; wie viel tragen 20000 Thaler in 12 Jahren? Hier suchet man erstlich durch die Regel Detri, wie viel 20000 Thaler in 2 Jahren tragen, folgendergestalt:

300 Thl. — 20000 Thl. — 36 Inter.

36

720000

1
720000 | 2400 Thl.
333300

2 J. — 12 J. — 2400 Thl.

12

4800

24

28800 | 14400 Thl.
22222

28800

Die 8. Anmerkung.

93. Es lassen sich dergleichen Exempel auch durch eine einige Anwendung der Regel Detri rechnen. Denn weil 2 mal 300 Thaler so viel in einem Jahre Interesse bringen, als 300 in zweyen, und 12 mal 20000 in einem Jahre so viel geben, als 20000 in 12 Jahren: so darf ich nur die Umstände der Zeit weglassen, und sagen: 2 mal 300, das ist 600 Thaler, geben (nemlich in einem Jahre) 36 Thaler Interesse, was geben 12 mal 20000, das ist 240000 Thaler (nemlich wiederum in einem Jahre)?

300 Thl. 2 J. — 20000 Thl. 12 J. — 36 Inter.

2   12

600   240000

36

1440000   22

72   8640000 | 14400 Thl.

6666600

8640000

Und

Und diese letzte Manier ist rathsamer, als die erste, weil in der ersten öfters verdrießliche Brüche vorkommen.

Die 9. Anmerkung.

94. Bey einigen Exempeln muß man die Regel Detri nothwendig etliche mal anbringen; als in den Gesellschafts-Rechnungen so vielmal, als Personen sind, die an dem Gewinn oder Verlust in der Handlung Antheil haben. Denn weil derjenige doppelt Geld gewinnet und verlieret, der doppelte Zulage giebet, u. s. w. so verhält sich jederzeit die ganze Zulage zu eines jeden Zulage insbesondere, wie der ganze Gewinn oder Verlust zu eines jeden Gewinn oder Verlust insbesondere. Z. E. es haben drey Personen in einer Handlung 2000 Thaler gewonnen. Der erste hat gegeben 1000 Thaler. Der andere 500 Thaler. Der dritte 300 Thaler. Man soll finden, wie viel jedem von dem Gewinn gebühre? Dieses geschiehet folgendergestalt:

Zulage des Ersten	1000 Thl.	
des Andern	500 —	
des Dritten	300 —	
Ganze Zulage	1800	

1800 Thl. — 1000 Thl. — 2000 Thl.

2 000

2000000

~~111~~	
~~12222~~	
~~2000~~00	$1111\frac{2}{18}$ Thl. Gewinn des Ersten.
~~1888~~00	
~~111~~	

1800 Thl. — 500 Thl. — 2000 Thl.

2 000

1000000

111	
888	
1000000	$555\frac{10}{18}$ Thl. Gewinn des Anderen.
18800	
11	

1800 Thl. — 300 Thl. — 2000

$$\begin{array}{r} 2\ \ 000 \\ \hline 600000 \end{array}$$

33	
3666	
600000	$333\frac{6}{18}$ Thl. Gewinn des Dritten.
18800	
11	

Probe.

$1111\frac{2}{18}$ Gewinn des Ersten.
$555\frac{10}{18}$ Gewinn des Anderen.
$333\frac{6}{18}$ Gewinn des Dritten.

2000 Thl. ganzer Gewinn.

Die 10. Anmerkung.

95. Es giebet auch viel andere Exempel, die auf eine gleiche Weise gerechnet werden. Als wenn man nicht allein in der Medicin, sondern auch in andern Künsten und Wissenschaften das Gewichte der Ingredientien weiß, die man mit einander in Zubereitung eines Dinges vermischen soll, und man will wissen, wie viel von jedem zu nehmen ist, damit das Vermischte ein verlangtes Gewichte habe. Z. E. eine Medicin hat 3 Ingredientien, von dem einen kommen dazu 4 Loth, von dem andern 5 Loth, von dem dritten 2 Loth. Die Frage ist, wie viel man von jedem nehmen muß, daß man von der Medicin 8 Pfund habe. Die Rechnung geschiehet folgendermassen:

Ge-

Gewichte	des ersten	Ingred.	4 Loth
	des andern		5 —
	des dritten		2 —
	Summe		11 L.

11 L. — 8 Pf. — 4 L.

32

256 L.

4

1024

131
1024 | $93\frac{1}{11}$ L. Gewicht des ersten Ingred.
111
1

11 L. — 8 Pf. — 5 L.

32

256 L.

5

1280

1
174
1280 | $116\frac{4}{11}$ L. Gewichte des andern Ingr.
1111
11

$$
\begin{array}{c}
11\ \text{L.} \;-\; 8\ \text{Pf.} \;-\; 2\ \text{L.}\\
32\\
\hline
256\ \text{L.}\\
\hline
2\\
\hline
512
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{1} & \\
\cancel{1}\cancel{7}6 & \\
\cancel{5}\cancel{1}\cancel{2} & 46\tfrac{6}{11}\ \text{L. Gewichte des dritten Jngr.}\\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} & \\
\cancel{1} &
\end{array}
$$

Probe.

$$
\text{Gewichte}\left\{\begin{array}{l}\text{des ersten}\\ \text{des andern}\\ \text{des dritten}\end{array}\right\}\text{Jngr.}\quad
\begin{array}{r}93\tfrac{1}{11}\ \text{L.}\\ 116\tfrac{4}{11}\ \text{L.}\\ 46\tfrac{6}{11}\ \text{L.}\end{array}
$$

Summe 256 L.

Die 11. Anmerkung.

96. Man hat in verschiedenen Fällen einige Vortheile in der Regel Detri, welches insgemein die Welsche Practica genennet worden. Uns begnüget, die nützlichsten davon zu erzehlen. Weil die Regel Detri zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportional-Zahl suchet (§. 85.), wenn man aber zwey Zahlen durch eine Zahl dividiret, die herauskommenden Quotienten mit ihnen einerley Verhältniß haben (§. 59.); so dividiret die erste und andere, oder auch (§. 83.) die erste und dritte Zahl, und brauchet die herauskommenden Quotienten anstatt derselben in der Rechnung, wie aus beygefügten Exempeln zu ersehen.

3 Pf. kosten 9 Thl. wie viel 7 Pf.
3) 1 3 3

fac. 21 Thl.

14 Pf. kosten 26 Thl. wie viel 7 Pf.
7) 2 2) 1

fac. 13 Thl.

Die 12. Anmerkung.

97. Wenn entweder die erste oder dritte Zahl 1, und die andere von beiden nicht allzugroß, die mittlere aber aus Zahlen von vielerley Arten zusammengesetzet ist, hat man nicht nöthig, die in der 4 Anmerkung (§. 89) vorgeschriebene Reduction anzustellen, wie folgendes Exempel ausweiset.

1 Pf. kostet 3 Thl. 8 gr. 6 pf. wie viel 5 Pf.
5

fac. 16 Thl. 18 gr. 6 pf.

Nemlich ich sehe hier bald, daß 2mal 6 pf. einen Groschen machen, und also 5mal 6 pf., 2 gr. 6 pf.; wiederum 3 mal 8 gr. einen Thaler, und also noch 2 mal 8 darüber 16 gr. Dannenhero addire ich den Thaler zu den übrigen 15 Thl. und die 2 gr. zu den 16 gr. So ist das verlangte facit 16 Thl. 18 gr. 6 pf.

Die 13. Anmerkung.

98. Wenn die zwey gleichnamige Zahlen von einander um 1 unterschieden sind, kan man einen besondern Vortheil brauchen, der sich durch Exempel am bequemsten zeigen lässet. Z. E. 5 Pf. kosten 30 Thl. wie viel 4 Pf.? Weil 4 Pf. um den 5ten Theil weniger kosten müssen, als 5 Pf. so dividire ich nur 30 durch 5 und den Quotienten 6 ziehe ich von 30 ab, so bleibet das facit 24 Thl. übrig. Item 8 Pf. kommen 24 Thl. wie viel 9 Pf.? Weil 9 Pf. um $\frac{1}{8}$ mehr als 8 kosten, so darf ich nur den achten Theil von 24, nemlich 3 Thlr., zu 24 Thl. addiren, so kommet das facit 27 Thl.

Die 14. Anmerkung.

99. Unterweilen kan man verschiedene Vortheile bey einem Exempel anbringen.

100 Pf. kosten 30 Thl. 4 gr. wie viel 50 Pf.
50) 2 2) ———— 1
fac. 15 Thl. 2 gr.

Item: 60 Pf. kosten 80 Thl. was 2520 Pf.
60) 1 6) ———— 42
480 ——
7) ———— 6
fac. 3360 Thl. 7

Ende der Rechen-Kunst.

Anfangs-Gründe der Geometrie.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geom[etrie] ist eine Wissenschaft des Raums, den die cörperliche Dinge nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnehmen.

Die 2. Erklärung.

2. Wenn man die Länge ohne die Breite und Dicke betrachtet, so nennet man sie eine Linie; ihren Anfang und Ende aber einen Punct, den man sich also ohne alle Theile gedenken muß, massen er sonst eine Linie wäre, und wieder seinen Anfang und Ende haben müste. Wenn sich nun ein Punct von einem Orte gegen den andern beweget, wird eine Linie beschrieben.

Anmerkung.

3. Die Geometræ haben zulängliche Ursachen gehabt, warum sie den Punct untheilbar annehmen, unerachtet die Einbildung so wenig, als unsere Hand mit ihren Instrumenten, einen untheilbaren Punct formiren kan. Damit er nemlich kein Theil der Linie würde; welches in der Ausübung der Geometrie mit Sorgfalt zu vermeiden.

Die 3. Erklärung.

4. Die Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung

dessen, wodurch die Dinge von einander durch den Verstand unterschieden werden.

Anmerkung.

5. Zum Exempel, ich habe zwey Sachen A und B, und betrachte eine nach der andern. Ich merke mit Fleiß auf alles, was nur in der Sache A wahrzunehmen, und zeichne es auf das genaueste auf. Gleichergestalt schreibe ich alles haarklein auf, was ich in der Sache B erkennen kan. Wenn ich nun beides gegen einander halte, was ich aufgezeichnet habe, so finde ich, daß es einerley sey. Die Grösse wird ausgenommen, weil man einem diese nicht mit blossen Worten begreiflich machen kan.

Zusatz.

6. Also können ähnliche Dinge nicht von einander unterschieden werden, wenn man sie nicht entweder wirklich, oder in Gedanken, vermittelst einer dritten Sache, z. E. eines Maaß-Stabes, zusammen bringet.

Die 4. Erklärung.

I. 7. **Eine gerade Linie AB ist, deren Theil der**
1. **ganzen ähnlich ist. Eine krumme Linie AB ist, deren Theile der ganzen unähnlich sind.**

Die 1. Anmerkung.

8. Auf dem Papiere wird eine gerade Linie mit einer Reiß-Feder, oder einem subtilen Stifte, nach dem Lineale gezogen, welches man auf die zwey gegebene Puncte anleget; auf dem Holze oder Steine durch einen mit Kreide oder Rötel bestrichenen Faden aufgeschlagen; auf dem Felde mit zweyen Stäben abgesteckt, die an ihren Enden aufgerichtet werden. Es kan aber mit zweyen Stäben der dritte in einer geraden Linie gestecket werden, wenn das

Auge

Auge, so gegen den einen gerichtet wird, die andern beide nicht siehet.

Die 2. Anmerkung.

9. Man nimmet zum Maaß-Stabe der Linie eine gewisse Linie oder Länge an, welche man eine Ruthe nennet. Dieselbe theilet man, um die Beschwerlichkeit im Rechnen zu vermeiden, in 10 gleiche Theile, und nennet einen derselben einen Schuh: der Schuh wird in 10 Zoll, und der Zoll in 10 Linien getheilet. Weil aber der Maaß-Stab willkührlich ist; so kan man leicht erachten, daß nicht an allen Orten der Schuh von gleicher Grösse sey.

Die 3. Anmerkung.

10. Auch ist wohl zu merken, daß nicht an allen Orten die Ruthen und Schuhe auf gleiche Art eingetheilet werden. Denn das rheinländische Maaß wird immer in 12 getheilet, da hingegen das geometrische nur 10 Theile hat.

Die 5. Erklärung.

11. Unter den krummen Linien ist die be- I.
kanteste, und zur Zeit die nützlichste, die 2.
Circul-Linie. Es wird aber ein Circul beschrieben, wenn eine gerade Linie CA sich auf der Ebene um einen festen Punct C beweget.

Anmerkung.

12. Auf dem Papiere wird dieses mit einem besonderen Instrumente verrichtet, welches man einen Zirkel nennet. Auf dem Felde und im Grossen brauchet man anstatt der Linie einen Faden, oder eine Schnure, oder eine Stange: wie man denn auch besondere Stangen-Zirkel hat.

Die 6. Erklärung.

13. Der Punct C heisset der Mittel-Punct I.
(Centrum), weil alle Puncte in der Peri- 2.

pherie gleichweit von demselben abstehen (§. 11.); die Linie CA der Halbmesser (Semidiameter, oder Radius); die Linie, so von einem Puncte der Peripherie D bis zu dem andern E durch den Mittel-Punct C gezogen wird, der Durchmesser (Diameter); eine andere auf gleiche Art, aber nicht durch den Mittel-Punct gezogene Linie FG eine Sehne (Chorda, Subtensa).

Anmerkung.

14. Die Peripherie eines jeden Circuls, er mag groß oder klein seyn, wird in 360 gleiche Theile oder Grade eingetheilet, weil sich diese Zahl durch viele Zahlen genau dividiren lässet, als durch 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 12. und so weiter. Jeder Grad bestehet aus 60 Minuten, jede Minute aus 60 Secunden, u. s. w. Die Grade zeichnet man mit (o), wie die Ruthen, die Minuten mit ($'$), wie die Schuhe. Z. E. $3^{\circ}\ 25'\ 17''$ heisset 3 Grad, 25 Minuten, 17 Secunden. $3^{\circ}\ 2'\ 4''$ 3 Ruthen, 2 Schuh, 4 Zoll.

Die 7. Erklärung.

I. 15. Wenn man zwey Linien AB und AC
3. in einem Punct A zusammensetzet; so heisset ihre Neigung gegen einander ein Winkel.

Anmerkung.

16. Diesen Winkel nennet man entweder mit einem Buchstaben A, oder in gewissen Fällen, um die entstehende Verwirrung mit andern Winkeln zu vermeiden, mit drey Buchstaben BAC, so daß derjenige mitten stehet, welcher an der Spitze des Winkels zu finden. Seine Grösse aber pfleget man durch einen Circul-Bogen, der aus dem Mittel Punct

Puncte A mit beliebiger Eröffnung des Cirkels beschrieben wird, zu messen. Nemlich so viel der Bogen DE Grade und Minuten hat, so viel Grade und Minuten eignet man dem Winkel A zu. Man erforschet aber ihre Anzahl durch halbe Cirkel von Meßing, davon die kleinen, so auf dem Papiere gebraucht werden, Transporteurs heissen.

Die 8. Erklärung.

17. Wenn eine Linie AB auf der andern CD dergestalt aufgerichtet stehet, daß die Winkel zu beiden Seiten einander gleich sind; so saget man, es stehe dieselbe auf CD perpendicular, oder senkrecht. I. 4.

Die 9. Erklärung.

18. Der Winkel ABC, den die Perpendicular-Linie AB mit der Linie BC machet, heisset ein rechter Winkel (angulus rectus): Ein jeder kleinerer Winkel, E, ein spitziger Winkel (angulus acutus), und ein jeder grösserer, F, ein stumpfer Winkel (angulus obtusus). I. 4. 5. 6.

Die 10. Erklärung.

19. Wenn man einen Winkel A durch eine gerade Linie BC schliesset, so entstehet ein Dreyeck oder Triangel. Man nennet es aber rechtwinkelicht, wenn der eine Winkel A ein rechter ist: stumpfwinkelicht, wenn der eine Winkel D ein stumpfer ist; spitzwinkelicht, wenn alle drey spitzig sind, wie A, B, C. Hingegen, wenn alle drey Seiten AB, BC, CA gleich sind, heisset es ein gleichseitiger Triangel (Triangulum æquilaterum): sind zwey I. 7. 8. 9. 9.

Seiten AB und BC gleich, ein gleichschenkelichter
10. (Triangulum æquicrurum, oder Isosceles); ist
keine Seite der andern gleich, ein ungleichseiti-
11. ger, als HIK, (Triangulum Scalenum).

Die 11. Erklärung.

I. 20. Ein Quadrat (Quadratum) ist eine Figur,
12. die vier gleiche Seiten AB, BC, CD, DA, und
lauter rechte Winkel hat. Ein länglichtes Vier-
13. Ecke (Oblongum, oder Rectangulum) hat lauter
rechte Winkel, aber es sind nur die zwey ein-
ander entgegengesetzte Seiten EF und HG,
ingleichen EH und FG einander gleich. Eine
14. Raute Rhombus) hat vier gleiche Seiten IK,
KL, LM, MI, und lauter schiefe Winkel.
15. Eine länglichte Raute (Rhomboides) hat zwar
lauter schiefe Winkel, aber nur die beide ein-
ander entgegengesetzte Seiten ON und PQ,
OP und QN sind einander gleich. Die
übrigen Vier-Ecke werden Trapezia genen-
16. net, als STVZ.

Die 12. Erklärung.

21. Die übrigen Figuren, so mehr als
vier Seiten haben, werden Polygone, oder
Viel-Ecke genennet: und insonderheit Fünf-
Ecke, wenn sie fünf; Sechs-Ecke, wenn sie
sechs Seiten haben, u. s. w. Sind alle Sei-
I ten und Winkel einander gleich, als in
17. ABCDEF, heisset sie eine reguläre, oder
ordent-

ordentliche Figur: sind aber die Seiten und Winkel nicht alle einander gleich, als in 18.
GHIKL, so nennet man sie eine irreguläre, oder unordentliche Figur.

Die 13. Erklärung.

22. Wenn zwey Linien AB und CD immer I.
eine Weite von einander behalten: so sind es 19.
Parallel-Linien.

Die 14. Erklärung.

23. Die Vier-Ecke, deren Seiten einander parallel sind, nennet man Parallelogramma.

Der 1. Grundsatz.

24. Zwischen zweyen Puncten kan nur Eine gerade Linie seyn.

Der 1. Zusatz.

25. Derowegen können zwey gerade Linien keinen Raum einschliessen; weil sie in ihren beiden äussersten Puncten zusammenstossen müsten.

Der 2. Zusatz.

26. Folgends sind in jedem Drey-Ecke zwey I.
Seiten AB und AC zusammengenommen grösser, 9.
als die dritte BC.

Der 2. Grundsatz.

27. Alle Radii eines Cirkuls sind einander gleich (§. 13.)

Der 3. Grundsatz.

28. Alle Bogen DE und BC, welche aus I.
der Spitze eines Winkels A innerhalb 20.
sei-

seinen Schenkeln AB und AC beschrieben werden, haben eine gleiche Zahl Grade.

Zusatz.

29. Weil man die Grösse des Winkels A nach der Zahl der Grade eines solchen Bogens DE oder BC erachtet (§. 16.); so gilt es gleich viel, ob der Bogen DE mit einem grossen oder kleinen Radio beschrieben wird, wenn man den Winkel messen will.

Der 4. Grundsatz.

30. **Wenn gerade Linien und Winkel einander decken, so sind sie gleich: und wenn sie gleich sind, decken sie einander.**

Der 5. Grundsatz.

31. **Figuren, die einander decken, sind einander gleich: und die gleich und ähnlich sind, decken einander (§. 4.).**

Anmerkung.

32. Es ist wohl zu merken, daß von gleichen Figuren erfordert wird, sie sollen alle beide einander decken: denn wenn gleich die obere die untere decket, so sie auf dieselbe geleget wird, würde doch die untere die obere nicht decken, wenn sie auf dieselbe geleget würde, wo sie nicht einander gleich wären. Nemlich, wenn Figuren dergestalt auf einander geleget werden, daß sie einander decken, so haben sie einerley Umfang.

Der 6. Grundsatz.

33. **Wenn zwey Figuren oder Linien auf einerley Art erzeuget oder beschrieben werden, und dasjenige, woraus sie erzeuget oder beschrieben werden, beiderseits einander ähnlich**

ähnlich ist; so sind die Figuren und Linien einander ähnlich (§. 4.).

Zusatz.

34. Da nun alle Puncte (§. 2. 4.) und gerade Linien einander ähnlich sind (§. 7. 2.), und ein jeder Circul erzeuget wird, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct herum beweget (§. 11.); so müssen alle Circul und ihre Peripherien einander ähnlich seyn.

Der 7. Grundsatz.

35. **Wenn zwey Winkel einerley Maaß haben, sind sie einander gleich: und wenn sie gleich sind, haben sie einerley Maaß (§. 16.)**

Der 8. Grundsatz.

36. **Auf jeder Linie AB kan man aus einem angenommenen Puncte C einen halben Circul beschreiben (§. 11.).** I. 21.

Zusatz.

37. Wenn man aus dem Mittel-Puncte C eine Perpendicular-Linie CD aufrichtet, so sind die beiden Winkel o und x einander gleich (§. 17.). Derowegen hat ein rechter Winkel zu seinem Maaße einen Quadranten, das ist 90°, (§. 16. 36. 35.); und sind demnach alle rechte Winkel einander gleich (§. 35.). Ja ein Winkel, der einem rechten gleich ist, ist ein rechter Winkel (l. c.).

Der 1. Lehrsatz.

38. **Die beiden Winkel x und o, welche** I. 22.

eine Linie DC auf einer andern Linie AB machet, machen zusammen 180°.

Beweis.

Aus C kan auf der Linie AB ein halber Circul beschrieben werden (§. 36.) Derowegen haben die Winkel x und o zu ihrem Maasse einen halben Circul (§. 16.), folgends machen sie 180° (§. 14.). W. Z. E.

Zusatz.

39. Wenn man also auf dem Felde zu einem Winkel nicht kommen kan, den man messen soll, oder wenn man mit einem Quadranten einen stumpfen Winkel zu messen hat: darf man nur den Neben-Winkel (angulum contiguum) messen.

Der 2. Lehrsatz.

I. 40. **Wenn eine Linie AB die andere CD in**
23. **E schneidet; so sind die Vertical-Winkel o und x einander gleich.**

Beweis.

Denn $o + u = 180°$ und $u + x = 180°$ (§. 38.). Also ist $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.); folgends $o = x$ (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

41. Daher kan man auf dem Felde, oder wo man sonst Winkel zu messen hat, anstatt des Winkels x seinen Vertical-Winkel o messen, wenn man jenem nicht beykommen kan.

Der 3. Lehrsatz.

I.
24. 42. **Alle Winkel, die um einen Punct C her-**

herum sind, machen zusammen vier rechte Winkel, oder 360°.

Beweis.

Ihr Maaß ist ein ganzer Circul (§. 11. 16.). Also halten sie zusammen vier rechte Winkel in sich (§. 37.), oder 360° (§. 14.). W. Z. E.

Die 1. Aufgabe.

43. **Einen vorgegebenen Winkel zu messen.**

Auflösung.

Auf dem Papiere.

1. Leget den Mittelpunct des Transporteurs auf die Spitze des Winkels A, und rücket das Instrument, bis die innere Schärfe des Lineals an die Linie AB streichet. II. 25.
2. Zählet die Grade an dem Bogen DE, die zwischen die Schenkel des Winkels AC und AB fallen.

Auf dem Felde.

1. Richtet den Winkelmesser dergestalt, daß der Diameter AB auf den einen Schenkel des Winkels fället. I. 26.
2. Verschiebet das an dem Mittel-Puncte D bewegliche Lineal EF, und zielet durch die Dioptern auf demselben, bis ihr das äusserste des andern Schenkels erblicket.
3. Zählet die Grade, so das Lineal auf dem Instrumente abschneidet:

So wisset ihr in beiden Fällen die Grösse des Winkels (§. 16.).

Die 2. Aufgabe.

44. Eine gerade Linie zu messen.

Auflösung.

Vor allen Dingen bereitet man sich einen Maaß-Stab. Auf dem Papier nehmet eine Linie, schneidet davon 10 kleine Theile für die Schuhe ab, und traget sie zusammen so vielmal in den übrigen Theil der Linie, als angehen will, für die Ruthen. So habet ihr einen Maaß-Stab (§. 9.). Auf dem Felde brauchet man entweder eine Kette, oder eine Schnure, oder eine Stange, die in ihre gehörige Zolle, Schuhe und Ruthen eingetheilet worden. Doch ist zu merken, daß man nur die letzte Ruthe in Schuhe, und den letzten Schuh in Zolle eintheilen darf.

Wenn ihr nun auf dem Papiere eine Linie messen wollet; so

II. 1. setzet den Zirkel in A und thut ihn auf bis in B.

27. 2. Den einen Fuß dieses unverrückten Zirkels setzet auf dem Maaß-Stabe in den Anfang einer Ruthe, als in 10, und gebet Acht, welchen Schuh der andere Fuß absticht, z. E. 5. So ist die Linie $1^{\circ}\ 5'$.

Auf dem Felde

1. Stecket an beiden Enden der Linie einen Stab, und (wenn eure Meß-Kette nicht so lang ist) zwischen dieselbe noch einen oder mehr andere (§. 8.).

2. Span-

2. Spannet die Schnure oder Kette von einem Stabe bis zu dem andern aus.

3. Zählet endlich daran die Ruthen, Schuhe und Zolle.

Die 1. Anmerkung.

45. Ihr könnet auch an die beiden Enden der Meß-Ketten zwey Rinken machen, durch dieselben zwey Stäbe stecken, und diese jederzeit mit dem Stabe an dem Ende der Linie, die ihr messet, in eine Linie stellen (§. 8.)

Die 2. Anmerkung.

46. Die Meß-Ketten sind etwas beschwerlich zu tragen, und lassen sich nicht wohl ausziehen. Wenn man die Linie mit einer Stange überschläget, muß man so viel Stangen-Dicken zu der gefundenen Länge addiren, als die Stange überschlagen worden, oder sie um eine Stangen-Dicke kürzer machen, als das Maaß erfordert. Die hanfene Meß-Schnüre kriechen vom Feuchten ein, und dehnen sich ungleich aus. Es merket Schwenter an (Geom. pract. lib. I. Tract. 2. p. 381.), daß ihm eine dergleichen Schnure von 16 Schuhen innerhalb einer Stunde vom Reiffe fast um einen ganzen Schuh eingegangen. Diesem Fehler nun abzuhelfen, soll man sie wiedersinnes winden, in Lein-Oele sieden, nachdem sie getrocknet, durch ein zerlassen Wachs ziehen, und mit hartem Wachse durch und durch bestreichen lassen. Es versichert Schwenter p. 382. daß, wenn man sie auch einen Tag im Wasser liegen lässet, sie doch nicht merklich kürzer werde.

Die 3. Anmerkung.

47. Man hat auf dem Papier noch ein künstlicheres Instrument, die Linien abzumessen, welches man einen verjüngten Maaß-Stab nennet. Davon sich erst unten wird reden lassen.

Die 3. Aufgabe.

48. **Einen Winkel zu machen, der so groß ist, wie ein anderer gegebener Winkel.**

Auflösung.

II. 25. Der erste Fall. Wenn der Winkel in Graden gegeben wird, so

1. ziehet eine gerade Linie AB.
2. Leget auf A den Mittel-Punkt des Transporteurs, und an die Linie AB seinen Radium.
3. Zählet an demselben so viel Grade ab, als der Winkel haben soll.
4. Bey dem letzten Grade merket euch den Punct E.
5. Ziehet endlich von A durch E eine gerade Linie.

So ist BAC der verlangte Winkel.

II. 29. Der andere Fall. Wenn der Winkel DEF nur auf dem Papiere gegeben wird; so

1. beschreibet aus E, mit beliebiger Eröffnung des Zirkels, einen Bogen GH.
2. Ziehet eine gerade Linie ef.
3. Beschreibet mit voriger Eröffnung des Zirkels aus e den Bogen hi.
4. Setzet den Zirkel in H, und thut ihn auf bis in G.
5. Mit dieser Eröffnung schneidet aus h von dem Bogen hi den Bogen gh ab.
6. Ziehet aus e durch g eine Linie ed.

So ist geschehen, was man verlangte.

Der dritte Fall. Auf das Feld kan man einen in Graden gegebenen Winkel durch den Winkelmesser

messer tragen; wie aus der ersten Aufgabe (§. 43.) abzunehmen.

Beweis.

Im ersten und dritten Falle ist kein Beweis nöthig. Im andern Falle ist der Bogen gh = GH, wie unten (§. 92.) ohne gegenwärtigen Satz soll erwiesen werden, und also der Winkel def = DEF (§. 16. 35.). W. Z. E.

Der 4. Lehrsatz.

49. Wenn in zweyen Triangeln ABC und abc der Winkel A = a, AC = ac und AB = ab; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und BC = bc, B = b, C = c. II. 30.

Beweis.

Man gedenke, es würde der Triangel acb dergestalt auf den andern ACB geleget, daß der Punct a auf A, und die Linie ab auf die Linie AB fället. Weil nun ab = AB, so fället der Punct b auf B (§. 30.): weil a = A, so fället die Linie ac auf AC (§. 30.), und, da ac = AC, der Punct c auf C (§. cit.): folgends die Linie bc auf BC (§. 24.). Derowegen sind die Triangel ABC und abc einander gleich (§. 31.), und BC = bc etc. (§. 30.). W. Z. E.

Der 5. Lehrsatz.

50. Wenn in zweyen Triangeln ABC und abc der Winkel A = a und B = b, über dieses die Seite AB = ab; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und AC = ac, BC = bc, C = c. II. 30.

Be-

Beweis.

Man gedenke, es werde der Triangel ABC auf den anderen abc dergestalt geleget, daß der Punct A auf a, und die Seite AB auf die Seite ab fället; so fället der Punkt B auf b, die Linie AC auf ac, und BC auf bc (§. 30.). Da nun die Linien AC und BC im Puncte C, und die Linien ac und bc im Puncte c zusammenstossen, muß auch der Punct C auf den Punct c fallen. Derowegen sind die Triangel einander gleich (§. 31.), und AC = ac etc. (§. 30.). W. Z. E.

Der 6. Lehrsatz.

II. 30. 51. **Wenn in zweyen Triangeln ACB und acb, AC = ac, AB = ab und BC = bc; so sind die Triangel einander gleich, und A = a, B = b, C = c.**

Beweis.

Man beschreibe aus A mit AB den Bogen y, und aus C mit CB den Bogen x. Hierauf gedenke man, es werde der Triangel acb auf den Triangel ACB dergestalt geleget, daß der Punct a auf A, und c auf C fället (§. 30.); so wird die Linie ab in den Bogen y, und cb in den Bogen x fallen (§. 13.), folgends der Punct b in B, wo die Bogen einander durchschneiden. Daher sind die Triangel (§. 31.), und die Winkel (§. 30.) einander gleich. W. Z. E.

Zusatz.

52. Also kan aus drey gegebenen Linien nicht mehr als einerley Triangel gemacht werden.

Die

Die 4. Aufgabe.

53. Auf einer gegebenen Linie AB einen gleichseitigen Triangel aufzurichten. II. 31.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in A, thut ihn auf bis in B, und beschreibet damit über der Linie einen Bogen.
2. Setzet hierauf den Circul in B, und beschreibet mit unveränderter Eröffnung einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
3. Ziehet von A und B in C die Linien AC und BC; so ist geschehen, was man verlangete.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man so groß gemacht, als die Linie AB (§. 27.). Derowegen ist der Triangel ABC gleichseitig (§. 19.). W. Z. E.

Die 5. Aufgabe.

54. Aus zwey gegebenen Linien AB und BC einen gleichschenkelichten Triangel zu machen. II. 32.

Auflösung.

1. Setzet an das Ende A der einen Linie AB, welche die Grund-Linie des Triangels geben soll, den Cirkel, und beschreibet mit der Eröffnung nach der Länge der andern gegebenen Linie einen Bogen.
2. Mit eben dieser Eröffnung beschreibet aus B einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.

3. Ziehet aus C in A und B gerade Linien; so ist der begehrte Triangel fertig.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man einander gleich gemachet. Also ist ACB ein gleichschenkelicher Triangel (§. 19.). W. Z. E.

Die 6. Aufgabe.

II. 33. 55. **Aus drey gegebenen Linien einen Triangel zu machen.**

Auflösung.

1. Nehmet die eine von den gegebenen Linien AB zur Grund-Linie des Triangels an.
2. Aus A beschreibet mit der Eröffnung des Cirkels nach der Länge der andern Linie AC einen Bogen über derselben, und
3. aus B mit der Eröffnung nach der dritten Linie BC einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
4. Ziehet die Linien AC und BC; so ist der Triangel fertig (§. 52.).

Die 1. Anmerkung.

56. Wenn die zwey Bogen einander nicht erreichen, so kan aus den gegebenen drey Linien kein Triangel gemachet werden (§. 26.).

Die 2. Anmerkung.

57. Die Zeichnung der Figuren ist von grossem Nutzen. Sie dienet die Felder in den Grund zu legen, ohne welches man sie nicht ausrechnen kan. Ja nachdem ich die Gründe der Aehnlichkeit in die Geometrie gebracht, dienet sie zugleich zum Beweise der Aehnlichkeit der Figuren, wie aus dem Folgenden zu ersehen. Man kan auch aus derselben ersehen, was auf dem Felde oder sonst im Grossen zu messen nöthig ist, wenn man

man es in Grund legen, das ist, auf das Papier ins Kleine bringen will. Derowegen lassen wir uns nicht verdriessen, mehrere Aufgaben von den Dreyecken hieher zu setzen.

Die 7. Aufgabe.

58. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC und einem Winkel A einen Triangel zu machen. II. 34.

Auflösung.

1. Nehmet die Linie AB zur Grund-Linie an, und
2. machet in A einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist (§. 48.).
3. Auf die Linie AD traget die andere gegebene Linie AC, und
4. ziehet von C bis B eine gerade Linie; so ist der Triangel fertig (§. 49.).

Anmerkung.

59. In der Ausübung ist niemals nöthig, die unnützen Linien, als hier AD, auszuziehen; sondern nachdem man das Lineal angeleget, kan man gleich den Punct C abstechen.

Die 8. Aufgabe.

60. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Linie AB einen Triangel zu machen. II. 35.

Auflösung.

1. Auf dem einen Ende A der gegebenen Linie AB richtet einen Winkel auf, der einem von den gegebenen gleich, und
2. Auf dem andern Ende B einen andern, der dem andern von den gegebenen gleich ist (§. 48.); so werden sich die Schenkel dieser

Winkel in C durchschneiden und den verlangten Triangel ABC auf der Linie AB formiren (§. 50).

Die 9. Aufgabe.

II. 61. Die Weite zweyer Oerter A und B zu
36. messen, zu deren jedem man aus einem in C angenommenen Stande kommen kan.

Auflösung.

1. Stecket in C einen Stab nach Belieben ein.
2. Messet die Linie AC (§. 44.), und traget sie zurücke in a, dergestalt, daß in a ein Stab mit dem Stabe C und dem Orte A in eine gerade Linie gesetzet wird (§. 8.).
3. Auf gleiche Weise messet die Linie BC, traget sie zurücke in b, und stecket in b wie vorhin einen Stab mit C und B in einer geraden Linie ein (§. 8.).
4. Endlich messet die Linie ab; so habet ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Denn die Winkel x und y sind einander gleich (§. 40.). Da nun auch AC = aC und BC = bC, so ist ab = AB (§. 49.). W. Z. E.

Anmerkung.

62. Wenn man nicht Raum hat, die ganzen Linien AC und BC zurücke zu tragen; so träget man nur ihre Hälften, oder den dritten, oder auch den vierten Theil derselben zurücke: Alsdenn ist ab = $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ AB, wie unten wird erwiesen werden (§. 152.).

Die

Die 10. Aufgabe.

63. Mit einer blossen Schnure oder Kette einen Winkel auf dem Felde von einem Orte auf den andern zu tragen. II. 37.

Auflösung.

Man soll den Winkel A in C tragen.

1. Messet in den beiden Schenkeln AB und AC des gegebenen Winkels A zwey Linien von beliebiger Grösse AF und AD ab, und zugleich die Quer-Linie FD, so daher entstehet.
2. Traget aus C in d die gefundene Linie AD, und spannet an den beiden Stäben C und d eine Schnure dergestalt aus, daß Cf = AF und df = DF.
3. Stecket in f einen Stab, so ist der Winkel dCf = FAD.

Beweis.

Es ist AF = Cf, AD = Cd und DF = df. Derowegen ist auch der Winkel C dem Winkel A gleich (§. 51.).

Die 11. Aufgabe.

64. Die Weite zweyer Oerter zu messen, zu deren einem B man nur kommen kan. II. 38.

Auflösung.

1. Stecket nach Gefallen einen Stab in E und traget die Linie BE dergestalt zurücke, daß der Stab C mit E und B in eine Linie kommet (§. 8.).
2. Machet einen Winkel in C, der so groß ist wie der Winkel B (§. 63. 43.).

3 Endlich gehet mit dem Stabe D so weit zurücke, bis er mit C und F, ingleichen mit E und A in einer Linie stehet:

So ist die Linie CD der Linie AB gleich.

Beweis.

Ihr habet den Winkel C so groß wie B, und die Linie CE so groß wie EB gemachet. Nun sind über dieses die Vertical-Winkel bey E einander gleich (§. 40.). Derowegen ist auch CD = AB (§. 50.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

65. Es gilt auch hier, was bey der 9 Aufgabe erinnert worden (§. 62.).

Die 2. Anmerkung.

66. Wenn man die Breite eines Flusses messen wolte, und könte die Linie BE an dem Ufer nicht zurücke tragen; so stecket man den Stab B so weit vom Ufer weg, als einem beliebet. Alsdenn wird die Linie CD um so viel breiter, als der Fluß, um wie viel der Stab B von dem Ufer weggerücket worden.

Die 12. Aufgabe.

II. 67. **Durch einen gegebenen Punct C mit**
39. **einer gegebenen Linie AB eine Parallel-Linie auf dem Papiere zu ziehen.**

Auflösung.

1. Leget an die Linie AB das Lineal.
2. Setzet den Cirkel in C ein, und thut ihn bis an das Lineal auf, als wenn ihr einen Bogen beschreiben woltet, der das Lineal oder die Linie AB berührte.

3. Zie-

3. Ziehet mit dem etwas schräge angelegten Cirkel an dem Lineale herunter: so wird der andere Fuß durch den Punct C die begehrte Parallel-Linie DE beschreiben (§. 22.).

Anders.

Man kan es auch durch ein Parallel-Lineal verrichten: welches Instrument aus zwey Linealen bestehet, die durch zwey gleich lange Quer-Bänder dergestalt zusammen verknüpfet sind, daß sie sich nach Gefallen von einander verschieben lassen. Wenn ihr nun dergleichen Instrument habet; so II. 40.

1. leget die Schärfe des einen Lineals an die gegebene Linie AB an, und
2. schiebet das andere Lineal bis an den Punct C fort; so
3. könnet ihr durch denselben die verlangte Linie DE ziehen.

Anmerkung.

68. Wenn man in der ersten Auflösung den Cirkel nicht bis an den Punct E aufthun kan; so ziehet mit AB in beliebiger Weite die Parallel-Linie CD und mit dieser die Parallel-Linie LM durch den gegebenen Punct E: so wird LM auch mit AB parallel seyn. Denn es ist EF $\asymp$ IH und FG $\asymp$ IK. Derowegen EF + FG $\asymp$ HI + IK, das ist, EG $\asymp$ HK (§. 24. Arithm.) folgends ist LM mit AB parallel (§. 22.). II. 41.

Die 13. Aufgabe.

69. **Von einem gegebenen Puncte C auf eine Linie AB ein Perpendicul zu fällen.** II. 42.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in C und durchschneidet mit gefälliger Eröffnung in zweyen Puncten D und E die Linie AB.
2. Aus D und E machet mit beliebiger Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F.
3. Durch C und F ziehet die Linie FG, diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn weil DC = CE und DF = FE, wie auch CF = CF (§. 20. Arithm.), so sind auch die Winkel DFG und GFE (§. 51.), folgends die Neben-Winkel bey G einander gleich (§. 49.). Derowegen stehet die Linie CG auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Die 14. Aufgabe.

II. 70. Aus einem gegebenen Puncte C auf einer
43. gegebenen Linie AB ein Perpendicul aufzurichten.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in C ein und
2. durchschneidet die Linie AB mit beliebter Eröffnung in D und E.
3. Aus D und E machet mit einerley Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F.
4. Ziehet durch C und F die Linie GC; so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil DC = EC und DF = EF, CF = CF (§. 20. Arithm.); so sind die Winkel bey C einander gleich

gleich (§. 51.). Demnach stehet die Linie GC auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Anders.

Lasset euch einen Winkelhacken verfertigen, das ist, ein Instrument, welches aus zweyen rechtwinkelicht zusammengesetzten Linealen bestehet. II. 44.

1. Das eine Theil dieses Instruments leget an die gegebene Linie AB dergestalt, daß die Spitze seines Winkels den gegebenen Punct C berühret.
2. Ziehet nach dem andern Theile des Instruments eine gerade Linie CD aus dem gegebenen Puncte C. Diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn der Winkelhacken ist rechtwinkelicht: derowegen müssen auch die beiden Linien CB und CD, die nach ihm gezogen sind, einen rechten Winkel machen. Und also stehet CD auf CB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Der 7. Lehrsatz.

71. **Wenn in zweyen rechtwinkelichten Triangeln ABC und abc, AB = ab und BC = bc, oder in schiefwinkelichten von einerley Art, ausser diesen Seiten A = a; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und AC = ac, B = b und C = c.** II. 45.

Beweis.

Man beschreibe durch C in der Weite BC einen Bogen FG, und lege in Gedanken den Triangel

gel abc auf den andern ABC dergestalt, daß der Punct a auf A und ab auf AB fället. Da nun ab = AB und a = A; so fället der Punct b in B, und ac auf AC (§. 30), folgends der Punct c in die Linie AC. Da nun ferner bc = BC; so muß der Punct c auch in den Bogen FG fallen (§. 13.), folgends in C, wo der Bogen FG und die Linie AC einander durchschneiden, und demnach fället bc auf BC (§. 24.). Derowegen sind die ganzen Triangel einander gleich (§. 31.) W. Z. E.

Der 8. Lehrsatz.

III. 46. 72. **Wenn zwey Parallel-Linien AB und CD von einer dritten EF in G und H durchschnitten werden, so sind 1. die Wechsels-Winkel x und y einander gleich; 2. der äussere Winkel o ist dem innern y gleich, und 3. die beiden inneren Winkel u und y machen zusammen 180°.**

Beweis.

1. Ziehet die beiden Perpendicular-Linien HI und GK, welche einander gleich sind (§. 22.). Es sind aber auch die Winkel I und K einander gleich (§. 18. 37.). Derowegen ist $x = y$ (§. 71.): welches das erste war.

2. Nun ist $x = o$ (§. 40.). Demnach $y = o$ (§. 22. Arithm.): welches das andere war.

3. Es ist aber $u + o = 180°$ (§. 38.). Derowegen ist auch $u + y = 180°$ (§. 24. Arithm.). W. Z. E.

Der

Der 9. Lehrsatz.

73. Wenn zwey Linien AB und CD von III.
einer dritten EF dergestalt in G und H durch- 46.
schnitten werden, daß die Wechsels-Winkel x und y, oder auch der äussere o und der innere y einander gleich sind, oder die beiden inneren u und y zusammen 180° machen; so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis.

1. Lasset aus G einen Perpendicul GK auf die Linie CD fallen, machet GI = HK und ziehet die Linie HI. Weil nun x = y: so ist I = K und HI = GK (§. 49.), folgends I ein rechter Winkel (§. 37.) und AB mit CD parallel (§. 22.): welches das erste war.

2. Es sey o = y. Weil nun o = x (§. 40.); so ist x = y (§. 22. Arithm.), folgends vermöge dessen, was erst erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das andere war.

3. Es mache y mit u 180°. Weil o und u 180° machen (§. 38.); so ist o = y (§. 22. 25. Arithm.), und also vermöge dessen, was jetzt erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das dritte war.

Der 10. Lehrsatz.

74. In jedem Triangel ABC machen alle II.
drey Winkel zusammen 180°, und wenn 47.
man die eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so groß, wie die beiden innern,

innern, die ihm gegen über stehen, zusammen.

Beweis.

Man ziehet durch die Spitze des Triangels C mit seiner Grund-Linie AB eine Parallel-Linie DE, so ist 1 = I. und 2 = II. (§. 72.). Nun ist I + 3 + II = 180° (§. 38.). Derowegen ist 1 + 3 + 2 = 180° (§. 24. Arithm.); welches das erste war.

II. Wenn die Seite AB verlängert wird in D; so ist
48. 3 + 4 = 180° (§. 38.). Nun ist aber jetzt erwiesen worden, daß 1 + 2 + 3 = 180°. Derowegen, 3 + 4 = 1 + 2 + 3 (§. 22. Arithm.), folgends 4 = 1 + 2 (§. 25. Arithm.); welches das andere war.

Der 1. Zusatz.

75. Derowegen kan in einem Triangel nicht mehr als Ein rechter Winkel seyn, und wenn dieses ist, machen die zwey übrigen zusammen auch noch einen rechten Winkel, das ist 90° aus (§. 37.); auch können zwey Linien, die auf einer dritten perpendicular stehen, von keiner Seite zusammenstossen, wenn sie gleich unendlich fort verlängert werden, und sind demnach parallel (§. 22.).

Der 2. Zusatz.

76. Vielweniger kan mehr als Ein stumpfer Winkel in einem Triangel seyn (§. 18.).

Der 3. Zusatz.

77. Wenn man in einem Triangel einen Winkel von 180° abziehet; so bleibet die Summe der beiden übrigen übrig. Und wenn man die Sum-

Summe zweyer von 180° wegnimmet, bleibet der dritte übrig.

Der 4. Zusatz.

78. Wenn in zweyen Triangeln zwey Winkel zweyen gleich sind, muß auch der dritte in einem dem dritten in dem andern gleich seyn (§. 25. Arithm.).

Der 11. Lehrsatz.

79. In einem gleichschenkelichten Triangel ABC sind die Winkel an der Grund-Linie x und y einander gleich, und die Perpendicular-Linie CD theilet sowohl den Winkel C, als die Grund-Linie AB und den Triangel in zwey gleiche Theile. III. 49.

Beweis.

Man theile die Linie AB in zwey gleiche Theile in D, und ziehe die Linie DC. Weil nun auch AC = CB (§. 19.), so ist x = y und o = u, m = n, und △ ACD = △ CDB (§. 51.), folgends CD auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Zusatz.

80. Also sind in einem gleichseitigen Triangel alle Winkel einander gleich, und folgends jeder 60° (§. 74.).

Der 12. Lehrsatz.

81. Wenn die Winkel x und y an der Grund-Linie AB eines Triangels ACB einander gleich sind: so sind auch die Seiten AC und CB einander gleich. III. 49.

Be-

Beweis.

Man ziehe die Linie CD dergestalt, daß $m = n$. Weil nun $x = y$, so ist auch $o = u$ (§. 78.) und daher $AC = CB$ (§. 50.). W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn also drey Winkel einander gleich sind, und folgends ein jeder 60 Grad hält (§. 74.); so sind alle drey Seiten einander gleich.

Der 13. Lehrsatz.

83. **Der Winkel an dem Mittel-Puncte eines Circuls ist zweymal so groß, wie der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einem Bogen stehet.**

Beweis.

III. 1. $o = x + u$ (§. 74.). Weil aber $AC = BC$
50. (§. 27.); so ist $x = u$ (§. 79.) folgends $o = u +$
$u = 2u$.
III. 2. $x = 2y$ und $u = 2o$, wie erst n. 1. erwie-
51. sen worden. Derowegen ist $x + u = 2y + 2o$.
(§. 24. Arithm.).
III. 3. $o + x = 2u + 2y$ und $o = 2u$, wie n. 1. er-
52. wiesen worden. Derowegen ist $x = 2y$ (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

III. 84. Also hat der Winkel an der Peripherie
50. ABD zu seinem Maasse den halben Bogen AD, darauf er stehet; denn der ganze Bogen AD ist das Maaß des Winkels bey dem Mittel-Puncte
54. ACD (§. 16.). Wenn der Winkel ACB auf ei-
55. nem halben Circul ADB, oder HBK auf einem grös-

grösseren Bogen HIK als einem halben Circul stehet; so ist klar, daß der halbe Bogen AD des Winkels ACD und $\frac{1}{2}$DB des Winkels DCB, gleichergestalt $\frac{1}{2}$HI des Winkels HBI und $\frac{1}{2}$IK des Winkels IBK, folgends $\frac{1}{2}$ ADB, oder ein Quadrant des Winkels ACB und $\frac{1}{2}$HIK, oder mehr als ein Quadrant des Winkels HBK Maaß sey.

Der 2. Zusatz.

85. Wenn zwey oder mehrere Winkel ABC III.
und ADC an der Peripherie eines Circuls sich endi- 53.
gen, und auf einem Bogen AC stehen; so sind sie einander gleich (§. 35.).

Der 3. Zusatz.

86. Jeder Winkel in einem halben Circul ABC III.
ist ein rechter Winkel; denn er stehet auf einem hal- 54.
ben Circul, und also ist sein Maaß ein Quadrant (§. 84.).

Der 4. Zusatz.

87. Wenn der Winkel innerhalb einem Circul III.
auf einem kleineren Bogen DE als einem halben 55.
Circul stehet; so ist er kleiner als ein rechter Winkel. Stehet er aber auf einem grösseren HK; so ist er auch grösser als ein rechter Winkel (§. 86.), und dannenhero in dem ersten Falle spitzig, in dem andern stumpf (§. 18.).

Die 15. Aufgabe.

88. **Einen Winckelhacken zu probiren, ob** III
er richtig ist, oder nicht. 54.

Auf-

Auflösung.

1. Beschreibet nach Belieben einen halben Cirkel ACB, und
2. ziehet nach Gefallen von beiden Enden des Diametri AB bis an die Peripherie die Linien AC und BC.
3. Leget den Winkelhacken mit seinem Winkel an den Punct C. Wenn die Schenkel desselben die beiden Linien zugleich berühren; so ist er richtig.

Beweis.

Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel (§. 86.). Wenn also der Winkelhacken sich in denselben schicket; so ist er richtig (§. 30.) W. Z. E.

Die 16. Aufgabe.

III. 89. **Auf das Ende einer Linie ein Perpendi-**
56. **cul aufzurichten.**

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in einen beliebten Punct C, und thut ihn auf bis A.
2. Mit dieser Weite bemerket auf der Linie AB den Punct D.
3. Leget das Lineal auf D und C, und bemerket aus C mit unverrücktem Cirkel den Punct E.
4. Endlich ziehet die Linie AF; so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil AC = CD = EC; so lässet sich aus C durch E, A und D ein halber Cirkel beschreiben (§. 27. 36.). Derowegen ist bey A ein rechter

Win-

Winkel (§. 86.) und stehet die Linie FA auf AB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Anders.

Man kan es auch durch Hülfe des Winkelhackens, wie oben (§. 70.), verrichten.

Die 17. Aufgabe.

90. **Eine Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.** III. 57.

Auflösung.

1. Machet aus A und B nach Belieben Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet die Puncte derselben mit einer geraden Linie DC zusammen; so theilet sie die Linie AB in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AC = CB und AD = DB, CD = CD (§. 20. Arithm.); so ist o = y (§. 51.), und daher ferner auch in den Triangeln ACE und ECB, AE = EB (§. 49.). W. Z. E.

Anmerkung.

91. Man kan es auch mechanisch, das ist durch Versuchen verrichten. Setzet nemlich einen Cirkel in A ein, und thut ihn nach dem Augen-Maaße so weit auf, als beynahe die Hälfte der Linie AB beträget. Schneidet damit ein in C und gleichfalls aus B in D: so werdet ihr ohne Mühe durch das Augen-Maaß den Punct E finden können, wodurch AB in zwey gleiche Theile getheilet wird. III. 58.

Der 14. Lehrsatz.

92. **In einem Circul sind die Sehnen gleicher Bogen AB und DE einander gleich: und wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bogen gleich.** III. 59.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte C die Radios AC, CB, CE und CD. Dieselben sind alle einander gleich (§. 27.). Weil nun ferner die Bogen AB und DE gleich sind; so müssen auch die Winkel ACB und DCE gleich seyn (§. 35.). Derowegen ist auch AB = DE (§. 49.): **welches das erste war.**

Wenn AB = DE, so ist o = x (§. 51.); folgends sind die Bogen AB und DE einander gleich (§. 35.); **welches das andere war.**

Zusatz.

93. Wenn man also einen Circul in gleiche Theile theilet, und die Sehnen der Bogen ziehet; so hat die Figur lauter gleiche Seiten (§. 92.); aber auch lauter gleiche Winkel (§. 85.). Derowegen ist es eine reguläre Figur (§. 21).

Die 18. Aufgabe.

II. 94. **Einen Circul-Bogen in zwey gleiche**
60. **Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung des Cirkels zwey Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet durch die Puncte C und D eine Linie; so ist der Bogen AB in zwey gleiche Theile in E getheilet.

Beweis.

Die Linie CD theilet die Linie AB in F in zwey gleiche Theile, und machet bey F zwey rechte Winkel (§. 90. 18.). Derowegen ist auch AE = BE (§. 49.),

(§. 49.), folgends sind die Bogen AE und EB einander gleich (§. 92.). W. Z. E.

Der 15. Lehrsatz.

95. Die Perpendicular-Linie DA, welche die Sehne EF in G in zwey gleiche Theile theilet, gehet durch den Mittel-Punct des Circuls C; und theilet auch den Bogen EDF in zwey gleiche Theile. Und wenn aus dem Mittelpunct des Circuls C ein Perpendicul CD auf die Sehne EF gezogen wird, theilet es sowol sie, als den Bogen EDF, in zwey gleiche Theile. III. 61.

Beweis.

1. Weil EG = GF und bey G zwey rechte Winkel; so ist EAD = DAF (§. 49.), und also sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 84. 35.); welches das erste war.

2. Es müssen ferner die Sehnen EA und AF (§. 49.), und folgends die Bogen AF und EA (§. 92.) einander gleich seyn. Demnach ist AE + ED = AE + FD (§. 24. Arithm.); und dannenhero AD der Diameter des Circuls, folgends gehet AD durch den Mittelpunct (§. 13.): welches das andere war.

3. Wenn CG auf EF perpendicular stehet; so sind bey G rechte Winkel (§. 18.) Da nun EC = CF (§. 27.); so ist EG = GF und ECD = DCF (§. 71); folgends sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 35.); welches das dritte war.

Die 19. Aufgabe.

III. 96. **Einen Winkel BAC in zwey gleiche**
62. **Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in A, und bemerket mit beliebter Eröffnung die Puncte D und E.
2. Daraus machet einen Durchschnitt in F und
3. ziehet die Linie AF: diese theilet den Winkel A in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AD = AE und DF = EF, AF = AF (§. 20. Arithm.); so ist o = x (§. 51.). W. Z. E.

Die 20. Aufgabe.

III. 97. **Durch drey gegebene Puncte A, B, C,**
63. **einen Circul zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung die Durchschnitte D und E, und ziehet die Linie DE.
2. Gleichergestalt machet aus B und C die Durchschnitte F und G, und ziehet die Linie FG.

Wo die beiden Linien FG und DE einander durchschneiden, nemlich in H, daselbst ist der Mittelpunct des Circuls.

Beweis.

Wenn man von A bis B, ingleichen von B bis C eine Linie ziehet; so sind selbige Sehnen zweyer Bogen von dem verlangten Circul (§. 13.) Nun stehen die beiden Linien DE und FG auf diesen Seh-

Sehnen AB und BC perpendicular, und theilen sie in zwey gleiche Theile (§. 90.). Derowegen gehen beide durch den Mittelpunct des Circuls (§. 95.). Und ist demnach derselbe in H, wo die beiden Linien einander durchschneiden. W. Z. E.

Die 21. Aufgabe.

98. **Auf eine gegebene Linie AB ein Quadrat zu machen.** III. 64.

Auflösung.

1. Richtet in A ein Perpendicul auf (§. 70. 89.), und machet es so groß wie AB.
2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D, und
3. ziehet die Linien CD und BD.

Die 22. Aufgabe.

99. **Aus zwey gegebenen Linien AB und BC ein Rectangulum zu machen.** III. 65.

Auflösung.

1. Setzet BC auf AB perpendicular (§. 89.).
2. Ziehet aus A mit BC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die Linien CD und DA.

Die 23. Aufgabe.

100. **Aus einer gegebenen Linie AB und einem schiefen Winkel einen Rhombum zu machen.** III. 66.

Auflösung.

1. Setzet auf die Linie AB den gegebenen Winkel A (§. 48.) und machet AC = AB.

2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D.

3. Ziehet die Linien CD und DB.

Die 24. Aufgabe.

III. 67. 101. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC nebst einem schiefen Winkel A einen Rhomboidem zu machen.

Auflösung.

1. Richtet in A an dem Ende der einen gegebenen Linie AB den gegebenen Winkel auf (§. 48.), und machet AC der anderen gegebenen Linie gleich.
2. Ziehet aus B mit AC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die beiden Linien CD und DB.

Der 16. Lehrsatz.

IV. 68. 102. Ein Quadrat, Rectangulum, Rhombus und Rhomboides, wird von der Diagonal-Linie AD in zwey gleiche Theile getheilet; die beide einander entgegengesetzte Winkel sind einander gleich, und die entgegengesetzte Seiten AB und CD, AC und BD parallel.

Beweis.

In allen diesen Figuren ist AC = DB und CD = AB (§. 20.). Derowegen sind die Triangel ACD und ABD einander gleich, ingleichen x = x und o = o, u = u (§. 51.), folgends AB mit CD und AC mit BD parallel (§. 73.). W. Z. E.

Zusatz.

Zusatz.

103. Also sind alle diese Vierecke Parallelogramma (§. 23.).

Die 25. Aufgabe.

104. **Den Winkel in einem regulären Vielecke zu finden.**

Auflösung.

1. Theilet 360 durch die Zahl der Seiten des Vieleckes.
2. Was herauskommet, ziehet von 180 ab; so bleibet die Zahl der Grade für den gegebenen Winkel übrig.

Z. E. im Sechsecke dividiret 360 durch 6, und ziehet den Quotienten 60 von 180 ab; so kommet für ABC 120°.

Beweis.

Es sey ABC der verlangte Winkel. Man be- IV.
schreibe durch die drey Puncte A, B, C, einen 69.
Circul (§. 97.). Weil AB = BC (§. 21.); so sind auch die Bogen AB und BC einander gleich (§. 92). Da nun AD, der halbe Bogen ADC, das Maaß des Winkels B ist (§. 84.); so darf man nur den Bogen AB von dem halben Circul BAD abziehen, wenn man den Bogen AD oder den Winkel B wissen will. W. Z. E.

Die 26. Aufgabe.

105. **In einem jeden Vielecke die Summe** IV.
aller Winkel zu finden. 70.

Auflösung.

1. Multipliciret 180 durch die Zahl der Seiten.

2. Von dem Product ziehet 360 ab; so bleibet die Summe der Winkel übrig. Z. E.

V Ecke	180 5	VI Ecke	180 6
	900 360		1080 360
	540		720

Beweis.

Ein jedes Vieleck kan aus einem angenommenen Puncte F in so viel Triangel getheilet werden, als Seiten sind. Wenn ihr 180 durch die Zahl der Seiten multipliciret, so kommen die Winkel in allen Triangeln heraus (§. 74.). Die Winkel um den Punct F gehören nicht zu dem Vielecke, machen aber jederzeit 360° (§. 42.). Derowegen wenn ihr 360 von oben gefundenem Producte abziehet, bleibet die Summe der Polygon-Winkel übrig. W. Z. E.

Die 27. Aufgabe.

IV. 106. Auf eine gegebene Linie AB ein be-
71. gehrtes reguläres Vieleck zu beschreiben.

Auflösung.

1. Traget in A und B die halben Polygonwinkel, so werden sich die Seiten des gleichschenkelichten Triangels ABC im Mittelpuncte des Circuls C durchschneiden.
2. Beschreibet aus C mit CA den Circul, und traget die Seite AB darinnen herum.

Die

Die 28. Aufgabe.

107. In einem gegebenen Circul ein regu- IV.
låres Vieleck zu beschreiben. 72.

Aufldsung.

1. Dividiret 360 durch die Zahl der Seiten; so habet ihr die Grösse des Winkels ACB.
2. Diesen traget an den Mittelpunct des Circuls C (§. 48.); so giebet sich die Seite des Vieleckes AB, die ihr
3. in dem Circul herumtragen könnet.

Der 17. Lehrsatz.

108. Die Seite des Sechseckes AB ist dem IV.
Radio des Circuls AC gleich. 72.

Beweis.

Der Winkel ACB ist 60° (§. 107.). Dannenhero sind die übrigen A und B 120° (§. 77.). Nun weil AC = BC (§. 27.); so ist auch A = B (§. 79.), folgends ist jeder von beiden 60°, und also dem Winkel C gleich. Derowegen ist auch AB = AC (§. 82.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

109. Also darf man nur den Radium sechsmal in dem Circul herumtragen, wenn man in demselben ein Sechseck beschreiben soll.

Der 2. Zusatz.

110. Und wenn man auf eine gegebene Linie ein Sechseck machen soll, darf man nur einen gleichseitigen Triangel auf dieselbe setzen (§. 53.), so ist die Spitze C der Mittelpunct des Circuls, darein es kommen soll.

Die 29. Aufgabe.

IV. 73. 111. Aus allen Seiten der Figur, und drey Diagonalen weniger, als Seiten sind, eine jede Figur zu zeichnen.

Auflösung.

Weil eine jede Figur durch Diagonallinien in zwey Triangel weniger, als Seiten sind, zertheilet wird; so hat man nichts nöthig, als (§. 55.) immer einen Triangel auf den andern zu setzen.

Die 30. Aufgabe.

IV. 74. 112. Aus allen Seiten der Figur, und drey Winkeln weniger, als Seiten sind, eine jede Figur zu zeichnen.

Auflösung.

1. Ziehet die Linie AB, so einer Seite gleichet, und traget auf A und B die gehörigen Winkel A und B (§. 48.): so lassen sich
2. die beiden Seiten EA und CB ansetzen.
3. Wenn ihr nun in E den gehörigen Winkel hinsetzet (§. 48.); so lässet sich ED ansetzen, und DC ziehen.
4. Oder mit den letzten beiden ED und CD machet aus E und C einen Durchschnitt in D, so ist die Figur geschlossen.

Anmerkung.

113. Wenn alle Winkel weniger einen gegeben werden; so dürfen zwey Seiten nicht gegeben werden.

Die 31. Aufgabe.

114. Ein Quadrat auszumessen.

Auf-

Auflösung.

1. Messet die Seite des Quadrats, und
2. multipliciret sie durch sich selbst; so kommet der Inhalt der Fläche heraus.

Seite des Quadrats	345″
	345
	1725
	1380
	1035
Inhalt der Fläche	119025″.

Beweis.

Wenn man eine Fläche ausmessen will, muß man auch eine Fläche zum Maaßstabe annehmen. Da nun das Quadrat lauter rechte Winkel und gleiche Seiten hat; ist selbiges zum Maaßstabe anzunehmen beliebet worden. Und demnach heisset eine Quadratruthe ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und eine Ruthe breit ist; ein Quadratschuh ein Quadrat, so einen Schuh lang und einen Schuh breit ist, u. s. w. Wenn nun die Seite AB z. E. IV. 75. in vier gleiche Theile eingetheilet ist, oder 4 Schuhe hält; so ist klar, daß man finden kan, wie viel schuhige Quadrate oder Quadratschuhe in dem grossen Quadrate ABCD enthalten sind, wenn man die Seite AB mit sich selbst multipliciret. Denn im grossen Quadrate müssen so viel Reihen der kleineren seyn, und in jeder Reihe so viel kleine Quadrate, als die Seite AB Theile hat.

Der

Der 1. Zusatz.

115. Wenn die Seite des Quadrats 10 ist; so wird der Inhalt desselben 100 seyn. Da nun eine Ruthe im Längenmaasse 10 Schuhe hat, ein Schuh 10 Zoll u. s. w. so muß im Flächenmaasse eine Quadrat-Ruthe 100 Schuhe, ein Quadratschuh 100 Quadratzolle u. s. w. haben.

Der 2. Zusatz.

116. Daher kan man eine gegebene Zahl gar leicht in Quadratzolle, Quadratschuhe, Quadratruthen resolviren, wenn man nur von der Rechten gegen die Linke 2 Zahlen für die Zolle, 2 für die Schuhe abschneidet: denn das übrige bleibet für die Ruthen. Z. E. wenn man 119025 Zolle hat, so sind es 11 Ruthen, 90 Schuhe, 25 Zolle.

Die 32. Aufgabe.

IV. 76. 117. Ein Rectangulum ABCD auszumessen.

Auflösung.

1. Messet die Breite AB, ingleichen die Höhe BC.
2. Multipliciret jene durch diese; so kommet der verlangte Inhalt der Figur heraus.

Z. E. Es sey $AB = 3^{\circ}4'5''$

$$
\begin{array}{r}
AD = 1\ 2\ 3 \\
\hline
10\ 3\ 5 \\
69\ 0 \\
3\ 45 \\
\hline
\end{array}
$$

so ist der Inhalt $= 4^{\circ}24'35''$.

Be-

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Der 18. Lehrsatz.

118. Zwey Parallelogramma ABDC und EFDC, die Eine Basin oder Grundlinie CD und Eine Höhe AC haben, sind einander gleich. IV. 77.

Beweis.

Weil AC=BD, EC=FD und AE=BF (§. 20. Geom. et §. 24. Arithm.); so ist △AEC=△BFD (§. 51.), folgends, wenn man beiderseits den Triangel BEG wegnimmt, ABGC=EGDF (§. 25. Arithm.). Addiret man nun beiderseits den Triangel CGD; so ist auch ABCD = ECDF (§. 24. Arithm.), W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

119. Also müssen auch die Triangel, so gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich seyn (§. 102.).

Der 2. Zusatz.

120. Ein Triangel ist die Hälfte des Parallelogrammi, wenn er mit ihm eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien stehet (§. 22.).

Die 33. Aufgabe.

121. Den Inhalt eines Rhombi und Rhomboidis auszurechnen. IV. 78.

Auflösung.

1. Nehmet die eine Seite AB für die Grundlinie

an,

an, und lasset darauf aus C ein Perpendicul CE fallen (§. 69.).

2. Multipliciret die Grundlinie AB durch die Höhe CE; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB = 4 5 6″
CE = 2 3 4

1824
1368
912

so ist der Inhalt = 10° 6 7′ 0 4″

Beweis.

Der Rhombus oder Rhomboides ABCD ist gleich einem Rectangulo, dessen Grund-Linie AB, die Höhe aber CE ist (§. 118. 103.). Nun findet man den Inhalt des Rectanguli, wenn man AB durch CE multipliciret (§. 117.). Derowegen wird der Inhalt des Rhombi und Rhomboidis gleichfalls gefunden, wenn man AB durch CE multipliciret. W. Z. E.

Die 34. Aufgabe.

IV. 122. Den Inhalt eines jeden Triangels zu
79. finden.

Auflösung.

1. Nehmet die Seite AB für die Grundlinie an, und lasset darauf aus C die Perpendicular-Linie CD fallen (§. 69.).
2. Messet die Linien AB und CD, und multipliciret sie durcheinander.

3. Was

3. Was herauskommt, dividiret durch 2; so habet ihr den Inhalt des Triangels.

Beweis.

Wenn ihr AB durch CD multipliciret; so habet ihr den Inhalt eines Parallelogrammi, dessen Seiten AB und DC sind (§. 117. 121.). Da nun der Triangel die Hälfte von diesem Parallelogrammo ist (§. 120.); so dürfet ihr den gefundenen Inhalt nur durch 2 dividiren, um den Inhalt des Triangels zu haben. W. Z. E.

Anders.

Man darf nur die Grundlinie AB durch die halbe Höhe CD, oder auch die Höhe CD durch die halbe Grundlinie AB multipliciren, wenn man den Inhalt des Triangels haben will; wie aus beygesetztem Exempel zu ersehen.

AB 3° 4′ 2″	AB 3° 4′ 2″	½AB 1° 7′ 1″
CD 2 3 4	½CD 1 1 7	CD 2 3 4
1368	2394	684
1026	342	513
684	342	342
80028	40014 ACB	40014 ACB
2) ———		
40014 ACB		

Die 35. Aufgabe.

123. **Den Inhalt einer jeden geradelinichten Figur zu finden.** IV. 80.

Auflösung.

Weil jede Figur sich aus einem Winkel B durch die

die Diagonallinien EB, BD, in so viel Triangel zertheilen lässet, als Seiten sind, weniger zwey, als z. E. das Fünfecke ABCDE in drey Triangel ABE, BED und BCD; so darf man nur nach der vorhergehenden Aufgabe jeden Triangel besonders ausrechnen, und sie hernach in eine Summe addiren.

Oder, wenn zwey Höhen CF und EG auf eine Grundlinie gezogen werden; so kan man das Trapezium EBCD auf einmal finden, wenn man entweder die halbe Grundlinie BD durch die Summe der Höhen EG und CF, oder die ganze Grundlinie durch die halbe Summe der Höhen multipliciret.

Exempel.

$\frac{1}{2}BD = 4°3'$	$\frac{1}{2}BD = 4°3'$	$\frac{1}{2}EB = 4°2'$
$CF = 3\ 5$	$EG = 4\ 5$	$AH = 3\ 0$
215	215	$\triangle AEB = 1260'$
129	172	
$\triangle BCD = 1505'$	$\triangle EBD = 1935'$	
	$\triangle AEB = 1260$	
	$\triangle BCD = 1505$	
	Inhalt der Figur $= 4700'$	

Der 1. Zusatz.

IV. 81. 124. Ein reguläres Vieleck kan aus dem Mittelpunct C des Circuls, darein es sich beschreiben lässet, in so viel gleiche Triangel, als Seiten sind, eingetheilet werden. Denn die Grund-

Grundlinien dieser Triangel AB, BE, EF &c sind einander gleich (§. 21.), und die Schenkel derselben AC, CB, CE, CF &c. gleichfalls (§. 27.). Derowegen sind auch die Triangel selbst einander gleich (§. 51.). Wenn ihr nun den Inhalt eines von diesen Triangeln findet (§. 122.), und denselben durch die Zahl der Seiten multipliciret; so kommet der Inhalt des Viel-Eckes heraus.

Z. E. $\frac{1}{2}$AB	$=2^\circ 7'$
DC	$=2\ 9$
	2 4 3
	5 4
△ABC	7 8 3′
Zahl der Seiten	5

Inhalt des V Eckes $= 39^\circ\ 15'$.

Der 2. Zusatz.

125. Daher ist ein reguläres Viel-Eck einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Peripherie des ganzen Viel-Eckes, die Höhe aber so groß als die Höhe CD eines von den Triangeln, in welche er aus dem Mittel-Puncte C zertheilet worden (§. 119.). IV. 82.

Der 3. Zusatz.

126. Wenn man die Seiten des Viel-Eckes, so in einem Circul beschrieben worden, unendlich klein annimmet; so werden sie sich endlich in der Peripherie des Circuls verlieren. Und alsdenn wird die Höhe der Triangel CD mit dem Radio BC übereinkommen. Derowegen ist der Circul IV. 81.

einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als die Peripherie des Circuls, die Höhe aber dem Radio desselben gleichet (§. 125.).

Der 4. Zusatz.

IV. 127. Der Ausschnitt eines Circuls ACB ist also
83. einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß, als der Bogen AB, die Höhe aber so groß, als der Radius AC.

Der 5. Zusatz.

128. Wenn also die Peripherie und der Diameter eines Circuls gegeben werden; so kan man den Inhalt finden, wenn jene durch den vierten Theil von diesem multipliciret wird.

Anmerkung.

129. Es haben sich von alten Zeiten her viele unterwunden, die wahre Verhältniß des Diametri eines Circuls zu seiner Peripherie zu erfinden; allein es ist noch keinem gelungen, unerachtet heute zu Tage die Kunst zu erfinden bey den Mathematicis sehr hoch gestiegen. Unterdessen haben sich einige mit gutem Fortgange bemühet, eine Verhältniß auszurechnen, die beynahe zutrift. Archimedes hat in seinem Büchlein von der Circul-Messung in dem andern Lehrsatze zuerst erwiesen, daß der Diameter eines Circuls zu seiner Peripherie sich beynahe verhalte, wie 7 zu 22. Weil aber die Verhältniß in grossen Circuln etwas zu viel bringet, haben andere eine genauere gesuchet. Niemand aber hat sich in diesem Stücke mehr Mühe gegeben, als Ludolph von Cölln, welcher endlich herausgebracht, daß, wenn der Diameter des Circuls 100 000 000 000 000 000 000 ist, die Peripherie beynahe 314 159 265 358 979 323 846 sey. Allein da diese Zahlen im Rechnen viel zu weitläuftig sind: nimmt man nur beiderseits die ersten drey Ziffern, und setzet die Verhältniß des Diametri zu der Peri-

Peripherie des Circuls, wie 100 zu 314, in welcher Ptolomæus, Vieta, Hugenius und Ludolph von Cölln übereinkommen. In kleinen Zahlen ist keine genauere Verhältniß, als die Adrianus Metius gegeben, wie 113 zu 355. Der Beweis folget unten in der Trigonometrie. Daß aber alle Diametri zu ihren Peripherien einerley Verhältniß haben, ist leicht zu begreifen. Denn wenn in verschiedenen Circuln die Diametri zu ihren Peripherien verschiedene Verhältniß hätten: könnten sie dadurch von einander unterschieden werden, und daher unmöglich einander ähnlich seyn, welches doch oben erwiesen worden (§. 34.).

Der 19. Lehrsatz.

130. **Der Inhalt des Circuls verhält sich zum Quadrat seines Diametri, wie beynahe 785 zu 1000.**

Beweis.

Wenn der Diameter 100 Theile hat, bekommet die Peripherie 314. (§. 129.); also ist der Inhalt des Circuls 7850 (§. 128.), das Quadrat des Diametri aber 10000 (§. 114.); folgends verhält sich jener zu diesem, wie 7850 zu 10000, das ist, wenn man beiderseits mit 10 dividiret, wie 785 zu 1000 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Der 20. Lehrsatz.

131. **Die Flächen der Circul verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Diametrorum.**

Beweis.

Wie sich die Fläche des einen Circuls zu dem Quadrate seines Diametri, so verhält sich die Fläche des andern Circuls zu dem Quadrate seines Diametri (§. 120. 130.). Derowegen verhält sich auch die Fläche des einen Circuls zu der Fläche des andern, wie das Quadrat des einen Diametri zu dem Quadrate des andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Die 36. Aufgabe.

132. **Es wird gegeben der Diameter des Circuls, man soll die Peripherie finden.**

Auflösung.

Suchet zu 100, 314 und dem gegebenen Diametro die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.) Diese ist die verlangte Peripherie (§. 129.).

Es sey der Diameter 56′. Sprechet

100—314—56
56

1884
1570

17°5′8″4‴ Peripherie des Circuls.

Die 37. Aufgabe.

133. **Es wird gegeben die Peripherie des Circuls (17584‴), man soll den Diametrum finden.**

Auflösung.

Suchet zu 314, 100 und der gegebenen Peripherie 17584‴ die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.); so kommet der verlangte Diameter 56 heraus (§. 129.)

314—100—17584
100

1758400

~~18~~
~~202~~
~~1758400~~ } 5°6′0″0‴ Diameter.
~~314444~~
~~3111~~
~~33~~

Die 38. Aufgabe.

134. **Es wird gegeben der** Diameter (**oder die Peripherie**) **des Circuls, man soll den Inhalt desselben finden.**

Auflösung.

1. Suchet erstlich die Peripherie (§. 132.), oder den Diametrum (§. 133.).
2. Multipliciret die Peripherie durch den vierten Theil des Diametri (§. 128.).

Z. E. Es sey der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie 17584‴; folgends der Inhalt des Circuls 24617600‴.

Anders.

Multipliciret den Diametrum (56′) durch sich selbst, und suchet zu 1000,785 und dem gefundenen Quadrate des Diametri 3136 die vierte Proportionalzahl 246176″ (§. 85. Arithm.); so habet ihr den verlangten Inhalt des Circuls (§. 130.).

 Die

Die 39. Aufgabe.

135. Es wird gegeben der Inhalt des Circuls, man soll den Diametrum finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 785 und 1000 und dem gegebenen Inhalt des Circuls 246176″ die vierte Proportionalzahl 313600 (§. 85. Arithm.).
2. Hieraus ziehet die Quadratwurzel 56. (§. 77. Arithm., diese ist der verlangte Diameter (§. 130.).

Zusatz.

136. Wollet ihr die Peripherie wissen, so könnet ihr, nachdem der Diameter bekannt worden, dieselbe durch die 36 Aufgabe (§. 132.) suchen.

Die 40. Aufgabe.

IV. 137. Es wird gegeben der Radius des Cir-
83. culs AC (6′) und die Grösse des Bogens AB (6°), man soll den Inhalt des Ausschnittes oder Sectoris ABC finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 100, 314 und dem Radio AC (§. 85. Arithm.) die vierte Proportionalzahl 1884‴. Diese ist die halbe Peripherie (§. 132. Geom. & . 59. Arithm.).
2. Suchet ferner zu 180°, dem gegebenen Bogen 6° und der gefundenen halben Peripherie 884‴ die vierte Proportionalzahl $62\frac{4}{5}$‴ (§. 85. Arithm.) so ist euch der Bogen AB in Linien bekannt.
3. Diese multipliciret durch den vierten Theil

des

des Diametri 300'''; so kommet der Inhalt des Ausschnittes ABC 18840''' heraus (§. 122. 127.).

Der 21. Lehrsatz.

138. **Wenn zwey Parallelogramma ABDC und BEFD einerley Höhe AC haben; verhalten sie sich gegen einander wie ihre Grundlinien CD und DF: hingegen wie ihre Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.** IV. 84.

Beweis.

Den Inhalt des Parallelogrammi AD bekommet man, wenn man seine Grundlinie CD durch AC multiplicieret; hingegen den Inhalt des Parallelogrammi BF, wenn seine Grundlinie DF durch AC multipliciret wird (§. 117.). Also verhalten sich die beiden Parallelogramma, wie die Producte aus AC in CD und aus AC in DF, das ist, wie CD zu DF (§. 59. Arithm.): **welches das erste war.**

Auf eben solche Art wird erwiesen, daß, wenn die Grundlinien gleich sind, die Parallelogramma sich wie die Höhen verhalten: **welches das andere war.**

Zusatz.

139. Weil jeder Triangel als die Hälfte eines Parallelogrammi betrachtet werden kan (§. 120.); so müssen auch die Triangel von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien; und die auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen verhalten.

Die 41. Aufgabe.

V. 85. 140. **Ein Parallelogrammum ABEC aus einem gegebenen Puncte D in zwey gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

Machet EF=AD, und ziehet die Linie DF; so sind die beiden Trapezia ADFC und DBEF einander gleich.

Beweis.

Die Triangel ABC und BCE sind einander gleich (§. 102.). Weil AB=EC und diese Linien einander parallel (§. 102.), über dieses AD=EF; so ist ferner o=x und y=u (§. 72.), und FC=DB (§. 25 Arithm.) Derowegen ist auch △DBG=△GCF (§. 50.), folgends das Trapezium ACFD dem Trapezio DFEB gleich (§. 24. 25. Arithm.). W. Z. E.

Die 42. Aufgabe.

141. **Es wird gegeben der Inhalt eines Triangels (36′) und seine Grundlinie (18′) man soll die Höhe finden.**

Auflösung.

Durch die halbe Grundlinie (9′) dividiret den Inhalt des Triangels (36′); so kommet die Höhe (4′) heraus (§. 122.).

Die 43. Aufgabe.

142. **Eine jede geradlinichte Figur in so viel Theile zu theilen, als man begehret.**

Auf-

Auflösung.

1. Rechnet den Inhalt der Figur aus (§. 123.) und theilet ihn in die begehrten Theile, z. E. in drey. V. 86.
2. Den Inhalt des Triangels AED ziehet von dem dritten Theile der Figur ab, und was übrig bleibet, dividiret durch $\frac{1}{2}$AD; so kommet die Höhe des Triangels ADI heraus, den man noch zu AED hinzusetzen muß, damit AEDI der dritte Theil der Figur wird (§. 141.).
3. In der Weite dieser Höhe ziehet mit DA eine Parallellinie (§. 67.), welche AB in I durchschneidet; so könnet ihr die Linie DI ziehen.
4. Halbiret den dritten Theil der Figur, und dividiret die Hälfte durch $\frac{1}{2}$DI; so kommet die Höhe des Triangels DIK heraus, der dem sechsten Theile der Figur gleich ist.
5. In der Weite gedachter Höhe ziehet mit DI eine Parallellinie (§. cit.), damit sich der Punct K giebet.
6. Den sechsten Theil der Figur dividiret durch $\frac{1}{2}$DK, und mit der Weite des Quotienten ziehet wie vorhin eine Linie mit DK parallel, damit ihr den Punct L findet, und folgends die Linie LK ziehen könnet, welche den andern Theil DIKL abschneidet, und zugleich den dritten LKBC giebet.

Z. E. Es sey AD 516″, AC 580″, EH 154″, BG 315″, DF 375″; so ist AED 3973?″, ABC 91350″, ADC 108750″ und daher die ganze Figur 239832″, der dritte Theil 79944″, der sechste 39972″, die Höhe des △DIA 156″, $\frac{1}{2}$DI 265″, die Höhe des △DIK 151″, $\frac{1}{2}$DK 287″, und die Höhe des △DKL 139″.

Anmerkung.

143. Wenn die Eintheilung auf dem Papiere geschehen: so werden auf dem Felde die Puncte I, K und L durch die Grösse der Linien AI, IK und DL leicht gefunden.

Der 22. Lehrsatz.

V. 144. In einem rechtwinkelichten Triangel
87. ABC ist das Quadrat ACFG der grösten Seite AC den Quadraten BCED und ABIH der beiden übrigen Seiten BC und BA gleich.

Beweis.

Man ziehe die Linien AE und BF, ingleichen BK mit AG parallel (§. 67.). Weil der Triangel BCF mit dem Rectangulo LCFK Eine Grundlinie CF hat, und mit ihm zwischen den beiden Parallel-Linien CF und BK stehet; so ist er die Hälfte von demselben (§. 120.). Eben so, weil der Triangel ACE mit dem Quadrate BCED Eine Grundlinie CE hat, und zwischen den beiden Parallellinien AD und CE stehet; so ist er die Hälfte von demselben (§. 120.). Nun ist CF = AC und BC = CE (§. 20.), und der Winkel ACE dem Winkel BCF gleich (§. 24. Arithm.) weil nemlich ACF = BCE = 90° (§. 20. 37.). Derowegen sind die ganzen Triangel ACE und BCF (§. 49.), folgends auch das Quadrat BDEC und das Rectangulum LCFK einander gleich (§. 26. Arithm.).

Da nun auf gleiche Weise erwiesen wird, daß

das

das Quadrat AHBI dem Rectangulo ALKG gleich sey; so ist klar, daß die beiden Quadrate AHIB und BCDE zusammengenommen dem Quadrate AGFC gleich sind. W. Z. E.

Anmerkung.

145. Dieser Lehrsatz wird von seinem Erfinder Pythagora der Pythagorische Lehrsatz, und wegen seines vortreflichen Nutzens durch die ganze Mathematic von einigen Magister Matheseos genennet.

Die 44. Aufgabe.

146. **Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, wie zwey oder mehrere andere zusammengenommen.**

Auflösung.

1. Setzet die Seiten der beiden Quadrate AB und BC rechtwinkelicht zusammen (§. 70. 89). IV. 88.
2. Ziehet die Linie AC; so habet ihr die Seite des Quadrates, welches so groß ist, wie die andern beide zusammen (§. 144.).
3. Richtet CE = AC auf die Seite des dritten Quadrates CD perpendicular auf, und
4. ziehet die Linie DE; so habet ihr die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als die drey Quadrate zusammen (§. 144.) u. s. w.

Der 23. Lehrsatz.

147. **Wenn in geradlinichten Figuren die gleichnamige Winkel einander gleich sind, und die Linien, so sie einschliessen, beiderseits einerley Verhältniß haben; so sind sie einander ähnlich: und wenn sie ähnlich sind; so**

so hat es mit den Winkeln und Linien die gemeldete Beschaffenheit.

Beweis.

Die geradelinichten Figuren können nicht anders, als durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und durch die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, von einander unterschieden werden: denn sonst lässet sich nichts deutlich in ihnen begreifen. Wenn nun die Winkel einerley Grösse, und die Seiten, so sie einschliessen, einerley Verhältniß haben; so kommen die Sachen überein, wodurch sie von einander unterschieden sind. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 4.): welches das erste war.

Wenn zwey Figuren einander ähnlich sind; so kommen die Sachen mit einander überein, wodurch sie von einander zu unterscheiden sind (§. 4.). Nun werden die geradelinichten Figuren durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, unterschieden. Derowegen muß die Grösse der Winkel und die Verhältniß der Seiten beiderseits einerley seyn: welches das andere war.

Der 24. Lehrsatz.

V. 148. Wenn in zweyen Triangeln BAC und
89. DFE, B=D und C=E, so ist BA: AC=DF: EF und AB : BC=FD:DE; und wenn hingegen die Seiten proportional sind, so sind auch die gleichnamigen Winkel gleich.

Be-

Beweis.

Weil B=D und C=E, und aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite sich der Triangel beschreiben lässet (§. 60.): so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends BA: AC=FD: FE und AB: BC=FD: DE (§. 147): welches das erste war.

Weil im andern Falle die drey Seiten des einen Triangels proportional sind den drey Seiten des anderen, und aus drey Seiten sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 55.); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.), und also die gleichnamigen Winkel einander gleich (§. 147): welches das andere war.

Der 25. Lehrsatz.

149. **Wenn in einem Triangel ABC eine** V.
Linie DE mit der Grundlinie BC parallel 89.
gezogen wird; so verhält sich AD zu AE, wie AB zu AC, und wie BD zu EC, auch AD: DE = AB: AC.

Beweis.

Weil DE mit BC parallel; so ist o=x und u=y (§. 72.), daher AD : AE = AB : AC und AD: DE=AB: BC (§. 148.): folgends weil AD: AB=AE: AC (§. 83. Arithm.), AD: AE=BD: EC. W. Z. E.

Die

Die 45. Aufgabe.

V. 150. Zu zwey gegebenen Linien AC und AB
90. die dritte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

1. Machet nach Gefallen einen Winkel EAD, und
2. traget aus A in C die Linie AC; aus A in B, ingleichen C in E die Linie AB.
3. Ziehet von B in C eine gerade Linie CB und aus E die Linie DE mit CB parallel, welches geschiehet, wenn ihr (§. 48.) den Winkel E dem Winkel C gleich machet (§. 73.); so ist BD die verlangte dritte Proportionallinie (§. 149.).

Die 46. Aufgabe.

V. 151. Zu drey gegebenen Linien AB, AC und
91. BD die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

1. Machet nach Belieben einen Winkel EAD.
2. Traget aus A in B die Linie AB, aus A in C die Linie AC, und aus B in D die Linie BD.
3. Von B in C ziehet eine gerade Linie, und
4. aus D eine andere DE mit CB parallel, wie in der vorhergehenden Aufgabe; so ist CE die verlangte vierte Proportionallinie (§. 149.).

Der 26. Lehrsatz.

V. 152. Wenn in zweyen Triangeln ABC und
89. FDE, B=D und AB:BC=FD:DE; so ist auch
A=F und C=E, und BA:AC=DF:FE.

Be-

Beweis.

Weil B = D und AB : BC = FD : DE, und aus einem Winkel mit den beiden Seiten, die ihn einschliessen, sich ein Triangel beschreiben läſſet (§. 58.); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends A = F, C = E und BA : AC = DF : FE (§. 147.). W. Z. E.

Anmerkung.

153. Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Triangel sind von den nützlichsten in der ganzen Mathematik, und dienen zu den meisten Erfindungen, die man in derselben haben kan. Auch die vornehmste Ausübung der Geometrie auf dem Felde beruhet auf denselben, wie bald mit mehrerm erhellen soll.

Die 47. Aufgabe.

154. **Eine gerade Linie AB in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget.** V. 92.

Auflösung.

1. Traget nach Belieben auf eine Linie CD so viel gleiche Theile, als die Linie AB bekommen soll, z. E. fünfe.
2. Setzet auf CD einen gleichseitigen Triangel CED (§. 53.).
3. Traget aus E in A und aus E in B die Linie AB.
4. Endlich ziehet gegen den ersten Theilungs-Punct G aus der Spitze des Triangels E die

Linie EG: so ist AE der fünfte Theil von der gegebenen Linie AB.

Beweis.

Weil EA:EB=EC:ED; so ist A=C und EA: AB EC:CD (§. 152.). Nun ist EC=CD; derowegen ist auch EA=AB. Weil nun ferner EA:AF=EC:CG (§. 148), das ist: AB:AF= CD:CG und CG=$\frac{1}{5}$CD; so ist auch AF=$\frac{1}{5}$AB (§. 53. Arithm.) W. Z. E.

Die 48. Aufgabe.

V. 93. 155. **Eine gerade Linie AB nach der Proportion einzutheilen, nach welcher eine andere CD eingetheilet worden.**

Auflösung.

1. Beschreibet auf die eingetheilte Linie CD einen gleichseitigen Triangel (§. 53.).
2. Traget aus E in A und B die gegebene Linie AB.
3. Ziehet aus der Spitze des Triangels E an die Theilungs=Puncte G, I, die Linien EG, EI. Diese theilen die gegebene Linie AB in F und H nach der gehörigen Proportion.

Beweis.

Der Beweis ist, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Anmerkung.

156. Diese Aufgabe hat viel Nutzen in der Baukunst und Fortification, sonderlich wenn man einen vorgegebenen Riß nach Belieben vergrösseren oder verkleineren soll.

Die

Die 49. Aufgabe.

157. Ein Parallelogrammum, ingleichen einen Triangel, in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget. VI. 106. 107.

Auflösung.

1. Theilet die Grundlinie CD oder CB in so viel gleiche Theile, als die Figur eingetheilet werden soll (§ 154).
2. Ziehet aus den Theilungs-Puncten 1. 2. in dem ersten Falle mit der andern Seite AC Parallellinien 1. 1. und 2. 2. (§. 67.); in dem anderen Falle aber Linien bis an die Spitze des Triangels, A1 und A2; so sind beide Figuren in gleiche Theile eingetheilet (§. 138. 139.).

Die 50. Aufgabe.

158. Zwischen zwey gegebenen Linien AB und BE eine mittlere Proportionallinie zu finden. VI. 108.

Auflösung.

1. Traget die gegebenen Linien AB und BE in eine an einander, und theilet sie in C in zwey gleiche Theile (§. 90.).
2. Beschreibet aus C mit CA einen halben Circul.
3. Richtet aus B die Perpendicularlinie BD auf (§. 70.). Diese ist die verlangte mittlere Proportionallinie.

Beweis.

Der Winkel ADE ist ein rechter Winke (§. 86.): ABD ist auch ein rechter Winkel (§. 18.). Der Winkel DAB ist beiden Trianlgeln DAB und DAE gemein. Derowegen ist auch der Winkel ADB dem Winkel DEB gleich (§. 78.). Nun ist in dem Triangel DEB der Winkel DBE auch ein rechter Winkel (§. 18.). Derowegen verhält sich AB zu BD, wie BD zu BE (§. 148.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

159. Wenn man für 1. eine Linie annimmet, und nach derselben eine gegebene Zahl durch eine andere Linie exprimiret; so kan man durch diese Aufgabe vermittelst des verjüngten Maaßstabes die Quadratwurzel ausziehen (§. 74. Arithm.).

Die 2. Anmerkung.

160. Eben auf diese Art kan man durch die 46 Aufgabe (§. 151.) die Regel Detri in Linien verrichten.

Die 51. Aufgabe.

VI. 161. **Aus der gegebenen Sehne eines Bo-**
109. **gens AB und dessen Höhe DF den Diametrum ED, und folgends den Mittelpunct des Circuls C zu finden.**

Auflösung und Beweis.

1. Suchet zu FD und FB die dritte Proportionallinie (§. 85. Arithm.); so habet ihr EF (§. 158.).
2. Addiret zu FE die Höhe des Bogens DF; so habet ihr den Diametrum ED.
3. Theilet denselben in 2 gleiche Theile; so habet ihr den Radium EC, und folgends den Mittel-Punct C.

Z. E.

Z. E. Es sey DF 8′3″ FB 1°6′6″

83 — 166 — 166

166

996

996

166

27556

1
22
366
27886 } 332″EF
8333 | 83 DF
88
415″ED
2)
2075‴EC.

Anmerkung.

162. Diese Aufgabe hat ihren Nutzen in der Bau-Kunst, wenn man die Eröffnung der Thüren und Fenster mit Bögen schliessen soll.

Die 52. Aufgabe.

163. Aus der gegebenen Sehne eines Bogens AB und seiner Höhe DF den Inhalt des Abschnittes ADBFA zu finden. VI. 109.

Auflösung.

1. Suchet zuerst den Diametrum des Circuls DE (§. 160.) und
2. Beschreibet damit einen Circul, und traget die Sehne AB darein.
3. Messet den Winkel ACB mit dem Transporteur (§. 43.).
4. Suchet alsdenn den Ausschnitt ACBDA (§ 137.).
5. Aus der gegebenen Sehne AB und dem Unterscheide FC zwischen der Höhe des Bogens

DF und dein Radio DC, suchet den Inhalt des Triangels ACB (§. 122.).

6. Endlich ziehet den Triangel ACB von dem Ausschnitte ACBDA ab; so bleibet der Abschnitt ADBFA übrig.

Z. E. Es sey AB 600''' DF 80'''; so ist DE 1205''', der Bogen AB 60°, und daher der Ausschnitt ACBDA 189630'''. Da nun FC 522''', AF 300'''; so ist △ACB 156600''', folgends der Abschnitt AFBDA 33030''', wenn man in der ganzen Rechnung die Brüche weglässet.

Die 53. Aufgabe.

V. 94. 164. Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.

Auflösung.

1. Ziehet eine Linie AE, und traget darauf 10 gleiche Theile von beliebter Grösse aus A in B, und denn ferner den Raum AB, so vielmahl euch beliebet.
2. Richtet in A von gefälliger Länge eine Perpendicularlinie AC auf (§. 70.), und theilet sie in 10 gleiche Theile.
3. Durch jeden Theilungspunct ziehet mit AE eine Parallellinie (§. 67.), und
4. traget auf die obere CD eben die Theile, welche sich auf AB befinden.
5. Ziehet oben 10 und unten 9, oben 9 und unten 8, oben 8 und unten 7, oben 7 und unten 6, u. s. w. mit geraden Linien zusammen.

Ich sage, wenn AB eine Ruthe ist; so sind die Theile B 1, 1. 2, 2. 3. u. s. w. Schuhe: hingegen

9. 9,

9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zoll, 7. 7 drey Zoll, 6. 6 vier Zoll u. s. w.

Beweis.

Weil 10 Schuhe eine Ruthe machen (§. 9.): so ist klar, daß die Theile auf der Linie AB Schuhe sind. Daß aber 9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zoll, 7. 7 drey Zoll sind u. s. w. erweiset man also. Dieweil 9. 9 mit C9 parallel ist, so verhält sich wie A9 zu AC, so 9. 9 zu C9 (§. 149.). Nun ist $A9 = \frac{1}{10}$ AC. Derowegen ist auch $9.9 = \frac{1}{10}$ C9, folgends ein Zoll (§. 9.), u. s. w. W. Z. E.

Zusatz.

165. Wenn man nun den Zirkel auf die dritte oder siebente Linie setzet, und ihn bis zu der Linie aufthut, die unten aus dem 5ten Schuhe gezogen ist; so hat man über 5 Schuhe noch 3 oder 7 Zoll, u. s. w.

Die 54. Aufgabe.

166. **Die Weite zweyer Oerter A und B zu finden, zu denen beiden man aus einem angenommenen Stande kommen kan.** V. 95.

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in D, und erwählet auf demselben einen Punct C.
2. Von demselben visiret durch die Dioptern in A, und ziehet die Linie Ca.
3. Gleichergestalt visiret in B, und ziehet die Linie Cb.
4. Messet mit der Meßruthe die Linien CA und CB und

5. traget dieselben von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) aus C in a und b. Endlich
6. messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweis.

Denn weil der Winkel C beiden Triangeln aCb und ACB gemein ist, und die Seiten, so ihn einschliessen, proportional sind; so kan ich auch sagen, wie Ca zu CA, so verhält sich ab zu AB (§. 152.). Nun hält Ca so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, als CA auf dem grossen: derowegen muß auch ab so viel auf dem verjüngten Maaßstabe halten, als AB auf dem grossen. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Setzet das Instrument in D und messet den Winkel ACB (§. 43.).
2. Messet ferner die Linien CA und CB (§. 44.).
3. Construiret durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel aCb (§. 58.).
4. Messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr, wie viel Ruthen, Schuhe und Zolle die Linie AB hält.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der ersten Auflösung.

Die 55. Aufgabe.

V. 96. **167. Die Weite zweyer Oerter A und B**

zu

zu messen, zu deren einem A man nur kommen kan.

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in einen nach Belieben erwählten Stand C, und visiret aus dem Puncte c nach beiden Oertern A und B.
2. Messet die Weite eures Standes C von dem Orte A, zu welchem ihr kommen könnet, und
3. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164) aus c in a.
4. Gehet mit eurem Tischlein bis in A, und setzet es dergestalt nieder, daß der Punct a in A stehet, und ihr durch die Diopter nach der Linie ac den in C eingesteckten Stab sehen könnet.
5. Visiret hierauf durch dieselben aus a in B, und ziehet die Linie ab.
6. Endlich messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so erkennet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweis.

Weil der Winkel c = C und a = A; so verhält sich wie ac zu AC, so ab zu AB (§. 48.). Nun hat ac so viel Theile von dem kleinen Maaßstabe, als AC von dem grossen; derowegen muß auch ab so viel Theile von dem kleinen, als AB von dem grossen haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet mit dem Instrumente die Winkel C

und A (§. 43.), und mit der Ruthen die Linie AC (§. 44.).

2. Construiret daraus durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel acb (§. 60.).

3. Messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie ab; so wisset ihr die verlangte Weite AB.

Beweis.

Der Beweis ist wie vorhin.

Die 56. Aufgabe.

V. 97. 168. **Die Weite zweyer Oerter AB, zu deren keinem man kommen kan, zu messen.**

Auflösung.

1. Erwählet zwey Stände in C und D. In den einen C setzet das Tischlein, in den andern D stecket einen Stab.

2. Aus dem Puncte c visiret durch die Diopter nach dem Stabe D, imgleichen nach B und A, und ziehet dahinzu auf dem Tischlein Linien.

3. Messet die Weite der beiden Stände CD (§. 44), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus c in d.

4. Stecket in C einen Stab, und setzet das Tischlein dergestalt in D, daß der Punct d in D kommet, und wenn ihr nach der Linie cd durch die Dioptern visiret, ihr den Stab in C erblicket.

5. Visiret ferner aus d gegen A und B, und ziehet auf dem Tischlein die Linien da und db.

6. End-

6. Endlich messet (§. 164.) auf dem verjüngten Maaßstabe ab; so habet ihr die Länge der Weite AB.

Beweis.

Weil der Winkel d beiden Triangeln dcb und DCB gemein, über dieses auch der Winkel c dem Winkel C gleich ist; so verhält sich cd zu CD, wie bc zu BC (§. 148.). Wiederum weil aus gleichmäßiger Ursache der Triangel acd dem Triangel ACD ähnlich ist; so verhält sich cd zu CD, wie ac zu AC (§. 148.), folgends ist auch bc zu BC, wie ac zu AC (§. 57. Arithm.). Da nun über dieses der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist; so verhält sich ab zu AB, wie ac zu AC (§. 152.), oder cd zu CD (§ 57. Arithm.). Da nun dc so viel Theile auf dem verjüngten Maaßstabe, als DC im grossen hat: so muß auch ab so viel Theile auf dem verjüngten Maaßstabe, als AB im grossen, haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet aus dem ersten Stande C die Winkel x und y, und aus dem Stande D die Winkel z und w (§. 43.); so geben ihre Summen die Winkel ACD und BDC. VI. 98.
2. Messet ferner die Standlinie CD (§. 44.).
3. Traget diese nach dem verjüngten Maaßstabe auf das Papier, und construiret mit Hülfe der Winkel x und z + w den Triangel BCD, und mit Hülfe der Winkel z und x + y den Triangel ACD (§. 60.).

4. Endlich messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie AB; so wisset ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Der Beweis ist einerley mit dem vorigen.

Anmerkung.

169. Auf gleiche Art kan man die Weite gar vieler Oerter auf einmal messen, wenn man nemlich aus zweyen Ständen gegen jeden visiret.

Die 57. Aufgabe.

V. 170. **Die Höhe eines Ortes AB zu messen,**
99. **zu dem man kommen kan.**

Auflösung.

1. Erwählet euch einen Stand in D, und richtet das Tischlein vertical, doch so, daß seine untere Seite horizontal sey: welches vermittelst einer Bleywage gar leicht geschehen kan.
2. Die Regel mit den Diooptern leget an dasselbe horizontal, visiret nach dem Orte, dessen Höhe ihr messen wollet, und ziehet die Linie cE.
3. Kehret an dem Puncte c die Regel mit den Dioptern in die Höhe, bis ihr die Spitze A erblicket, und ziehet auf dem Tischlein die Linie cb.
4. Messet die Standlinie cC (§. 44.), und
5. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe auf das Tischlein aus c in E (§. 164.).
6. Richtet in E ein Perpendicul Eb auf (§. 70), und
7. messet die Länge auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr die Höhe CA.
8. Dazu addiret die Höhe BC; so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Be-

Beweis.

Der Winkel c ist beiden Triangeln Ecb und CcA gemein: bey E und C sind rechte Winkel; also verhält sich Ec zu cC, wie bE zu AC (§. 48.). Nun hält Ec so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie cC auf dem grossen. Derowegen muß auch Eb so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie AC auf dem grossen halten. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet den Winkel E (§. 43.) und die Standlinie AD oder CE (§. 44.). VI. 100.
2. Construiret daraus einen rechtwinkelichten Triangel cbe (§. 60.).
3. Messet die Höhe bc auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Höhe BC.
4. Dazu addiret die Höhe des Stativs, so kommet die Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie der vorige.

Anmerkung.

171. Man setzet voraus, daß die Linie AD horizontal sey: denn wenn das Instrument an einem erhabenern, oder auch niedrigern Orte stünde, als die Höhe BA gelegen; so ist es rathsamer, daß man auch den Winkel CEA misset, und den Triangel CEA im kleinen construiret.

Die 58. Aufgabe.

172. **Eine Höhe AB zu messen, zu der man nicht kommen kan.** VI. 101.

Auflösung.

1. Erwählet 2 Stände in D und E, und visiret, wie in der vorhergehenden Aufgabe, nach der Spi-

Spitze A und dem Punct C, in dem ersten Stande D.

2. Messet die Standlinie ED, und traget sie aus f, so über dem Puncte D stehen muß, in e von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.).

3. Traget das Tischlein in E dergestalt, daß der Punct e über E kommet, und visiret wie vorhin nach dem Stabe in D und der Spitze A.

4. Wo die Linie ea die Linie fa durchschneidet, lasset ein Perpendicul ac auf fc herunter fallen (§. 69.).

5. Diesen messet auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so habet ihr die Höhe AC.

6. Addiret dazu die Höhe BC; so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der vorigen Aufgabe.

Eine andere Auflösung.

VI. 101. 1. Messet in dem ersten Stande D den Winkel f, und in dem anderen E den Winkel e (§. 43.) und die Standlinie ED (§. 44.).

VI. 102. 2. Diese traget auf das Papier nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und

3. construiret darauf durch Hülfe der Winkel e und f einen Triangel fea (§. 60.).

4. Verlängert seine Grundlinie fe in c, und lasset von a ein Perpendicul ac herunter fallen (§. 69.).

5. Endlich messet ac auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und addiret dazu die Höhe des In-

Instruments, damit ihr die Winkel gemessen, oder nehmet in Acht, (§. 171.) was erinnert worden: so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die 59. Aufgabe.

173. **Eine jede geradlinichte Figur ABCDE, in die man kommen kan, in Grund zu legen.** VI. 103.

Auflösung.

Messet den ganzen Umfang der Figur AB, BC, CD, DE, EA; ingleichen die Diagonallinien AC und AD; so könnet ihr nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Figur auf dem Papiere aufzeichnen (§. 111.).

Beweis.

Wenn man eine Figur in Grund leget; so muß man eine kleine Figur zeichnen, in der alle Winkel so groß sind, als in der grossen, und die Seiten sich eben so gegen einander verhalten, wie in der grossen (§. 57.). Wenn man nur für jede Seite der Triangel ABC, ACD, ADE auf dem verjüngten Maaßstabe so viel annimmet, als sie im Grossen ausmachet; so verhalten sich die Seiten in der verjüngten Figur eben so gegen einander, wie die Seiten der grossen. Denn wenn z. E. AB im Grossen 6 ist, so ist sie im Kleinen auch 6; wenn im Grossen BC 7 ist, so ist sie im Kleinen auch 7. Und also verhält sich AB zu BC beiderseits wie 6 zu 7. Derowegen sind auch die Winkel der kleinen Figur so groß, wie die Winkel in der grossen (§. 148.). Da nun die Winkel der Figur mit den Winkeln der Triangeln übereinkommen; so müssen auch alle Winkel in der verjüngten Figur so groß seyn, wie in der grossen. W. Z. E.

Anders.

VI. 1. Erwählet euch innerhalb der Figur einen Punct
104. F, und setzet dahin das Meßtischlein.

2. Aus F visiret gegen die Stäbe, welche man in die Ecken der Figur A, B, C, D, E gestecket, und ziehet die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
3. Messet die Linien FA, FB, FC, FD, FE (§. 44.), und
4. eben so groß machet nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
5. Endlich ziehet die Linien ab, bc, cd, de und ea; so schliesset sich die verlangte Figur.

Beweis.

In dem Triangel aFb verhält sich Fa zu Fb, wie FA zu FB im Triangel AFB, und der Winkel F ist beiden Triangeln gemein: derowegen verhält sich auch Fb zu FB, wie ba zu BA (§. 152.). Eben so wird erwiesen, es verhalte sich wie Fb zu FB, so bc zu BC, folgends auch ba zu bc, wie BA zu BC (§. 57. Arithm.). Es ist aber auch der Winkel ABC so groß, wie der Winkel abc (§. 152.). Da nun auf gleiche Weise von allen übrigen

Win-

Winkeln c, d, e, a erwiesen werden kan, daß sie den Winkeln C, D, E, A gleich sind, und auch von den übrigen Seiten, daß sie sich gegen einander verhalten, wie die Seiten CD, DE, EA; so ist klar, daß die grosse Figur in Grund geleget worden. W. Z. E.

Anders.

1. Messet aus F alle Winkel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA (§. 43.), imgleichen die Linien FA, FB, FC, FD und FE (§. 48.).
2. Traget die Winkel auf das Papier (§. 48.) imgleichen die Linien nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.).
3. Ziehet die Linie ab, bc, cd, de und ea; so wird die verlangte Figur beschlossen.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie der vorige.

Die 60. Aufgabe.

174. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man aus zweyen Oertern A und B ganz übersehen kan.** VI. 105.

Auflösung.

1. Setzet euer Tischlein in A, und visiret nach allen Ecken der Figur B, C, D und E, und ziehet gegen dieselbe Linien aus dem Puncte A.
2. Messet die Standlinie AB (§. 44.), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus A in b.
3. Traget das Tischlein aus A in B, und richtet es dergestalt, daß der Punct b in B kommet, und ihr durch die Dioptern des an die Linie bA ange-

angelegten Lineals den in A eingesteckten Stab sehen könnet.

4. Visiret nach allen übrigen Ecken der Figur, und ziehet gegen dieselben aus B Linien, welche die vorigen in e, d, c durchschneiden.

5. Endlich ziehet die Linien ed, dc; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist fast eben wie in der 56 Aufgabe (§. 168.).

Anders.

1. Messet aus A die Winkel CAB, DAC, EAD (§. 43.), imgleichen die Linie AB (§. 44.), wie nicht weniger aus B die Winkel EBA, EBD, DBC (§. 43.).

2. Ziehet auf dem Papiere eine Linie ab, und traget von dem verjüngten Maaßstabe die Grösse der Linie AB darauf (§. 164.).

3. Traget in bac, cad, dae die Winkel BAC, CAD und DAE; hingegen in abe, ebd, dbc die Winkel ABE, EBD, DBC (§. 48.).

4. Endlich ziehet die Puncte, a, e, d, c, b, mit geraden Linien zusammen; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist abermals wie in der 56. Aufgabe (§. 168.).

Die 61. Aufgabe.

175. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man ganz umgehen kan.**

Auf=

Auflösung.

1. Setzet das Tischlein in A und visiret nach den Stäben in B und E, damit ihr den Winkel BAE darauf bekommet. VI. 105.

2. Messet die Linien AB und AE (§. 44.) und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus a in b.

3. Gehet mit dem Tischlein in B und setzet den Punct b in B, visiret wieder zurücke in A, ingleichen von dem neuen Puncte B in C, damit ihr den Winkel CBA auf das Tischlein bekommet.

4. Messet die Linie BC (§. 44.) und traget sie auf das Tischlein aus b in c (§. 164.).

5. Wenn ihr die ganze Figur dergestalt umgehet; so werdet ihr sie in Grund geleget haben.

Beweis

Denn alle eure Winkel in der kleinen Figur sind den Winkeln in der grossen gleich; und die Linien verhalten sich in der kleinen Figur eben so wie in der grossen: derowegen ist die kleine Figur der grossen ähnlich (§. 147.). W. Z. E.

Anders.

Messet alle Seiten der Figur (§. 44.) und drey Winkel weniger als Seiten sind (§. 43.); so könnet ihr die Figur in Grund legen (§. 112.).

Die 62. Aufgabe.

176. **Ein jedes Feld, oder einen jeden andern Platz auszurechnen.**

Auflösung.

1. Leget es zuerst in Grund nach den vorhergehenden Aufgaben. Darnach

2. rechnet die Figur aus, nach der 35 Aufgabe (§. 123.).

Die 15. Erklärung.

VI. 177. Wenn ein halber Circul X sich um sei-
110. nen Diameter AB herum beweget, beschreibet er eine Kugel.

Zusatz.

178. Also sind alle Puncte in der Kugelfläche von dem Mittelpuncte gleich weit entfernet (§. 13.).

Die 16. Erklärung.

VI. 179. Wenn eine geradelinichte Figur ABC
111. sich an einer geraden Linie AD dergestalt herunter beweget, daß sie sich immer parallel bleibet, das ist, durch die Bewegung einer jeden Seite derselben ein Parallelogrammum erzeuget wird:
VI. so beschreibet sie ein PRISMA. Beweget sich
112. aber ein Circul X an einer geraden Linie FG, und also mit einerley Richtung parallel her-
VI. unter, oder ein Rectangulum ABCD und ein
113. Quadrat um seine Höhe BC; so wird ein Cylinder, oder eine Walze beschrieben.

Der 1. Zusatz.

180. Ein jedes Prisma hat zwey gleiche Grundflächen, und ist um und um von so vielen Vierecken eingeschlossen, als die Grundfläche Seiten hat.

Der 2. Zusatz.

181. In dem Prismate und Cylinder sind alle Durchschnitte, die mit ihren Grundflächen parallel geschehen, einander gleich.

Die 17. Erklärung.

VII. 182. Wenn sich ein Rectangulum ABCD an
114. einer

einer Linie AE auf gleiche Art und rechtwinkelicht herunter beweget, bekommt man ein PARALLELEPIPEDVM. Ein Quadrat O, welches sich gleichergestalt an einer geraden Linie HI, die seiner Seite HL gleich ist, herunter beweget, zeuget einen CUBUM oder VII.
Würfel. 115.

Der 1. Zusatz.

183. Das Parallelepipedum ist in 6 Rectangula eingeschlossen, deren zwey einander überstehende gleich sind. Und alle Durchschnitte, die mit der Grundfläche parallel geschehen, sind einander gleich.

Der 2. Zusatz.

184. Ein Würfel ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen.

Die 18. Erklärung.

185. Wenn sich ein rechtwinkelichter Tri- VII.
angel ABC um seine Seite AB herum beweget, 116.
beschreibet er einen CONUM oder Kegel.

Zusatz.

186. Alle Durchschnitte, die im Kegel mit der Grundfläche DCB parallel geschehen, sind Circul, aber immer kleinere, je näher sie der Spitze A kommen.

Die 19. Erklärung.

187. Wenn eine Linie AD sich in einem fe- VII.
sten Puncte verschieben lässet, und um die ganze 117.
Peripherie einer geradelinichten Figur ABC mit dem andern Ende A beweget; entstehet eine Pyramide. Ist die Figur ABC ein Circul, VII.
so bekommet man einen Kegel. 116.

Zusatz.

188. Eine Pyramide hat zur Grundfläche eine gradlinichte Figur, und ist um und um in so viel Triangel, als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen, welche oben in einem Puncte D mit ihren Spitzen zusammenstossen.

Die 20. Erklärung.

189. Wenn ein Körper in lauter gleiche reguläre Figuren von einerley Art eingeschlossen ist, daß daher alle Winkel desselben gleich sind, nennet man ihn regulär, oder ordentlich; die übrigen werden irreguläre oder unordentliche genennet.

Die 21. Erklärung.

VII. 190. Ausser dem Würfel (§. 182.) sind noch
118. vier andere reguläre Körper, als das TETRAEDRUM, welches aus vier gleichseitigen Triangeln zusammengesetzet wird: das
119. OCTAEDRUM, so aus achten zusammen
120. gesetzet: das ICOSAEDRUM, welches
121. zwanzig einschliessen: und das DODECAEDRUM, welches von zwölf regulären Fünf-Ecken eingeschlossen wird.

Die 63. Aufgabe.

191. Den körperlichen Inhalt eines Cubi, oder Würfels, und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

Der Maaßstab des körperlichen Inhalts ist eine Cubicruthe, das ist, ein Würfel, der eine Ruthe dick, und eine Ruthe breit ist. Diese wird eingetheilet in Cubic-Schuhe, in Cubic-Zolle rc. Jenes sind Wür-

Würfel, die zur Seite einen Schuh; diese aber Würfel, die zur Seite einen Zoll haben.

Wenn ihr nun den körperlichen Inhalt eines Würfels wissen wollet; so

1. Messet die Seite des Würfels und multipliciret sie mit sich selbst, so habet ihr seine Grundfläche (§. 114. 184.).
2. Diese multipliciret weiter durch seine Seite; so kommet der Inhalt des Würfels heraus.
3. Hingegen wenn ihr die Grundfläche mit 6 multipliciret; so bekommet ihr die Fläche des ganzen Würfels (§. 184.).

Exempel.

Seite	34′	Grundfläche	1156′
	34	Seite	34
	136		4624
	102		3468
Grundfläche	1156′	Inhalt des Würfels	39304′
	6		
Fläche des Würfels	6936′		

Beweis.

Man bilde sich ein, es sey die Seite des Würfels in etliche gleiche Theile eingetheilet. So ist klar, daß so viel Schichten kleiner Würfel herauskommen, als die Höhe Theile hat, und in jeder Schichte so viel kleine Würfel als Quadrate in der Grundfläche sind. Derowegen, wenn man die Höhe durch die Grundfläche multipliciret; so kommet VII. 122.

die Zahl der kleinen Würfel heraus, die der grosse in sich hält. W. Z. E.

Zusatz.

192. Wenn die Seite des Würfels 10 ist; so ist der körperliche Inhalt 1000. Derowegen, wenn die Seite eine Ruthe, oder 10 Schuhe hält; so sind 1000 schuhige Würfel in dem grossen enthalten. Und demnach hat die Cubicruthe 1000 Cubicschuhe, der Cubicschuh 1000 Cubiczolle, der Cubiczoll 1000 Cubiclinien.

Der 27. Lehrsatz.

193. **Alle Parallelepipeda, Prismata und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.**

Beweis.

Wenn man ein Parallelepipedum, Prisma und einen Cylinder in lauter Scheiben zerschneidet, so subtil, als man will; so sind nicht allein alle Scheiben einander gleich (§. 181. 183.); sondern wenn zwey Körper auch gleiche Höhe haben, so können aus einem nicht mehr als aus dem andern geschnitten werden. Und also fasset ein Körper so viel Raum in sich, als der andere. W. Z. E.

Die 64. Aufgabe.

VII. 194. **Den Inhalt eines Parallelepipedi und**
123. **seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

1. Multiplicieret die Länge AB durch die Breite BC, so habet ihr die Grundfläche ABCD (§. 117. 183.).

2. Diese

2. Diese multipliciret ferner durch die Höhe BF; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB 36′ BC 15′ BF 12′

Länge	AB	36	Grundfl.	ABCD	540
Breite	BC	15	Höhe	BF	12
		180			1080
		36			540
Grundfl.	ABCD	540′	Cörperl.	Inhalt	6480′.

Für die Fläche.

1. Multipliciret AB in BC, ingleichen AB in BF, und BF in BC; so habet ihr die Vierecke BD, EB und BG (§. 117. 183.).
2. Addiret die drey Vierecke zusammen und multipliciret die Summe durch 2; so bekommet ihr die Fläche des Parallelepipedi heraus (§. 117. 138).

Z. E.

AB 36′	AB 36′	BC 15′
BC 15	BF 12	BF 12
180	72	30
36	36	15
□ DB 540′	□ BG 432′	□ BE 180′
□ BG 432		
□ BE 180		
1152′		
2		

2304′ Fläche des Parallelepipedi.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 191.).

Der 28. Lehrsatz.

VII. 195. **Ein jedes Parallelepipedum wird durch**
12. **die Diagonalfläche DFBH in zwey gleiche Prismata getheilet.**

Beweis.

Die Diagonallinie DB theilet das Parallelogrammum ABCD in zwey gleiche Triangel (§. 102.). Da nun die beiden Prismata ADBFGH und DBCEFH ausser diesen gleichen Grundflächen auch einerley Höhe DH haben; müssen sie einander gleich seyn (§. 193.). W. Z. E.

Die 65. Aufgabe.

VII. 196. **Den Inhalt eines jeden Prismatis und**
124. **seine Fläche zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Prismatis (§. 117. 121. 122. 123. 124.).
2. Multipliciret selbige durch die Höhe; so kommet der verlangte Inhalt heraus.
3. Hingegen multipliciret den Umfang der ganzen Grundfläche durch dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ausser den beiden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr nun diese dazu addiret; so habet ihr die ganze Fläche (§. 180.).

Z. E. Es sey AB 8′ CD 6′ AE 15′

AB	8	ABC	24
½CD	3	AE	15
ABC	24′		120
			24
		Inhalt des Prismatis	360′

BC

BC	91″
BA	80
AC	62
Peripherie	233″
AE	150
	11650
	233
Seitenfläche	34950
BAC	2400
HEI	2400
Ganze Fläche	39750″.

Beweis.

Das dreyeckigte Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedi, welches mit ihm einerley Höhe, aber eine doppelte Grundfläche hat (§. 95.). Wenn man die ganze Grundfläche des Parallelepipedi mit der Höhe multipliciret: so bekommet man seinen Inhalt (§. 194.). Derowegen, wenn man die Hälfte von der Grundfläche des Parallelepipedi, das ist, die Grundfläche des dreyeckichten Prismatis, durch die Höhe multipliciret, so muß die Hälfte des Parallelepipedi, das ist, der Inhalt des Prismatis herauskommen. Alle übrigen Prismata lassen sich in dreyeckichte zertheilen, und also gilt auch von ihnen, was von den dreyeckichten erwiesen worden.

Die 66. Aufgabe.

197. Aus der gegebenen Höhe eines Cylinders, und dem Diametro desselben, seinen Inhalt und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Cylinders (§. 134).
2. Multipliciret selbige durch seine Höhe; so habet ihr den verlangten Inhalt.
3. Hingegen die Peripherie multipliciret durch eben dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ohne die beiden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr nun die beiden Grundflächen dazu addiret; so ist die Summe die verlangte Fläche des Cylinders.

VI. Z. E. Es sey der Diameter 2 AB 560″, die Höhe
113. BC 892″; so ist

die Grundfläche	246176″	Periph.	17584‴
die Höhe BC	892″	BC	8920
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Inhalt	219588992″		156849280‴
des Cylinders			24617600
			24617600
		Fläche	206084480‴

Beweis.

Weil der Circul ein regulaires Vieleck ist, so unzählig viel Seiten hat, so kan man den Cylinder als ein Prisma ansehen, welches unzählig viel Seiten hat. Und dannenhero wird sein Inhalt gefunden, wenn seine Grundfläche durch die Höhe; die Fläche aber, wenn die Peripherie der Grundfläche in eben diese Höhe multipliciret wird (§. 196.). W. Z. E.

Lehrsatz.

§. * Wenn eine Pyramide ABCD dergestalt durchschnitten wird, daß der Durchschnitt abc der Grundfläche ABC parallel ist; so ist auch die Figur abc der andern ABC ähnlich.

Beweis.

Weil ab mit AB parallel; so ist Da : DA = ab : IX.
AB (§. 149. Geom. et §. 83. Arithm.). Eben 1.
deswegen ist Da : DA = ac : AC, folgends ab : AB = ac : AC (§. 57. Arithm.), und daher ab : ac = AB : DC (§. 83. Arithm.). Da man nun auf gleiche Weise erweiset, daß ac : bc = AC : BC, so sind die △△ abc und ABC ähnlich (§. 148.), folgends in andern Fällen die Figuren, die aus ihnen zusammengesetzet werden (§. 33.). W. Z. E.

Der 29. Lehrsatz.

198. Pyramiden und Kegel, die gleiche Grund=

Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

Beweis.

IX. 2. Es sey ABC eine Seiten-Fläche von einer Pyramide, und DEF von einer andern, BC und EF in einer Linie BF, BC = EF, die Spitzen A und D mit BF in einer Fläche, und AM auf BC, DO auf EF perpendicular; so ist AM = DO. Nun ziehe man GK mit BF und AD parallel, so ist auch AL = DN (§. 22.) und AG : AB = GH : BC = AL : AM (§. 149. Geom. §. 57. Arithm.). Eben so wird erwiesen, daß DN : DO = IK : EF. Da nun GH : BC = IK : EF (§. 57. Arithm.), das ist GH : IK = BC : EF (§. 83. Arithm.), und BC = EF; so ist GH = IK (§. 53. Arithm.). Weil eben dergleichen in allen übrigen Flächen, welche die Pyramide einschliessen, erwiesen werden kan, und wegen der Aehnlichkeit der Durchschnitte mit ihren Grundflächen (§. *), die gleichnamigen Winkel einander gleich sind (§. 147.): so müssen die Durchschnitte in beiden Pyramiden von gleicher Grösse seyn, wenn sie in gleicher Höhe geschehen (§. 31.). Da aber die ganzen Höhen der Pyramiden von gleicher Grösse sind, kan man in einer nicht mehr Durchschnitte haben als in der andern. Und demnach sind die Pyramiden einander gleich: welches das erste war.

Weil man die Triangel ABC und DEF für die Durchschnitte zweyer Kegel annimmt, dadurch

durch sie von der Spitze bis durch die Grundfläche in zwey gleiche Theile getheilet werden: so sind GH und IK die Diametri der Circul, welche aus den mit den Grundflächen parallel geschehenen Durchschnitten entstehen (§. 186.), und also ist abermal klar, daß diese Circul und folgends die ganzen Kegel einander gleich seyn müssen: **welches das andere war.**

Der 30. Lehrsatz.

199. **Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem** Prismate, **so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.**

Beweis.

Die Pyramiden ADEF und ACBE haben einerley Höhe BE und gleiche Grundflächen DEF und ABC (§. 180.), derowegen sind sie einander gleich (§. 198.). Wiederum die Pyramiden AC, BE und CEFA haben gleiche Grundflächen BCE und CEF (§. 102.), und einerley Höhe, indem sie beide in A zusammenstossen. Derowegen sind sie auch einander gleich (§. 198). Folgends sind sie alle drey einander gleich (§. 22. Arithm.). W. Z. E. IX. 3.

Zusatz.

200. Da nun ein Kegel für eine Pyramide zu halten ist, welche unzählig viel Ecken hat; so wird auch derselbe der dritte Theil eines Cylinders

ders seyn, so gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

Die 67. Aufgabe.

201. **Den Inhalt einer Pyramide, ingleichen eines Kegels zu finden.**

Auflösung.

1. Suchet den Inhalt eines Prismatis und Cylinders, so gleiche Grundflächen und Höhen mit der Pyramide und dem Kegel haben (§. 196. 197.).
2. Diesen dividiret durch 3; so kommet der Inhalt der Pyramide und des Kegels heraus (§. 199. 200.).

Oder:

Multipliciret die Grundfläche beiderseits mit dem dritten Theil der Höhe.

Z. E. Der Inhalt des Prismatis ist (§. 196.) 360′. Also ist der Inhalt der Pyramide 120′. Der Inhalt des Cylinders ist (§. 197.) 219° 588′ 992″. Also kommen für den Kegel 73196330$\frac{2}{3}$″.

Die 68. Aufgabe.

VII. 202. **Den Inhalt eines abgekürzten Kegels**
125. **ABCD zu finden.**

Auf-

Auflösung.

1. Wenn man inferiret: wie der Unterschied AH der halben Diametrorum AG und CF zu der Höhe des abgekürzten Kegels CH, so der halbe grosse Diameter AG zu der Höhe des ganzen Kegels EG (§. 149.); so kan man durch die Regel Detri die Höhe des ganzen Kegels EG finden (§. 85. Arithm.)

2. Aus dieser und dem Diametro AB suchet den Inhalt des ganzen Kegels AEB (§. 201.).

3. Ziehet die Höhe des abgekürzten Kegels FG von der Höhe des ganzen EG ab, so bleibet die Höhe des abgeschnittenen Kegels EF übrig.

4. Suchet aus dieser und dem Diametro CD den Inhalt des Kegels ECD (§. 201.).

5. Endlich ziehet den kleinen Kegel ECD ab; so bleibet der Inhalt des abgekürzten ACDB übrig.

Z. E. Es sey AB 36', CD 20', FG = CH 12'; so ist AG 18', CF 10' und AH 88'; demnach

	AH	:	CH	=	AG	:	GE	
	8	:	12	=	18	:		
4)	2		3		9			(§. 96. Arithm.)
2)	1				3			

27' = GE
12 = GF
15 = FE.

100 : 314 = 18
18

2512
314

56′5′2″
1 800 AG

45216
5652

1017,6″ grosse Grundfläche.
$9\frac{1}{3}$ GE

$9^{\circ}156'240''$ der Kegel AEB

100 : 314 = 10 :
10

314″ halbe kleine Peripherie
100 CF

31400″ kleine Grundfläche
$50\frac{1}{3}$ EF

1570000″ Inhalt des Kegels CED
9.1.56240 Inhalt des Kegels AEB

7 5 86240″ Inhalt des abgekürzten Kegels ACDB.

Der 31. Lehrsatz.

203. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

Be-

Beweis.

Es sey ABCD der perpendiculaire Durchschnitt IX. eines Cylinders, dessen Diameter AD. Es sey EFG 4. der Durchschnitt einer halben Kugel, deren Diameter EG = AD. Die Höhe des Cylinders AB sey dem Radio der Kugel FH gleich, und AD sowol als EG befinden sich in einer geraden Linie AG. In dem Cylinder sey ein Kegel dergestalt ausgehöhlt, daß dessen Grundfläche so groß sey, als die obere Grundfläche des Cylinders, die Spitze desselben aber befinde sich in dem Mittelpunct der untern Grundfläche L. Und BLC sey der Durchschnitt dieses Kegels.

Man setze, daß sowohl der Cylinder als die Kugel und der Kegel, durch die mit AG parallele Fläche RK durchschnitten werde: so ist der Radius dieser Fläche im Cylinder MS, im Kegel MO, und in der Kugel IK, wenn man nemlich aus den Mittelpuncten L und H die Perpendicularlinien LT und HF aufrichtet, welche die Fläche RK in M und I durchschneiden. Man ziehe ferner von H bis K die gerade Linie HK; so ist HIK ein rechtwinklichter Triangel, und wenn man das Quadrat von IH von dem Quadrate von HK wegnimmt, so bleibt das Quadrat von IK übrig (§. 144.). Und weil sich die Circulflächen gegen einander verhalten, wie die Quadrate derer Diametrorum (§. 131.); so wird der mit IK beschriebene Circul übrig bleiben, wenn man von dem mit HK beschriebenen

Circul den abziehet, der mit IH beschrieben wird. Nun ist aber HK der Radius der Kugel (§. 13.), der dem Radio des Cylinders AL = MS gleich ist. Und weil IH = ML (§. 22.) und ML = MO (§. 149.); so ist IH = MO (§. 57. Arithm.), das ist, es ist der Radius des Ausschnittes vom Kegel. IK aber ist der Radius der Kugel. Folglich bleibt der Durchschnitt der Kugel übrig, wenn man von dem Durchschnitt des Cylinders, den Durchschnitt des Kegels abziehet. Da nun der Kegel $\frac{1}{3}$ vom Cylinder ist (§. 200.), so muß der Durchschnitt der halben Kugel EFG $\frac{2}{3}$ von dem Durchschnitt des Cylinders ABCD seyn. Da nun dieses von allen Durchschnitten gilt, so muß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders seyn. W. Z. E.

Der 32. Lehrsatz.

204. **Der Cubus Diametri verhält sich zu der Kugel beynahe wie 300 zu 157.**

Beweis.

Wenn der Diameter der Kugel 100 ist; so hält der Cubus desselben 1000000 (§. 191.) und der Cylinder, der mit der Kugel Eine Grundfläche und Höhe hat, 785000 (§. 197.). Und demnach ist der Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$ (§. 203.). Solchergestalt verhält sich der Cubus zur Kugel, wie 1000000 zu $523333\frac{1}{3}$, das ist, wenn man beiderseits mit 3 multipliciret, wie 3000000 zu 1570000 (§. 58. Arithm.), oder wenn

wenn man ferner durch 10000 dividiret, wie 300 zu 157 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Anmerkung.

205. Ich sage, der Cubus Diametri verhalte sich zur Kugel beynahe wie 300 zu 157, weil man voraus setzet, der Diameter im Circul verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 zu 314; welches nur beynahe zutrifft (§. 129.).

Lehrsatz.

§. Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet.**

Beweis.

Man stelle sich vor, als wenn die Fläche der Kugel in so kleine Vierecke zertheilet sey, daß jedes von ihnen von einer ebenen Fläche nicht mehr merklich unterschieden. Man setze hinzu, daß aus dem Mittelpunct der Kugel an ihre Ecken gerade Linien gezogen seyn. Alsdenn ist klar, daß die Kugel aus unzählig viel viereckten Pyramiden bestehe, die im Mittelpuncte der Kugel mit ihren Spitzen zusammenstossen, und deren Grundflächen zusammen der Kugelfläche gleich sind, die Höhen aber von dem halben Diameter der Kugel nicht merklich unterschieden. Derowegen wird die ganze Kugel mit Recht für eine Pyramide gehalten, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet. W. Z. E.

Der 33. Lehrsatz.

206. Die Kugelfläche verhält sich zu dem grösten Circul der Kugel wie 4 zu 1.

Beweis.

Weil der Inhalt der Kugel dem Inhalt einer Pyramide gleich ist, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber ihrem halben Diameter gleichet (§. *); so kommt die Kugelfläche heraus, wenn man den körperlichen Inhalt der Kugel durch den dritten Theil des halben Diametri, oder den sechsten des Ganzen dividiret (§ 201.). Nun wenn der Diameter 100 ist, so ist der Inhalt des grösten Circuls 7850 (§ 134.), der Inhalt aber der Kugel $\frac{1570000}{3}$ (§. 204.). Derowegen, wenn ihr diesen durch den sechsten Theil des Diametri $\frac{100}{6}$ dividiret, so kommt für die Kugelfläche 31400 (§. 71. Arithm.). Demnach verhält sich die Kugelfläche zu dem grösten Circul der Kugel, wie 31400 zu 7850, das ist, wenn man beiderseits mit 7850 dividiret, wie 4 zu 1 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

207. Also kommet die Kugelfläche heraus, wenn man die Peripherie durch den Diametrum multipliciret (§. 134.).

Die 69. Aufgabe.

208. Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel sowohl den Inhalt ihrer Fläche, als ihren körperlichen Inhalt zu finden.

Auf=

Auflösung.

1. Suchet die Peripherie des grösten Circuls (§. 132.).
2. Multipliciret sie durch den gegebenen Diametrum; so habet ihr die Kugelfläche (§. 207.).
3. So ihr nun ferner dieselbe durch den sechsten Theil des Diametri multipliciret, oder durch den ganzen Diametrum, und das Product durch 6 dividiret; kommet der körperliche Inhalt der Kugel heraus.

Z. E. Es sey der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie des grösten Circuls 17584‴.

	17584‴
Diameter	5600
	10550400
	87920
Kugelfläche	984704″
Diameter	560
	59082240
	4923520
	551434240″

28 4
88.143424Ø } 91905706⅔″ Inhalt der Kugel.
66666666

Die 70. Aufgabe.

209. Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel ihren körperlichen Inhalt noch auf eine andere Art zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Cubum des Diametri (§. 191.), oder in den Tabellen über die Cubiczahlen.
2. Suchet zu 300, 157 und dem gefundenen Cubo die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.), diese ist der körperliche Inhalt der Kugel (§. 204.).

Z. E. Es sey der Diameter einer Kugel 64''; so ist dessen Cubus 262144, folgends

$$
\begin{array}{r}
300 - 157 - 262144'' \\
157 \\
\hline
1835008 \\
1310720 \\
262144 \\
\hline
41156608
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\cancel{2}\cancel{2}\ \cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} \\
\cancel{4}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{6}08 \\
\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}00
\end{array}\right\} 137188''\tfrac{208}{300}\ \text{Inhalt der Kugel.}
$$

Der 34. Lehrsatz.

210. **Alle Prismata, ingleichen Parallelepipeda, Cylinder, Pyramiden und Kegel, wenn sie gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen: haben sie aber gleiche Grundflächen; so verhalten sie sich wie ihre Höhen.**

Beweis.

Prismata, Parallelepipeda und Cylinder verhalten sich, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen (§. 194. 196. 197.): Pyramiden aber und Kegel, wie die Producte aus dem

dem dritten Theile ihrer Höhen in ihre Grundflächen (§. 201): und also alle insgesamt, wenn ihre Höhen gleich sind, wie die Grundflächen, wenn aber die Grundflächen gleich sind, wie die Höhen (§. 58. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

211. Weil die Cylinder Circul zu ihren Grundflächen haben (§. 179.), die Circul aber sich wie die Quadrate ihrer Diametrorum verhalten (§. 131); so müssen auch die Cylinder von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diametrorum, oder der Diametrorum ihrer Grundflächen verhalten.

Der 35. Lehrsatz.

212. Die Kugeln verhalten sich gegen einander wie die Cubi ihrer Diametrorum.

Beweis.

Wie die eine Kugel zu dem Cubo ihres Diametri, so verhält sich auch die andere zu dem Cubo ihres Diametri (§. 204). Derowegen verhält sich auch die eine Kugel zu der andern, wie der Cubus des Diametri der einen zu dem Cubo des Diametri der andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Die 71. Aufgabe.

213 Einen Visirstab zu verfertigen, durch den man leicht finden kan, wie viel Kannen von einer flüßigen Materie, als Bier, Wein, Brandtewein u. s. w. in einem cylindrischen Gefässe enthalten sind, oder Raum haben.

Auflösung.

VII. 126. 1. Nehmet den Diameter von einem cylindrischen Gefässe, dergleichen man zu einem Kannenmaasse brauchet, und traget ihn aus A in B.

2. Richtet in A eine lange Perpendicularlinie auf, und traget aus A in 1 den Diameter des Kannengefässes; so ist die Linie B 1 der Diameter von einem zweykannigen Gefässe, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

3. Traget B 1 aus A in 2, so ist B 2 der Diameter eines dreykannigen Gefässes, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

4. Wenn ihr nun auf gleiche Art die Puncte 3. 4. 5. 6. u. s. w. gefunden; so traget dieselben auf die eine Seite des Visirstabes, auf die andere aber die Höhe der Kanne so vielmal, als angehet. So ist geschehen, was man verlanget.

Beweis.

Denn wenn zwey cylindrische Gefässe einerley Höhe, und zwar die Höhe einer Kanne haben, verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 211.). Daher ist das Quadrat des Diametri eines zweykannigen Gefässes zwey; eines dreykannigen drey; eines vierkannigen viermal so groß, als eines einkannigen u. s. w. Nun ist das Quadrat B 1 oder A 2 zweymal, das Quadrat B 2 oder A 3 dreymal, das Quadrat B 3 oder A 4 viermal so groß, als das

das Quadrat AB oder A 1 (§. 144.) u. s. w. Da nun AB oder A 1 der Diameter eines einkannigen Gefässes ist, so ist A 2 der Diameter eines zweykannigen, A 3 der Diameter eines dreykannigen, A 4 der Diameter eines vierkannigen u. s. w. Derowegen, wenn ihr mit der Seite des Maaßstabes, da diese Eintheilungen aufgezeichnet sind, den Diameter eines cylindrischen Gefässes ausmesset; so wisset ihr, wie viel Kannen auf dem Boden stehen können. Messet ihr nun ferner mit der andern Seite des Visirstabes die Länge desselben; so wisset ihr, wie viel Kannen über einander stehen können. Derowegen, wenn ihr den Diameter durch die Höhe multipliciret; so kommet die Anzahl der Kannen heraus, die das ganze Gefässe fassen kan. Und solchergestalt könnet ihr durch den verfertigten Visirstab den Inhalt eines cylindrischen Gefässes nach Kannenmaasse finden. W. Z. E.

Anmerkung.

214. Es sey z. E. der Diameter eines cylindrischen Gefässes 8, die Höhe 12; so haben 96 Kannen darinnen Raum.

Die 72. Aufgabe.

215. **Ein gegebenes Faß zu visiren, das ist, zu finden, wie viel Kannen in demselben Raum haben.**

Auflösung.

1. Messet mit der gehörigen Seite des Visirstabes den Diameter des Bodens AB, ingleichen den Diameter des Bauches durch das Spundloch VII. 127.

CD: dabey mit der andern Seite des Visirstabes die Länge des Fasses EF.

2. Weil das Faß mitten bey dem Spundloche einen Bauch hat, gegen den Boden aber beiderseits niedergedruckt ist; so nimmt man an, (weil es vermöge der Erfahrung zutrifft, ob es sich gleich nicht geometrisch erweisen lässet,) daß das Faß einem Cylinder gleich sey, dessen Grundfläche der mittlere arithmetische Proportionalcircul zwischen dem kleinen Circul des Bodens und dem grossen des Bauches ist. Addiret demnach den grossen Diameter CD und den kleinen AB.

3. Die halbe Summe multiplicieret durch die Länge des Fasses FE; so kommet vermöge des Beweises der vorhergehenden Aufgabe (§. 213) die Zahl der Kannen heraus, welche in dem Fasse Raum haben.

Z. E. Es sey AB = 8
CD = 12

so ist die Summe = 20

die halbe Summe = 10
FE = 15

Inhalt des Fasses = 150 Kannen.

Anmerkung.

216. Es ist zu merken, daß man noch keine leichte und richtige Manier ersonnen, Fässer, die nicht voll sind, zu visiren, wenn sie nach der Länge liegen. Will man sie aber auf den Boden setzen, und hernach die Höhe des Weines anstatt der Länge des Fasses annehmen; so kan man nach gegenwärtiger Aufgabe finden, wie viel Kannen darinnen enthalten sind.

Die

Die 73. Aufgabe.

217. **Eines jeden irregulären Körpers Inhalt zu finden.** VII. 128.

Auflösung.

1. Leget den Körper in ein ausgehöhltes Parallelepipedum und übergiesset ihn mit Wasser, oder überschüttet ihn mit Sande. Merket dabey die Höhe des Wassers, oder des wohlgeebneten Sandes AB.
2. Nehmet den Körper heraus, und merket abermal die Höhe des Wassers oder des Sandes, nachdem er wieder geebnet worden, AC; so wisset ihr BC.
3. Weil nun der Inhalt des Körpers dem Parallelepipedo DFCGE gleich ist; so messet desselben Länge FC und Breite CG, und suchet den Inhalt desselben (§. 194.).

Z. E. Es sey AB 8′, AC 5′; so ist BC 3′. Es sey ferner FC 12′, CG 4′; so wird endlich der Inhalt des Körpers 144′ gefunden.

Anmerkung.

218. Wenn man den Körper in dergleichen Gefässe nicht wohl legen kan, als wenn man zum Exempel eine feststehende Statue ausmessen solte; so darf man nur entweder ein Parallelepipedum, oder ein viereckigtes Prisma um denselben aufrichten, den leeren Raum mit Sand ausfüllen, und im übrigen wie vorhin verfahren.

Die 74. Aufgabe.

219. **Netze zu zeichnen, daraus man die geometrischen Körper zusammenlegen kan.**

Auflösung.

1. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ABC VIII (§. 53.), theilet die Seiten in zwey gleiche Theile 129. in

in D, E und F, und ziehet die Linien DE, EF und FD; so ist das Netz des Tetraëdri fertig (§. 190.).

VIII. 2. Wenn man die Seite AC in G, BC in H und
130. ED in L verlängert, bis CG = DC, CH = FC, DI = IL = ED; so lassen sich die Linien GL, CI und IH ziehen und ist das Netz des Octaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 3. Traget auf die Linie AB die Seite eines Würfels
131. AI viermal, so daß AI = IL = LN = NB, und construiret das Rectangulum ACDB dergestalt, daß AC = AI (§. 99.). Ziehet die Linien IK, LM, NO mit AC parallel (§. 67.), und verlängert IK und LM beiderseits in E und F, G und H, bis EI = IK = KF und GL = LM = MH: so giebet sich das Netz des Hexaëdri oder des Würfels (§. 182.).

VIII. 4. Beschreibet ein reguläres Fünfeck ABCDE
132. (§. 107.), leget das Lineal an D und B, und ziehet die Linie BL; leget es gleichfalls an D und A und ziehet die Linie AG; machet AG = AB = BL, und mit der Weite AB aus G und L einen Durchschnitt in Q; so giebet sich das Fünfeck ABLQG. Auf gleiche Art hänget die übrigen Fünfecke BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, imgleichen die übrigen sechs a, b, c, d, e, f daran; so ist das Netz des Dodecaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 5. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ACB
133. (§. 53.); verlängert die Linie AB in D, und traget sie noch viermal darauf, ziehet CE mit

AD

AD parallel (§. 67.), und machet CI = IK = KL = LM = ME = AB; verlängert AC in N bis CN = AC; leget das Lineal an B und I, F und K, G und L, H und M, D und E, und ziehet die Linien YO, SP, TQ, VR, und XE; leget dasselbe ferner auf D und M, H und L, G und K, F und I, B und C, und ziehet die Linien DQ, XP, VO, TN, SC; endlich machet MR = ME und BY = BA, und ziehet die Linien RE und AY. Die beschriebene Figur ist das Netz des Icosaëdri (§. 190.)

6. Auf die Linie BD traget aus B in H die Breite, VIII.
aus H in I die Länge, aus I in K die Breite, 134.
und aus K in D die Länge eines Parallelepipedi; in B richtet seine Höhe BA perpendicular auf, und beschreibet das Rectangulum BACD (§. 99). Ziehet EH, FI, GK mit AB parallel (§. 67.) und verlängert EH beiderseits in L und N, ingleichen FI in M und O, bis LE, MF, IO und NH der Breite des Parallelepipedi BH gleich werden; so giebet sich das Netz des Parallelepipedi (§. 182).

7. Traget auf CF die Seiten der Grundfläche eines VIII.
Prismatis CG, GH und HF, beschreibet das 135.
Rectangulum CAEF, dessen Höhe CA der Höhe des Prismatis gleich ist (§. 99.). Auf BD und GH construiret mit AB und DE, CG und HF die △△ BKD und GIH (§. 55.); so ist das Netz des Prismatis fertig (§. 179.). Wenn die Grundfläche ein Fünf- Sechs- Siebeneck rc. ist; so wird auf BD und GH ein Fünf- Sechs- Siebeneck rc. beschrieben.

8. Be-

VIII. 136. 8. Beschreibet aus A mit der Seite einer Pyramide AE einen Bogen EB; traget darein die Linien des Umfanges von der Grundfläche ED, DC, CB und ziehet die Linien AE, AD, AC, AB. Endlich beschreibet auf DC die Grundfläche der Pyramide; so ist das Netz fertig (§. 187.).

VIII. 137. 9. Für das Netz des Cylinders beschreibet ein Rectangulum (§. 99.), dessen Höhe BC der Höhe des Cylinders, die Länge CF dem Umfange gleich ist (§. 132.): verlängert BC in A und D, bis BA und CD dem Diameter gleich werden, und beschreibet die Circul der Grundflächen des Cylinders. So ist geschehen, was man verlangte (§. 179.).

Anmerkung.

220. Damit man nun die Körper aus den Netzen zusammen leimen kan; so lässet man einige Ränder, indem man sie ausschneidet, wie durch die punctirten Linien Fig. 129. angedeutet worden. Diese Arbeit dienet den Anfängern, die geometrischen Körper deutlich zu begreifen.

Ende der Geometrie.

Anfangs-Gründe der Trigonometrie.

Die 1. Erklärung.

§. 1.

Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft, aus I.
drey gegebenen Theilen eines Trian- 1.
gels, nemlich entweder aus zwey Seiten und einem Winkel, oder aus zweyen Winkeln und einer Seite, oder auch aus allen drey Seiten, die übrigen drey Theile zu finden.

Die 2. Erklärung.

2. Die halbe Sehne AD eines Bogens AB I.
heisset der *SINUS* des Bogens AE, ingleichen 2.
des Bogens AI, welche die Hälfte der Bogen AEB und AIB sind.

Der 1. Zusatz.

3. Derowegen stehet der Sinus eines Bogens AD I.
auf dem Radio des Circuls EC perpendicular (§. 95. 2.
Geom.); und also sind die Sinus verschiedener Bogen mit einander parallel (§. 75. Geom.).

Der 2. Zusatz.

4. Weil der Bogen AE das Maaß des Winkels I.
ACE, und der Bogen AI das Maaß des Winkels 2.
ACI ist (§. 16. Geom.); so ist auch AD der Sinus derselben Winkel.

Der 3. Zusatz.

I. 5. Und also haben zwey Winkel, die neben einan-
2. der auf einer Linie EI stehen, einerley Sinum.

Die 3. Erklärung.

I. 6. Die Linie EF, welche auf dem Ende des
2. Radii EC perpendicular aufgerichtet wird, heisset des Bogens AE und folgends des Winkels ECA *TANGENS;* FC aber desselben Bogens und Winkels *SECANS.*

Die 4. Erklärung.

I. 7. Hingegen ED wird sein *SINUS VERSUS*
2. und AG (= DC) der Sinus des Bogens AH, welcher mit EA 90 Grad machet, der *SINUS COMPLEMENTI*, oder auch *COSINUS* genennet: der Tangens davon HL *TANGENS COMPLEMENTI*, oder auch *COTANGENS*, ingleichen der Secans CL *SECANS COMPLEMENTI* oder *COSECANS.*

Die 5. Erklärung.

I. 8. Endlich der *RADIUS* EC heisset der *SI-*
2. *NUS TOTUS.*

Zusatz.

I. 9. Weil der Radius EC der Sinus des Qua-
2. dranten EH ist; so ist der Sinus totus der Sinus eines rechten Winkels (§. 37. Geom.).

Der 1. Lehrsatz.

I. 10. Die Sinus ähnlicher Bogen BC und
3. EF haben gegen ihre Radios AB und ED einerley Verhältniß.

Be-

Beweis.

Wenn die Bogen BG und EH einander ähnlich sind; so hat jeder gleich viel Grade, und also sind die Winkel A und D einander gleich (§. 35. Geom.). Nun sind bey C und F rechte Winkel (§. 3.). Derowegen ist, wie der Radius AB zum Sinu BC, so der Radius ED zum Sinu EF (§. 148. Geom.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

11. Daher hat man dem Sinui toti in einem jeden Circul insgemein 10 000 000 Theile zugeeignet, und durch Hülfe der Geometrie ausgerechnet, wie viel derselben der Sinus und Tangens von jedem Grade, ja einer jeden Minute, durch den ganzen Quadranten bekommet. Und solchergestalt sind die Tabulæ Sinuum und Tangentium entstanden, welche man in der Trigonometrie nöthig hat: wie in den Anfangs-Gründen umständlicher gezeiget wird.

Die 2. Anmerkung.

12. Weil die Sinus und Tangentes grosse Zahlen sind, welche das Multipliciren und Dividiren in der Trigonometrie sehr beschwerlich machen; so hat Johannes Nepper, ein schottländischer Baron, und nach ihm Heinrich Brigge, ein Engländer, gewisse Zahlen ersonnen, welche man anstatt der ordentlichen Zahlen mit grossem Vortheile in der Rechnung brauchen kan, indem sie das Multipliciren in das Addiren, und das Dividiren in das Subtrahiren verwandeln. Sie werden Logarithmi genennet, und sind nicht allein für alle Sinus und Tangentes; sondern auch für die gemeinen Zahlen von 1 bis 10000, zuweilen auch weiter in den gewöhnlichen Tabulis Sinuum und Tangentium zu finden. Von denselben müssen wir noch handeln, ehe wir zu den Aufgaben der Trigonometrie schreiten.

Die 6. Erklärung.

13. Wenn eine Reihe Zahlen in geometrischer Proportion, und eine andere in arithmetischer fortgehen, so heissen die in der letztern die LOGARITHMI der erstern.

Die 1. Anmerkung.

14. Es seyn die beide Reihen Zahlen

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

unter welchen die ersten in einer geometrischen, die andern in einer arithmetischen Proportion fortgehen; so ist 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 2 der Logarithmus von 4, 7 der Logarithmus von 128. u. s. w.

Die 2. Anmerkung.

15. Wenn der Logarithmus von Eins 0 ist, so ist der Logarithmus des Products gleich der Summe der Logarithmorum der in einander multiplicirten Zahlen. Z. E. 3 die Summe der Logarithmorum 1 und 2 ist der Logarithmus von 8 dem Producte der beiden Zahlen 2 und 4. Wiederum 7 die Summe der Logarithmorum 2 und 5, ingleichen 4 und 3, ist der Logarithmus von 128 dem Producte aus den beiden Zahlen 4 und 32, ingleichen 8 und 16. Daher ist der Logarithmus des Quadrates dem Logarithmo der Wurzel, zweymal genommen, gleich. Z. E. 4 der Logarithmus von der Quadrat-Zahl 16 ist zweymal so groß, wie 2 der Logarithmus von der Wurzel 4; und 6 der Logarithmus von der Quadrat-Zahl 64 ist zweymal so groß, wie 3 der Logarithmus von der Wurzel 8. Hingegen die Hälfte eines Logarithmi ist der Logarithmus der Wurzel aus der ihm zugehörigen Zahl. Also ist die Hälfte des Logarithmi 8 der Logarithmus der Wurzel 16 aus der Quadrat-Zahl 256. Gleichergestalt ist der Logarithmus einer Cubic-Zahl dreymal so groß, wie der Logarithmus der Wurzel. Als 9 der Logarithmus von der Cubic-Zahl 512 ist dreymal so groß, als 3 der Logarithmus von der ihr zugehörigen Wurzel 8. Und daher der Logarithmus der Cubic-Wurzel der dritte Theil des Logarithmi der Cubic-Zahl. Z. E. 2 der Logarithmus von 4 ist der dritte Theil des Logarithmi 6 von der Cubic-Zahl 64.

Die 3. Anmerkung.

16. Wenn der Logarithmus von Eins 0 ist; so ist der Logarithmus des Quotienten der Unterscheid zwischen den Logarithmis der beiden Zahlen, die man durch einander dividiret. Und findet man den Logarithmum von einem Bruche, wenn man den Logarithmum des Zehlers von dem Logarithmo des

Nen-

Nenners abziehet, und vor das Ueberbliebene das Zeichen der Subtraction (—) setzet. Also ist 2 der Unterschied zwischen 5 und 7 der Logarithmus des Quotienten 4, welcher heraus kommet, wenn man die dazu gehörigen Zahlen 128 und 32 durch einander dividiret. Ingleichen 5 die Differenz zwischen 3 und 8, ist der Logarithmus von 32 dem Quotienten, der heraus kommet, wenn man 256 durch 8 dividiret. Hingegen — 1, der Unterschied zwischen 0 und 1 ist der Logarithmus von $\frac{1}{2}$.

Die 4. Anmerkung.

17. Hieraus erhellet, wie die Logarithmi das Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, die Ausziehung der Quadrat-Wurzel in Halbiren, und die Ausziehung der Cubic-Wurzel in Dividiren durch 3 verwandeln.

Die 5. Anmerkung.

18. Man hat die Logarithmos von 1. 10. 100. 1000. 10000. angenommen 0. 00 000 000, 1. 00 000 000, 2. 00 000 000, 3. 00 000 000, 4. 00 000 000 und auf eine sehr mühsame Art die Logarithmos aller Zahlen von 1 bis 10000, ja nach diesem gar bis 100 000 gefunden, wie in den Anfangs-Gründen gelehret wird. Daraus man ferner die Logarithmos Sinuum und Tangentium gerechnet, wie ebenfalls daselbst zu finden. Wie die Logarithmi gebraucht werden, erhellet aus den folgenden Aufgaben.

Der 2. Lehrsatz.

19. **In einem jeden Triangel ABC verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegen stehenden Winkel.** I. 4.

Beweis.

Man gedenke sich, es sey der Triangel ABC in einen Circul geschrieben, welches jederzeit geschehen kan (§. 97. Geom.). So ist der halbe Bogen AB das Maaß des Winkels C (§. 84. Geom.), und also ist die halbe Seite AB desselben Sinus (§. 2.). Eben so ist der halbe Bogen AC das Maaß des Winkels B, und daher die halbe Seite AC der Sinus des Winkels B. Derowegen verhält sich, wie die Seite AB zu dem Sinu des ihr entgegen gesetzten Winkels C, also die Seite AC zu dem Sinu des ihr entgegenstehenden Winkels B (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Die 1. Aufgabe.

I. 20. Aus der gegebenen Seite AB und
4. zweyen Winkeln A und C die Seite BC zu finden.

Auflösung.

Sprechet (§. 19.):

Wie der Sinus des Winkels C
zu der ihm entgegen gesetzten Seite AB,
So der Sinus des Winkels A
zu der ihm entgegen stehenden Seite BC.

Z. E. Es sey $C = 48^\circ\, 35'$, $A = 57^\circ 29'$ AB $= 74'$; so verfahret mit den Logarithmis folgendergestalt:

Log. Sin. C 9.8750142
Log. AB 1.8692317
Log. Sin. A 9.9259487

Summe 1.1.7918504

Log. BC 1.9201662, zu welchem in den Tafeln der Logarithmus von 83' am nächsten kommet.

Die

Die 1. Anmerkung.

21. Wollet ihr mit 83 Schuhen nicht zufrieden seyn, sondern noch Zolle dazu haben, so suchet diesen Logarithmum unter der Characteristica 2 hinter 830 auf. Alsdenn werdet ihr finden, daß der Logarithmus von 832 ihm am allernächsten kommet, und also über 3 Schuhe noch 2 Zoll sind. Ja wollet ihr gar Linien haben, so suchet euren Logarithmum noch einmal unter Characteristica 3 hinter 8320 auf: so findet ihr, daß der Logarithmus von 8321 ihm am nächsten kommt, und also die Seite BC $8^0 3' 2'' 1'''$ sey. Und solchergestalt müsset ihr allezeit verfahren, wenn der Logarithmus einer Seite unter seiner Characteristica nicht vollkommen zu finden.

Die 2. Anmerkung.

22. Weil die Auflösung der Aufgabe durch die Regel Detri geschiehet (§. 85. Arithm.), und daher der Sinus A mit der Seite AB multipliciret, das Product aber durch den Sinum des Winkels C dividiret werden solte; so ist klar, daß man den Logarithmum von AB zu dem Logarithmo des Sinus A addiren, und von der Summe den Logarithmum des Sinus C abziehen muß (§. 15. 16.).

Die 2. Aufgabe.

23. Aus zwey gegebenen Seiten AB und BC, und einem Winkel C, der einer von ihnen entgegen stehet, die übrigen Winkel zu finden.

Auflösung.

Sprechet (§. 19.): I.

Wie die Seite AB 4.

zu dem Sinu des entgegen stehenden Winkels C;

So die Seite BC

zu dem Sinu des entgegen stehenden Winkels A.

Z. E. Es sey $AB = 82'$, $BC = 75'$, $C = 64^\circ 33'$. Verfahret also:

Log. AB	1.913 81 38
Log. Sin. C	9.955 66 88
Log. BC	1.875 06 13
Summe	11.830 73 01

Log. Sin. A 9.916 91 63, zu welchem in den Tafeln der Logarithmus von $55^\circ 40'$ am nächsten kommet.

Die 1. Anmerkung.

24. Seyd ihr mit $55^\circ 40'$ nicht zufrieden; so könnet ihr noch Secunden dazu suchen. Ziehet nemlich von eurem

Logarithmo	9.916 91 63
den nächst-kleineren	9.916 85 93 ab und
merket die erste Differenz	570

Imgleichen

von dem nächst-grösseren	9.916 94 55
den nächst-kleineren	9.916 85 93 und mer-
ket die andere Differenz	862.

Sprechet: 862 geben 60″ wie viel geben 570

```
                               570
                                60
                             -----
    34200(39″                34200
862)2586
    ----
     8340
     7758
    ----
      582
```

So bekommet ihr noch 39″; und also ist der Winkel A $55^\circ 40' 39''$.

Die

Die 2. Anmerkung.

25. Wenn ihr zwey Winkel A und C habet, könnet ihr den dritten durch die Geometrie finden (§. 77. Geom.); wie aus beygefügtem Exempel zu ersehen.

C	64°	33′	0″
A	55	40	39
A+C	120	13	39
A+C+B	179	59	60
B	59	46	21.

Die 3. Aufgabe.

26. Aus zweyen Seiten AB und BC, die in I.
einem rechtwinkelichten Triangel den rechten 5.
Winkel B einschliessen, die Winkel zu finden.

Auflösung.

Nehmet BC für den Sinum totum an; so ist AB der Tangens des Winkels C (§. 6.). Sprechet demnach:

Wie die Seite BC
zu der Seite AB;
So verhält sich der Sinus totus
zu dem Tangente des Winkels C.

Z. E. Es sey BC 79′; AB 54′; so geschiehet die Rechnung also:

Log. BC	1.8976271
Log. AB	1.7323938
Log. Sin. tot.	1.000000000

Log. Tang. C. 9.8347667, welchem in den Tafeln am nächsten kommet der Logarithmus Tangentis von 34°21′. Demnach ist der

Winkel C 34°21′; der Winkel A aber 55°39′ (§. 75. Geom.).

Lehnsatz.

27. Wenn man zu der halben Summe zweyer Zahlen oder Grössen die halbe Differenz addiret, so kommet die grössere von ihnen heraus: subtrahiret man aber dieselbe von ihr, so bleibet die kleinere übrig.

Beweis.

Die grössere Zahl bestehet aus der kleinern und ihrer Differenz von der grössern; und also die Summe beider aus der Differenz und der kleinern zweymal genommen. Da nun die halbe Summe aus der kleinern und der halben Differenz bestehet, so kommet die grössere heraus, wenn man die halbe Differenz dazu addiret: hingegen bleibet die kleinere übrig, wenn man sie subtrahiret. W. Z. E.

Die 4. Aufgabe.

I. 28. Aus zwey gegebenen Seiten eines Tri-
6. angels AC und CB nebst dem Winkel C, den sie einschliessen, die übrigen Winkel zu finden.

Auflösung.

1. Sprechet:

Wie die Summe der beiden Seiten AC und CB zu ihrer Differenz:

So der Tangens der halben Summe der beiden gesuchten Winkel A und B

zu dem Tangente der halben Differenz derselben.

2. Addiret diese halbe Differenz zu der halben Summe; so habet ihr den Winkel B, welcher der grösten von den gegebenen Seiten entgegen gesetzet ist. Subtrahiret sie von derselben; so bleibet der Winkel A übrig (§. 27.).

Z. E. Es sey AC 75′, BC 58′, C 108° 24′; so geschiehet die Rechnung folgender massen:

AC = 75′	AC = 75′	A + B + C = 179° 60′
BC = 58	BC = 58	C = 108° 24′
AC + BC 133′	AC — BC 17′	A + B 71° 36′
		½(A + B) 35° 48′

Log. AC + BC	2.1238516
Log. AC — BC	1.2304489
Log. Tang. ½(A + B)	9.8580694
Summe	1.1.088.5.18.3
Log. Tang. ½(A — B)	8.9646667′

dem in den Tafeln der Logarithmus Tangentis von 5° 17′ am nächsten kommet.

½(A + B)	35° 48′	½(A + B)	35° 48′
½(A — B)	5 17	½(A — B)	5 17′
B	41° 5′	A	30° 31′

Beweis.

Verlängert die Seite AC in D bis CD = BC, und machet CE = CB; so ist DA die Summe, EA die Differenz der beiden Seiten CB und CA, und DBE ein rechter Winkel (§. 86. Geom.). Man ziehe AG mit EB parallel; so ist bey G auch ein rechter Winkel und GAD = BED (§. 37. 72. Geom.), ingleichen GB der Tangens des Winkels GAB und GD der Tangens des Winkels GAD (§. 6.). Nun ist DCB = CBA + CAB = CBE + CEB = 2 CEB (§. 74. 79. Geom.), und also CEB, ingleichen CAG die halbe Summe der gesuchten Winkel CBA und CAB, folgends BAG die halbe Differenz (§. 27.). Derowegen verhält sich wie DA die Summe der beiden Seiten zu EA ihrer Differenz, also DG der Tangens der halben Summe der gesuchten Winkel zu BG dem Tangente der halben Differenz (§. 149. Geom.). W. Z. E.

Die 5. Aufgabe.

I. 29. Aus drey gegebenen Seiten eines Tri-
7. angels die Winkel zu finden.

Auflösung.

1. Beschreibet aus der Spitze des Triangels A mit der kleinen Seite AB einen Circul; so ist CD [weil AB = AD (§. 27. Geom.)] die Summe zweyer Seiten, FC ihre Differenz.
2. Sprechet: wie die Grundlinie des Triangels BC zu der Summe der beiden Seiten AB + AC;
   So ihre Differenz FC
   zu dem Stücke der Grundlinie GC.
3. Ziehet GC von der Grundlinie BC ab; so bleibet BG übrig.
4. Lasset aus A ein Perpendicul AE auf BG fallen; so ist BE = EG = $\frac{1}{2}$ BG (§. 95. Geom.), und ihr könnet aus den beiden Seiten AB und BE in dem rechtwinkelichten Triangel ABE die Win-

kel

kel B und A; und in dem andern AEC aus den beiden Seiten AC und EC die Winkel C und A (§. 23.) finden.

Z. E. Es sey $AB = 36'$, $AC = 45'$, $BC = 40'$. Die Rechnung geschiehet folgendermassen:

AB	36′	AC	45′
AC	45	AB	36
AB + AC	81	FC = 9	

Log. BC	1.6020600
Log. AB + AC	1.9084850
Log. FC	0.9542425
Summe	2.8627275

Log. CG 1.2606675, welchem in den Tafeln der Logarithmus von 18 am nächsten kommet. Wenn man aber weiter nachsuchet (§. 21.); findet man endlich GC 1822‴

BC	4000‴	EG	1089‴
GC	1822	GC	1822
BG	2178‴	EC	2911‴
BE	1089‴		

Log. AB	3.5563025
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. EB	3.0370279

Log. Sin. A 9.4807254, welchem in den Tafeln der Logarithmus von 27° 36′ am nächsten kommet. Und also ist B 72° 24′.

Log.

Log. AC	3.653 212 5	
Log. Sin. tot.	10.000 000 0	
Log. EC	3.464 04 2 2	

Log. Sin. A 9.810 829 7, welchem in den Tafeln der Logarithmus von 40° 19′ am nächsten kommet. Und also ist der Winkel C 49° 41′.

Solchergestalt sind in dem Triangel ABC der Winkel A 57° 55′, B 72° 24′ und C 49° 41′.

Beweis.

I. Es ist weiter nichts zu erweisen, als daß sich CB
7. zu CD wie CF zu CG verhält, welches auf folgende Weise geschiehet.

Da y oder CBD zu seinem Maasse den halben Bogen GFD, und x zu seinem den halben GBD hat (§. 84. Geom.); so ist $x + y = 180°$. Nun ist auch $x + o = 180°$ (§. 38. Geom.). Derowegen ist $o = y$ (§. 25. Arithm.). Da ferner der Winkel C den beiden Triangeln CGF und CBD gemein ist; so ist CE : CD = CF : CG (§. 148. Geom.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

30. Weil BE und EC in Linien gegeben sind; so muß man auch in der Rechnung anstatt 36′ für AB 3600‴ und anstatt 45′ für AC 4500‴ annehmen.

Die 2. Anmerkung.

31. Wir wollen noch mit wenigem den Nutzen der Trigonometrie in Auflösung einiger geometrischen Aufgaben zeigen.

Anhang.

Die 1. Aufgabe.

I.
8. 32. Eine Höhe AB (z. E. eines Thurms)

zu

zu messen, zu der man aus einem angenommenen Stande E kommen kan.

Auflösung.

1. Messet den Winkel ADC (§. 43. Geom.) und die Linie BE oder DC (§. 44. Geom.).
2. So wisset ihr auch den Winkel A, weil bey C ein rechter Winkel ist (§. 75. Geom.).
3. Suchet alsdenn die Linie AC (§. 20.), und
4. addiret dazu die Höhe des Instruments DE (= BC, weil die Linien CD und BE parallel, und CB und ED auf BE perpendicular sind); so kommet die Höhe AB heraus. Wäre aber BE nicht horizontal; so müste man das Stücke BC besonders messen (§. 171. Geom.).

Die 2. Aufgabe.

33. Eine Höhe AB zu messen, zu der man nicht kommen kan. I. 9.

Auflösung.

1. Erwählet euch zwey Stände in E und G, um so viel weiter von einander, je höher der Berg oder der Thurm ist, den ihr messen wollet, und messet aus denselben die Winkel ADC und AFC (§. 43. Geom.), über dieses die Standlinie GE oder DF (§. 44. Geom.).
2. Ziehet von dem Winkel ADC den Winkel AFC ab; so bleibet der Winkel FAD übrig (§. 74. Geom.).
3. Suchet aus den nunmehro bekannten Winkeln und der Seite FD in dem Triangel AFD die Seite AF, und
4. aus dem Winkel F und der Seite AF in

dem

dem rechtwinkelichten Triangel die Seite AC (§. 20.).

5. Endlich addiret zu der Höhe AC die Höhe des Instruments DE, oder, wenn BC der Höhe des Instruments nicht gleich ist, so suchet ferner FC und endlich BC im Triangel FBC (§. 20.); so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Die 3. Aufgabe.

I. 34. Aus zwey Fenstern E und F in verschie-
10. denen Stockwerken eines Gebäudes eine Höhe zu messen, deren Spitze A man aus beiden Fenstern sehen kan.

Auflösung.

1. Messet durch einen Bleywurf die Höhe des andern Fensters über dem ersten EF, und des ersten über der Erde FG, und aus den Fenstern die Winkel AEC und AFD (§. 43. Geom.).
2. Addiret den Winkel AEC zu 90°, so habet ihr den Winkel AEF; subtrahiret von 90° den Winkel AFD, so bleibet der Winkel AFE übrig.
3. Addiret die beiden Winkel AEF und AFE, und ziehet die Summe von 180° ab; so bleibet der Winkel EAF übrig (§. 77. Geom.).
4. Suchet in dem Triangel AEF die Seite AF, und ferner
5. in dem Triangel AFD die Seite AD (§. 20.).
6. Endlich addiret dazu die Höhe des Fensters FG von der Erde; oder, wenn GB nicht horizontal ist, suchet ferner DF, und hernach vermittelst des Winkels DEB, den ihr gemessen (§. 43. Geom.)

Geom.), DB besonders (§. 20.); so kommet die Höhe AB heraus.

Die 4. Aufgabe.

35. Die Weite zweyer Oerter, zu deren beiden man aus einem angenommenen Stande kommen kan, zu messen. I. 11.

Auflösung.

1. Messet den Winkel C (§. 43. Geom.) und die Linie AC und CB (§. 44. Geom.): so könnet ihr
2. den Winkel A (§. 28.) und endlich die verlangte Weite AB (§. 20.) finden.

Die 5. Aufgabe.

36. Die Weite zweyer Oerter AB, zu deren einem B man aus einem angenommenen Stande C nur kommen kan (z. E. die Breite eines Flusses) zu messen. I. 12.

Auflösung.

1. Messet die beiden Winkel B und C (§. 43. Geom.) und die Standlinie BC (§. 44. Geom.); so könnet ihr
2. die verlangte Weite AB (§. 20.) finden.

Die 6. Aufgabe.

37. Die Weite zweyer Oerter AB, zu deren keinem man kommen kan, zu finden. I. 13.

Auflösung.

1. Erwählet drey Stände, D, C und E in einer Linie, und messet die Winkel ADC, ACD, BCE und BEC (§ 43. Geom.), nebst den beiden Standlinien DC und CE (§. 44. Geom.).
2. Subtrahiret die beiden Winkel ADC und

ACD,

ACD, wiederum ACD und BCE, und abermal BCE und BEC von 180°; so bleibet im ersten Falle der Winkel DAC, im andern der Winkel ACB, und im dritten der Winkel CBE übrig (§. 77. 38. Geom.). Alsdenn könnet ihr

3. die Seiten AC und BC (§. 20.), und so ferner
4. den Winkel CAB (§. 28.) und endlich die Seite AB (§. 20.) finden.

Die 7. Aufgabe.

I. 14. 38. Die Verhältniß des Diametri eines Circuls zu seiner Peripherie zu finden.

Auflösung.

Wenn der Radius des Circuls CD 10000000 ist; so ist sowohl der Sinus AG, als Tangens ED des Bogens von einer Minute DA beynahe 2909; und also muß der Bogen AD, welcher sonst etwas grösser ist als AG, und kleiner als ED, gleichfalls beynahe 2909 seyn. Multipliciret 2909 durch 21600, das ist die Zahl der Minuten in der ganzen Peripherie: so ist das Product 62834400. Derowegen verhält sich der Diameter zu der Peripherie beynahe wie 20000000 zu 62834400, das ist, (wenn man beiderseits mit 200000 dividiret,) wie 100 zu 314 (§. 59. Arithm.).

Ende der Trigonometrie.

An-

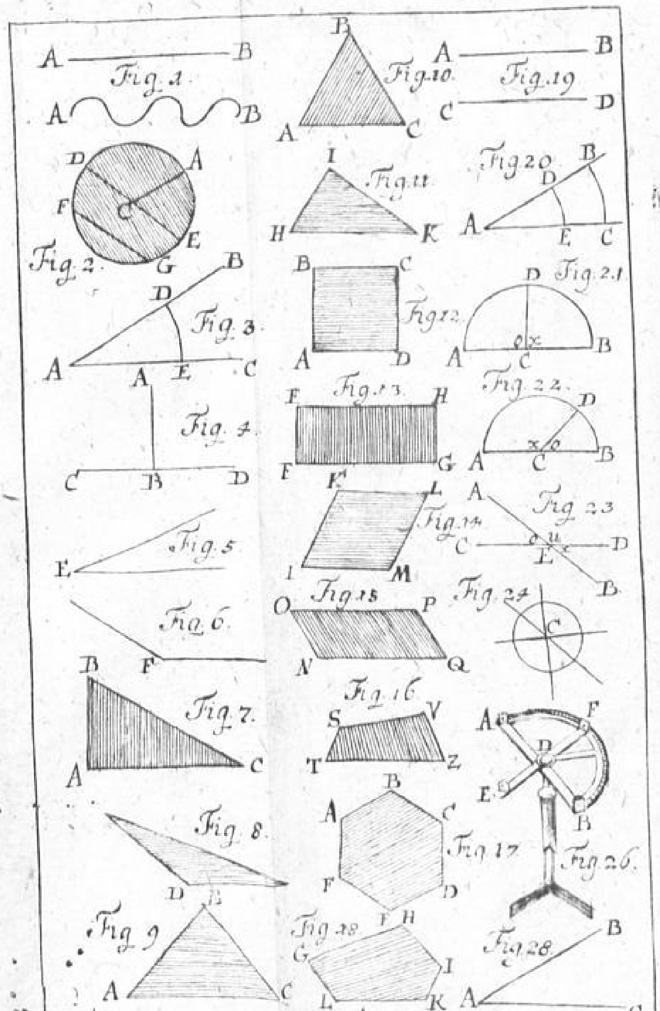


Fig. Geom. Tab I Lit. A

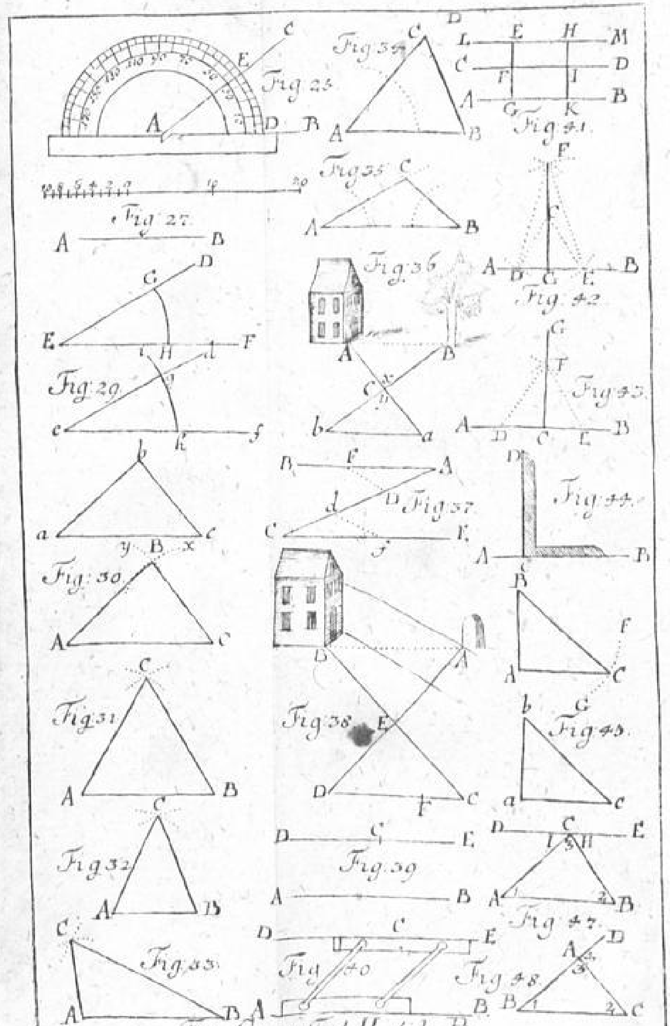


Fig. Geom. Tab. II. Lit. B

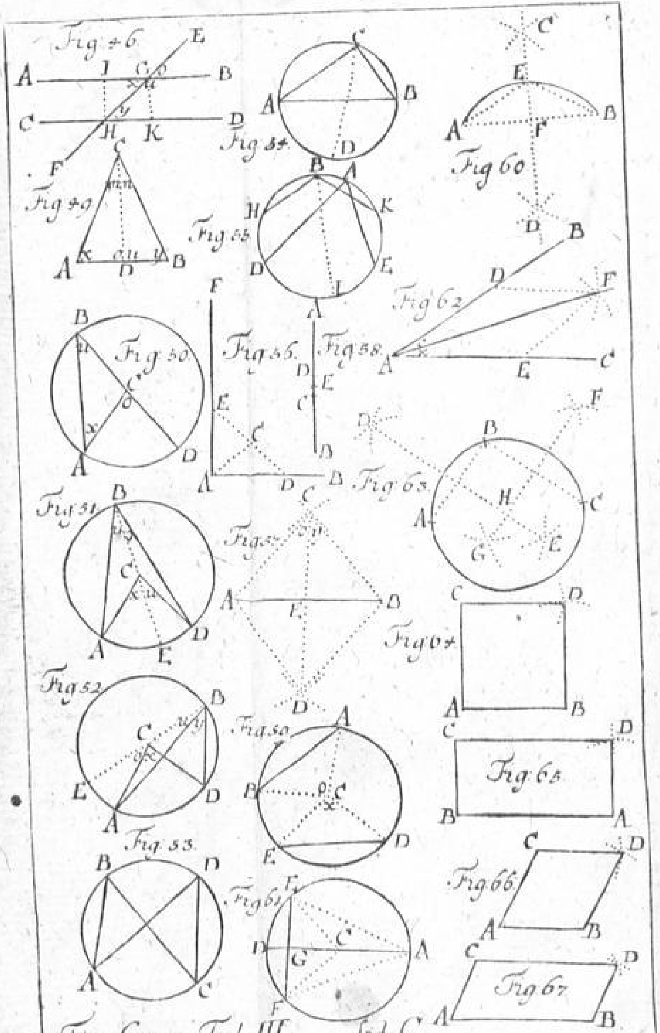


Fig: Geom: Tab. III. Lit. C.

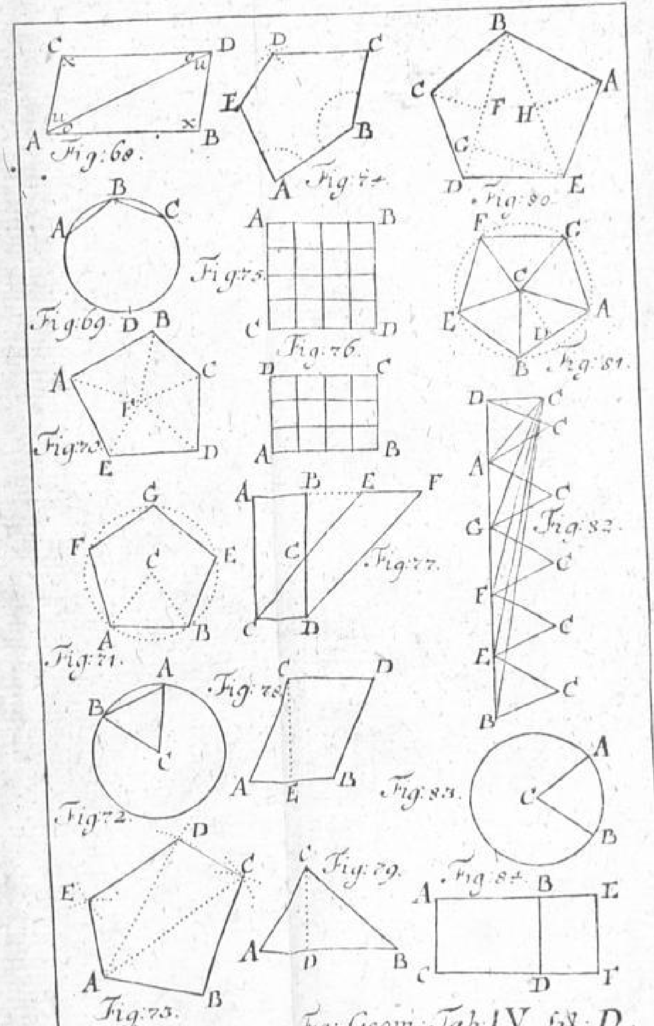


Fig: Geom: Tab: IV. Lit: D.

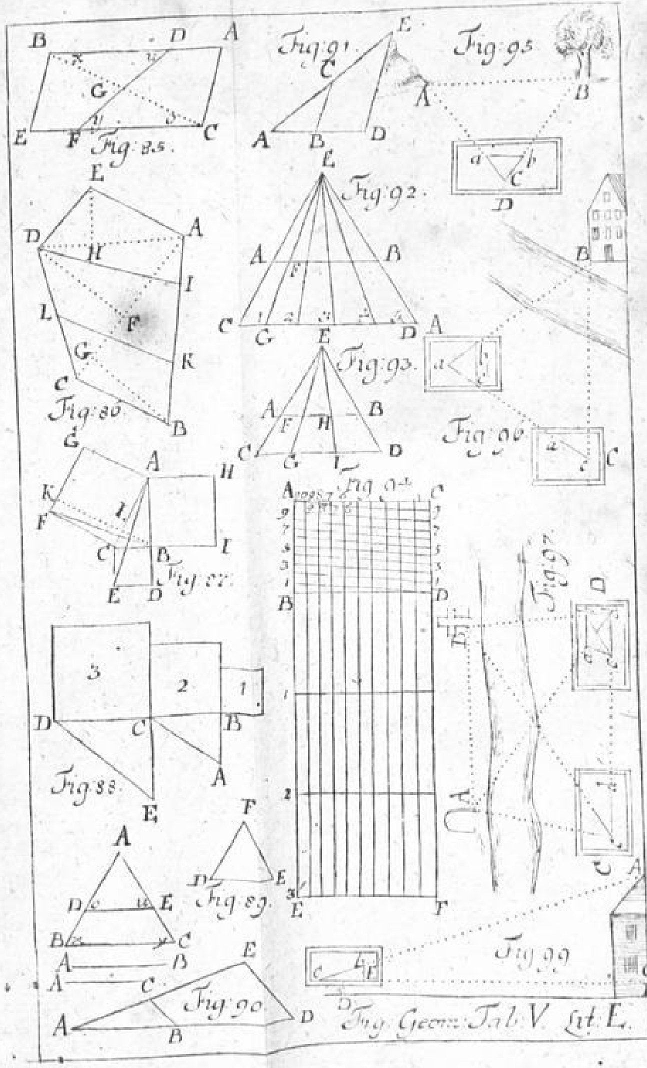


Fig. Geom. Tab. V. Lit. E.

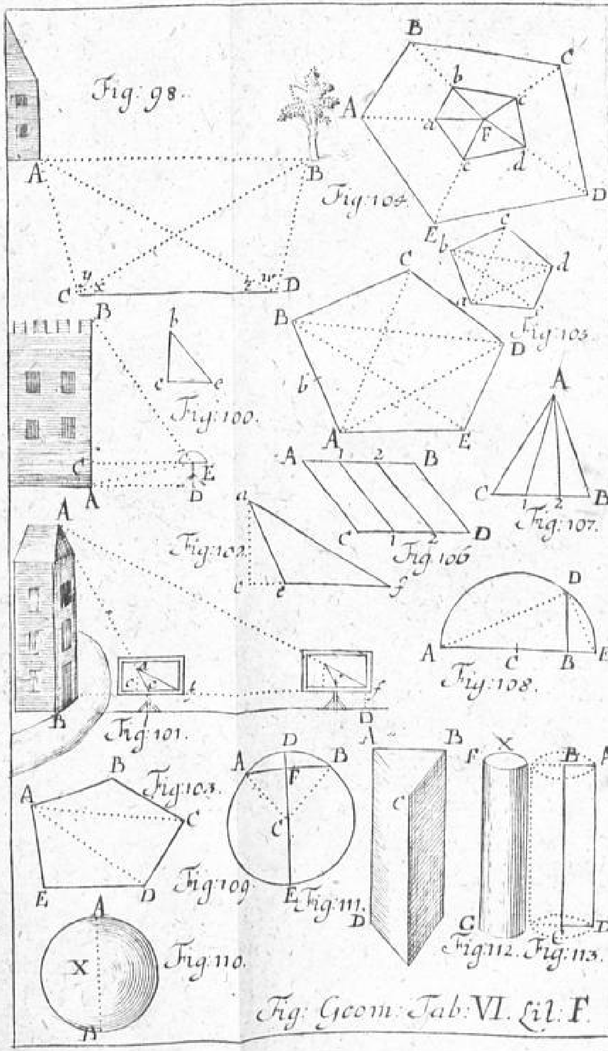


Fig: Geom: Tab: VI. Lit: F.

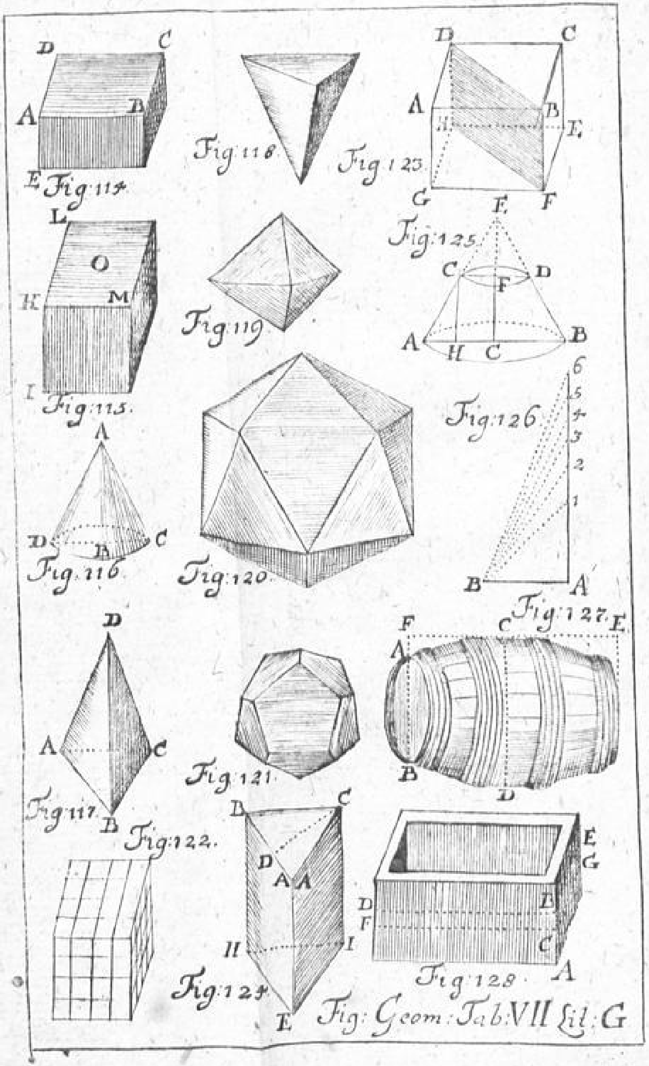


Fig:114
Fig:115
Fig:116
Fig:117
Fig:118
Fig:119
Fig:120
Fig:121
Fig:122
Fig:123
Fig:124
Fig:125
Fig:126
Fig:127
Fig:128
Fig: Geom: Tab:VII Lit:G

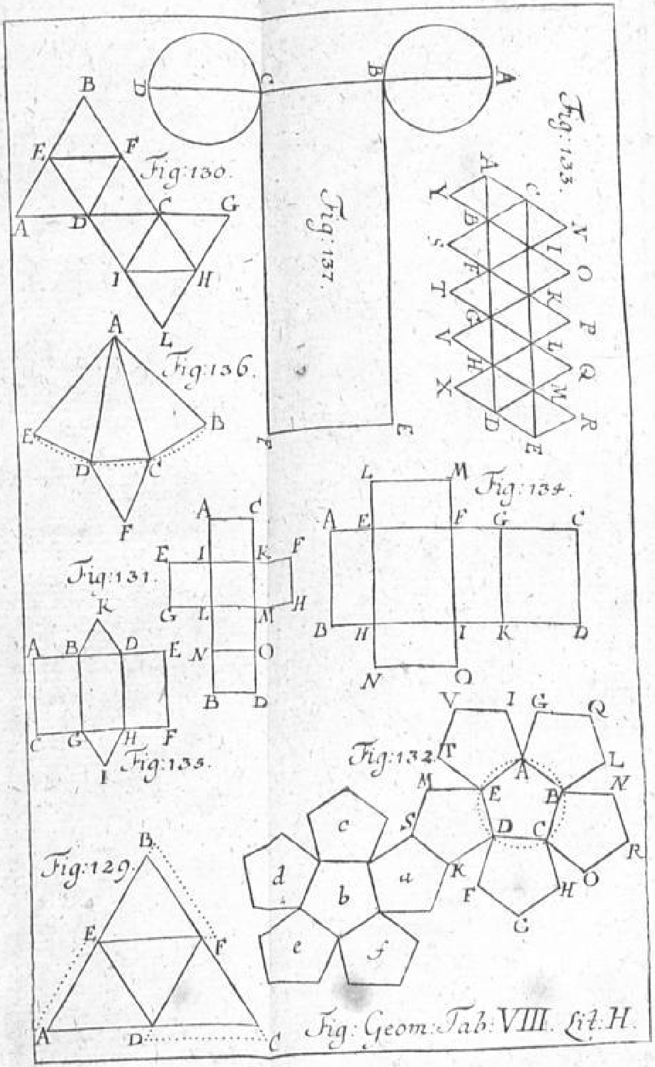


Fig: Geom: Tab: VIII. Lit: H.

Fig. 2.

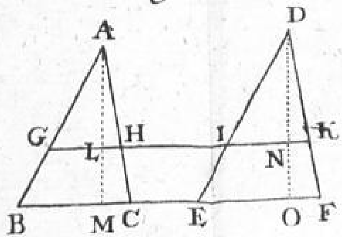


Fig. 1.

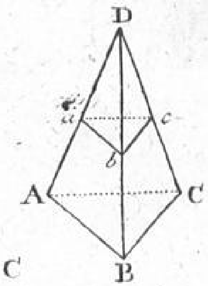


Fig. 3.

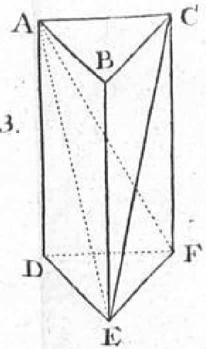


Fig. 4.

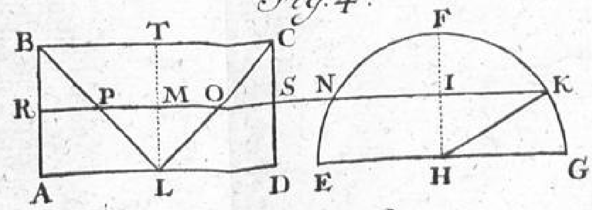
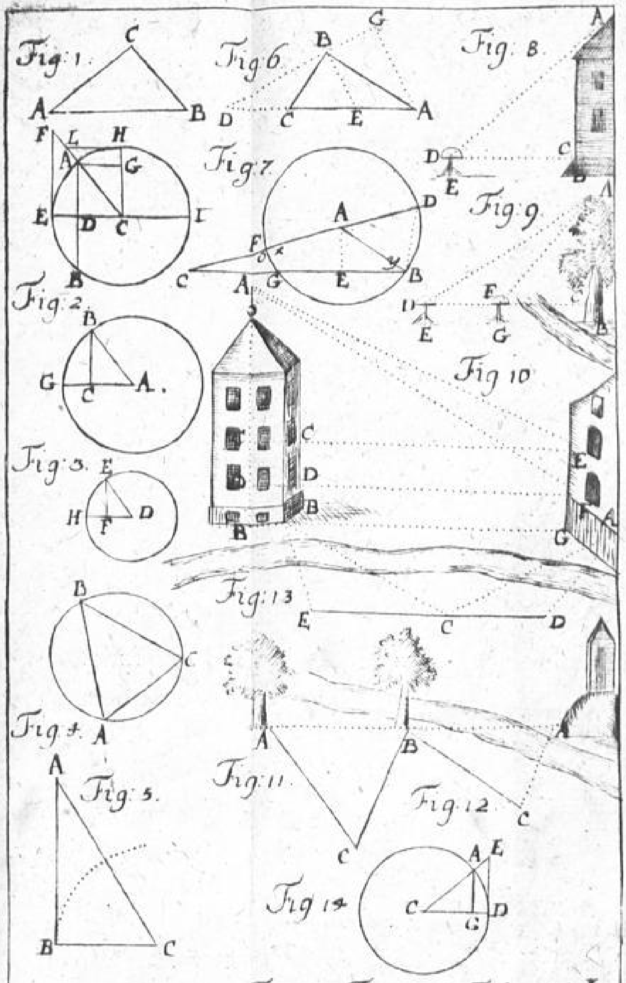


Fig. Geometr. Tab. IX.



Figur: Trigon: Tab: Lit: I.