Anfangs-Gründe der Geometrie.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geom[illegible] ist eine Wissenschaft des Raums, den die cörperliche Dinge nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnehmen.

Die 2. Erklärung.

2. Wenn man die Länge ohne die Breite und Dicke betrachtet, so nennet man sie eine Linie; ihren Anfang und Ende aber einen Punct, den man sich also ohne alle Theile gedenken muß, massen er sonst eine Linie wäre, und wieder seinen Anfang und Ende haben müste. Wenn sich nun ein Punct von einem Orte gegen den andern beweget, wird eine Linie beschrieben.

Anmerkung.

3. Die Geometræ haben zulängliche Ursachen gehabt, warum sie den Punct untheilbar annehmen, unerachtet die Einbildung so wenig, als unsere Hand mit ihren Instrumenten, einen untheilbaren Punct formiren kan. Damit er nemlich kein Theil der Linie würde; welches in der Ausübung der Geometrie mit Sorgfalt zu vermeiden.

Die 3. Erklärung.

4. Die Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung

dessen, wodurch die Dinge von einander durch den Verstand unterschieden werden.

Anmerkung.

5. Zum Exempel, ich habe zwey Sachen A und B, und betrachte eine nach der andern. Ich merke mit Fleiß auf alles, was nur in der Sache A wahrzunehmen, und zeichne es auf das genaueste auf. Gleichergestalt schreibe ich alles haarklein auf, was ich in der Sache B erkennen kan. Wenn ich nun beides gegen einander halte, was ich aufgezeichnet habe, so finde ich, daß es einerley sey. Die Grösse wird ausgenommen, weil man einem diese nicht mit blossen Worten begreiflich machen kan.

Zusatz.

6. Also können ähnliche Dinge nicht von einander unterschieden werden, wenn man sie nicht entweder wirklich, oder in Gedanken, vermittelst einer dritten Sache, z. E. eines Maaß-Stabes, zusammen bringet.

Die 4. Erklärung.

I. 7. Eine gerade Linie AB ist, deren Theil der
1. ganzen ähnlich ist. Eine krumme Linie AB ist, deren Theile der ganzen unähnlich sind.

Die 1. Anmerkung.

8. Auf dem Papiere wird eine gerade Linie mit einer Reiß-Feder, oder einem subtilen Stifte, nach dem Lineale gezogen, welches man auf die zwey gegebene Puncte anleget; auf dem Holze oder Steine durch einen mit Kreide oder Rötel bestrichenen Faden aufgeschlagen; auf dem Felde mit zweyen Stäben abgesteckt, die an ihren Enden aufgerichtet werden. Es kan aber mit zweyen Stäben der dritte in einer geraden Linie gestecket werden, wenn das

Auge, so gegen den einen gerichtet wird, die andern beide nicht siehet.

Die 2. Anmerkung.

9. Man nimmet zum Maaß-Stabe der Linie eine gewisse Linie oder Länge an, welche man eine Ruthe nennet. Dieselbe theilet man, um die Beschwerlichkeit im Rechnen zu vermeiden, in 10 gleiche Theile, und nennet einen derselben einen Schuh: der Schuh wird in 10 Zoll, und der Zoll in 10 Linien getheilet. Weil aber der Maaß-Stab willkührlich ist; so kan man leicht erachten, daß nicht an allen Orten der Schuh von gleicher Grösse sey.

Die 3. Anmerkung.

10. Auch ist wohl zu merken, daß nicht an allen Orten die Ruthen und Schuhe auf gleiche Art eingetheilet werden. Denn das rheinländische Maaß wird immer in 12 getheilet, da hingegen das geometrische nur 10 Theile hat.

Die 5. Erklärung.

11. **Unter den krummen Linien ist die bekanteste, und zur Zeit die nützlichste, die Circul-Linie. Es wird aber ein Circul beschrieben, wenn eine gerade Linie CA sich auf der Ebene um einen festen Punct C beweget.** I. 2.

Anmerkung.

12. Auf dem Papiere wird dieses mit einem besonderen Instrumente verrichtet, welches man einen Zirkel nennet. Auf dem Felde und im Grossen brauchet man anstatt der Linie einen Faden, oder eine Schnure, oder eine Stange: wie man denn auch besondere Stangen-Zirkel hat.

Die 6. Erklärung.

13. **Der Punct C heisset der Mittel-Punct (Centrum), weil alle Puncte in der Peri-** I. 2.

pherie gleichweit von demselben abstehen (§. 11.); die Linie CA der Halbmesser (Semidiameter, oder Radius); die Linie, so von einem Puncte der Peripherie D bis zu dem andern E durch den Mittel-Punct C gezogen wird, der Durchmesser (Diameter); eine andere auf gleiche Art, aber nicht durch den Mittel-Punct gezogene Linie FG eine Sehne (Chorda, Subtensa).

Anmerkung.

14. Die Peripherie eines jeden Circuls, er mag groß oder klein seyn, wird in 360 gleiche Theile oder Grade eingetheilet, weil sich diese Zahl durch viele Zahlen genau dividiren lässet, als durch 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 12. und so weiter. Jeder Grad bestehet aus 60 Minuten, jede Minute aus 60 Secunden, u. s. w. Die Grade zeichnet man mit (o), wie die Ruthen, die Minuten mit (′), wie die Schuhe. Z. E. $3^{\circ}\ 25'\ 17''$ heisset 3 Grad, 25 Minuten, 17 Secunden. $3^{\circ}\ 2'\ 4''$ 3 Ruthen, 2 Schuh, 4 Zoll.

Die 7. Erklärung.

I. 15. Wenn man zwey Linien AB und AC
3. in einem Punct A zusammensetzet; so heisset ihre Neigung gegen einander ein Winkel.

Anmerkung.

16. Diesen Winkel nennet man entweder mit einem Buchstaben A, oder in gewissen Fällen, um die entstehende Verwirrung mit andern Winkeln zu vermeiden, mit drey Buchstaben BAC, so daß derjenige mitten stehet, welcher an der Spitze des Winkels zu finden. Seine Grösse aber pfleget man durch einen Circul-Bogen, der aus dem Mittel

Puncte A mit beliebiger Eröffnung des Cirkels beschrieben wird, zu messen. Nemlich so viel der Bogen DE Grade und Minuten hat, so viel Grade und Minuten eignet man dem Winkel A zu. Man erforschet aber ihre Anzahl durch halbe Cirkel von Meßing, davon die kleinen, so auf dem Papiere gebraucht werden, Transporteurs heissen.

Die 8. Erklärung.

17. Wenn eine Linie AB auf der andern CD dergestalt aufgerichtet stehet, daß die Winkel zu beiden Seiten einander gleich sind; so saget man, es stehe dieselbe auf CD perpendicular, oder senkrecht. I. 4.

Die 9. Erklärung.

18. Der Winkel ABC, den die Perpendicular-Linie AB mit der Linie BC machet, heisset ein rechter Winkel (angulus rectus): Ein jeder kleinerer Winkel, E, ein spitziger Winkel (angulus acutus), und ein jeder grösserer, F, ein stumpfer Winkel (angulus obtusus). I. 4. 5. 6.

Die 10. Erklärung.

19. Wenn man einen Winkel A durch eine gerade Linie BC schliesset, so entstehet ein Dreyeck oder Triangel. Man nennet es aber rechtwinkelicht, wenn der eine Winkel A ein rechter ist: stumpfwinkelicht, wenn der eine Winkel D ein stumpfer ist; spitzwinkelicht, wenn alle drey spitzig sind, wie A, B, C. Hingegen, wenn alle drey Seiten AB, BC, CA gleich sind, heisset es ein gleichseitiger Triangel (Triangulum æquilaterum): sind zwey I. 7. 8. 9. 9.

Seiten AB und BC gleich, ein gleichschenkelichter
10. (Triangulum æquicrurum, oder Isosceles); ist
keine Seite der andern gleich, ein ungleichseiti-
11. ger, als HIK, (Triangulum Scalenum).

Die 11. Erklärung.

I. 20. Ein Quadrat (Quadratum) ist eine Figur,
12. die vier gleiche Seiten AB, BC, CD, DA, und
lauter rechte Winkel hat. Ein länglichtes Vier-
13. Ecke (Oblongum, oder Rectangulum) hat lauter
rechte Winkel, aber es sind nur die zwey ein-
ander entgegengesetzte Seiten EF und HG,
ingleichen EH und FG einander gleich. Eine
14. Raute Rhombus) hat vier gleiche Seiten IK,
KL, LM, MI, und lauter schiefe Winkel.
15. Eine länglichte Raute (Rhomboides) hat zwar
lauter schiefe Winkel, aber nur die beide ein-
ander entgegengesetzte Seiten ON und PQ,
OP und QN sind einander gleich. Die
übrigen Vier-Ecke werden Trapezia genen-
16. net, als STVZ.

Die 12. Erklärung.

21. Die übrigen Figuren, so mehr als
vier Seiten haben, werden Polygone, oder
Viel-Ecke genennet: und insonderheit Fünf-
Ecke, wenn sie fünf; Sechs-Ecke, wenn sie
sechs Seiten haben, u. s. w. Sind alle Sei-
I ten und Winkel einander gleich, als in
17. ABCDEF, heisset sie eine reguläre, oder
ordent-

ordentliche Figur: sind aber die Seiten und
Winkel nicht alle einander gleich, als in 18.
GHIKL, so nennet man sie eine irreguläre,
oder unordentliche Figur.

Die 13. Erklärung.

22. Wenn zwey Linien AB und CD immer I.
eine Weite von einander behalten: so sind es 19.
Parallel-Linien.

Die 14. Erklärung.

23. Die Vier-Ecke, deren Seiten einander parallel sind, nennet man Parallelogramma.

Der 1. Grundsatz.

24. Zwischen zweyen Puncten kan nur Eine gerade Linie seyn.

Der 1. Zusatz.

25. Derowegen können zwey gerade Linien keinen Raum einschliessen; weil sie in ihren beiden äussersten Puncten zusammenstossen müsten.

Der 2. Zusatz.

26. Folgends sind in jedem Drey-Ecke zwey I.
Seiten AB und AC zusammengenommen grösser, 9.
als die dritte BC.

Der 2. Grundsatz.

27. Alle Radii eines Cirkuls sind einander gleich (§. 13.)

Der 3. Grundsatz.

28. Alle Bogen DE und BC, welche aus I.
der Spitze eines Winkels A innerhalb 20.

seinen Schenkeln AB und AC beschrieben werden, haben eine gleiche Zahl Grade.

Zusatz.

29. Weil man die Grösse des Winkels A nach der Zahl der Grade eines solchen Bogens DE oder BC erachtet (§. 16.); so gilt es gleich viel, ob der Bogen DE mit einem grossen oder kleinen Radio beschrieben wird, wenn man den Winkel messen will.

Der 4. Grundsatz.

30. **Wenn gerade Linien und Winkel einander decken, so sind sie gleich: und wenn sie gleich sind, decken sie einander.**

Der 5. Grundsatz.

31. **Figuren, die einander decken, sind einander gleich: und die gleich und ähnlich sind, decken einander (§. 4.).**

Anmerkung.

32. Es ist wohl zu merken, daß von gleichen Figuren erfordert wird, sie sollen alle beide einander decken: denn wenn gleich die obere die untere decket, so sie auf dieselbe geleget wird, würde doch die untere die obere nicht decken, wenn sie auf dieselbe geleget würde, wo sie nicht einander gleich wären. Nemlich, wenn Figuren dergestalt auf einander geleget werden, daß sie einander decken, so haben sie einerley Umfang.

Der 6. Grundsatz.

33. **Wenn zwey Figuren oder Linien auf einerley Art erzeuget oder beschrieben werden, und dasjenige, woraus sie erzeuget oder beschrieben werden, beiderseits einander ähnlich**

ähnlich ist; so sind die Figuren und Linien einander ähnlich (§. 4.).

Zusatz.

34. Da nun alle Puncte (§. 2. 4.) und gerade Linien einander ähnlich sind (§. 7. 2.), und ein jeder Circul erzeuget wird, wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punct herum beweget (§. 11.); so müssen alle Circul und ihre Peripherien einander ähnlich seyn.

Der 7. Grundsatz.

35. **Wenn zwey Winkel einerley Maaß haben, sind sie einander gleich: und wenn sie gleich sind, haben sie einerley Maaß (§. 16.)**

Der 8. Grundsatz.

36. **Auf jeder Linie AB kan man aus einem** I.
angenommenen Puncte C einen halben Circul 21.
beschreiben (§. 11.).

Zusatz.

37. Wenn man aus dem Mittel-Puncte C eine Perpendicular-Linie CD aufrichtet, so sind die beiden Winkel o und x einander gleich (§. 17.). Derowegen hat ein rechter Winkel zu seinem Maaße einen Quadranten, das ist 90°, (§. 16. 36. 35.); und sind demnach alle rechte Winkel einander gleich (§. 35.). Ja ein Winkel, der einem rechten gleich ist, ist ein rechter Winkel (l. c.).

Der 1. Lehrsatz.

38. **Die beiden Winkel x und o, welche** I.

eine Linie DC auf einer andern Linie AB machet, machen zusammen 180°.

Beweis.

Aus C kan auf der Linie AB ein halber Circul beschrieben werden (§. 36.) Derowegen haben die Winkel x und o zu ihrem Maasse einen halben Circul (§. 16.), folgends machen sie 180° (§. 14.). W. Z. E.

Zusatz.

39. Wenn man also auf dem Felde zu einem Winkel nicht kommen kan, den man messen soll, oder wenn man mit einem Quadranten einen stumpfen Winkel zu messen hat: darf man nur den Neben-Winkel (angulum contiguum) messen.

Der 2. Lehrsatz.

I. 40. Wenn eine Linie AB die andere CD in
23. E schneidet; so sind die Vertical-Winkel o und x einander gleich.

Beweis.

Denn $o + u = 180°$ und $u + x = 180°$ (§. 38.). Also ist $o + u = u + x$ (§. 22. Arithm.); folgends $o = x$ (§. 25. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

41. Daher kan man auf dem Felde, oder wo man sonst Winkel zu messen hat, anstatt des Winkels x seinen Vertical-Winkel o messen, wenn man jenem nicht beykommen kan.

Der 3. Lehrsatz.

I.
24. 42. Alle Winkel, die um einen Punct C her-

herum sind, machen zusammen vier rechte Winkel, oder 360°.

Beweis.

Ihr Maaß ist ein ganzer Circul (§. 11. 16.). Also halten sie zusammen vier rechte Winkel in sich (§. 37.), oder 360° (§. 14.). W. Z. E.

Die 1. Aufgabe.

43. **Einen vorgegebenen Winkel zu messen.**

Auflösung.

Auf dem Papiere.

1. Leget den Mittelpunct des Transporteurs auf die Spitze des Winkels A, und rücket das Instrument, bis die innere Schärfe des Lineals an die Linie AB streichet. II. 25.
2. Zählet die Grade an dem Bogen DE, die zwischen die Schenkel des Winkels AC und AB fallen.

Auf dem Felde.

1. Richtet den Winkelmesser dergestalt, daß der Diameter AB auf den einen Schenkel des Winkels fället. I. 26.
2. Verschiebet das an dem Mittel-Puncte D bewegliche Lineal EF, und zielet durch die Dioptern auf demselben, bis ihr das äusserste des andern Schenkels erblicket.
3. Zählet die Grade, so das Lineal auf dem Instrumente abschneidet:

So wisset ihr in beiden Fällen die Grösse des Winkels (§. 16.).

Die 2. Aufgabe.

44. Eine gerade Linie zu messen.

Auflösung.

Vor allen Dingen bereitet man sich einen Maaß-Stab. Auf dem Papier nehmet eine Linie, schneidet davon 10 kleine Theile für die Schuhe ab, und traget sie zusammen so vielmal in den übrigen Theil der Linie, als angehen will, für die Ruthen. So habet ihr einen Maaß-Stab (§. 9.). Auf dem Felde brauchet man entweder eine Kette, oder eine Schnure, oder eine Stange, die in ihre gehörige Zolle, Schuhe und Ruthen eingetheilet worden. Doch ist zu merken, daß man nur die letzte Ruthe in Schuhe, und den letzten Schuh in Zolle eintheilen darf.

Wenn ihr nun auf dem Papiere eine Linie messen wollet; so

II. 1. setzet den Zirkel in A und thut ihn auf bis in B.

27. 2. Den einen Fuß dieses unverrückten Zirkels setzet auf dem Maaß-Stabe in den Anfang einer Ruthe, als in 10, und gebet Acht, welchen Schuh der andere Fuß absticht, z. E. 5. So ist die Linie $1^{\circ}\ 5'$.

Auf dem Felde

1. Stecket an beiden Enden der Linie einen Stab, und (wenn eure Meß-Kette nicht so lang ist) zwischen dieselbe noch einen oder mehr andere (§. 8.).

2. Span-

2. Spannet die Schnure oder Kette von einem Stabe bis zu dem andern aus.

3. Zählet endlich daran die Ruthen, Schuhe und Zolle.

Die 1. Anmerkung.

45. Ihr könnet auch an die beiden Enden der Meß-Ketten zwey Rinken machen, durch dieselben zwey Stäbe stecken, und diese jederzeit mit dem Stabe an dem Ende der Linie, die ihr messet, in eine Linie stellen (§. 8.)

Die 2. Anmerkung.

46. Die Meß-Ketten sind etwas beschwerlich zu tragen, und lassen sich nicht wohl ausziehen. Wenn man die Linie mit einer Stange überschläget, muß man so viel Stangen-Dicken zu der gefundenen Länge addiren, als die Stange überschlagen worden, oder sie um eine Stangen-Dicke kürzer machen, als das Maaß erfordert. Die hanfene Meß-Schnüre kriechen vom Feuchten ein, und dehnen sich ungleich aus. Es merket Schwenter an (Geom. pract. lib. I. Tract. 2. p. 381.), daß ihm eine dergleichen Schnure von 16 Schuhen innerhalb einer Stunde vom Reiffe fast um einen ganzen Schuh eingegangen. Diesem Fehler nun abzuhelfen, soll man sie wiedersinnes winden, in Lein-Oele sieden, nachdem sie getrocknet, durch ein zerlassen Wachs ziehen, und mit hartem Wachse durch und durch bestreichen lassen. Es versichert Schwenter p. 382. daß, wenn man sie auch einen Tag im Wasser liegen lässet, sie doch nicht merklich kürzer werde.

Die 3. Anmerkung.

47. Man hat auf dem Papier noch ein künstlicheres Instrument, die Linien abzumessen, welches man einen verjüngten Maaß-Stab nennet. Davon sich erst unten wird reden lassen.

Die 3. Aufgabe.

48. **Einen Winkel zu machen, der so groß ist, wie ein anderer gegebener Winkel.**

Auflösung.

II. 25. Der erste Fall. Wenn der Winkel in Graden gegeben wird, so

1. ziehet eine gerade Linie AB.
2. Leget auf A den Mittel-Punkt des Transporteurs, und an die Linie AB seinen Radium.
3. Zählet an demselben so viel Grade ab, als der Winkel haben soll.
4. Bey dem letzten Grade merket euch den Punct E.
5. Ziehet endlich von A durch E eine gerade Linie. So ist BAC der verlangte Winkel.

II. 29. Der andere Fall. Wenn der Winkel DEF nur auf dem Papiere gegeben wird; so

1. beschreibet aus E, mit beliebiger Eröffnung des Zirkels, einen Bogen GH.
2. Ziehet eine gerade Linie ef.
3. Beschreibet mit voriger Eröffnung des Zirkels aus e den Bogen hi.
4. Setzet den Zirkel in H, und thut ihn auf bis in G.
5. Mit dieser Eröffnung schneidet aus h von dem Bogen hi den Bogen gh ab.
6. Ziehet aus e durch g eine Linie ed. So ist geschehen, was man verlangte.

Der dritte Fall. Auf das Feld kan man einen in Graden gegebenen Winkel durch den Winkel-

messer

messer tragen; wie aus der ersten Aufgabe (§. 43.) abzunehmen.

Beweis.

Im ersten und dritten Falle ist kein Beweis nöthig. Im andern Falle ist der Bogen gh = GH, wie unten (§. 92.) ohne gegenwärtigen Satz soll erwiesen werden, und also der Winkel def = DEF (§. 16. 35.). W. Z. E.

Der 4. Lehrsatz.

49. Wenn in zweyen Triangeln ABC und abc der Winkel A = a, AC = ac und AB = ab; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und BC = bc, B = b, C = c. II. 30.

Beweis.

Man gedenke, es würde der Triangel acb dergestalt auf den andern ACB geleget, daß der Punct a auf A, und die Linie ab auf die Linie AB fället. Weil nun ab = AB, so fället der Punct b auf B (§. 30.): weil a = A, so fället die Linie ac auf AC (§. 30.), und, da ac = AC, der Punct c auf C (§. cit.): folgends die Linie bc auf BC (§. 24.). Derowegen sind die Triangel ABC und abc einander gleich (§. 31.), und BC = bc etc. (§. 30.). W. Z. E.

Der 5. Lehrsatz.

50. Wenn in zweyen Triangeln ABC und abc der Winkel A = a und B = b, über dieses die Seite AB = ab; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und AC = ac, BC = bc, C = c. II. 30.

Be-

Beweis.

Man gedenke, es werde der Triangel ABC auf den anderen abc dergestalt geleget, daß der Punct A auf a, und die Seite AB auf die Seite ab fället; so fället der Punkt B auf b, die Linie AC auf ac, und BC auf bc (§. 30.). Da nun die Linien AC und BC im Puncte C, und die Linien ac und bc im Puncte c zusammenstossen, muß auch der Punct C auf den Punct c fallen. Derowegen sind die Triangel einander gleich (§. 31.), und AC = ac etc. (§. 30.). W. Z. E.

Der 6. Lehrsatz.

II. 30. 51. **Wenn in zweyen Triangeln ACB und acb, AC = ac, AB = ab und BC = bc; so sind die Triangel einander gleich, und A = a, B = b, C = c.**

Beweis.

Man beschreibe aus A mit AB den Bogen y, und aus C mit CB den Bogen x. Hierauf gedenke man, es werde der Triangel acb auf den Triangel ACB dergestalt geleget, daß der Punct a auf A, und c auf C fället (§. 30.); so wird die Linie ab in den Bogen y, und cb in den Bogen x fallen (§. 13.), folgends der Punct b in B, wo die Bogen einander durchschneiden. Daher sind die Triangel (§. 31.), und die Winkel (§. 30.) einander gleich. W. Z. E.

Zusatz.

52. Also kan aus drey gegebenen Linien nicht mehr als einerley Triangel gemacht werden.

Die

Die 4. Aufgabe.

53. Auf einer gegebenen Linie AB einen gleichseitigen Triangel aufzurichten. II. 31.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in A, thut ihn auf bis in B, und beschreibet damit über der Linie einen Bogen.
2. Setzet hierauf den Circul in B, und beschreibet mit unveränderter Eröffnung einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
3. Ziehet von A und B in C die Linien AC und BC; so ist geschehen, was man verlangete.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man so groß gemacht, als die Linie AB (§. 27.). Derowegen ist der Triangel ABC gleichseitig (§. 19.). W. Z. E.

Die 5. Aufgabe.

54. Aus zwey gegebenen Linien AB und BC einen gleichschenkelichten Triangel zu machen. II. 32.

Auflösung.

1. Setzet an das Ende A der einen Linie AB, welche die Grund-Linie des Triangels geben soll, den Cirkel, und beschreibet mit der Eröffnung nach der Länge der andern gegebenen Linie einen Bogen.
2. Mit eben dieser Eröffnung beschreibet aus B einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.

3. Ziehet aus C in A und B gerade Linien; so ist der begehrte Triangel fertig.

Beweis.

Die Linien AC und BC hat man einander gleich gemachet. Also ist ACB ein gleichschenkelicher Triangel (§. 19.). W. Z. E.

Die 6. Aufgabe.

II. 33. **55. Aus drey gegebenen Linien einen Triangel zu machen.**

Auflösung.

1. Nehmet die eine von den gegebenen Linien AB zur Grund-Linie des Triangels an.
2. Aus A beschreibet mit der Eröffnung des Cirkels nach der Länge der andern Linie AC einen Bogen über derselben, und
3. aus B mit der Eröffnung nach der dritten Linie BC einen andern Bogen, der den ersten in C durchschneidet.
4. Ziehet die Linien AC und BC; so ist der Triangel fertig (§. 52.).

Die 1. Anmerkung.

56. Wenn die zwey Bogen einander nicht erreichen, so kan aus den gegebenen drey Linien kein Triangel gemachet werden (§. 26.).

Die 2. Anmerkung.

57. Die Zeichnung der Figuren ist von grossem Nutzen. Sie dienet die Felder in den Grund zu legen, ohne welches man sie nicht ausrechnen kan. Ja nachdem ich die Gründe der Aehnlichkeit in die Geometrie gebracht, dienet sie zugleich zum Beweise der Aehnlichkeit der Figuren, wie aus dem Folgenden zu ersehen. Man kan auch aus derselben ersehen, was auf dem Felde oder sonst im Grossen zu messen nöthig ist, wenn man

man es in Grund legen, das ist, auf das Papier ins Kleine bringen will. Derowegen lassen wir uns nicht verdriessen, mehrere Aufgaben von den Dreyecken hieher zu setzen.

Die 7. Aufgabe.

58. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC und einem Winkel A einen Triangel zu machen. II. 34.

Auflösung.

1. Nehmet die Linie AB zur Grund-Linie an, und
2. machet in A einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist (§. 48.).
3. Auf die Linie AD traget die andere gegebene Linie AC, und
4. ziehet von C bis B eine gerade Linie; so ist der Triangel fertig (§. 49.).

Anmerkung.

59. In der Ausübung ist niemals nöthig, die unnützen Linien, als hier AD, auszuziehen; sondern nachdem man das Lineal angeleget, kan man gleich den Punct C abstechen.

Die 8. Aufgabe.

60. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Linie AB einen Triangel zu machen. II. 35.

Auflösung.

1. Auf dem einen Ende A der gegebenen Linie AB richtet einen Winkel auf, der einem von den gegebenen gleich, und
2. Auf dem andern Ende B einen andern, der dem andern von den gegebenen gleich ist (§. 48.); so werden sich die Schenkel dieser

Winkel in C durchschneiden und den verlangten Triangel ABC auf der Linie AB formiren (§. 50).

Die 9. Aufgabe.

II. 61. Die Weite zweyer Oerter A und B zu
36. messen, zu deren jedem man aus einem in C angenommenen Stande kommen kan.

Auflösung.

1. Stecket in C einen Stab nach Belieben ein.
2. Messet die Linie AC (§. 44.), und traget sie zurücke in a, dergestalt, daß in a ein Stab mit dem Stabe C und dem Orte A in eine gerade Linie gesetzet wird (§. 8.).
3. Auf gleiche Weise messet die Linie BC, traget sie zurücke in b, und stecket in b wie vorhin einen Stab mit C und B in einer geraden Linie ein (§. 8.).
4. Endlich messet die Linie ab; so habet ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Denn die Winkel x und y sind einander gleich (§. 40.). Da nun auch AC = aC und BC = bC, so ist ab = AB (§. 49.). W. Z. E.

Anmerkung.

62. Wenn man nicht Raum hat, die ganzen Linien AC und BC zurücke zu tragen; so träget man nur ihre Hälften, oder den dritten, oder auch den vierten Theil derselben zurücke: Alsdenn ist ab = $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ AB, wie unten wird erwiesen werden (§. 152.).

Die 10. Aufgabe.

63. Mit einer blossen Schnure oder Kette einen Winkel auf dem Felde von einem Orte auf den andern zu tragen. II. 37.

Auflösung.

Man soll den Winkel A in C tragen.

1. Messet in den beiden Schenkeln AB und AC des gegebenen Winkels A zwey Linien von beliebiger Grösse AF und AD ab, und zugleich die Quer-Linie FD, so daher entstehet.
2. Traget aus C in d die gefundene Linie AD, und spannet an den beiden Stäben C und d eine Schnure dergestalt aus, daß Cf = AF und df = DF.
3. Stecket in f einen Stab, so ist der Winkel dCf = FAD.

Beweis.

Es ist AF = Cf, AD = Cd und DF = df. Derowegen ist auch der Winkel C dem Winkel A gleich (§. 51.).

Die 11. Aufgabe.

64. Die Weite zweyer Oerter zu messen, zu deren einem B man nur kommen kan. II. 38.

Auflösung.

1. Stecket nach Gefallen einen Stab in E und traget die Linie BE dergestalt zurücke, daß der Stab C mit E und B in eine Linie kommet (§. 8.).
2. Machet einen Winkel in C, der so groß ist wie der Winkel B (§. 63. 43.).

3. Endlich gehet mit dem Stabe D so weit zurücke, bis er mit C und F, ingleichen mit E und A in einer Linie stehet:

So ist die Linie CD der Linie AB gleich.

Beweis.

Ihr habet den Winkel C so groß wie B, und die Linie CE so groß wie EB gemachet. Nun sind über dieses die Vertical-Winkel bey E einander gleich (§. 40.). Derowegen ist auch CD = AB (§. 50.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

65. Es gilt auch hier, was bey der 9 Aufgabe erinnert worden (§. 62.).

Die 2. Anmerkung.

66. Wenn man die Breite eines Flusses messen wolte, und könte die Linie BE an dem Ufer nicht zurücke tragen; so stecket man den Stab B so weit vom Ufer weg, als einem beliebet. Alsdenn wird die Linie CD um so viel breiter, als der Fluß, um wie viel der Stab B von dem Ufer weggerücket worden.

Die 12. Aufgabe.

II. 67. **Durch einen gegebenen Punct C mit**
39. **einer gegebenen Linie AB eine Parallel-Linie auf dem Papiere zu ziehen.**

Auflösung.

1. Leget an die Linie AB das Lineal.
2. Setzet den Cirkel in C ein, und thut ihn bis an das Lineal auf, als wenn ihr einen Bogen beschreiben woltet, der das Lineal oder die Linie AB berührte.

3. Ziehet mit dem etwas schräge angelegten Cirkel an dem Lineale herunter: so wird der andere Fuß durch den Punct C die begehrte Parallel-Linie DE beschreiben (§. 22.).

Anders.

Man kan es auch durch ein Parallel-Lineal verrichten: welches Instrument aus zwey Linealen bestehet, die durch zwey gleich lange Quer-Bänder dergestalt zusammen verknüpfet sind, daß sie sich nach Gefallen von einander verschieben lassen. Wenn ihr nun dergleichen Instrument habet; so II. 40.

1. leget die Schärfe des einen Lineals an die gegebene Linie AB an, und
2. schiebet das andere Lineal bis an den Punct C fort; so
3. könnet ihr durch denselben die verlangte Linie DE ziehen.

Anmerkung.

68. Wenn man in der ersten Auflösung den Cirkel nicht bis an den Punct E aufthun kan; so ziehet mit AB in beliebiger Weite die Parallel-Linie CD und mit dieser die Parallel-Linie LM durch den gegebenen Punct E: so wird LM auch mit AB parallel seyn. Denn es ist EF = IH und FG = IK. Derowegen EF + FG = HI + IK, das ist, EG = HK (§. 24. Arithm.) folgends ist LM mit AB parallel (§. 22.). II. 41.

Die 13. Aufgabe.

69. **Von einem gegebenen Puncte C auf eine Linie AB ein Perpendicul zu fällen.** II. 42.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in C und durchschneidet mit gefälliger Eröffnung in zweyen Puncten D und E die Linie AB.
2. Aus D und E machet mit beliebiger Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F.
3. Durch C und F ziehet die Linie FG, diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn weil DC = CE und DF = FE, wie auch CF = CF (§. 20. Arithm.), so sind auch die Winkel DFG und GFE (§. 51.), folgends die Neben-Winkel bey G einander gleich (§. 49.). Derowegen stehet die Linie CG auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Die 14. Aufgabe.

II. 43. 70. Aus einem gegebenen Puncte C auf einer gegebenen Linie AB ein Perpendicul aufzurichten.

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in C ein und
2. durchschneidet die Linie AB mit beliebter Eröffnung in D und E.
3. Aus D und E machet mit einerley Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F.
4. Ziehet durch C und F die Linie GC; so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil DC = EC und DF = FF, CF = CF (§. 20. Arithm.); so sind die Winkel bey C einander gleich

gleich (§. 51.). Demnach stehet die Linie GC auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Anders.

Lasset euch einen Winkelhacken verfertigen, das ist, ein Instrument, welches aus zweyen rechtwinkelicht zusammengesetzten Linealen bestehet. II. 44.

1. Das eine Theil dieses Instruments leget an die gegebene Linie AB dergestalt, daß die Spitze seines Winkels den gegebenen Punct C berühret.
2. Ziehet nach dem andern Theile des Instruments eine gerade Linie CD aus dem gegebenen Puncte C. Diese stehet auf AB perpendicular.

Beweis.

Denn der Winkelhacken ist rechtwinkelicht: derowegen müssen auch die beiden Linien CB und CD, die nach ihm gezogen sind, einen rechten Winkel machen. Und also stehet CD auf CB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Der 7. Lehrsatz.

71. **Wenn in zweyen rechtwinkelichten Triangeln ABC und abc, AB = ab und BC = bc, oder in schiefwinkelichten von einerley Art, ausser diesen Seiten A = a; so sind die ganzen Triangel einander gleich, und AC = ac, B = b und C = c.** II. 45.

Beweis.

Man beschreibe durch C in der Weite BC einen Bogen FG, und lege in Gedanken den Triangel

gel abc auf den andern ABC dergestalt, daß der Punct a auf A und ab auf AB fället. Da nun ab = AB und a = A; so fället der Punct b in B, und ac auf AC (§. 30), folgends der Punct c in die Linie AC. Da nun ferner bc = BC; so muß der Punct c auch in den Bogen FG fallen (§. 13.), folgends in C, wo der Bogen FG und die Linie AC einander durchschneiden, und demnach fället bc auf BC (§. 24.). Derowegen sind die ganzen Triangel einander gleich (§. 31.) W. Z. E.

Der 8. Lehrsatz.

III. 72. **Wenn zwey Parallel-Linien AB und CD**
46. **von einer dritten EF in G und H durchschnitten werden, so sind 1. die Wechsels-Winkel x und y einander gleich; 2. der äussere Winkel o ist dem innern y gleich, und 3. die beiden inneren Winkel u und y machen zusammen 180°.**

Beweis.

1. Ziehet die beiden Perpendicular-Linien HI und GK, welche einander gleich sind (§. 22.). Es sind aber auch die Winkel I und K einander gleich (§. 18. 37.). Derowegen ist x = y (§. 71.): welches das erste war.

2. Nun ist x = o (§. 40.). Demnach y = o (§. 22. Arithm.): welches das andere war.

3. Es ist aber u + o = 180° (§. 38.). Derowegen ist auch u + y = 180° (§. 24. Arithm.). W. Z. E.

Der 9. Lehrsatz.

73. Wenn zwey Linien AB und CD von einer dritten EF dergestalt in G und H durchschnitten werden, daß die Wechsels-Winkel x und y, oder auch der äussere o und der innere y einander gleich sind, oder die beiden inneren u und y zusammen 180° machen; so sind die Linien AB und CD parallel. III. 46.

Beweis.

1. Lasset aus G einen Perpendicul GK auf die Linie CD fallen, machet GI = HK und ziehet die Linie HI. Weil nun x = y: so ist I = K und HI = GK (§. 49.), folgends I ein rechter Winkel (§. 37.) und AB mit CD parallel (§. 22.): welches das erste war.

2. Es sey o = y. Weil nun o = x (§. 40.); so ist x = y (§. 22. Arithm.), folgends vermöge dessen, was erst erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das andere war.

3. Es mache y mit u 180°. Weil o und u 180° machen (§. 38.); so ist o = y (§. 22. 25. Arithm.), und also vermöge dessen, was jetzt erwiesen worden, sind die Linien AB und CD parallel: welches das dritte war.

Der 10. Lehrsatz.

74. In jedem Triangel ABC machen alle drey Winkel zusammen 180°, und wenn man die eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so groß, wie die beiden II. 47.

innern,

innern, die ihm gegen über stehen, zusammen.

Beweis.

Man ziehet durch die Spitze des Triangels C mit seiner Grund-Linie AB eine Parallel-Linie DE, so ist 1 = I. und 2 = II. (§. 72.). Nun ist I + 3 + II = 180° (§. 38.). Derowegen ist 1 + 3 + 2 = 180° (§. 24. Arithm.); welches das erste war.

II. Wenn die Seite AB verlängert wird in D; so ist
48. 3 + 4 = 180° (§. 38.). Nun ist aber jetzt erwiesen worden, daß 1 + 2 + 3 = 180°. Derowegen, 3 + 4 = 1 + 2 + 3 (§. 22. Arithm.), folgends 4 = 1 + 2 (§. 25. Arithm.); welches das andere war.

Der 1. Zusatz.

75. Derowegen kan in einem Triangel nicht mehr als Ein rechter Winkel seyn, und wenn dieses ist, machen die zwey übrigen zusammen auch noch einen rechten Winkel, das ist 90° aus (§. 37.); auch können zwey Linien, die auf einer dritten perpendicular stehen, von keiner Seite zusammenstossen, wenn sie gleich unendlich fort verlängert werden, und sind demnach parallel (§. 22.).

Der 2. Zusatz.

76. Vielweniger kan mehr als Ein stumpfer Winkel in einem Triangel seyn (§. 18.).

Der 3. Zusatz.

77. Wenn man in einem Triangel einen Winkel von 180° abziehet; so bleibet die Summe der beiden übrigen übrig. Und wenn man die

Sum-

Summe zweyer von 180° wegnimmet, bleibet der dritte übrig.

Der 4. Zusatz.

78. Wenn in zweyen Triangeln zwey Winkel zweyen gleich sind, muß auch der dritte in einem dem dritten in dem andern gleich seyn (§. 25. Arithm.).

Der 11. Lehrsatz.

79. In einem gleichschenkelichten Triangel ABC sind die Winkel an der Grund-Linie x und y einander gleich, und die Perpendicular-Linie CD theilet sowohl den Winkel C, als die Grund-Linie AB und den Triangel in zwey gleiche Theile. III. 49.

Beweis.

Man theile die Linie AB in zwey gleiche Theile in D, und ziehe die Linie DC. Weil nun auch AC = CB (§. 19.), so ist x = y und o = u, m = n, und △ ACD = △ CDB (§. 51.), folgends CD auf AB perpendicular (§. 17.). W. Z. E.

Zusatz.

80. Also sind in einem gleichseitigen Triangel alle Winkel einander gleich, und folgends jeder 60° (§. 74.).

Der 12. Lehrsatz.

81. Wenn die Winkel x und y an der Grund-Linie AB eines Triangels ACB einander gleich sind: so sind auch die Seiten AC und CB einander gleich. III. 49.

Be-

Beweis.

Man ziehe die Linie CD dergestalt, daß $m=n$. Weil nun $x=y$, so ist auch $o=u$ (§. 78.) und daher $AC=CB$ (§. 50.). W. Z. E.

Zusatz.

82. Wenn also drey Winkel einander gleich sind, und folgends ein jeder 60 Grad hält (§. 74.); so sind alle drey Seiten einander gleich.

Der 13. Lehrsatz.

83. **Der Winkel an dem Mittel-Puncte eines Circuls ist zweymal so groß, wie der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einem Bogen stehet.**

Beweis.

III. 1. $o=x+u$ (§. 74.). Weil aber $AC=BC$
50. (§. 27.); so ist $x=u$ (§. 79.) folgends $o=u+$
$u=2u$.
III. 2. $x=2y$ und $u=2o$, wie erst n. 1. erwie-
51. sen worden. Derowegen ist $x+u=2y+2o$.
(§. 24. Arithm.).
III. 3. $o+x=2u+2y$ und $o=2u$, wie n. 1. er-
52. wiesen worden. Derowegen ist $x=2y$ (§. 25.
Arithm.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

III. 84. Also hat der Winkel an der Peripherie
50. ABD zu seinem Maasse den halben Bogen AD,
darauf er stehet; denn der ganze Bogen AD ist
das Maaß des Winkels bey dem Mittel-Puncte
54. ACD (§. 16.). Wenn der Winkel ACB auf ei-
55. nem halben Circul ADB, oder HBK auf einem
gröſ-

grösseren Bogen HIK als einem halben Circul stehet; so ist klar, daß der halbe Bogen AD des Winkels ACD und $\frac{1}{2}$DB des Winkels DCB, gleichergestalt $\frac{1}{2}$HI des Winkels HBI und $\frac{1}{2}$IK des Winkels IBK, folgends $\frac{1}{2}$ ADB, oder ein Quadrant des Winkels ACB und $\frac{1}{2}$HIK, oder mehr als ein Quadrant des Winkels HBK Maaß sey.

Der 2. Zusatz.

85. Wenn zwey oder mehrere Winkel ABC und ADC an der Peripherie eines Circuls sich endigen, und auf einem Bogen AC stehen; so sind sie einander gleich (§. 35.). III. 53.

Der 3. Zusatz.

86. Jeder Winkel in einem halben Circul ABC ist ein rechter Winkel; denn er stehet auf einem halben Circul, und also ist sein Maaß ein Quadrant (§. 84.). III. 54.

Der 4. Zusatz.

87. Wenn der Winkel innerhalb einem Circul auf einem kleineren Bogen DE als einem halben Circul stehet; so ist er kleiner als ein rechter Winkel. Stehet er aber auf einem grösseren HK; so ist er auch grösser als ein rechter Winkel (§. 86.), und dannenhero in dem ersten Falle spitzig, in dem andern stumpf (§. 18.). III. 55.

Die 15. Aufgabe.

88. **Einen Winckelhacken zu probiren, ob er richtig ist, oder nicht.** III 54.

Auf-

Auflösung.

1. Beschreibet nach Belieben einen halben Cirkel ACB, und
2. ziehet nach Gefallen von beiden Enden des Diametri AB bis an die Peripherie die Linien AC und BC.
3. Leget den Winkelhacken mit seinem Winkel an den Punct C. Wenn die Schenkel desselben die beiden Linien zugleich berühren; so ist er richtig.

Beweis.

Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel (§. 86.). Wenn also der Winkelhacken sich in denselben schicket; so ist er richtig (§. 30.) W. Z. E.

Die 16. Aufgabe.

III. 89. **Auf das Ende einer Linie ein Perpendi-**
56. **cul aufzurichten.**

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in einen beliebten Punct C, und thut ihn auf bis A.
2. Mit dieser Weite bemerket auf der Linie AB den Punct D.
3. Leget das Lineal auf D und C, und bemerket aus C mit unverrücktem Cirkel den Punct E.
4. Endlich ziehet die Linie AF; so stehet sie auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil AC = CD = EC; so lässet sich aus C durch E, A und D ein halber Cirkel beschreiben (§. 27. 36.). Derowegen ist bey A ein rechter

Win-

Winkel (§. 86.) und stehet die Linie FA auf AB perpendicular (§. 18.). W. Z. E.

Anders.

Man kan es auch durch Hülfe des Winkelhackens, wie oben (§. 70.), verrichten.

Die 17. Aufgabe.

90. **Eine Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.** III. 57.

Auflösung.

1. Machet aus A und B nach Belieben Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet die Puncte derselben mit einer geraden Linie DC zusammen; so theilet sie die Linie AB in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AC = CB und AD = DB, CD = CD (§. 20. Arithm.); so ist o = y (§. 51.), und daher ferner auch in den Triangeln ACE und ECB, AE = EB (§. 49.). W. Z. E.

Anmerkung.

91. Man kan es auch mechanisch, das ist durch Versuchen verrichten. Setzet nemlich einen Cirkel in A ein, und thut ihn nach dem Augen-Maaße so weit auf, als beynahe die Hälfte der Linie AB beträget. Schneidet damit ein in C und gleichfalls aus B in D: so werdet ihr ohne Mühe durch das Augen-Maaß den Punct E finden können, wodurch AB in zwey gleiche Theile getheilet wird. III. 58.

Der 14. Lehrsatz.

92. **In einem Circul sind die Sehnen gleicher Bogen AB und DE einander gleich: und wenn die Sehnen gleich sind, so sind auch die Bogen gleich.** III. 59.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpuncte C die Radios AC, CB, CE und CD. Dieselben sind alle einander gleich (§. 27.). Weil nun ferner die Bogen AB und DE gleich sind; so müssen auch die Winkel ACB und DCE gleich seyn (§. 35.). Derowegen ist auch AB = DE (§. 49.): **welches das erste war.**

Wenn AB = DE, so ist o = x (§. 51.); folgends sind die Bogen AB und DE einander gleich (§. 35.); **welches das andere war.**

Zusatz.

93. Wenn man also einen Circul in gleiche Theile theilet, und die Sehnen der Bogen ziehet; so hat die Figur lauter gleiche Seiten (§. 92.); aber auch lauter gleiche Winkel (§. 85.). Derowegen ist es eine reguläre Figur (§. 21).

Die 18. Aufgabe.

II. 94. **Einen Circul-Bogen in zwey gleiche**
60. **Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung des Cirkels zwey Durchschnitte in C und D.
2. Ziehet durch die Puncte C und D eine Linie; so ist der Bogen AB in zwey gleiche Theile in E getheilet.

Beweis.

Die Linie CD theilet die Linie AB in F in zwey gleiche Theile, und machet bey F zwey rechte Winkel (§. 90. 18.). Derowegen ist auch AE = BE (§. 49.),

(§. 49.), folgends sind die Bogen AE und EB einander gleich (§. 92.). W. Z. E.

Der 15. Lehrsatz.

95. Die Perpendicular-Linie DA, welche die Sehne EF in G in zwey gleiche Theile theilet, gehet durch den Mittel-Punct des Circuls C; und theilet auch den Bogen EDF in zwey gleiche Theile. Und wenn aus dem Mittelpunct des Circuls C ein Perpendicul CD auf die Sehne EF gezogen wird, theilet es sowol sie, als den Bogen EDF, in zwey gleiche Theile. III. 61.

Beweis.

1. Weil EG = GF und bey G zwey rechte Winkel; so ist EAD = DAF (§. 49.), und also sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 84. 35.); welches das erste war.

2. Es müssen ferner die Sehnen EA und AF (§. 49.), und folgends die Bogen AF und EA (§. 92.) einander gleich seyn. Demnach ist AE + ED = AE + FD (§. 24. Arithm.); und dannenhero AD der Diameter des Circuls, folgends gehet AD durch den Mittelpunct (§. 13.): welches das andere war.

3. Wenn CG auf EF perpendicular stehet; so sind bey G rechte Winkel (§. 18.) Da nun EC = CF (§. 27.); so ist EG = GF und ECD = DCF (§. 71); folgends sind die Bogen ED und DF einander gleich (§. 35.); welches das dritte war.

Die 19. Aufgabe.

III. 96. **Einen Winkel BAC in zwey gleiche**
62. **Theile zu theilen.**

Auflösung.

1. Setzet den Cirkel in A, und bemerket mit beliebter Eröffnung die Puncte D und E.
2. Daraus machet einen Durchschnitt in F und
3. ziehet die Linie AF: diese theilet den Winkel A in zwey gleiche Theile.

Beweis.

Weil AD = AE und DF = EF, AF = AF (§. 20. Arithm.); so ist o = x (§. 51.). W. Z. E.

Die 20. Aufgabe.

III. 97. **Durch drey gegebene Puncte A, B, C,**
63. **einen Circul zu beschreiben.**

Auflösung.

1. Machet aus A und B mit beliebter Eröffnung die Durchschnitte D und E, und ziehet die Linie DE.
2. Gleichergestalt machet aus B und C die Durchschnitte F und G, und ziehet die Linie FG.

Wo die beiden Linien FG und DE einander durchschneiden, nemlich in H, daselbst ist der Mittelpunct des Circuls.

Beweis.

Wenn man von A bis B, ingleichen von B bis C eine Linie ziehet; so sind selbige Sehnen zweyer Bogen von dem verlangten Circul (§. 13.) Nun stehen die beiden Linien DE und FG auf diesen Seh-

Sehnen AB und BC perpendicular, und theilen sie in zwey gleiche Theile (§. 90.). Derowegen gehen beide durch den Mittelpunct des Circuls (§. 95.). Und ist demnach derselbe in H, wo die beiden Linien einander durchschneiden. W. Z. E.

Die 21. Aufgabe.

98. **Auf eine gegebene Linie AB ein Quadrat zu machen.** III. 64.

Auflösung.

1. Richtet in A ein Perpendicul auf (§. 70. 89.), und machet es so groß wie AB.
2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D, und
3. ziehet die Linien CD und BD.

Die 22. Aufgabe.

99. **Aus zwey gegebenen Linien AB und BC ein Rectangulum zu machen.** III. 65.

Auflösung.

1. Setzet BC auf AB perpendicular (§. 89.).
2. Ziehet aus A mit BC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die Linien CD und DA.

Die 23. Aufgabe.

100. **Aus einer gegebenen Linie AB und einem schiefen Winkel einen Rhombum zu machen.** III. 66.

Auflösung.

1. Setzet auf die Linie AB den gegebenen Winkel A (§. 48.) und machet AC = AB.

2. Aus C und B machet mit AB einen Durchschnitt in D.

3. Ziehet die Linien CD und DB.

Die 24. Aufgabe.

III. 67. 101. Aus zwey gegebenen Linien AB und AC nebst einem schiefen Winkel A einen Rhomboidem zu machen.

Auflösung.

1. Richtet in A an dem Ende der einen gegebenen Linie AB den gegebenen Winkel auf (§. 48.), und machet AC der anderen gegebenen Linie gleich.
2. Ziehet aus B mit AC einen Bogen, und aus C mit AB einen andern, der den ersten in D durchschneidet.
3. Endlich ziehet die beiden Linien CD und DB.

Der 16. Lehrsatz.

IV. 68. 102. Ein Quadrat, Rectangulum, Rhombus und Rhomboides, wird von der Diagonal-Linie AD in zwey gleiche Theile getheilet; die beide einander entgegengesetzte Winkel sind einander gleich, und die entgegengesetzte Seiten AB und CD, AC und BD parallel.

Beweis.

In allen diesen Figuren ist AC = DB und CD = AB (§. 20.). Derowegen sind die Triangel ACD und ABD einander gleich, ingleichen x = x und o = o, u = u (§. 51.), folgends AB mit CD und AC mit BD parallel (§. 73.). W. Z. E.

Zusatz.

Zusatz.

103. Also sind alle diese Vierecke Parallelogramma (§. 23.).

Die 25. Aufgabe.

104. **Den Winkel in einem regulären Vielecke zu finden.**

Auflösung.

1. Theilet 360 durch die Zahl der Seiten des Vieleckes.
2. Was herauskommet, ziehet von 180 ab; so bleibet die Zahl der Grade für den gegebenen Winkel übrig.

Z. E. im Sechsecke dividiret 360 durch 6, und ziehet den Quotienten 60 von 180 ab; so kommet für ABC 120°.

Beweis.

Es sey ABC der verlangte Winkel. Man be- IV.
schreibe durch die drey Puncte A, B, C, einen 69.
Circul (§. 97.). Weil AB = BC (§. 21.); so sind auch die Bogen AB und BC einander gleich (§. 92). Da nun AD, der halbe Bogen ADC, das Maaß des Winkels B ist (§. 84.); so darf man nur den Bogen AB von dem halben Circul BAD abziehen, wenn man den Bogen AD oder den Winkel B wissen will. W. Z. E.

Die 26. Aufgabe.

105. **In einem jeden Vielecke die Summe** IV.
aller Winkel zu finden. 70.

Auflösung.

1. Multipliciret 180 durch die Zahl der Seiten.

2. Von dem Product ziehet 360 ab; so bleibet die Summe der Winkel übrig. Z. E.

V Ecke	180 5	VI Ecke	180 6
	900 360		1080 360
	540		720

Beweis.

Ein jedes Vieleck kan aus einem angenommenen Puncte F in so viel Triangel getheilet werden, als Seiten sind. Wenn ihr 180 durch die Zahl der Seiten multipliciret, so kommen die Winkel in allen Triangeln heraus (§. 74.). Die Winkel um den Punct F gehören nicht zu dem Vielecke, machen aber jederzeit 360° (§. 42.). Derowegen wenn ihr 360 von oben gefundenem Producte abziehet, bleibet die Summe der Polygon=Winkel übrig. W. Z. E.

Die 27. Aufgabe.

IV. 71. 106. Auf eine gegebene Linie AB ein begehrtes reguläres Vieleck zu beschreiben.

Auflösung.

1. Traget in A und B die halben Polygonwinkel, so werden sich die Seiten des gleichschenkelichten Triangels ABC im Mittelpuncte des Circuls C durchschneiden.
2. Beschreibet aus C mit CA den Circul, und traget die Seite AB darinnen herum.

Die

Die 28. Aufgabe.

107. In einem gegebenen Circul ein regu- IV.
läres Vieleck zu beschreiben. 72.

Auflösung.

1. Dividiret 360 durch die Zahl der Seiten; so habet ihr die Grösse des Winkels ACB.
2. Diesen traget an den Mittelpunct des Circuls C (§. 48.); so giebet sich die Seite des Vieleckes AB, die ihr
3. in dem Circul herumtragen könnet.

Der 17. Lehrsatz.

108. Die Seite des Sechseckes AB ist dem IV.
Radio des Circuls AC gleich. 72.

Beweis.

Der Winkel ACB ist 60° (§. 107.). Dannenhero sind die übrigen A und B 120° (§. 77.). Nun weil AC = BC (§. 27.); so ist auch A = B (§. 79.), folgends ist jeder von beiden 60°, und also dem Winkel C gleich. Derowegen ist auch AB = AC (§. 82.). W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

109. Also darf man nur den Radium sechsmal in dem Circul herumtragen, wenn man in demselben ein Sechseck beschreiben soll.

Der 2. Zusatz.

110. Und wenn man auf eine gegebene Linie ein Sechseck machen soll, darf man nur einen gleichseitigen Triangel auf dieselbe setzen (§. 53.), so ist die Spitze C der Mittelpunct des Circuls, darein es kommen soll.

Die 29. Aufgabe.

IV. 111. Aus allen Seiten der Figur, und drey
73. Diagonalen weniger, als Seiten sind, eine
jede Figur zu zeichnen.

Auflösung.

Weil eine jede Figur durch Diagonallinien in zwey Triangel weniger, als Seiten sind, zertheilet wird; so hat man nichts nöthig, als (§. 55.) immer einen Triangel auf den andern zu setzen.

Die 30. Aufgabe.

IV. 112. Aus allen Seiten der Figur, und drey
74. Winkeln weniger, als Seiten sind, eine jede
Figur zu zeichnen.

Auflösung.

1. Ziehet die Linie AB, so einer Seite gleichet, und traget auf A und B die gehörigen Winkel A und B (§. 48.): so lassen sich
2. die beiden Seiten EA und CB ansetzen.
3. Wenn ihr nun in E den gehörigen Winkel hinsetzet (§. 48.); so lässet sich ED ansetzen, und DC ziehen.
4. Oder mit den letzten beiden ED und CD machet aus E und C einen Durchschnitt in D, so ist die Figur geschlossen.

Anmerkung.

113. Wenn alle Winkel weniger einen gegeben werden; so dürfen zwey Seiten nicht gegeben werden.

Die 31. Aufgabe.

114. Ein Quadrat auszumessen.

Auf-

Auflösung.

1. Messet die Seite des Quadrats, und
2. multipliciret sie durch sich selbst; so kommet der Inhalt der Fläche heraus.

Seite des Quadrats	345″
	345
	1725
	1380
	1035
Inhalt der Fläche	119025″.

Beweis.

Wenn man eine Fläche ausmessen will, muß man auch eine Fläche zum Maaßstabe annehmen. Da nun das Quadrat lauter rechte Winkel und gleiche Seiten hat; ist selbiges zum Maaßstabe anzunehmen beliebet worden. Und demnach heisset eine Quadratruthe ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und eine Ruthe breit ist; ein Quadratschuh ein Quadrat, so einen Schuh lang und einen Schuh breit ist, u. s. w. Wenn nun die Seite AB z. E. in vier gleiche Theile eingetheilet ist, oder 4 Schuhe hält; so ist klar, daß man finden kan, wie viel schuhige Quadrate oder Quadratschuhe in dem grossen Quadrate ABCD enthalten sind, wenn man die Seite AB mit sich selbst multipliciret. Denn im grossen Quadrate müssen so viel Reihen der kleineren seyn, und in jeder Reihe so viel kleine Quadrate, als die Seite AB Theile hat. IV. 75.

Der

Der 1. Zusatz.

115. Wenn die Seite des Quadrats 10 ist; so wird der Inhalt desselben 100 seyn. Da nun eine Ruthe im Längenmaasse 10 Schuhe hat, ein Schuh 10 Zoll u. s. w. so muß im Flächenmaasse eine Quadrat-Ruthe 100 Schuhe, ein Quadratschuh 100 Quadratzolle u. s. w. haben.

Der 2. Zusatz.

116. Daher kan man eine gegebene Zahl gar leicht in Quadratzolle, Quadratschuhe, Quadratruthen resolviren, wenn man nur von der Rechten gegen die Linke 2 Zahlen für die Zolle, 2 für die Schuhe abschneidet: denn das übrige bleibet für die Ruthen. Z. E. wenn man 119025 Zolle hat, so sind es 11 Ruthen, 90 Schuhe, 25 Zolle.

Die 32. Aufgabe.

IV. 76. 117. Ein Rectangulum ABCD auszumessen.

Auflösung.

1. Messet die Breite AB, ingleichen die Höhe BC.
2. Multipliciret jene durch diese; so kommet der verlangte Inhalt der Figur heraus.

Z. E. Es sey $AB = 3^{\circ}4'5''$

$$\begin{array}{r} AD = 1\;2\;3 \\ \hline 10\;3\;5 \\ 69\;0 \\ 3\;45 \\ \hline \end{array}$$

so ist der Inhalt $= 4^{\circ}24'3\,5''$.

Be-

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Der 18. Lehrsatz.

118. Zwey Parallelogramma ABDC und EFDC, die Eine Basin oder Grundlinie CD und Eine Höhe AC haben, sind einander gleich. IV. 77.

Beweis.

Weil AC=BD, EC=FD und AE=BF (§. 20. Geom. et §. 24. Arithm.); so ist △AEC=△BFD (§. 51.), folgends, wenn man beiderseits den Triangel BEG wegnimmt, ABGC = EGDF (§. 25. Arithm.). Addiret man nun beiderseits den Triangel CGD; so ist auch ABCD = ECDF (§. 24. Arithm.), W. Z. E.

Der 1. Zusatz.

119. Also müssen auch die Triangel, so gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich seyn (§. 102.).

Der 2. Zusatz.

120. Ein Triangel ist die Hälfte des Parallelogrammi, wenn er mit ihm eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien stehet (§. 22.).

Die 33. Aufgabe.

121. Den Inhalt eines Rhombi und Rhomboidis auszurechnen. IV. 78.

Auflösung.

1. Nehmet die eine Seite AB für die Grundlinie

an,

an, und lasset darauf aus C ein Perpendicul CE fallen (§. 69.).

2. Multipliciret die Grundlinie AB durch die Höhe CE; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB = 4 5 6″
CE = 2 3 4

1824
1368
912

so ist der Inhalt = 10° 67′ 04″

Beweis.

Der Rhombus oder Rhomboides ABCD ist gleich einem Rectangulo, dessen Grund-Linie AB, die Höhe aber CE ist (§. 118. 103.). Nun findet man den Inhalt des Rectanguli, wenn man AB durch CE multipliciret (§. 117.). Derowegen wird der Inhalt des Rhombi und Rhomboidis gleichfalls gefunden, wenn man AB durch CE multipliciret. W. Z. E.

Die 34. Aufgabe.

IV. 122. Den Inhalt eines jeden Triangels zu
79. finden.

Auflösung.

1. Nehmet die Seite AB für die Grundlinie an, und lasset darauf aus C die Perpendicular-Linie CD fallen (§. 69.).
2. Messet die Linien AB und CD, und multipliciret sie durcheinander.

3. Was

3. Was herauskommt, dividiret durch 2; so habet ihr den Inhalt des Triangels.

Beweis.

Wenn ihr AB durch CD multipliciret; so habet ihr den Inhalt eines Parallelogrammi, dessen Seiten AB und DC sind (§. 117. 121.). Da nun der Triangel die Hälfte von diesem Parallelogrammo ist (§. 120.); so dürfet ihr den gefundenen Inhalt nur durch 2 dividiren, um den Inhalt des Triangels zu haben. W. Z. E.

Anders.

Man darf nur die Grundlinie AB durch die halbe Höhe CD, oder auch die Höhe CD durch die halbe Grundlinie AB multipliciren, wenn man den Inhalt des Triangels haben will; wie aus beygesetztem Exempel zu ersehen.

AB $3^\circ\, 4'\, 2''$	AB $3^\circ\, 4'\, 2''$	$\frac{1}{2}$AB $1^\circ\, 7'\, 1''$
CD 2 3 4	$\frac{1}{2}$CD 1 1 7	CD 2 3 4
1368	2394	684
1026	342	513
684	342	342
80028	40014 ACB	40014 ACB
2) ———		
40014 ACB		

Die 35. Aufgabe.

123. Den Inhalt einer jeden geradelinichten Figur zu finden. IV. 80.

Auflösung.

Weil jede Figur sich aus einem Winkel B durch

die

die Diagonallinien EB, BD, in so viel Triangel zertheilen lässet, als Seiten sind, weniger zwey, als z. E. das Fünfecke ABCDE in drey Triangel ABE, BED und BCD; so darf man nur nach der vorhergehenden Aufgabe jeden Triangel besonders ausrechnen, und sie hernach in eine Summe addiren.

Oder, wenn zwey Höhen CF und EG auf eine Grundlinie gezogen werden; so kan man das Trapezium EBCD auf einmal finden, wenn man entweder die halbe Grundlinie BD durch die Summe der Höhen EG und CF, oder die ganze Grundlinie durch die halbe Summe der Höhen multipliciret.

Exempel.

$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$ BD = 4° 3′	$\frac{1}{2}$ EB = 4° 2′
CF = 3 5	EG = 4 5	AH = 3 0
215	215	△AEB = 1260′
129	172	
△BCD = 1505′	△EBD = 1935′	

△AEB = 1260

△BCD = 1505

Inhalt der Figur = 4700′

Der 1. Zusatz.

IV. 81. 124. Ein reguläres Vieleck kan aus dem Mittelpunct C des Circuls, darein es sich beschreiben lässet, in so viel gleiche Triangel, als Seiten sind, eingetheilet werden. Denn die Grund-

Grundlinien dieser Triangel AB, BE, EF &c sind einander gleich (§. 21.), und die Schenkel derselben AC, CB, CE, CF &c. gleichfalls (§. 27.). Derowegen sind auch die Triangel selbst einander gleich (§. 51.). Wenn ihr nun den Inhalt eines von diesen Triangeln findet (§. 122.), und denselben durch die Zahl der Seiten multipliciret; so kommet der Inhalt des Viel-Eckes heraus.

Z. E. $\frac{1}{2}$AB = 2° 7′
DC = 2 9

2 4 3
5 4

△ABC 7 8 3′
Zahl der Seiten 5

Inhalt des V Eckes = 39° 15′.

Der 2. Zusatz.

125. Daher ist ein reguläres Viel-Eck einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, wie die Peripherie des ganzen Viel-Eckes, die Höhe aber so groß als die Höhe CD eines von den Triangeln, in welche er aus dem Mittel-Puncte C zertheilet worden (§. 119.). IV. 82.

Der 3. Zusatz.

126. Wenn man die Seiten des Viel-Eckes, so in einem Circul beschrieben worden, unendlich klein annimmet; so werden sie sich endlich in der Peripherie des Circuls verlieren. Und alsdenn wird die Höhe der Triangel CD mit dem Radio BC übereinkommen. Derowegen ist der Circul IV. 81.

einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als die Peripherie des Circuls, die Höhe aber dem Radio desselben gleichet (§. 125.).

Der 4. Zusatz.

IV. 83. 127. Der Ausschnitt eines Circuls ACB ist also einem Triangel gleich, dessen Grundlinie so groß, als der Bogen AB, die Höhe aber so groß, als der Radius AC.

Der 5. Zusatz.

128. Wenn also die Peripherie und der Diameter eines Circuls gegeben werden; so kan man den Inhalt finden, wenn jene durch den vierten Theil von diesem multipliciret wird.

Anmerkung.

129. Es haben sich von alten Zeiten her viele unterwunden, die wahre Verhältniß des Diametri eines Circuls zu seiner Peripherie zu erfinden; allein es ist noch keinem gelungen, unerachtet heute zu Tage die Kunst zu erfinden bey den Mathematicis sehr hoch gestiegen. Unterdessen haben sich einige mit gutem Fortgange bemühet, eine Verhältniß auszurechnen, die beynahe zutrift. Archimedes hat in seinem Büchlein von der Circul-Messung in dem andern Lehrsatze zuerst erwiesen, daß der Diameter eines Circuls zu seiner Peripherie sich beynahe verhalte, wie 7 zu 22. Weil aber die Verhältniß in grossen Circuln etwas zu viel bringet, haben andere eine genauere gesuchet. Niemand aber hat sich in diesem Stücke mehr Mühe gegeben, als Ludolph von Cölln, welcher endlich herausgebracht, daß, wenn der Diameter des Circuls 100 000 000 000 000 000 000 000 ist, die Peripherie beynahe 314 159 265 358 979 323 846 sey. Allein da diese Zahlen im Rechnen viel zu weitläuftig sind: nimmt man nur beiderseits die ersten drey Ziffern, und setzet die Verhältniß des Diametri zu der Peri-

Peripherie des Circuls, wie 100 zu 314, in welcher Ptolomæus, Vieta, Hugenius und Ludolph von Cölln übereinkommen. In kleinen Zahlen ist keine genauere Verhältniß, als die Adrianus Metius gegeben, wie 113 zu 355. Der Beweis folget unten in der Trigonometrie. Daß aber alle Diametri zu ihren Peripherien einerley Verhältniß haben, ist leicht zu begreifen. Denn wenn in verschiedenen Circuln die Diametri zu ihren Peripherien verschiedene Verhältniß hätten: könnten sie dadurch von einander unterschieden werden, und daher unmöglich einander ähnlich seyn, welches doch oben erwiesen worden (§. 34.).

Der 19. Lehrsatz.

130. Der Inhalt des Circuls verhält sich zum Quadrat seines Diametri, wie beynahe 785 zu 1000.

Beweis.

Wenn der Diameter 100 Theile hat, bekommet die Peripherie 314. (§. 129.); also ist der Inhalt des Circuls 7850 (§. 128.), das Quadrat des Diametri aber 10000 (§. 114.); folgends verhält sich jener zu diesem, wie 7850 zu 10000, das ist, wenn man beiderseits mit 10 dividiret, wie 785 zu 1000 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Der 20. Lehrsatz.

131. Die Flächen der Circul verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Diametrorum.

Beweis.

Wie sich die Fläche des einen Circuls zu dem Quadrate seines Diametri, so verhält sich die Fläche des andern Circuls zu dem Quadrate seines Diametri (§. 120. 130.). Derowegen verhält sich auch die Fläche des einen Circuls zu der Fläche des andern, wie das Quadrat des einen Diametri zu dem Quadrate des andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Die 36. Aufgabe.

132. **Es wird gegeben der Diameter des Circuls, man soll die Peripherie finden.**

Auflösung.

Suchet zu 100, 314 und dem gegebenen Diametro die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.) Diese ist die verlangte Peripherie (§. 129.).

Es sey der Diameter 56'. Sprechet

$$
\begin{array}{r}
100 — 314 — 56 \\
56 \\
\hline
1884 \\
1570 \\
\hline
\end{array}
$$

$17^\circ 5' 8'' 4'''$ Peripherie des Circuls.

Die 37. Aufgabe.

133. **Es wird gegeben die Peripherie des Circuls (17584'''), man soll den Diametrum finden.**

Auflösung.

Suchet zu 314, 100 und der gegebenen Peripherie 17584''' die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.); so kommet der verlangte Diameter 56 heraus (§. 129.)

314—100—17584
100

1758400

~~1~~8
~~202~~
~~1758400~~ } $5^{\circ}6'0''0'''$ Diameter.
~~314444~~
~~3111~~
~~33~~

Die 38. Aufgabe.

134. Es wird gegeben der Diameter (oder die Peripherie) des Circuls, man soll den Inhalt desselben finden.

Auflösung.

1. Suchet erstlich die Peripherie (§. 132.), oder den Diametrum (§. 133.).
2. Multipliciret die Peripherie durch den vierten Theil des Diametri (§. 128.).

Z. E. Es sey der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie 17584‴; folgends der Inhalt des Circuls 24617600‴.

Anders.

Multipliciret den Diametrum (56′) durch sich selbst, und suchet zu 1000,785 und dem gefundenen Quadrate des Diametri 3136 die vierte Proportionalzahl 246176″ (§. 85. Arithm.); so habet ihr den verlangten Inhalt des Circuls (§. 130.).

Die 39. Aufgabe.

135. Es wird gegeben der Inhalt des Circuls, man soll den Diametrum finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 785 und 1000 und dem gegebenen Inhalt des Circuls 246176'' die vierte Proportionalzahl 313600 (§. 85. Arithm.).
2. Hieraus ziehet die Quadratwurzel 56. (§. 77. Arithm., diese ist der verlangte Diameter (§. 130.).

Zusatz.

136. Wollet ihr die Peripherie wissen, so könnet ihr, nachdem der Diameter bekannt worden, dieselbe durch die 36 Aufgabe (§. 132.) suchen.

Die 40. Aufgabe.

IV. 83. 137. Es wird gegeben der Radius des Circuls AC (6') und die Grösse des Bogens AB (6°), man soll den Inhalt des Ausschnittes oder Sectoris ABC finden.

Auflösung.

1. Suchet zu 100, 314 und dem Radio AC (§. 85. Arithm.) die vierte Proportionalzahl 1884'''. Diese ist die halbe Peripherie (§. 132. Geom. & . 59. Arithm.).
2. Suchet ferner zu 180°, dem gegebenen Bogen 6° und der gefundenen halben Peripherie 884''' die vierte Proportionalzahl $62\frac{4}{5}'''$ (§. 85. Arithm.) so ist euch der Bogen AB in Linien bekannt.
3. Diese multipliciret durch den vierten Theil

des

des Diametri 300'''; so kommet der Inhalt des Ausschnittes ABC 18840''' heraus (§. 122. 127.).

Der 21. Lehrsatz.

138. **Wenn zwey Parallelogramma ABDC und BEFD einerley Höhe AC haben; verhalten sie sich gegen einander wie ihre Grundlinien CD und DF: hingegen wie ihre Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.** IV. 84.

Beweis.

Den Inhalt des Parallelogrammi AD bekommet man, wenn man seine Grundlinie CD durch AC multiplicieret; hingegen den Inhalt des Parallelogrammi BF, wenn seine Grundlinie DF durch AC multipliciret wird (§. 117.). Also verhalten sich die beiden Parallelogramma, wie die Producte aus AC in CD und aus AC in DF, das ist, wie CD zu DF (§. 59. Arithm.): welches das erste war.

Auf eben solche Art wird erwiesen, daß, wenn die Grundlinien gleich sind, die Parallelogramma sich wie die Höhen verhalten: welches das andere war.

Zusatz.

139. Weil jeder Triangel als die Hälfte eines Parallelogrammi betrachtet werden kan (§. 120.); so müssen auch die Triangel von gleicher Höhe sich wie ihre Grundlinien; und die auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen verhalten.

Die 41. Aufgabe.

V. 140. Ein Parallelogrammum ABEC aus ei-
85. nem gegebenen Puncte D in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Machet EF=AD, und ziehet die Linie DF; so sind die beiden Trapezia ADFC und DBEF einander gleich.

Beweis.

Die Triangel ABC und BCE sind einander gleich (§. 102.). Weil AB=EC und diese Linien einander parallel (§. 102.), über dieses AD=EF; so ist ferner o=x und y=u (§. 72.), und FC=DB (§. 25 Arithm.) Derowegen ist auch △DBG=△GCF (§. 50.), folgends das Trapezium ACFD dem Trapezio DFEB gleich (§. 24. 25. Arithm.). W. Z. E.

Die 42. Aufgabe.

141. Es wird gegeben der Inhalt eines Triangels (36′) und seine Grundlinie (18′) man soll die Höhe finden.

Auflösung.

Durch die halbe Grundlinie (9′) dividiret den Inhalt des Triangels 36′); so kommet die Höhe (4′) heraus (§. 122.).

Die 43. Aufgabe.

142. Eine jede geradlinichte Figur in so viel Theile zu theilen, als man begehret.

Auflösung.

1. Rechnet den Inhalt der Figur aus (§. 123.) und theilet ihn in die begehrten Theile, z. E. in drey. V. 86.
2. Den Inhalt des Triangels AED ziehet von dem dritten Theile der Figur ab, und was übrig bleibet, dividiret durch $\frac{1}{2}$AD; so kommet die Höhe des Triangels ADI heraus, den man noch zu AED hinzusetzen muß, damit AEDI der dritte Theil der Figur wird (§. 141.).
3. In der Weite dieser Höhe ziehet mit DA eine Parallellinie (§. 67.), welche AB in I durchschneidet; so könnet ihr die Linie DI ziehen.
4. Halbiret den dritten Theil der Figur, und dividiret die Hälfte durch $\frac{1}{2}$DI; so kommet die Höhe des Triangels DIK heraus, der dem sechsten Theile der Figur gleich ist.
5. In der Weite gedachter Höhe ziehet mit DI eine Parallellinie (§. cit.), damit sich der Punct K giebet.
6. Den sechsten Theil der Figur dividiret durch $\frac{1}{2}$DK, und mit der Weite des Quotienten ziehet wie vorhin eine Linie mit DK parallel, damit ihr den Punct L findet, und folgends die Linie LK ziehen könnet, welche den andern Theil DIKL abschneidet, und zugleich den dritten LKBC giebet.

Z. E. Es sey AD 516'', AC 580'', EH 154'', BG 315'', DF 375''; so ist AED 39732'', ABC 91350'', ADC 108750'' und daher die ganze Figur 239832″, der dritte Theil 79944″, der sechste 39972″, die Höhe des △DIA 156″, ½DI 265″, die Höhe des △DIK 151″, ½DK 287″, und die Höhe des △DKL 139″.

Anmerkung.

143. Wenn die Eintheilung auf dem Papiere geschehen: so werden auf dem Felde die Puncte I, K und L durch die Grösse der Linien AI, IK und DL leicht gefunden.

Der 22. Lehrsatz.

V. 87. 144. **In einem rechtwinkelichten Triangel ABC ist das Quadrat ACFG der grösten Seite AC den Quadraten BCED und ABIH der beiden übrigen Seiten BC und BA gleich.**

Beweis.

Man ziehe die Linien AE und BF, ingleichen BK mit AG parallel (§. 67.). Weil der Triangel BCF mit dem Rectangulo LCFK Eine Grundlinie CF hat, und mit ihm zwischen den beiden Parallel-Linien CF und BK stehet; so ist er die Hälfte von demselben (§. 120.). Eben so, weil der Triangel ACE mit dem Quadrate BCED Eine Grundlinie CE hat, und zwischen den beiden Parallellinien AD und CE stehet; so ist er die Hälfte von demselben (§. 120.). Nun ist CF = AC und BC = CE (§. 20.), und der Winkel ACE dem Winkel BCF gleich (§. 24. Arithm.) weil nemlich ACF = BCE = 90° (§. 20. 37.). Derowegen sind die ganzen Triangel ACE und BCF (§. 49.), folgends auch das Quadrat BDEC und das Rectangulum LCFK einander gleich (§. 26. Arithm.).

Da nun auf gleiche Weise erwiesen wird, daß

das

das Quadrat AHBI dem Rectangulo ALKG gleich sey; so ist klar, daß die beiden Quadrate AHIB und BCDE zusammengenommen dem Quadrate AGFC gleich sind. W. Z. E.

Anmerkung.

145. Dieser Lehrsatz wird von seinem Erfinder Pythagora der Pythagorische Lehrsatz, und wegen seines vortreflichen Nutzens durch die ganze Mathematic von einigen Magister Matheseos genennet.

Die 44. Aufgabe.

146. **Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, wie zwey oder mehrere andere zusammengenommen.**

Auflösung.

1. Setzet die Seiten der beiden Quadrate AB und BC rechtwinkelicht zusammen (§. 70. 89). IV. 88.
2. Ziehet die Linie AC; so habet ihr die Seite des Quadrates, welches so groß ist, wie die andern beide zusammen (§. 144.).
3. Richtet CE = AC auf die Seite des dritten Quadrates CD perpendicular auf, und
4. ziehet die Linie DE; so habet ihr die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als die drey Quadrate zusammen (§. 144.) u. s. w.

Der 23. Lehrsatz.

147. **Wenn in geradlinichten Figuren die gleichnamige Winkel einander gleich sind, und die Linien, so sie einschliessen, beiderseits einerley Verhältniß haben; so sind sie einander ähnlich: und wenn sie ähnlich sind; so**

so hat es mit den Winkeln und Linien die gemeldete Beschaffenheit.

Beweis.

Die geradelinichten Figuren können nicht anders, als durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und durch die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, von einander unterschieden werden: denn sonst lässet sich nichts deutlich in ihnen begreifen. Wenn nun die Winkel einerley Grösse, und die Seiten, so sie einschliessen, einerley Verhältniß haben; so kommen die Sachen überein, wodurch sie von einander unterschieden sind. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 4.): welches das erste war.

Wenn zwey Figuren einander ähnlich sind; so kommen die Sachen mit einander überein, wodurch sie von einander zu unterscheiden sind (§. 4.). Nun werden die geradelinichten Figuren durch die Grösse der gleichnamigen Winkel und die Verhältniß der Seiten, so sie einschliessen, unterschieden. Derowegen muß die Grösse der Winkel und die Verhältniß der Seiten beiderseits einerley seyn: welches das andere war.

Der 24. Lehrsatz.

V. 148. Wenn in zweyen Triangeln BAC und
89. DFE, B=D und C=E, so ist BA: AC=DF: EF und AB : BC=FD:DE; und wenn hingegen die Seiten proportional sind, so sind auch die gleichnamigen Winkel gleich.

Be-

Beweis.

Weil B=D und C=E, und aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite sich der Triangel beschreiben lässet (§. 60.): so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends BA: AC=FD: FE und AB: BC=FD: DE (§. 147): welches das erste war.

Weil im andern Falle die drey Seiten des einen Triangels proportional sind den drey Seiten des anderen, und aus drey Seiten sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 55.); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.), und also die gleichnamigen Winkel einander gleich (§. 147): welches das andere war.

Der 25. Lehrsatz.

149. Wenn in einem Triangel ABC eine V.
Linie DE mit der Grundlinie BC parallel 89.
gezogen wird; so verhält sich AD zu AE, wie AB zu AC, und wie BD zu EC, auch AD: DE = AB: AC.

Beweis.

Weil DE mit BC parallel; so ist o=x und u=y (§. 72.), daher AD : AE = AB : AC und AD:DE=AB: BC (§. 148.): folgends weil AD: AB=AE:AC (§. 83. Arithm.), AD:AE=BD: EC. W. Z. E.

Die 45. Aufgabe.

V. 150. Zu zwey gegebenen Linien AC und AB
90. die dritte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

1. Machet nach Gefallen einen Winkel EAD, und
2. traget aus A in C die Linie AC; aus A in B, ingleichen C in E die Linie AB.
3. Ziehet von B in C eine gerade Linie CB und aus E die Linie DE mit CB parallel, welches geschiehet, wenn ihr (§. 48.) den Winkel E dem Winkel C gleich machet (§. 73.); so ist BD die verlangte dritte Proportionallinie (§. 149.).

Die 46. Aufgabe.

V. 151. Zu drey gegebenen Linien AB, AC und
91. BD die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

1. Machet nach Belieben einen Winkel EAD.
2. Traget aus A in B die Linie AB, aus A in C die Linie AC, und aus B in D die Linie BD.
3. Von B in C ziehet eine gerade Linie, und
4. aus D eine andere DE mit CB parallel, wie in der vorhergehenden Aufgabe; so ist CE die verlangte vierte Proportionallinie (§. 149.).

Der 26. Lehrsatz.

V. 152. Wenn in zweyen Triangeln ABC und
89. FDE, B=D und AB:BC=FD:DE; so ist auch
A=F und C=E, und BA:AC=DF:FE.

Be-

Beweis.

Weil B = D und AB : BC = FD : DE, und aus einem Winkel mit den beiden Seiten, die ihn einschliessen, sich ein Triangel beschreiben lässet (§. 58.); so werden die Triangel ABC und FDE auf gleiche Art erzeuget. Derowegen sind sie einander ähnlich (§. 33.); folgends A = F, C = E und BA : AC = DF : FE (§. 147.). W. Z. E.

Anmerkung.

153. Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Triangel sind von den nützlichsten in der ganzen Mathematik, und dienen zu den meisten Erfindungen, die man in derselben haben kan. Auch die vornehmste Ausübung der Geometrie auf dem Felde beruhet auf denselben, wie bald mit mehrerm erhellen soll.

Die 47. Aufgabe.

154. **Eine gerade Linie AB in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget.** V. 92.

Auflösung.

1. Traget nach Belieben auf eine Linie CD so viel gleiche Theile, als die Linie AB bekommen soll, z. E. fünfe.
2. Setzet auf CD einen gleichseitigen Triangel CED (§. 53.).
3. Traget aus E in A und aus E in B die Linie AB.
4. Endlich ziehet gegen den ersten Theilungs-Punct G aus der Spitze des Triangels E die

Linie

Linie EG: so ist AE der fünfte Theil von der gegebenen Linie AB.

Beweis.

Weil EA:EB=EC:ED; so ist A=C und EA:AB EC:CD (§. 152.). Nun ist EC=CD; derowegen ist auch EA=AB. Weil nun ferner EA:AF=EC:CG (§. 148.), das ist: AB:AF=CD:CG und CG=$\frac{1}{5}$CD; so ist auch AF=$\frac{1}{5}$AB (§. 53. Arithm.) W. Z. E.

Die 48. Aufgabe.

V. 155. Eine gerade Linie AB nach der Proportion einzutheilen, nach welcher eine andere
93. CD eingetheilet worden.

Auflösung.

1. Beschreibet auf die eingetheilte Linie CD einen gleichseitigen Triangel (§. 53.).
2. Traget aus E in A und B die gegebene Linie AB.
3. Ziehet aus der Spitze des Triangels E an die Theilungs-Puncte G, I, die Linien EG, EI. Diese theilen die gegebene Linie AB in F und H nach der gehörigen Proportion.

Beweis.

Der Beweis ist, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Anmerkung.

156. Diese Aufgabe hat viel Nutzen in der Baukunst und Fortification, sonderlich wenn man einen vorgegebenen Riß nach Belieben vergrössern oder verkleinern soll.

Die

Die 49. Aufgabe.

157. Ein Parallelogrammum, ingleichen einen Triangel, in so viel gleiche Theile zu theilen, als man verlanget. VI. 106. 107.

Auflösung.

1. Theilet die Grundlinie CD oder CB in so viel gleiche Theile, als die Figur eingetheilet werden soll (§ 154).
2. Ziehet aus den Theilungs-Puncten 1. 2. in dem ersten Falle mit der andern Seite AC Parallellinien 1. 1. und 2. 2. (§. 67.); in dem anderen Falle aber Linien bis an die Spitze des Triangels, A1 und A2; so sind beide Figuren in gleiche Theile eingetheilet (§. 138. 139.).

Die 50. Aufgabe.

158. Zwischen zwey gegebenen Linien AB und BE eine mittlere Proportionallinie zu finden. VI. 108.

Auflösung.

1. Traget die gegebenen Linien AB und BE in eine an einander, und theilet sie in C in zwey gleiche Theile (§. 90.).
2. Beschreibet aus C mit CA einen halben Circul.
3. Richtet aus B die Perpendicularlinie BD auf (§. 70.). Diese ist die verlangte mittlere Proportionallinie.

Beweis.

Der Winkel ADE ist ein rechter Winke (§. 86.): ABD ist auch ein rechter Winkel (§. 18.). Der Winkel DAB ist beiden Triangeln DAB und DAE gemein. Derowegen ist auch der Winkel ADB dem Winkel DEB gleich (§. 78.). Nun ist in dem Triangel DEB der Winkel DBE auch ein rechter Winkel (§. 18.). Derowegen verhält sich AB zu BD, wie BD zu BE (§. 148.). W. Z. E.

Die 1. Anmerkung.

159. Wenn man für 1. eine Linie annimmet, und nach derselben eine gegebene Zahl durch eine andere Linie exprimiret; so kan man durch diese Aufgabe vermittelst des verjüngten Maaßstabes die Quadratwurzel ausziehen (§. 74. Arithm.).

Die 2. Anmerkung.

160. Eben auf diese Art kan man durch die 46 Aufgabe (§. 151.) die Regel Detri in Linien verrichten.

Die 51. Aufgabe.

VI. 161. Aus der gegebenen Sehne eines Bo-
109. gens AB und dessen Höhe DF den Diametrum ED, und folgends den Mittelpunct des Circuls C zu finden.

Auflösung und Beweis.

1. Suchet zu FD und FB die dritte Proportionallinie (§. 85. Arithm.); so habet ihr EF (§. 158.).
2. Addiret zu FE die Höhe des Bogens DF; so habet ihr den Diametrum ED.
3. Theilet denselben in 2 gleiche Theile; so habet ihr den Radium EC, und folgends den Mittel-Punct C.

Z. E.

Z. E. Es sey DF 8′3″ FB 1°6′6″

83 — 166 — 166
166
996
996
166
27556

1
22
366
27886 } 332″EF
8333 83 DF
88
415″ED
2)
2075‴EC.

Anmerkung.

162. Diese Aufgabe hat ihren Nutzen in der Bau-Kunst, wenn man die Eröffnung der Thüren und Fenster mit Bögen schliessen soll.

Die 52. Aufgabe.

163. Aus der gegebenen Sehne eines Bo- VI.
gens AB und seiner Höhe DF den Inhalt des 109.
Abschnittes ADBFA zu finden.

Auflösung.

1. Suchet zuerst den Diametrum des Circuls DE (§. 160.) und
2. Beschreibet damit einen Circul, und traget die Sehne AB darein.
3. Messet den Winkel ACB mit dem Transporteur (§. 43.).
4. Suchet alsdenn den Ausschnitt ACBDA (§ 137.).
5. Aus der gegebenen Sehne AB und dem Unterscheide FC zwischen der Höhe des Bogens

DF und dem Radio DC, suchet den Inhalt des Triangels ACB (§. 122.).

6. Endlich ziehet den Triangel ACB von dem Ausschnitte ACBDA ab; so bleibet der Abschnitt ADBFA übrig.

Z. E. Es sey AB 600‴ DF 80‴; so ist DE 1205‴, der Bogen AB 60°, und daher der Ausschnitt ACBDA 189630‴. Da nun FC 522‴, AF 300‴; so ist △ACB 156600‴, folgends der Abschnitt AFBDA 33030‴, wenn man in der ganzen Rechnung die Brüche weglässet.

Die 53. Aufgabe.

V. 94. 164. Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.

Auflösung.

1. Ziehet eine Linie AE, und traget darauf 10 gleiche Theile von beliebter Grösse aus A in B, und denn ferner den Raum AB, so vielmahl euch beliebet.
2. Richtet in A von gefälliger Länge eine Perpendicularlinie AC auf (§. 70.), und theilet sie in 10 gleiche Theile.
3. Durch jeden Theilungspunct ziehet mit AE eine Parallellinie (§. 67.), und
4. traget auf die obere CD eben die Theile, welche sich auf AB befinden.
5. Ziehet oben 10 und unten 9, oben 9 und unten 8, oben 8 und unten 7, oben 7 und unten 6, u. s. w. mit geraden Linien zusammen.

Ich sage, wenn AB eine Ruthe ist; so sind die Theile B 1, 1. 2, 2. 3. u. s. w. Schuhe: hingegen

9. 9,

9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zoll, 7. 7 drey Zoll, 6. 6 vier Zoll u. s. w.

Beweis.

Weil 10 Schuhe eine Ruthe machen (§. 9.): so ist klar, daß die Theile auf der Linie AB Schuhe sind. Daß aber 9. 9 ein Zoll, 8. 8 zwey Zoll, 7. 7 drey Zoll sind u. s. w. erweiset man also. Dieweil 9. 9 mit C9 parallel ist, so verhält sich wie A9 zu AC, so 9. 9 zu C9 (§. 149.). Nun ist $A9 = \frac{1}{10}$ AC. Derowegen ist auch $9.9 = \frac{1}{10}$ C9, folgends ein Zoll (§. 9.), u. s. w. W. Z. E.

Zusatz.

165. Wenn man nun den Zirkel auf die dritte oder siebente Linie setzet, und ihn bis zu der Linie aufthut, die unten aus dem 5ten Schuhe gezogen ist; so hat man über 5 Schuhe noch 3 oder 7 Zoll, u. s. w.

Die 54. Aufgabe.

166. Die Weite zweyer Oerter A und B zu finden, zu denen beiden man aus einem angenommenen Stande kommen kan. V. 95.

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in D, und erwählet auf demselben einen Punct C.
2. Von demselben visiret durch die Diooptern in A, und ziehet die Linie Ca.
3. Gleichergestalt visiret in B, und ziehet die Linie Cb.
4. Messet mit der Meßruthe die Linien CA und CB und

5. traget dieselben von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) aus C in a und b. Endlich
6. messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweis.

Denn weil der Winkel C beiden Triangeln aCb und ACB gemein ist, und die Seiten, so ihn einschliessen, proportional sind; so kan ich auch sagen, wie Ca zu CA, so verhält sich ab zu AB (§. 152.). Nun hält Ca so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, als CA auf dem grossen: derowegen muß auch ab so viel auf dem verjüngten Maaßstabe halten, als AB auf dem grossen. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Setzet das Instrument in D und messet den Winkel ACB (§. 43.).
2. Messet ferner die Linien CA und CB (§. 44.).
3. Construiret durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel aCb (§. 58.).
4. Messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr, wie viel Ruthen, Schuhe und Zolle die Linie AB hält.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der ersten Auflösung.

Die 55. Aufgabe.

V. 96. 167. **Die Weite zweyer Oerter A und B** zu messen, zu deren einem A man nur kommen kan.

Auflösung.

1. Setzet das Meßtischlein in einen nach Belieben erwählten Stand C, und visiret aus dem Puncte c nach beiden Oertern A und B.
2. Messet die Weite eures Standes C von dem Orte A, zu welchem ihr kommen könnet, und
3. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164) aus c in a.
4. Gehet mit eurem Tischlein bis in A, und setzet es dergestalt nieder, daß der Punct a in A stehet, und ihr durch die Dioptern nach der Linie ac den in C eingesteckten Stab sehen könnet.
5. Visiret hierauf durch dieselben aus a in B, und ziehet die Linie ab.
6. Endlich messet die Linie ab auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so erkennet ihr die Grösse der verlangten Weite AB.

Beweis.

Weil der Winkel c = C und a = A; so verhält sich wie ac zu AC, so ab zu AB (§. 48.). Nun hat ac so viel Theile von dem kleinen Maaßstabe, als AC von dem grossen; derowegen muß auch ab so viel Theile von dem kleinen, als AB von dem grossen haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet mit dem Instrumente die Winkel C

und A (§. 43.), und mit der Ruthen die Linie AC (§. 44.).

2. Construiret daraus durch Hülfe des Transporteurs und verjüngten Maaßstabes einen Triangel acb (§. 60.).

3. Messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie ab; so wisset ihr die verlangte Weite AB.

Beweis.

Der Beweis ist wie vorhin.

Die 56. Aufgabe.

V. 97. 168. **Die Weite zweyer Oerter AB, zu deren keinem man kommen kan, zu messen.**

Auflösung.

1. Erwählet zwey Stände in C und D. In den einen C setzet das Tischlein, in den andern D stecket einen Stab.

2. Aus dem Puncte c visiret durch die Diopteren nach dem Stabe D, imgleichen nach B und A, und ziehet dahinzu auf dem Tischlein Linien.

3. Messet die Weite der beiden Stände CD (§. 44), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus c in d.

4. Stecket in C einen Stab, und setzet das Tischlein dergestalt in D, daß der Punct d in D kommet, und wenn ihr nach der Linie cd durch die Diopteren visiret, ihr den Stab in C erblicket.

5. Visiret ferner aus d gegen A und B, und ziehet auf dem Tischlein die Linien da und db.

6. End-

6. Endlich messet (§. 164.) auf dem verjüngten Maaßstabe ab; so habet ihr die Länge der Weite AB.

Beweis.

Weil der Winkel d beiden Triangeln dcb und DCB gemein, über dieses auch der Winkel c dem Winkel C gleich ist; so verhält sich cd zu CD, wie bc zu BC (§. 148.). Wiederum weil aus gleichmäßiger Ursache der Triangel acd dem Triangel ACD ähnlich ist; so verhält sich cd zu CD, wie ac zu AC (§. 148.), folgends ist auch bc zu BC, wie ac zu AC (§. 57. Arithm.). Da nun über dieses der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist; so verhält sich ab zu AB, wie ac zu AC (§. 152.), oder cd zu CD (§ 57. Arithm.). Da nun dc so viel Theile auf dem verjüngten Maaßstabe, als DC im grossen hat: so muß auch ab so viel Theile auf dem verjüngten Maaßstabe, als AB im grossen, haben. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet aus dem ersten Stande C die Winkel x und y, und aus dem Stande D die Winkel z und w (§. 43.); so geben ihre Summen die Winkel ACD und BDC. VI. 98.
2. Messet ferner die Standlinie CD (§. 44.).
3. Traget diese nach dem verjüngten Maaßstabe auf das Papier, und construiret mit Hülfe der Winkel x und z + w den Triangel BCD, und mit Hülfe der Winkel z und x + y den Triangel ACD (§. 60.).

4. Endlich messet auf dem verjüngten Maaßstabe die Linie AB; so wisset ihr die verlangte Weite.

Beweis.

Der Beweis ist einerley mit dem vorigen.

Anmerkung.

169. Auf gleiche Art kan man die Weite gar vieler Oerter auf einmal messen, wenn man nemlich aus zweyen Ständen gegen jeden visiret.

Die 57. Aufgabe.

V. 170. **Die Höhe eines Ortes AB zu messen,**
99. **zu dem man kommen kan.**

Auflösung.

1. Erwählet euch einen Stand in D, und richtet das Tischlein vertical, doch so, daß seine untere Seite horizontal sey: welches vermittelst einer Bleywage gar leicht geschehen kan.
2. Die Regel mit den Diopter leget an dasselbe horizontal, visiret nach dem Orte, dessen Höhe ihr messen wollet, und ziehet die Linie cE.
3. Kehret an dem Puncte c die Regel mit den Diopter in die Höhe, bis ihr die Spitze A erblicket, und ziehet auf dem Tischlein die Linie cb.
4. Messet die Standlinie cC (§. 44.), und
5. traget sie von dem verjüngten Maaßstabe auf das Tischlein aus c in E (§. 164.).
6. Richtet in E ein Perpendicul Eb auf (§. 70), und
7. messet die Länge auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so wisset ihr die Höhe CA.
8. Dazu addiret die Höhe BC; so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Be-

Beweis.

Der Winkel c ist beiden Triangeln Ecb und CcA gemein: bey E und C sind rechte Winkel; also verhält sich Ec zu cC, wie bE zu AC (§. 48.). Nun hält Ec so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie cC auf dem grossen. Derowegen muß auch Eb so viel auf dem verjüngten Maaßstabe, wie AC auf dem grossen halten. W. Z. E.

Eine andere Auflösung.

1. Messet den Winkel E (§. 43.) und die Standlinie AD oder CE (§. 44.). VI. 100.
2. Construiret daraus einen rechtwinkelichten Triangel cbe (§. 60.).
3. Messet die Höhe bc auf dem verjüngten Maaßstabe; so habet ihr die Höhe BC.
4. Dazu addiret die Höhe des Stativs, so kommet die Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie der vorige.

Anmerkung.

171. Man setzet voraus, daß die Linie AD horizontal sey: denn wenn das Instrument an einem erhabenern, oder auch niedrigern Orte stünde, als die Höhe BA gelegen; so ist es rathsamer, daß man auch den Winkel CEA misset, und den Triangel CEA im kleinen construiret.

Die 58. Aufgabe.

172. **Eine Höhe AB zu messen, zu der man nicht kommen kan.** VI. 101.

Auflösung.

1. Erwählet 2 Stände in D und E, und visiret, wie in der vorhergehenden Aufgabe, nach der

Spi-

Spitze A und dem Punct C, in dem ersten Stande D.

2. Messet die Standlinie ED, und traget sie aus f, so über dem Puncte D stehen muß, in e von dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.).

3. Traget das Tischlein in E dergestalt, daß der Punct e über E kommet, und visiret wie vorhin nach dem Stabe in D und der Spitze A.

4. Wo die Linie ea die Linie fa durchschneidet, lasset ein Perpendicul ac auf fc herunter fallen (§. 69.).

5. Diesen messet auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.); so habet ihr die Höhe AC.

6. Addiret dazu die Höhe BC; so habet ihr die verlangte Höhe AB.

Beweis.

Der Beweis ist eben so, wie in der vorigen Aufgabe.

Eine andere Auflösung.

VI. 101. 1. Messet in dem ersten Stande D den Winkel f, und in dem anderen E den Winkel e (§. 43.) und die Standlinie ED (§. 44.).

VI. 102. 2. Diese traget auf das Papier nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und

3. construiret darauf durch Hülfe der Winkel e und f einen Triangel fea (§. 60.).

4. Verlängert seine Grundlinie fe in c, und lasset von a ein Perpendicul ac herunter fallen (§. 69.).

5. Endlich messet ac auf dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.), und addiret dazu die Höhe des

Instruments, damit ihr die Winkel gemessen, oder nehmet in Acht, (§. 171) was erinnert worden: so kommet die verlangte Höhe AB heraus.

Beweis.

Der Beweis ist wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Die 59. Aufgabe.

173. Eine jede geradlinichte Figur ABCDE, in die man kommen kan, in Grund zu legen. VI. 103.

Auflösung.

Messet den ganzen Umfang der Figur AB, BC, CD, DE, EA; ingleichen die Diagonallinien AC und AD; so könnet ihr nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Figur auf dem Papiere aufzeichnen (§. 111.).

Beweis.

Wenn man eine Figur in Grund leget; so muß man eine kleine Figur zeichnen, in der alle Winkel so groß sind, als in der grossen, und die Seiten sich eben so gegen einander verhalten, wie in der grossen (§. 57.). Wenn man nur für jede Seite der Triangel ABC, ACD, ADE auf dem verjüngten Maaßstabe so viel annimmet, als sie im Grossen ausmachet; so verhalten sich die Seiten in der verjüngten Figur eben so gegen einander, wie die Seiten der grossen. Denn wenn z. E. AB im Grossen 6 ist, so ist sie im Kleinen auch 6; wenn im Grossen BC 7 ist, so ist sie im Kleinen auch 7. Und also verhält sich AB zu BC

bei-

beiderseits wie 6 zu 7. Derowegen sind auch die Winkel der kleinen Figur so groß, wie die Winkel in der grossen (§. 148.). Da nun die Winkel der Figur mit den Winkeln der Triangeln übereinkommen; so müssen auch alle Winkel in der verjüngten Figur so groß seyn, wie in der grossen. W. Z. E.

Anders.

VI. 1. Erwählet euch innerhalb der Figur einen Punct
104. F, und setzet dahin das Meßtischlein.

2. Aus F visiret gegen die Stäbe, welche man in die Ecken der Figur A, B, C, D, E gestecket, und ziehet die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
3. Messet die Linien FA, FB, FC, FD, FE (§. 44.), und
4. eben so groß machet nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) die Linien Fa, Fb, Fc, Fd, Fe.
5. Endlich ziehet die Linien ab, bc, cd, de und ea; so schliesset sich die verlangte Figur.

Beweis.

In dem Triangel aFb verhält sich Fa zu Fb, wie FA zu FB im Triangel AFB, und der Winkel F ist beiden Triangeln gemein: derowegen verhält sich auch Fb zu FB, wie ba zu BA (§. 152.). Eben so wird erwiesen, es verhalte sich wie Fb zu FB, so bc zu BC, folgends auch ba zu bc, wie BA zu BC (§. 57. Arithm.). Es ist aber auch der Winkel ABC so groß, wie der Winkel abc (§. 152.). Da nun auf gleiche Weise von allen übrigen

Win-

Winkeln c, d, e, a erwiesen werden kan, daß sie den Winkeln C, D, E, A gleich sind, und auch von den übrigen Seiten, daß sie sich gegen einander verhalten, wie die Seiten CD, DE, EA; so ist klar, daß die grosse Figur in Grund geleget worden. W. Z. E.

Anders.

1. Messet aus F alle Winkel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA (§. 43.), imgleichen die Linien FA, FB, FC, FD und FE (§. 48.).
2. Traget die Winkel auf das Papier (§. 48.) imgleichen die Linien nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.).
3. Ziehet die Linie ab, bc, cd, de und ea; so wird die verlangte Figur beschlossen.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie der vorige.

Die 60. Aufgabe.

174. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man aus zweyen Oertern A und B ganz übersehen kan.** VI. 105.

Auflösung.

1. Setzet euer Tischlein in A, und visiret nach allen Ecken der Figur B, C, D und E, und ziehet gegen dieselbe Linien aus dem Puncte A.
2. Messet die Standlinie AB (§. 44.), und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus A in b.
3. Traget das Tischlein aus A in B, und richtet es dergestalt, daß der Punct b in B kommet, und ihr durch die Dioptern des an die Linie bA ange-

angelegten Lineals den in A eingesteckten Stab sehen könnet.

4. Visiret nach allen übrigen Ecken der Figur, und ziehet gegen dieselben aus B Linien, welche die vorigen in e, d, c durchschneiden.

5. Endlich ziehet die Linien ed, dc; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist fast eben wie in der 56 Aufgabe (§. 168.).

Anders.

1. Messet aus A die Winkel CAB, DAC, EAD (§. 43.), imgleichen die Linie AB (§. 44.), wie nicht weniger aus B die Winkel EBA, EBD, DBC (§. 43.).

2. Ziehet auf dem Papiere eine Linie ab, und traget von dem verjüngten Maaßstabe die Grösse der Linie AB darauf (§. 164.).

3. Traget in bac, cad, dae die Winkel BAC, CAD und DAE; hingegen in abe, ebd, dbc die Winkel ABE, EBD, DBC (§. 48.).

4. Endlich ziehet die Puncte, a, e, d, c, b, mit geraden Linien zusammen; so habet ihr die verlangte Figur in Grund geleget.

Beweis.

Der Beweis ist abermals wie in der 56. Aufgabe (§. 168.).

Die 61. Aufgabe.

175. **Eine Figur ABCDE in Grund zu legen, die man ganz umgehen kan.**

Auf-

Auflösung.

1. Setzet das Tischlein in A und visiret nach den Stäben in B und E, damit ihr den Winkel BAE darauf bekommet. VI. 105.
2. Messet die Linien AB und AE (§. 44.) und traget sie nach dem verjüngten Maaßstabe (§. 164.) auf das Tischlein aus a in b.
3. Gehet mit dem Tischlein in B und setzet den Punct b in B, visiret wieder zurücke in A, ingleichen von dem neuen Puncte B in C, damit ihr den Winkel CBA auf das Tischlein bekommet.
4. Messet die Linie BC (§. 44.) und traget sie auf das Tischlein aus b in c (§. 164.).
5. Wenn ihr die ganze Figur dergestalt umgehet; so werdet ihr sie in Grund geleget haben.

Beweis.

Denn alle eure Winkel in der kleinen Figur sind den Winkeln in der grossen gleich; und die Linien verhalten sich in der kleinen Figur eben so wie in der grossen: derowegen ist die kleine Figur der grossen ähnlich (§. 147.). W. Z. E.

Anders.

Messet alle Seiten der Figur (§. 44) und drey Winkel weniger als Seiten sind (§. 43.); so könnet ihr die Figur in Grund legen (§. 112.).

Die 62. Aufgabe.

176. **Ein jedes Feld, oder einen jeden andern Platz auszurechnen.**

Auflösung.

1. Leget es zuerst in Grund nach den vorhergehenden Aufgaben. Darnach

2. rechnet die Figur aus, nach der 35 Aufgabe (§. 123.).

Die 15. Erklärung.

VI. 177. Wenn ein halber Circul X sich um sei-
110. nen Diameter AB herum beweget, beschreibet er eine Kugel.

Zusatz.

178. Also sind alle Puncte in der Kugelfläche von dem Mittelpuncte gleich weit entfernet (§. 13.).

Die 16. Erklärung.

VI. 179. Wenn eine geradelinichte Figur ABC
111. sich an einer geraden Linie AD dergestalt herunter beweget, daß sie sich immer parallel bleibet, das ist, durch die Bewegung einer jeden Seite derselben ein Parallelogrammum erzeuget wird:
VI. so beschreibet sie ein PRISMA. Beweget sich
112. aber ein Circul X an einer geraden Linie FG, und also mit einerley Richtung parallel her-
VI. unter, oder ein Rectangulum ABCD und ein
113. Quadrat um seine Höhe BC; so wird ein Cylinder, oder eine Walze beschrieben.

Der 1. Zusatz.

180. Ein jedes Prisma hat zwey gleiche Grundflächen, und ist um und um von so vielen Vierecken eingeschlossen, als die Grundfläche Seiten hat.

Der 2. Zusatz.

181. In dem Prismate und Cylinder sind alle Durchschnitte, die mit ihren Grundflächen parallel geschehen, einander gleich.

Die 17. Erklärung.

VII. 182. Wenn sich ein Rectangulum ABCD an
114. einer

einer Linie AE auf gleiche Art und rechtwinkelicht herunter beweget, bekommt man ein PARALLELEPIPEDVM. Ein Quadrat O, welches sich gleichergestalt an einer geraden Linie HI, die seiner Seite HL gleich ist, herunter beweget, zeuget einen CUBUM oder VII.
Würfel. 115.

Der 1. Zusatz.

183. Das Parallelepipedum ist in 6 Rectangula eingeschlossen, deren zwey einander überstehende gleich sind. Und alle Durchschnitte, die mit der Grundfläche parallel geschehen, sind einander gleich.

Der 2. Zusatz.

184. Ein Würfel ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen.

Die 18. Erklärung.

185. Wenn sich ein rechtwinkelichter Tri- VII.
angel ABC um seine Seite AB herum beweget, 116.
beschreibet er einen CONUM oder Kegel.

Zusatz.

186. Alle Durchschnitte, die im Kegel mit der Grundfläche DCB parallel geschehen, sind Circul, aber immer kleinere, je näher sie der Spitze A kommen.

Die 19. Erklärung.

187. Wenn eine Linie AD sich in einem fe- VII.
sten Puncte verschieben lässet, und um die ganze 117.
Peripherie einer geradelinichten Figur ABC
mit dem andern Ende A beweget; entstehet
eine Pyramide. Ist die Figur ABC ein Circul, VII.
so bekommet man einen Kegel. 116.

Zusatz.

188. Eine Pyramide hat zur Grundfläche eine geradlinichte Figur, und ist um und um in so viel Triangel, als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen, welche oben in einem Puncte D mit ihren Spitzen zusammenstossen.

Die 20. Erklärung.

189. Wenn ein Körper in lauter gleiche reguläre Figuren von einerley Art eingeschlossen ist, daß daher alle Winkel desselben gleich sind, nennet man ihn regulär, oder ordentlich; die übrigen werden irreguläre oder unordentliche genennet.

Die 21. Erklärung.

VII. 190. Ausser dem Würfel (§. 182.) sind noch
118. vier andere reguläre Körper, als das TETRAEDRUM, welches aus vier gleichseitigen Triangeln zusammengesetzet wird: das
119. OCTAEDRUM, so aus achten zusammen
120. gesetzet: das ICOSAEDRUM, welches
121. zwanzig einschliessen: und das DODECAEDRUM, welches von zwölf regulären Fünf-Ecken eingeschlossen wird.

Die 63. Aufgabe.

191. Den körperlichen Inhalt eines Cubi, oder Würfels, und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

Der Maaßstab des körperlichen Inhalts ist eine Cubicruthe, das ist, ein Würfel, der eine Ruthe dick, und eine Ruthe breit ist. Diese wird eingetheilet in Cubic-Schuhe, in Cubic-Zolle 2c. Jenes sind

Würfel, die zur Seite einen Schuh; diese aber Würfel, die zur Seite einen Zoll haben.

Wenn ihr nun den körperlichen Inhalt eines Würfels wissen wollet; so

1. Messet die Seite des Würfels und multipliciret sie mit sich selbst, so habet ihr seine Grundfläche (§. 114. 184.).
2. Diese multipliciret weiter durch seine Seite; so kommet der Inhalt des Würfels heraus.
3. Hingegen wenn ihr die Grundfläche mit 6 multipliciret; so bekommet ihr die Fläche des ganzen Würfels (§. 184.).

Exempel.

Seite	34′	Grundfläche	1156′
	34	Seite	34
	136		4624
	102		3468
Grundfläche	1156′	Inhalt des Würfels	39304′
	6		
Fläche des Würfels	6936′		

Beweis.

Man bilde sich ein, es sey die Seite des Würfels in etliche gleiche Theile eingetheilet. So ist klar, daß so viel Schichten kleiner Würfel herauskommen, als die Höhe Theile hat, und in jeder Schichte so viel kleine Würfel als Quadrate in der Grundfläche sind. Derowegen, wenn man die Höhe durch die Grundfläche multipliciret; so kommet

VII. 122.

die Zahl der kleinen Würfel heraus, die der grosse in sich hält. W. Z. E.

Zusatz.

192. Wenn die Seite des Würfels 10 ist; so ist der körperliche Inhalt 1000. Derowegen, wenn die Seite eine Ruthe, oder 10 Schuhe hält; so sind 1000 schuhige Würfel in dem grossen enthalten. Und demnach hat die Cubicruthe 1000 Cubicschuhe, der Cubicschuh 1000 Cubiczolle, der Cubiczoll 1000 Cubiclinien.

Der 27. Lehrsatz.

193. Alle Parallelepipeda, Prismata und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

Beweis.

Wenn man ein Parallelepipedum, Prisma und einen Cylinder in lauter Scheiben zerschneidet, so subtil, als man will; so sind nicht allein alle Scheiben einander gleich (§. 181. 183.); sondern wenn zwey Körper auch gleiche Höhe haben, so können aus einem nicht mehr als aus dem andern geschnitten werden. Und also fasset ein Körper so viel Raum in sich, als der andere. W. Z. E.

Die 64. Aufgabe.

VII. 194. Den Inhalt eines Parallelepipedi und
123. seine Fläche zu finden.

Auflösung.

1. Multipliciret die Länge AB durch die Breite BC, so habet ihr die Grundfläche ABCD (§. 117. 183.).

2. Diese

2. Diese multipliciret ferner durch die Höhe BF; so kommet der verlangte Inhalt heraus.

Z. E. Es sey AB 36′ BC 15′ BF 12′

Länge AB	36	Grundfl. ABCD	540
Breite BC	15	Höhe BF	12
	180		1080
	36		540
Grundfl. ABCD	540′	Cörperl. Inhalt	6480′.

Für die Fläche.

1. Multipliciret AB in BC, ingleichen AB in BF, und BF in BC; so habet ihr die Vierecke BD, EB und BG (§. 117. 183.).
2. Addiret die drey Vierecke zusammen und multipliciret die Summe durch 2; so bekommet ihr die Fläche des Parallelepipedi heraus (§. 117. 138).

Z. E.

AB 36′	AB 36′	BC 15′
BC 15	BF 12	BF 12
180	72	30
36	36	15
□ DB 540′	□ BG 432′	□ BE 180′

□ DB 540′
□ BG 432
□ BE 180

1152′
2

2304′ Fläche des Parallelepipedi.

Beweis.

Der Beweis ist eben wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 191.).

Der 28. Lehrsatz.

VII. 12. 195. Ein jedes Parallelepipedum wird durch die Diagonalfläche DFBH in zwey gleiche Prismata getheilet.

Beweis.

Die Diagonallinie DB theilet das Parallelogrammum ABCD in zwey gleiche Triangel (§. 102.). Da nun die beiden Prismata ADBFGH und DBCEFH ausser diesen gleichen Grundflächen auch einerley Höhe DH haben; müssen sie einander gleich seyn (§. 193.). W. Z. E.

Die 65. Aufgabe.

VII. 124. 196. Den Inhalt eines jeden Prismatis und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Prismatis (§. 117. 121. 122. 123. 124.).
2. Multipliciret selbige durch die Höhe; so kommet der verlangte Inhalt heraus.
3. Hingegen multipliciret den Umfang der ganzen Grundfläche durch dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ausser den beiden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr nun diese dazu addiret; so habet ihr die ganze Fläche (§. 180.).

Z. E. Es sey AB 8' CD 6' AE 15'

AB	8	ABC	24
½CD	3	AE	15
ABC	24'		120
			24

Inhalt des Prismatis 360'

BC	91″
BA	80
AC	62
Peripherie	233″
AE	150
	11650
	233
Seitenfläche	34950
BAC	2400
HEI	2400
Ganze Fläche	39750″.

Beweis.

Das dreyeckigte Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedi, welches mit ihm einerley Höhe, aber eine doppelte Grundfläche hat (§. 95.). Wenn man die ganze Grundfläche des Parallelepipedi mit der Höhe multipliciret: so bekommet man seinen Inhalt (§. 194.). Derowegen, wenn man die Hälfte von der Grundfläche des Parallelepipedi, das ist, die Grundfläche des dreyeckichten Prismatis, durch die Höhe multipliciret, so muß die Hälfte des Parallelepipedi, das ist, der Inhalt des Prismatis herauskommen. Alle übrigen Prismata lassen sich in dreyeckichte zertheilen, und also gilt auch von ihnen, was von den dreyeckichten erwiesen worden.

Die 66. Aufgabe.

197. Aus der gegebenen Höhe eines Cylinders, und dem Diametro desselben, seinen Inhalt und seine Fläche zu finden.

Auflösung.

1. Suchet die Grundfläche des Cylinders (§. 134).
2. Multipliciret selbige durch seine Höhe; so habet ihr den verlangten Inhalt.
3. Hingegen die Peripherie multipliciret durch eben dieselbe Höhe; so kommet die Fläche ohne die beiden Grundflächen heraus.
4. Wenn ihr nun die beiden Grundflächen dazu addiret; so ist die Summe die verlangte Fläche des Cylinders.

VI. Z. E. Es sey der Diameter 2 AB 560″, die Höhe
113. BC 892″; so ist

die Grundfläche	246176″	Periph.	17584‴
die Höhe BC	892″	BC	8920
	492352		351680
	2215584		158256
	1969408		140672
Inhalt	219588992″		156849280‴
des Cylinders			24617600
			24617600
	Fläche		206084480‴

Be=

Beweis.

Weil der Circul ein regulaires Vieleck ist, so unzählig viel Seiten hat, so kan man den Cylinder als ein Prisma ansehen, welches unzählig viel Seiten hat. Und dannenhero wird sein Inhalt gefunden, wenn seine Grundfläche durch die Höhe; die Fläche aber, wenn die Peripherie der Grundfläche in eben diese Höhe multipliciret wird (§. 196.). W. Z. E.

Lehrsatz.

§. * **Wenn eine Pyramide ABCD dergestalt durchschnitten wird, daß der Durchschnitt abc der Grundfläche ABC parallel ist; so ist auch die Figur abc der andern ABC ähnlich.**

Beweis.

Weil ab mit AB parallel; so ist Da : DA = ab : AB (§. 149. Geom. et §. 83. Arithm.). Eben deswegen ist Da : DA = ac : AC, folgends ab : AB = ac : AC (§. 57. Arithm.), und daher ab : ac = AB : DC (§. 83. Arithm.). Da man nun auf gleiche Weise erweiset, daß ac : bc = AC : BC, so sind die △△ abc und ABC ähnlich (§. 148.), folgends in andern Fällen die Figuren, die aus ihnen zusammengesetzet werden (§. 33.). W. Z. E. IX. 1.

Der 29. Lehrsatz.

198. **Pyramiden und Kegel, die gleiche**

Grund-

Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

Beweis.

IX. 2. Es sey ABC eine Seiten-Fläche von einer Pyramide, und DEF von einer andern, BC und EF in einer Linie BF, BC = EF, die Spitzen A und D mit BF in einer Fläche, und AM auf BC, DO auf EF perpendicular; so ist AM = DO. Nun ziehe man GK mit BF und AD parallel, so ist auch AL = DN (§. 22.) und AG : AB = GH : BC = AL : AM (§. 149. Geom. §. 57. Arithm.). Eben so wird erwiesen, daß DN : DO = IK : EF. Da nun GH : BC = IK : EF (§. 57. Arithm.), das ist GH : IK = BC : EF (§. 83. Arithm.), und BC = EF; so ist GH = IK (§. 53. Arithm.). Weil eben dergleichen in allen übrigen Flächen, welche die Pyramide einschliessen, erwiesen werden kan, und wegen der Aehnlichkeit der Durchschnitte mit ihren Grundflächen (§. *), die gleichnamigen Winkel einander gleich sind (§. 147.): so müssen die Durchschnitte in beiden Pyramiden von gleicher Grösse seyn, wenn sie in gleicher Höhe geschehen (§. 31.). Da aber die ganzen Höhen der Pyramiden von gleicher Grösse sind, kan man in einer nicht mehr Durchschnitte haben als in der andern. Und demnach sind die Pyramiden einander gleich: welches das erste war.

Weil man die Triangel ABC und DEF für die Durchschnitte zweyer Kegel annimmt, dadurch

durch sie von der Spitze bis durch die Grundfläche in zwey gleiche Theile getheilet werden: so sind GH und IK die Diametri der Circul, welche aus den mit den Grundflächen parallel geschehenen Durchschnitten entstehen (§. 186.), und also ist abermal klar, daß diese Circul und folgends die ganzen Kegel einander gleich seyn müssen: **welches das andere war.**

Der 30. Lehrsatz.

199. **Eine jede Pyramide ist der dritte Theil von einem** Prismate, **so mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.**

Beweis.

Die Pyramiden ADEF und ACBE haben einerley Höhe BE und gleiche Grundflächen DEF und ABC (§. 180.), derowegen sind sie einander gleich (§. 198.). Wiederum die Pyramiden AC, BE und CEFA haben gleiche Grundflächen BCE und CEF (§. 102.), und einerley Höhe, indem sie beide in A zusammenstossen. Derowegen sind sie auch einander gleich (§. 198). Folgends sind sie alle drey einander gleich (§. 22. Arithm.). W. Z. E. IX. 3.

Zusatz.

200. Da nun ein Kegel für eine Pyramide zu halten ist, welche unzählig viel Ecken hat; so wird auch derselbe der dritte Theil eines Cylinders

ders seyn, so gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

Die 67. Aufgabe.

201. Den Inhalt einer Pyramide, ingleichen eines Kegels zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Inhalt eines Prismatis und Cylinders, so gleiche Grundflächen und Höhen mit der Pyramide und dem Kegel haben (§. 196. 197.).
2. Diesen dividiret durch 3; so kommet der Inhalt der Pyramide und des Kegels heraus (§. 199. 200.).

Oder:

Multipliciret die Grundfläche beiderseits mit dem dritten Theil der Höhe.

Z. E. Der Inhalt des Prismatis ist (§. 196.) 360'. Also ist der Inhalt der Pyramide 120'. Der Inhalt des Cylinders ist (§. 197.) 219° 588' 992''. Also kommen für den Kegel 73196330$\frac{2}{3}$''.

Die 68. Aufgabe.

VII. **202. Den Inhalt eines abgekürzten Kegels**
125. **ABCD zu finden.**

Auf-

Auflösung.

1. Wenn man inferiret: wie der Unterschied AH der halben Diametrorum AG und CF zu der Höhe des abgekürzten Kegels CH, so der halbe grosse Diameter AG zu der Höhe des ganzen Kegels EG (§. 149.); so kan man durch die Regel Detri die Höhe des ganzen Kegels EG finden (§. 85. Arithm.)

2. Aus dieser und dem Diametro AB suchet den Inhalt des ganzen Kegels AEB (§. 201.).

3. Ziehet die Höhe des abgekürzten Kegels FG von der Höhe des ganzen EG ab, so bleibet die Höhe des abgeschnittenen Kegels EF übrig.

4. Suchet aus dieser und dem Diametro CD den Inhalt des Kegels ECD (§. 201.).

5. Endlich ziehet den kleinen Kegel ECD ab; so bleibet der Inhalt des abgekürzten ACDB übrig.

Z. E. Es sey AB 36', CD 20', FG = CH 12'; so ist AG 18', CF 10' und AH 88'; demnach

$$\begin{array}{lcccc} & AH & : CH & = AG & : GE \\ & 8 & : 12 & = 18 & : \\ 4) & 2 & 3 & 9 & (\S.\ 96.\ \text{Arithm.}) \\ 2) & 1 & & 3 & \\ \hline & & & 27' & = GE \\ & & & 12 & = GF \\ \hline & & & 15 & = FE. \end{array}$$

100 : 314 = 18
18

2512
314

56'5'2'' $= \frac{1}{2}$ p.
1 800 AG

45216
5652

1017,36'' grosse Grundfläche.
9 $\frac{1}{3}$ GE 9'' $= \frac{1}{3}$

9°156'240'' der Kegel AEB
100 : 314 = 10 :
10

314'' halbe kleine Peripherie
100 CF

31400'' kleine Grundfläche
50$\frac{1}{3}$ EF

1570000'' Inhalt des Kegels CED
9.1.56240 Inhalt des Kegels AEB

7 5 86240'' Inhalt des abgekürzten Kegels ACDB.

Der 31. Lehrsatz.

203. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

Be-

Beweis.

Es sey ABCD der perpendiculaire Durchschnitt eines Cylinders, dessen Diameter AD. Es sey EFG der Durchschnitt einer halben Kugel, deren Diameter EG = AD. Die Höhe des Cylinders AB sey dem Radio der Kugel FH gleich, und AD sowol als EG befinden sich in einer geraden Linie AG. In dem Cylinder sey ein Kegel dergestalt ausgehöhlt, daß dessen Grundfläche so groß sey, als die obere Grundfläche des Cylinders, die Spitze desselben aber befinde sich in dem Mittelpunct der untern Grundfläche L. Und BLC sey der Durchschnitt dieses Kegels. IX. 4.

Man setze, daß sowohl der Cylinder als die Kugel und der Kegel, durch die mit AG parallele Fläche RK durchschnitten werde: so ist der Radius dieser Fläche im Cylinder MS, im Kegel MO, und in der Kugel IK, wenn man nemlich aus den Mittelpuncten L und H die Perpendicularlinien LT und HF aufrichtet, welche die Fläche RK in M und I durchschneiden. Man ziehe ferner von H bis K die gerade Linie HK; so ist HIK ein rechtwinklichter Triangel, und wenn man das Quadrat von IH von dem Quadrate von HK wegnimmt, so bleibt das Quadrat von IK übrig (§. 144.). Und weil sich die Circulflächen gegen einander verhalten, wie die Quadrate derer Diametrorum (§. 131.); so wird der mit IK beschriebene Circul übrig bleiben, wenn man von dem mit HK beschriebenen

Circul den abziehet, der mit IH beschrieben wird. Nun ist aber HK der Radius der Kugel (§. 13.), der dem Radio des Cylinders AL = MS gleich ist. Und weil IH = ML (§. 22.) und ML = MO (§. 149.); so ist IH = MO (§. 57. Arithm.), das ist, es ist der Radius des Ausschnittes vom Kegel. IK aber ist der Radius der Kugel. Folglich bleibt der Durchschnitt der Kugel übrig, wenn man von dem Durchschnitt des Cylinders, den Durchschnitt des Kegels abziehet. Da nun der Kegel $\frac{1}{3}$ vom Cylinder ist (§. 200.), so muß der Durchschnitt der halben Kugel EFG $\frac{2}{3}$ von dem Durchschnitt des Cylinders ABCD seyn. Da nun dieses von allen Durchschnitten gilt, so muß der Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Cylinders seyn. W. Z. E.

Der 32. Lehrsatz.

204. **Der** Cubus Diametri **verhält sich zu der Kugel beynahe wie 300 zu 157.**

Beweis.

Wenn der Diameter der Kugel 100 ist; so hält der Cubus desselben 1000000 (§. 191.) und der Cylinder, der mit der Kugel Eine Grundfläche und Höhe hat, 785000 (§. 197.). Und demnach ist der Inhalt der Kugel 523333$\frac{1}{3}$ (§. 203.). Solchergestalt verhält sich der Cubus zur Kugel, wie 1000000 zu 523333$\frac{1}{3}$, das ist, wenn man beiderseits mit 3 multipliciret, wie 3000000 zu 1570000 (§. 58. Arithm.), oder

wenn

wenn man ferner durch 10000 dividiret, wie 300 zu 157 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Anmerkung.

205. Ich sage, der Cubus Diametri verhalte sich zur Kugel beynahe wie 300 zu 157, weil man voraus setzet, der Diameter im Circul verhalte sich zu seiner Peripherie wie 100 zu 314; welches nur beynahe zutrifft (§. 129.).

Lehrsatz.

§. Die Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der ganzen Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet.**

Beweis.

Man stelle sich vor, als wenn die Fläche der Kugel in so kleine Vierecke zertheilet sey, daß jedes von ihnen von einer ebenen Fläche nicht mehr merklich unterschieden. Man setze hinzu, daß aus dem Mittelpunct der Kugel an ihre Ecken gerade Linien gezogen seyn. Alsdenn ist klar, daß die Kugel aus unzählig viel viereckten Pyramiden bestehe, die im Mittelpuncte der Kugel mit ihren Spitzen zusammenstossen, und deren Grundflächen zusammen der Kugelfläche gleich sind, die Höhen aber von dem halben Diameter der Kugel nicht merklich unterschieden. Derowegen wird die ganze Kugel mit Recht für eine Pyramide gehalten, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber der Hälfte ihres Diametri gleichet. W. Z. E.

Der 33. Lehrsatz.

206. Die Kugelfläche verhält sich zu dem grösten Circul der Kugel wie 4 zu 1.

Beweis.

Weil der Inhalt der Kugel dem Inhalt einer Pyramide gleich ist, deren Grundfläche der Kugelfläche, die Höhe aber ihrem halben Diameter gleichet (§. **); so kömmt die Kugelfläche heraus, wenn man den körperlichen Inhalt der Kugel durch den dritten Theil des halben Diametri, oder den sechsten des Ganzen dividiret (§ 201.). Nun wenn der Diameter 100 ist, so ist der Inhalt des grösten Circuls 7850 (§ 134.), der Inhalt aber der Kugel $\frac{1570000}{3}$ (§. 204.). Derowegen, wenn ihr diesen durch den sechsten Theil des Diametri $\frac{100}{6}$ dividiret, so kommt für die Kugelfläche 31400 (§. 71. Arithm.). Demnach verhält sich die Kugelfläche zu dem grösten Circul der Kugel, wie 31400 zu 7850, das ist, wenn man beiderseits mit 7850 dividiret, wie 4 zu 1 (§. 59. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

207. Also kommet die Kugelfläche heraus, wenn man die Peripherie durch den Diametrum multipliciret (§. 134.).

Die 69. Aufgabe.

208. Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel sowohl den Inhalt ihrer Fläche, als ihren körperlichen Inhalt zu finden.

Auf=

Auflösung.

1. Suchet die Peripherie des grösten Circuls (§. 132.).
2. Multipliciret sie durch den gegebenen Diametrum; so habet ihr die Kugelfläche (§. 207.).
3. So ihr nun ferner dieselbe durch den sechsten Theil des Diametri multipliciret, oder durch den ganzen Diametrum, und das Product durch 6 dividiret; kommet der körperliche Inhalt der Kugel heraus.

Z. E. Es sey der Diameter 5600‴; so ist die Peripherie des grösten Circuls 17584‴.

	17584‴
Diameter	5600
	10550400
	87920
Kugelfläche	984704″
Diameter	560
	59082240
	4923520
	551434240″

~~28~~ 4
~~88.143424Ø~~ } 91905706 $\frac{2}{3}$″ Inhalt der Kugel.
~~666666666~~

Die 70. Aufgabe.

209. Aus dem gegebenen Diametro einer Kugel ihren körperlichen Inhalt noch auf eine andere Art zu finden.

Auflösung.

1. Suchet den Cubum des Diametri (§. 191.), oder in den Tabellen über die Cubiczahlen.

2. Suchet zu 300, 157 und dem gefundenen Cubo die vierte Proportionalzahl (§. 85. Arithm.), diese ist der körperliche Inhalt der Kugel (§. 204.).

Z. E. Es sey der Diameter einer Kugel 64″; so ist dessen Cubus 262144, folgends

$$
\begin{array}{r}
300 — 157 — 262144'' \\
157 \\
\hline
1835008 \\
1310720 \\
262144 \\
\hline
41156608
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
22\ 222 \\
41156608 \\
33333300
\end{array}\right\} 137188''\tfrac{208}{300}
$$ Inhalt der Kugel.

Der 34. Lehrsatz.

210. Alle Prismata, ingleichen Parallelepipeda, Cylinder, Pyramiden und Kegel, wenn sie gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen: haben sie aber gleiche Grundflächen; so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

Beweis.

Prismata, Parallelepipeda und Cylinder verhalten sich, wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen (§. 194. 196. 197.): Pyramiden aber und Kegel, wie die Producte aus

dem

dem dritten Theile ihrer Höhen in ihre Grundflächen (§. 201): und also alle insgesamt, wenn ihre Höhen gleich sind, wie die Grundflächen, wenn aber die Grundflächen gleich sind, wie die Höhen (§. 58. Arithm.). W. Z. E.

Zusatz.

211. Weil die Cylinder Circul zu ihren Grundflächen haben (§. 179.), die Circul aber sich wie die Quadrate ihrer Diametrorum verhalten (§. 131); so müssen auch die Cylinder von gleicher Höhe sich wie die Quadrate ihrer Diametrorum, oder der Diametrorum ihrer Grundflächen verhalten.

Der 35. Lehrsatz.

212. Die Kugeln verhalten sich gegen einander wie die Cubi ihrer Diametrorum.

Beweis.

Wie die eine Kugel zu dem Cubo ihres Diametri, so verhält sich auch die andere zu dem Cubo ihres Diametri (§. 204). Derowegen verhält sich auch die eine Kugel zu der andern, wie der Cubus des Diametri der einen zu dem Cubo des Diametri der andern (§. 83. Arithm.). W. Z. E.

Die 71. Aufgabe.

213 Einen Visirstab zu verfertigen, durch den man leicht finden kan, wie viel Kannen von einer flüßigen Materie, als Bier, Wein, Brandtewein u. s. w. in einem cylindrischen Gefässe enthalten sind, oder Raum haben.

Auflösung.

VII. 1. Nehmet den Diameter von einem cylindrischen
126. Gefässe, dergleichen man zu einem Kannenmaasse brauchet, und traget ihn aus A in B.

2. Richtet in A eine lange Perpendicularlinie auf, und traget aus A in 1 den Diameter des Kannengefässes; so ist die Linie B 1 der Diameter von einem zweykannigen Gefässe, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

3. Traget B 1 aus A in 2, so ist B 2 der Diameter eines dreykannigen Gefässes, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat.

4. Wenn ihr nun auf gleiche Art die Puncte 3. 4. 5. 6. u. s. w. gefunden; so traget dieselben auf die eine Seite des Visirstabes, auf die andere aber die Höhe der Kanne so vielmal, als angehet. So ist geschehen, was man verlanget.

Beweis.

Denn wenn zwey cylindrische Gefässe einerley Höhe, und zwar die Höhe einer Kanne haben, verhalten sie sich, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 211.). Daher ist das Quadrat des Diametri eines zweykannigen Gefässes zwey; eines dreykannigen drey; eines vierkannigen viermal so groß, als eines einkannigen u. s. w. Nun ist das Quadrat B 1 oder A 2 zweymal, das Quadrat B 2 oder A 3 dreymal, das Quadrat B 3 oder A 4 viermal so groß, als

das

das Quadrat AB oder A 1 (§. 144.) u. s. w. Da nun AB oder A 1 der Diameter eines einkannigen Gefässes ist, so ist A 2 der Diameter eines zweykannigen, A 3 der Diameter eines dreykannigen, A 4 der Diameter eines vierkannigen u. s. w. Derowegen, wenn ihr mit der Seite des Maaßstabes, da diese Eintheilungen aufgezeichnet sind, den Diameter eines cylindrischen Gefässes ausmesset; so wisset ihr, wie viel Kannen auf dem Boden stehen können. Messet ihr nun ferner mit der andern Seite des Visirstabes die Länge desselben; so wisset ihr, wie viel Kannen über einander stehen können. Derowegen, wenn ihr den Diameter durch die Höhe multipliciret; so kommet die Anzahl der Kannen heraus, die das ganze Gefässe fassen kan. Und solchergestalt könnet ihr durch den verfertigten Visirstab den Inhalt eines cylindrischen Gefässes nach Kannenmaasse finden. W. Z. E.

Anmerkung.

214. Es sey z. E. der Diameter eines cylindrischen Gefässes 8, die Höhe 12; so haben 96 Kannen darinnen Raum.

Die 72. Aufgabe.

215. **Ein gegebenes Faß zu visiren, das ist, zu finden, wie viel Kannen in demselben Raum haben.**

Auflösung.

1. Messet mit der gehörigen Seite des Visirstabes den Diameter des Bodens AB, ingleichen den Diameter des Bauches durch das Spundloch VII. 127.

CD: dabey mit der andern Seite des Visirstabes die Länge des Fasses EF.

2. Weil das Faß mitten bey dem Spundloche einen Bauch hat, gegen den Boden aber beiderseits niedergedruckt ist; so nimmt man an, (weil es vermöge der Erfahrung zutrifft, ob es sich gleich nicht geometrisch erweisen lässet,) daß das Faß einem Cylinder gleich sey, dessen Grundfläche der mittlere arithmetische Proportionalcircul zwischen dem kleinen Circul des Bodens und dem grossen des Bauches ist. Addiret demnach den grossen Diameter CD und den kleinen AB.

3. Die halbe Summe multiplicieret durch die Länge des Fasses FE; so kommet vermöge des Beweises der vorhergehenden Aufgabe (§. 213) die Zahl der Kannen heraus, welche in dem Fasse Raum haben.

Z. E. Es sey AB = 8
CD = 12

so ist die Summe = 20

die halbe Summe = 10
FE = 15

Inhalt des Fasses = 150 Kannen.

Anmerkung.

216. Es ist zu merken, daß man noch keine leichte und richtige Manier ersonnen, Fässer, die nicht voll sind, zu visiren, wenn sie nach der Länge liegen. Will man sie aber auf den Boden setzen, und hernach die Höhe des Weines anstatt der Länge des Fasses annehmen; so kan man nach gegenwärtiger Aufgabe finden, wie viel Kannen darinnen enthalten sind.

Die

Die 73. Aufgabe.

217. Eines jeden irregulären Körpers Inhalt zu finden. VII. 128.

Auflösung.

1. Leget den Körper in ein ausgehöhltes Parallelepipedum und übergiesset ihn mit Wasser, oder überschüttet ihn mit Sande. Merket dabey die Höhe des Wassers, oder des wohlgeebneten Sandes AB.
2. Nehmet den Körper heraus, und merket abermal die Höhe des Wassers oder des Sandes, nachdem er wieder geebnet worden, AC; so wisset ihr BC.
3. Weil nun der Inhalt des Körpers dem Parallelepipedo DFCGE gleich ist; so messet desselben Länge FC und Breite CG, und suchet den Inhalt desselben (§. 194.).

Z. E. Es sey AB 8′, AC 5′; so ist BC 3′. Es sey ferner FC 12′, CG 4′; so wird endlich der Inhalt des Körpers 144′ gefunden.

Anmerkung.

218. Wenn man den Körper in dergleichen Gefässe nicht wohl legen kan, als wenn man zum Exempel eine feststehende Statue ausmessen solte; so darf man nur entweder ein Parallelepipedum, oder ein viereckigtes Prisma um denselben aufrichten, den leeren Raum mit Sand ausfüllen, und im übrigen wie vorhin verfahren.

Die 74. Aufgabe.

219. Netze zu zeichnen, daraus man die geometrischen Körper zusammenlegen kan.

Auflösung.

1. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ABC (§. 53.), theilet die Seiten in zwey gleiche Theile VIII. 129.

in

in D, E und F, und ziehet die Linien DE, EF und FD; so ist das Netz des Tetraëdri fertig (§. 190.).

VIII. 2. Wenn man die Seite AC in G, BC in H und
130. ED in L verlängert, bis CG = DC, CH = FC, DI = IL = ED; so lassen sich die Linien GL, CI und IH ziehen und ist das Netz des Octaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 3. Traget auf die Linie AB die Seite eines Würfels
131. AI viermal, so daß AI = IL = LN = NB, und construiret das Rectangulum ACDB dergestalt, daß AC = AI (§. 99.). Ziehet die Linien IK, LM, NO mit AC parallel (§. 67.), und verlängert IK und LM beiderseits in E und F, G und H, bis EI = IK = KF und GL = LM = MH: so giebet sich das Netz des Hexaëdri oder des Würfels (§. 182.).

VIII. 4. Beschreibet ein reguläres Fünfeck ABCDE
132. (§. 107.), leget das Lineal an D und B, und ziehet die Linie BL; leget es gleichfalls an D und A und ziehet die Linie AG; machet AG = AB = BL, und mit der Weite AB aus G und L einen Durchschnitt in Q; so giebet sich das Fünfeck ABLQG. Auf gleiche Art hänget die übrigen Fünfecke BNROC, CHGFD, DKSME, ETVIA, imgleichen die übrigen sechs a, b, c, d, e, f daran; so ist das Netz des Dodecaëdri fertig (§. 190.).

VIII. 5. Beschreibet einen gleichseitigen Triangel ACB
133. (§. 53.); verlängert die Linie AB in D, und traget sie noch viermal darauf, ziehet CE mit

AD parallel (§. 67.), und machet CI = IK = KL = LM = ME = AB; verlängert AC in N bis CN = AC; leget das Lineal an B und I, F und K, G und L, H und M, D und E, und ziehet die Linien YO, SP, TQ, VR, und XE; leget dasselbe ferner auf D und M, H und L, G und K, F und I, B und C, und ziehet die Linien DQ, XP, VO, TN, SC; endlich machet MR = ME und BY = BA, und ziehet die Linien RE und AY. Die beschriebene Figur ist das Netz des Icosaëdri (§. 190.)

6. Auf die Linie BD traget aus B in H die Breite, VIII.
aus H in I die Länge, aus I in K die Breite, 134.
und aus K in D die Länge eines Parallelepipedi; in B richtet seine Höhe BA perpendicular auf, und beschreibet das Rectangulum BACD (§. 99). Ziehet EH, FI, GK mit AB parallel (§. 67.) und verlängert EH beiderseits in L und N, ingleichen FI in M und O, bis LE, MF, IO und NH der Breite des Parallelepipedi BH gleich werden; so giebet sich das Netz des Parallelepipedi (§. 182).

7. Traget auf CF die Seiten der Grundfläche eines VIII.
Prismatis CG, GH und HF, beschreibet das 135.
Rectangulum CAEF, dessen Höhe CA der Höhe des Prismatis gleich ist (§. 99.). Auf BD und GH construiret mit AB und DE, CG und HF die △△ BKD und GIH (§. 55.); so ist das Netz des Prismatis fertig (§. 179.). Wenn die Grundfläche ein Fünf- Sechs- Siebeneck rc. ist; so wird auf BD und GH ein Fünf- Sechs- Siebeneck rc. beschrieben.

VIII. 8. Beschreibet aus A mit der Seite einer Pyramide
136. AE einen Bogen EB; traget darein die Linien des Umfanges von der Grundfläche ED, DC, CB und ziehet die Linien AE, AD, AC, AB. Endlich beschreibet auf DC die Grundfläche der Pyramide; so ist das Netz fertig (§. 187.).

VIII. 9. Für das Netz des Cylinders beschreibet ein Re-
137. ctangulum (§. 99.), dessen Höhe BC der Höhe des Cylinders, die Länge CF dem Umfange gleich ist (§. 132.): verlängert BC in A und D, bis BA und CD dem Diameter gleich werden, und beschreibet die Circul der Grundflächen des Cylinders. So ist geschehen, was man verlangte (§. 179.).

Anmerkung.

220. Damit man nun die Körper aus den Netzen zusammen leimen kan; so lässet man einige Ränder, indem man sie ausschneidet, wie durch die punctirten Linien Fig. 129. angedeutet worden. Diese Arbeit dienet den Anfängern, die geometrischen Körper deutlich zu begreifen.

Ende der Geometrie.