Sammlung Göschen

Mathematische

Formelsammlung

von

Prof. O. Th. Bürklen

Mit 18 Figuren

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite.

Sammlung Göschen

Formelsammlung

und

Repetitorium der Mathematik

enthaltend

die wichtigsten Formeln und Lehrsätze

der

Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung

von

O. Th. Bürklen
Professor am kgl. Realgymnasium in Schw. Gmünd

Mit 18 Figuren

2. Auflage
Vierter Abdruck

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1903

Litteratur.

Mahler, Ebene Geometrie, Sammlung Göschen.
Schubert, Arithmetik u. Algebra, Sammlung Göschen.
Schubert, Beispielsammlung zur Arithm. u. Algebra, Sammlung Göschen.
Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie.
Kommerell-Hauck, Lehrbuch der Stereometrie.
Holzmüller, Elementarmathematik.
Baltzer, Elemente der Mathematik.
Bürklen, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.
Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Sporer, Niedere Analysis, Sammlung Göschen.
Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis.
Hermes, Sammlung von Aufg. aus d. Alg. u. d. nied. Analysis.
Mansion, Elemente der Theorie der Determinanten.
Peterson, Theorie der algebraischen Gleichungen.
Ligowski, Taschenbuch der Mathematik.
Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.
Simon, Analytische Geometrie der Eb., Sammlung Göschen.
Hesse, Vorlesungen aus d. an. Geom. der geraden Lin. u. s. w. i. d. Eb.
Salmon, Analyt. Geom. d. Kegelschnitte, bearb. v. Fiedler.
Salmon. Analyt. Geom. der höheren ebenen Kurven, übers. v. Fiedler.
Salmon, Analyt. Geom. d. Raums, Deutsch von Fiedler.
Hesse, Analyt. Geometrie d. Raums.
Nievenglowski, Cours de Géom. Analytique 1894—96.
Fricke, Hauptsätze der Differential-Integralrechnung.
Schlömilch, Uebungsbuch z. Studium d. höh. Analysis.
Sturm, Cours d'Analyse.
Sohnke, Sammlung v. Aufg. aus d. Differential- u. Integralrechnung.
Stegemann-Kiepert, Grundr. d. Differential- u. Integralrechn.
Serret, Cours de Calcul diff. et intégral.
Jordan, Cours d'Analyse 1893—96.

Druck von Carl Rembold in Heilbronn.

Inhaltsverzeichnis.

Arithmetik,
Algebra und algebraische Analysis.

I. Abschnitt.

Arithmetik und Kombinatorik.

§ 1. Potenzierung und Zerlegung von Binomien.

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2$
   $+ 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.
3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
4. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.
5. Binomialtafel:

$$\begin{array}{cccccc}
1 \rightarrow & 1 & & & & \\
 & \downarrow & & & & \\
1 \rightarrow & 2 \rightarrow & 1 & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \\
1 \rightarrow & 3 \rightarrow & 3 \rightarrow & 1 & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

u. s. f.

(Binomischer Lehrsatz s. § 20.)

$$6.\ \begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - a\,b + b^2) \\ a^5 + b^5 = (a + b)\,(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a\,b^3 + b^4) \end{cases}$$

u. s. f.

$$7.\ \begin{cases} a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + a\,b + b^2) \\ a^5 - b^5 = (a - b)\,(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a\,b^3 + b^4) \end{cases}$$

u. s. f.

$$8.\ \begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b) \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2) = (a + b)\,(a - b)\,(a^2 + b^2) \\ \qquad = (a + b)\,(a^3 - a^2 b + a\,b^2 - b^3) \\ \qquad = (a - b)\,(a^3 + a^2 b + a\,b^2 + b^3) \end{cases}$$

u. s. f.

§ 2. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und

$$1.\qquad \begin{array}{l|l} a : c = b : d, & c : a = d : b, \\ b : a = d : c, & c : d = a : b, \\ b : d = a : c, & d : b = c : a, \\ & d : c = b : a, \text{ d. h.:} \end{array}$$

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äussern Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äusseren, und die äusseren zu inneren gemacht werden.

2. $\qquad a\,d = b\,c$, d. h.:

Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produkts werden die äusseren, die des andern die innern Glieder der Proportion.

3. $am : bm = c : d, \quad (a : m) : (b : m) = c : d,$

$am : b = cm : d, \quad (a : m) : b = (c : m) : d,$ d. h.:

In einer Proportion darf ein inneres und ein äusseres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

4. $a^n : b^n = c^n : d^n, \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$

5. Korrespondierende Addition:

$a : (a + b) = c : (c + d) \quad | \quad b : (a + b) = d : (c + d).$

Korrespondierende Subtraktion:

$a : (a - b) = c : (c - d) \quad | \quad b : (a - b) = d : (c - d).$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich zur Differenz derselben, wie die Summe des dritten und vierten Glieds zur Differenz derselben.

6. Wenn $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \ldots = w : 1$, dann ist $(a + b + c + \ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) = a : a_1 = \ldots = w : 1$, und $(am + bn + cp + \ldots) : (a_1 m + b_1 n + c_1 p + \ldots) = a : a_1 = \ldots w : 1.$

7. Wenn $a : b = c : d$

$a_1 : b_1 = c_1 : d_1$, dann ist

$$\begin{cases} (a\,a_1) : (b\,b_1) = (c\,c_1) : (d\,d_1) \text{ und} \\ (a : a_1) : (b : b_1) = (c : c_1) : (d : d_1). \end{cases}$$

8. Wenn $a : b = c : d$ und
$$\frac{a : b = c : x,\ \text{dann ist}}{x = d.}$$

9. Stetige Proportion: $a : x = x : b$.

10. Harmonische Proportion:
$$(a - b) : (c - d) = a : d;$$
stetige harmonische Proportion:
$$(a - x) : (x - b) = a : b.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:
$$x = \frac{a + b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b:
$$x = \sqrt{a\,b}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b:
$$x = \frac{2\,a\,b}{a + b},\ \text{also}\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Bei n Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ ist

a) $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, b) $x = \sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n}$,

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$

d) Cauchy's Satz:
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1\,a_2 \ldots a_n} > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

§ 3. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.
$$\begin{cases} a^3 = a \,.\, a \,.\, a \\ a^m = a \,.\, a \ldots\ldots a\ (\text{m Faktoren}), \end{cases}$$
a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 & \\ 1, & \text{wenn } a \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1. \\ \infty & \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, & (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, & (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, & (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $a^m \,.\, a^r = a^{m+r}$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \quad " \quad m = r \\ \dfrac{1}{a^{r-m}}, & \quad " \quad m < r \end{cases}$$

4. $(a\,b)^m = a^m\, b^m.$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}.$ 6. $(a^m)^r = a^{m\,r}.$

7. $\dfrac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots$
$\qquad + a\,b^{m-2} + b^{m-1}.$

8. $\left.\dfrac{a^m - b^m}{a - b}\right|_{a=b} = \dfrac{0}{0} = m\,a^{m-1}.$

II. Negative, ganze Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}.$

1. $\begin{cases} a^m \,.\, a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \,.\, a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \,.\, a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$

3. $(a\,b)^{-m} = a^{-m}\, b^{-m}.$

4 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

5. $\begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$

§ 4. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heisst a Radikand, n Wurzelexponent; $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

I. Wurzelformeln:

1. $\sqrt[n]{1} = 1$; $\sqrt[n]{0} = 0$; $\sqrt[2n+1]{1} = 1$; $\sqrt[2n+1]{-1} = -1$.

2. $\sqrt[1]{a} = a$; $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$; $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$;
$\sqrt[2n]{(-a)^{2n}} = -a$.

3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

4. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

5. $\sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r$.

6. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nx]{a^{rx}}$; $\sqrt[-n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-r}}$.

7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

II. Rationalmachen des Nenners:

1. $\frac{z}{\sqrt{a}} = \frac{z\sqrt{a}}{a}; \quad \frac{z}{\sqrt[n]{a}} = \frac{z\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

2. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{z(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$;

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}} = \frac{z\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a\,b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}.$$

3. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}$

$$= \frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\,(a+b-c-2\sqrt{a\,b})}{(a+b-c)^2-4\,a\,b};$$

besonderer Fall $a+b=c$.

4. $\frac{z}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a+\sqrt{b}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}\,(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

$$= \frac{z\sqrt{(a^2-b)\,(a-\sqrt{b})}}{a^2-b}.$$

III. Zerlegung einer Quadrat-Wurzel:

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-r}{2}}$, wobei $r=\sqrt{a^2-b}$.

IV. Beispiele für Quadrat- und Kubikwurzelausziehung:

1.
$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{12\,|\,53\,|\,16} = 354 \\
 & \underline{9} = a^2 \\
2a = 6 & |\,353 \\
 & \underline{325} = 2ab + b^2 \\
2(a+b) = 70 & |\,2816 \\
 & \underline{2816} = 2(a+b)c + c^2 \\
 & \cdots
\end{array}
$$

2.
$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{44\,|\,361\,|\,864} = 354 \\
 & 27 = a^3 \\
3a^2 = 27 & |\,17361 \\
 & |\,135 \quad = 3a^2b \\
 & \quad 225 \quad = 3ab^2 \\
 & \quad 125 = \quad b^3 \\
3(a+b)^2 = 3675 & |\,1486864 \\
 & |\,14700 \quad = 3(a+b)^2c \\
 & \quad 1680 \quad = 3(a+b)c^2 \\
 & \quad \underline{64} = c^3 \\
 & \cdots
\end{array}
$$

3.
$$
\begin{array}{l}
\sqrt{\left(25x^6 - 30x^5 + 79x^4 - 57x^3 + 58x^2 - 21x + \frac{9}{4}\right)} \\
\underline{\pm 25x^6} \qquad\qquad = 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{3}{2} \\
10x^3 \,|\, -30x^5 + 79x^4 \\
\qquad |\, \underline{\mp 30x^5 \pm \ \ 9x^4} \\
10x^3 - \ 6x^2 \,|\, + 70x^4 \\
\qquad\qquad |\, \underline{\pm 70x^4 \mp 42x^3 \pm 49x^2} \\
10x^3 - \ 6x^2 + 14x \,|\, -15x^3 + \ \ 9x^2 \\
\qquad\qquad\qquad |\, \underline{\mp 15x^3 \pm \ \ 9x^2 \mp 21x \pm \frac{9}{4}} \\
\qquad\qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

4. $\sqrt[3]{(125x^9-225x^8+660x^7-657x^6+924x^5-441x^4+343x^3)}$
$= 5x^3 - 3x^2 + 7x$

$\pm(125x^9$

$75x^6 \,|\, -225x^8$

$\mp 225x^8 \pm 135x^7 \mp 27x^6$

$75x^6-90x^5+27x^4 \,|\, +525x^7-630x^6$

$\pm 525x^7 \mp 630x^6 \pm 189x^5$

$\mp 735x^5 \mp 441x^4 \pm 343x^3$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

§ 5. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung: $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$; $a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}}$

$= \sqrt[-n]{a^r} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}.$

1. $1^{\frac{r}{n}} = 1;\ 0^{\frac{r}{n}} = 0.$
2. $a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n}+\frac{p}{q}}.$
3. $a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n}-\frac{p}{q}}.$
4. $(a\,b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}}\, b^{\frac{r}{n}}.$
5. $(a:b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}$
6. $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$

§ 6. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung: $\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
$a + b\,i$ (komplexe Zahl; Normalform).

1. $i = i \qquad i^{4n} = +1$
$i^2 = -1 \qquad i^{4n+1} = +i$
$i^3 = -i \qquad i^{4n+2} = -1$
$i^4 = +1 \qquad i^{4n+3} = -i.$

2. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2 \sqrt{a\,b} = -\sqrt{a\,b}$; $(\sqrt{-a})^2 = -a$;
$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b}.$

3. Konjugierte komplexe Zahlen: $a + bi$ und $a - bi$,
$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$
4. Wenn $a + bi = 0$, dann ist $a = 0$ und $b = 0$,
„ $a + bi = x + iy$, dann ist $a = x$, $b = y$.
5. Setzt man: $a = r\cos\varphi$ (φ Anomalie = Richtungswinkel),
$b = r\sin\varphi$ (r Modulus),
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann ist
$$a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) \text{ (Kanonische Form)},$$
allgemeiner:
$$a \pm bi = r\big(\cos(\varphi + 2k\pi) \pm i\sin(\varphi + 2k\pi)\big)$$
(k ganze Zahl)
6. $$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)(\cos\psi \pm i\sin\psi) = \cos(\varphi + \psi) \pm i\sin(\varphi + \psi).$$
7. Moivre's Formel:
$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(2k\pi + \varphi) \pm i\sin\frac{m}{n}(2k\pi + \varphi);$$
im einzelnen: $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$
$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}.$$

§ 7. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \overset{c}{\log}\, a$, daher
$$c^{\overset{c}{\log} a} = a;\ \overset{c}{\log}\,(c^n) = n;\ \overset{c}{\log}\,(c^{-n}) = -n$$
c heisst die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^n = n\log a$
4. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$
5. $\overset{c}{\log}\, c = 1$; $\overset{c}{\log}\, 1 = 0$; $\overset{c}{\log}\, 0 = \pm\infty$, je nachdem $c \lessgtr 1$;
$\overset{c}{\log}\,\infty = \mp\infty$, je nachdem $c \lessgtr 1$.

6. Die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Brigg'schen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit log nat, oder log n oder l bezeichnet werden, ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. § 21).

7. $$\overset{b}{\log}\, a = \frac{\overset{c}{\log}\, a}{\overset{c}{\log}\, b}; \quad \overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \,.\, \overset{c}{\log}\, b.$$

8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

a) $$l\,10 = \overset{e}{\log}\, 10 = \frac{\overset{10}{\log}\, 10}{\overset{10}{\log}\, e} = \frac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30259\ldots$$

b) $$l\,a = \overset{e}{\log}\, a = \frac{\overset{10}{\log}\, a}{\overset{10}{\log}\, e} = \overset{10}{\log}\, a \,.\, 2{,}30259\ldots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 21.

§ 8. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

a) $$\frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3 + \frac{5}{14}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

b) $\begin{array}{l} 14 \,|\, 47 \,|\, \underline{3} \\ \quad\;\; \underline{42} \\ \qquad 5 \,|\, 14 \,|\, \underline{2} \\ \qquad\quad\;\; \underline{10} \\ \qquad\qquad 4 \,|\, 5 \,|\, \underline{1} \\ \qquad\qquad\quad\; \underline{4} \\ \qquad\qquad\qquad 1 \,|\, 4 \,|\, \underline{4} \end{array}$ die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$\dfrac{1}{0+\dfrac{1}{0+k}}$, dessen erster Näherungswert $\dfrac{1}{0}$, dessen zweiter $\dfrac{0}{1}$ ist.

3. **Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch:**

Ist $\dfrac{A}{B}$ der wahre Wert und sind $\dfrac{A_1}{B_1}, \dfrac{A_2}{B_2}$ u. s. f. die einzelnen Näherungswerte des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3} + \ldots}}, \text{ so ist:}$$

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{a_{r+1} A_r + A_{r-1}}{a_{r+1} B_r + B_{r-1}};\quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1};\quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

u. s. f.

Schema:

		a_1	a_2	a_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a_1}$	$\frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$	$\frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}$

		3	2	1	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{47}$

4. $A_{r-1} \cdot B_r - A_r \cdot B_{r-1} = (-1)^r$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} \cdot B_r}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B_r \cdot B_{r+1}} < \frac{(-1)^r}{B_r^2}$$

5. Sätze:

a) Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert desselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. ...) grösser, die geraden (der 2., 4. ...) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.

b) Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.

c) Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br. und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.

d) Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.

e) Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 9. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Komplexionen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind in lexikographischer Anordnung:

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	b d c a	c d b a	d c b a

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . n$$
$$= n! \text{ („n Fakultät")}$$

3. Sind unter den n Elementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha,\, \beta,\, \gamma)}{P\ (n)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und n — r je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$\underset{(r,\, n-r)}{P\ (n)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$
$$= \binom{n}{r}, \text{ vergl. § 12.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Nichtfolge (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die **Variationen** aus n Elementen der rten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der 4 Elemente abcd sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
ab	ac	ad	aa	ab	ac	ad
ba	bc	bd	ba	bb	bc	bd
ca	cb	cd	ca	cb	cc	cd
da	db	dc	da	db	dc	dd

6. Die **Anzahl** der Variationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \binom{n}{r} . r! \text{ (s. § 12)}$$

$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n! \text{ (Permutationen).}$$

7. Die Anzahl der Variationen mit **Wiederholung** ist: $V'_r(n) = n^r$.

III. Kombinationen.

8. Die **Kombinationen** aus n Elementen zur rten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen, wobei aber blosse Umstellung der Glieder keine neue Kombination ergiebt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:

ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;
mit „ : aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die **Anzahl** der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 10. Determinanten.

1. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \ldots. a_n, b_1, b_2, \ldots. b_n, \ldots..$ versteht man die Summe $\Sigma\,(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

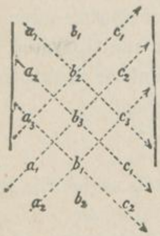
2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Werden irgend zwei Parallelreihen miteinander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Parallelreihen entsprechend gleich oder proportional, so ist der Wert der Determinante gleich null.

5. Regel von Sarrus: Um eine dreigliedrige Determinante zu entwickeln setzt man die beiden ersten Horizontalreihen der Reihe nach unter die letzte; alsdann schreibt man die sechs Produkte an aus je drei Elementen, welche auf den Diagonalen des Quadrates und auf Parallelen dazu liegen. Dabei ist den Produkten, welche in der Richtung der Diagonale des Anfangselementes liegen das Vorzeichen $+$, den andern das Vorzeichen $-$ zu geben.



$$= a_1\, b_2\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2$$
$$- a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 - a_3\, b_2\, c_1$$

[Man kann auch die beiden ersten Vertikalreihen hinter die letzte setzen und dann ebenso entwickeln.]

6. Bezeichnet man in einer Determinante Δ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r, dann ist

$$\Delta = a_1\, A_1 + a_2\, A_2 + \ldots\ldots + a_n\, A_n$$
$$= b_1\, B_1 + b_2\, B_2 + \ldots\ldots + b_n\, B_n$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \text{ferner ist.}$$
$$b_1\, A_1 + b_2\, A_2 + \ldots + b_n A_n = c_1\, A_1 + c_2\, A_2 + \ldots + c_n A^n = 0\,.$$

7. Jede **Unterdeterminante** ist wieder eine Determinante. Die Unterdeterminante zu einem Element, das in der $i$ten Horizontal- und der $k$ten Vertikalreihe steht, wird erhalten, indem man die Horizontal- und die Vertikalreihe, welche in diesem Element sich kreuzen, durchstreicht und die dadurch entstehende Determinante mit $(-1)^{i+k}$ multipliziert. Hieraus ergiebt sich die Entwicklung einer **viergliedrigen Determinante**, u. s. f. Es ist also:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

8. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert.

Z. B.: $$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich null.

9. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Grössen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder: $(a_1 + \alpha_1) A_1 + (a_2 + \alpha_2) A_2 + (a_3 + \alpha_3) A_3 = a_1 A_1$
$+ a_2 A_2 + a_3 A_3 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_2 A_2.$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m, die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in m. n. p Determinanten zerlegbar.

10. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer parallelen Reihe addiert; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix}$$

11. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

12. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit n — m Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so lässt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

13. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ 11. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m, die der günstigen Fälle (Treffer) t, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines günstigen Falles:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m - t}{m} = 1 - w, \text{ also}$$

$$\text{I. } w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder E_1 oder E_2 eintrifft:

$$\text{II. } W = w_1 + w_2.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Ereignisse $E_1, E_2, E_3 \ldots$ gleichzeitig (oder nacheinander) eintreffen, ist:

$$\text{III. } W = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots.$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen E_1 und E_2 das erste eintrifft, ist:

$$\text{IV. } W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}.$$

5. Soll von zwei Ereignissen E_1 und E_2 eintreten:
a) E_1 und E_2, so ist $W = w_1 \cdot w_2$;
b) E_1, aber nicht E_2, so ist $W = w_1 (1 - w_2)$;
c) E_1 nicht, aber E_2, so ist $W = (1 - w_1) \cdot w_2$;
d) Eines, aber nicht beide, so ist $W = w_1 (1 - w_2) + (1 - w_1) \cdot w_2$;
e) Höchstens eines von beiden, so ist $W = 1 - w_1 w_2$;
f) Wenigstens eines von beiden, so ist $W = w_1 + w_2 - w_1 w_2$;
g) Beide oder keines, so ist $W = 1 - w_1 (1 - w_2) - (1 - w_1) w_2$;
h) E_1 n mal, E_2 m mal in bestimmter Reihenfolge, dann ist $W = w_1^n \cdot w_2^m$; ist die Reihenfolge beliebig, dann ist
$$W = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} w_1^n \cdot w_2^m.$$

§ 12. Binomialkoeffizienten.

1. Der Bruch $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$, gelesen „n über r“, heisst Binomialkoeffizient.

2. Ist n positiv und ganz, so wird $\binom{n}{r} = 0$, wenn $r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r null.
$$\binom{n}{1} = n;\ \binom{n}{n} = 1;\ \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}$

6. $\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{o} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2}$
$+ \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{o}\binom{n}{r}$.

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 13. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots a+(n-1)\,d$.

1. $z = a + (n-1)\,d$.
2. $s = \dfrac{(a+z)\,.\,n}{2} = \dfrac{(2a+(n-1)\,d)\,.\,n}{2}$.

§ 14. Geometrische Reihen.

Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^{n-1}$

1. $z = aq^{n-1}$.
2. $s = \dfrac{a(q^n-1)}{q-1} = \dfrac{qz-a}{q-1}$.
3. Ist $n = \infty$ und $0 < q < 1$, dann ist $s = \dfrac{a}{1-q}$.
4. $\left.\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1+x} \end{array}\right\}$ wobei $x^2 < 1$

§ 15. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuss $p\,\%$, Zinsfaktor $q \left(= 1 + \dfrac{p}{100}\right)$, ursprüngliches Kapital a, angewachsenes b, Zahl der Zinsperioden (Jahre) n, Rente r.

1. $b = a q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r q(q^n - 1)}{q - 1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) \cdot q^n} = \frac{r}{q - 1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$

5′. $a = \frac{r}{q - 1}$ $(n = \infty)$.

6. $a q^n = a \frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$

1. Giebt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Giebt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Giebt die Summe an, welche bis zum Ende des nten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r.

4. Stellt denselben Wert dar wie 3, wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5′. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung giebt die Bedingung an, unter der ein Kapital a in n Jahren

durch Verzinsung mit p_1 % getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuss p) q ist.

§ 16. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Reihe: $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots . y_n$
erste Differenzenreihe: $\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots .$
zweite " $\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \ldots .$
dritte " $\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \ldots .$

$$\Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m.$$

Ist die rte Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der rten Ordnung.

2. Bestimmung des allgemeinen Gliedes:

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots . + \binom{n}{r} \Delta^r y_0.$$

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} \Delta y_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 y_1 + \ldots . + \binom{n-1}{r} \Delta^r y_1.$$

3. Summe der Glieder von y_0 bis zum Glied y_n (einschl.):

$$S_n = \binom{n+1}{1} y_0 + \binom{n+1}{2} \Delta y_0 \pm \binom{n+1}{3} \Delta^2 y_0 + \ldots . + \binom{n+1}{r+1} \Delta^r y_0$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \ldots . + \binom{n}{r+1} \Delta^r y_1.$$

4. Sätze: a) Das allgemeine Glied einer Reihe rter Ordnung ist eine Funktion rten Grades in n.

b) Setzt man in der rationalen ganzen Funktion
$$\varphi(n) = a_0\, n^r + a_1\, n^{r-1} + \ldots . + a_r,$$
welche in Beziehung auf n vom rten Grade ist, für n der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2 . . ., so bilden die Werte $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ . . . . eine Reihe rter Ordnung mit der Schlussdifferenz $r!\, a_0$.

c) Setzt man in $\varphi(n)$ für n nach einander die Zahlen $\alpha, \alpha + h, \alpha + 2h \ldots .$, welche eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, so bilden die Funktionswerte $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha + h)$, $\varphi(\alpha + 2h)$ . . . . eine arithmetische Reihe rter Ordnung mit der Schlussdifferenz $r!\, a_0 \,.\, h^r$.

5. $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \,.\, n$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \,.\, n^2.$$

6. Figurierte Zahlen:

a. Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 . . . ., $\binom{n}{1} + 1\binom{n}{2}$

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 . . . ., $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$

Fünfeckszahlen: 1 5 12 22 35 . . . ., $\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2}$

b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 . . . ., $\binom{n+1}{2} + 1 \,.\binom{n+1}{3}$,

viereckige: 1 5 14 30 55 . . . ., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

fünfeckige: 1 6 18 40 75 . . . ., $\binom{n+1}{2} + 3\binom{n+1}{3}$.

§ 17. Interpolation.

1. Einschaltung bei arithmetischen Reihen.

Sollen bei einer arithmetischen Reihe rter Ordnung, deren allgemeines Glied gegeben ist durch die Formel y_n (s. § 16_2) zwischen je zwei Glieder p weitere Glieder so eingeschaltet werden, dass die neue Reihe wieder eine Reihe rter Ordnung ist, so geschieht dies, indem man in dem Ausdruck für das allgemeine Glied für n der Reihe nach

$$\frac{1}{p+1}, \frac{2}{p+1}, \frac{3}{p+1} \dots \frac{p}{p+1}, 1+\frac{1}{p+1}, 1+\frac{2}{p+1},$$
$$\dots, 2+\frac{1}{p+1} \dots$$

setzt. Die Schlussdifferenz der neuen Reihe ist

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^r \Delta^r y_0.$$

Häufig ist es zweckmässig nur soviel Glieder der neuen Reihe zu berechnen, dass sich daraus die Anfänge der Differenzenreihen ergeben und dann die Reihe von der Schlussdifferenz aus weiter zu berechnen.

2. Einschaltung bei Versuchsreihen.

a) Interpolationsformel von Lagrange.

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots$$

Hierbei sind $y_0, y_1, y_2 \dots$ die zu $x_0, x_1, x_2 \dots$ gehörigen Funktionswerte. Ist bekannt, dass die zunächst unbekannte Funktion $y = f(x)$ für alle Werte zwischen x_0 u. x_n eine ganze Funktion von höchstens nter Grade ist, so ist sie durch Lagrange's Formel vollständig bestimmt; andernfalls liefert letztere eine Annäherung.

b. Newton's Interpolationsformel:

$$y_x = y_0 + A_0 (x - x_0) + A_1 (x - x_0)(x - x_1) + A_2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

$$A_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \text{ u.s.f.}$$

$$A_1 = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}, \quad B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}, \quad C_1 = \frac{D_0 - C_0}{x_4 - x_2} \text{ u.s.f.}$$

$$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}, \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_4 - x_1}, \qquad \text{u. s. f.}$$

B. Unendliche Reihen.

§ 18. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich gross ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehen < 1 und wenn auch

$$\lim \left.\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|_{n=\infty} < 1.$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. Zweite Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0$

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Eine Reihe heisst divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist u. a. der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

§ 19. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

und sind beide Reihen konvergent, so ist

$$A_0 = B_0,\ A_1 = B_1,\ A_2 = B_2 \text{ u. s. f.}$$

Dieser Satz dient zur Entwickelung von Funktionen in Reihen.

§ 20. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1; \text{ ferner für}$$
$$x = +1, \text{ wenn } n > -1$$
$$x = -1, \text{ wenn } n > 0$$

$$(a \pm b)^n = a^n\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^n \quad a^n\left(1 \mp \frac{b}{a \pm b}\right)^{-n}, \quad a > b$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{b^4}{a^4} + \ldots\right)$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \qquad \text{(Näherungsformel);}$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \qquad \text{„}$$

§ 21. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen.

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}$$
$$= 2{,}7182818284\ldots.$$

2. $$a^x = e^{x\,la} = 1 + \frac{x\,la}{1!} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \ldots \quad -\infty < x < +\infty$$

3. $$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots, \quad 1 \geqq x > -1$$

4. $$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \quad 1 > x \geqq -1$$

5. $$\begin{cases} l\dfrac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\right\} \quad 1 > x > -1 \text{ oder} \\ l\,z = 2\left\{\dfrac{z-1}{z+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \\ \qquad 0 < z < \infty \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} l(a+h) - la = 2\left\{\dfrac{h}{2a+h} + \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots.\right\} \\ \log(a+h) = \log a + 2M\left\{\dfrac{h}{2a+h} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \\ \qquad 0 < a < +\infty \text{ u. } -a < h < +\infty \end{cases}$$

7. Uebergang vom natürlichen zum Briggschen Sytsem:

$$10^{\overset{10}{\log} z} = z\,;\ \overset{10}{\log} z \,.\, l\,10 = l\,z$$

$$\overset{10}{\log} z = \frac{l\,z}{l\,10} = M_{10} \,.\, l\,z$$

M_{10} = Modulus des Briggschen Systems $= \frac{1}{l\,10}$
$= 0{,}4342945 \ldots .$ (s. auch § 7_8).

---

8. $$\begin{cases} \sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - + \ldots \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \operatorname{arc} x^0 \\ -\infty < x < +\infty \end{matrix}$$

9. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$
$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x + 2k\pi i}$, so ist
$$l\,y = x + 2k\pi i.$$
$$l(-1) = (2k+1)\pi i;\ l(-y) = l\,y + (2k+1)\pi i.$$
Ist $y + iz = r e^{\varphi i}$, so ist
$$l(y + iz) = l\,r + (\varphi + 2k\pi) i.$$

12. $$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{are\,sin}\,x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad +1 > x > -1 \\
&\mathrm{arc\,tg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad 1 \geqq x \geqq -1 \\
&\frac{\pi}{4} = \mathrm{arc\,tg}\,1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad \text{(Leibnizsche Reihe.)}
\end{aligned}\right.$$

Zur Berechnung von π können folgende Reihen und Formeln benützt werden:

$$\frac{\pi}{6} = \mathrm{arc\,sin}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14136} + \ldots$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\pi = 6\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3\,.\,3} + \frac{1}{5\,.\,3^2} - \frac{1}{7\,.\,3^3} + \ldots\right\} \\
&\frac{\pi}{4} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{3} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{5} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{8} \\
&\frac{\pi}{4} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{3} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{7}.
\end{aligned}\right.$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§ 22. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzelexponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

5. Aus $\begin{cases} x + a = b \text{ folgt } x = b - a \\ x - a = b \quad „ \quad x = b + a. \end{cases}$

$$\begin{cases} ax = b \quad „ \quad x = \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{x}{a} = b \quad „ \quad x = ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^n = a \quad „ \quad x = \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x} = a \quad „ \quad x = a^n. \end{cases}$$

6. Aus $\begin{cases} ax = 0 \text{ folgt } x = 0 \\ a(x - b) = 0 \text{ folgt } x - b = 0 \\ (x - a)(x - b) = 0 \text{ folgt } x - a = 0 \text{ u. } x - b = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax + bx = cx \text{ folgt } x = 0 \\ a(x-b) + c(x-b) = d(x-b) \text{ folgt } x - b = 0. \end{cases}$$

Ist die linke Seite einer auf null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x, bezw. dieser Ausdruck, gleich null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1, \text{ folgt} \end{cases}$

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \text{ daher}$$

I. $$\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$ (Gleichsetzungsmethode),

II. $$ax + b \cdot \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c$$ (Einsetzungsmethode).

III. $$\begin{aligned} a b_1 x + b b_1 y &= c b_1 \\ a_1 b x + b b_1 y &= c_1 b \\ \hline x(a b_1 - a_1 b) &= c b_1 - c_1 b \\ x &= \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b} \end{aligned}$$

(Kombinationsmethode),

IV. 1) $ax + by = c \quad | \; m$

2) $a_1 x + b_1 y = c_1$

3) $(am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1,$

setze $bm + b_1 = 0$, so ist $m = -\frac{b_1}{b}$,

dies in 3) eingesetzt giebt

$$\left(-\frac{a b_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{c b_1}{b} + c_1, \text{ oder}$$

$$(-a b_1 + a_1 b)x = -c b_1 + c_1 b$$

$$x = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbest. Koëfficienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{array} \right|$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten u. s. f

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{array}{l|l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & A_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & A_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 & A_3 \end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)\, x = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3, \text{ also}$$

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante Δ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\Delta}.$$

Die Zähler sind ebenfalls Determinanten, die man erhält, wenn man in Δ der Reihe nach a_1, a_2, a_3, dann b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 durch d_1, d_2, d_3 ersetzt.

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen, z. B. von

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \text{ ist} \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 23. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $x^2 = a$

   $x = \pm \sqrt{a}.$

2. $\underline{a x^2 + b x + c = 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Gleichung liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \text{2 verschiedene reelle Werte} \\ \text{2 gleiche \quad ,, \quad ,,} \\ \text{2 verschiedene imag. \quad ,,} \end{array}\right\} \text{je nachdem } b^2 - 4ac \gtreqless 0.$$

$b^2 - 4ac$ heisst Diskriminante der Gleichung.

Ist $a = 1$, so wird $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$; hieraus folgt:

3. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0, \text{ so ist}$$

$$x_1 + x_2 = -b; \; x_1 \cdot x_2 = c.$$

Die Gleichungen $x^2 + bx + c = 0$ und $x^2 - bx + c = 0$ haben gleiche aber mit entgegengesetztem Zeichen verschene Wurzeln.

4. Die Gleichung

$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ hat die Wurzeln $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$

$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$,, ,, ,, $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

5. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $a x^4 + b x^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $a x^6 + b x^3 + c = 0$, " $x^3 = y$
3. $a x^{2m} + b x^m + c = 0$, " $x^m = y$
4. $a x + b\sqrt{x} + c = 0$, " $\sqrt{x} = y$
5. $a\sqrt[m]{x^{2r}} + b\sqrt[m]{x^r} + c = 0$, " $\sqrt[m]{x^r} = y$
6. $a u^{2x} + b u^x + c = 0$, " $u^x = y$ (§ 23c.)
7. $(x^2 + a x)^2 + b(x^2 + a x) + c = 0$, " $x^2 + a x = y$
8. $\left(\frac{a x + b}{c x + d}\right)^2 + \frac{a x + b}{c x + d} + e = 0$, " $\frac{a x + b}{c x + d} = y.$

7. Symmetrische Gleichungen:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$, zerfällt in I. $x + 1 = 0$ und II. $a(x^2 - x + 1) + bx = 0.$
2. $a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$, Division mit x^2,
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$
setze $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$
3. $a x^5 + b x^4 + c x^3 + c x^2 + b x + a = 0$,
$$a(x^5 + 1) + b x(x^3 + 1) + c x^2(x + 1) = 0$$
Abspaltung von $x + 1 = 0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. (Ueber die allgemeine Behandlung

s. § 25, 14.) Es ergiebt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlussgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Fall ist nach Massgabe der Eigenschaften der vorliegenden Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es lässt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, dass dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x+y$, $x-y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen ausser dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert

die Absolutglieder, so erhält man eine homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t.

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$, $2xy = b$ durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x+y)^2 = a + b$ und $(x-y)^2 = a - b$ bilden und hieraus $x + y$ und $x - y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen.)

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $a^x = a^r$; $x = r$.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m$; $x = -m$.

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}$; $x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}$.

4. $(ab)^{\frac{m+x}{nx}} = a \cdot b^{\frac{n+x}{r+x}}$.

   Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.

5. $a b^x + c(d + b^{-x}) = e$; setze und bestimme zunächst $y = b^x$.

6. $a^{x+p} + a^{x+q} = b^{x+m} + b^{x+n}$:

$$a^x(a^p + a^q) = b^x(b^m + b^n);$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q}; \text{ hieraus folgt } x.$$

7. $x^r x^{\log x} = b$;
$r \log x + \log x . \log x = \log b$, setze und bestimme $y = \log x$ u. s. f.

8. $\log(ax + b) + \log(cx + d) = m$;
es ist $\log\big((ax + b)(cx + d)\big) = m$, also

$$(ax + b)(cx + d) = 10^m,$$

woraus x folgt.

9. $a^x b^y = p$, $c^x d^y = q$;
logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$.

§ 24. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} (= v)$$

$u = 2v - 1$, also

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	— 3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	— 14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$ $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:

Ist 1. $a x + b y = c$ gegeben, so setze man
2. $a_1 x + b_1 y = t$, dann folgt:

3. $$x = \frac{b_1 c - b t}{a b_1 - a_1 b},$$
$$y = \frac{a t - a_1 c}{a b_1 - a_1 b},$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$. Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 8_4).

Beispiel: 1. $61 x + 7 y = 1000$
Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

2. $26 x + 3 y = t$

3. $$x = 3000 - 7 t = 7(429 - t) - 3$$
$$= 7 v - 3$$

4. $$y = \frac{t - 26 x}{3} = \frac{429 - v - 182 v + 78}{3}$$
$$= 169 - 61 v.$$

v	0	1	2	3
x	-3	4	11	18
y	169	108	47	-14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases} \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

3. Ist $x = p$, $y = q$ eine Einzellösung der Gleichung $ax \pm by = c$, so ist $x = p + bt$, $y = q \mp at$ die allgegemeine Lösung.

b) Mit drei Unbekannten.

4. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelst der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 25. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

2. Eine Gleichung nten Grades hat n, aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so ist

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots . (x - \alpha_n) \text{ und}$$

4. **Symmetrische Funktionen der Wurzeln:**

$$a_1 = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n);$$
$$a_2 = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots . + \alpha_2 \alpha_3 + \ldots . + \alpha_{n-1} \alpha_n;$$

$$a_3 = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n) = -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \ldots . \\ + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \ldots . + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n.$$

. . . .

$$a^n = (-1)^n . \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots . \alpha_n.$$

Newton's Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln:

Setzt man $\alpha_1{}^k + \alpha_2{}^k + \ldots . + \alpha_n{}^k = s_k$, so ist

$$s_1 + a_1 = 0$$
$$s_2 + a_1 s_1 + 2 a_2 = 0.$$
$$s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3 a_3 = 0$$

. . . .

Allgemeine rekurrierende Formel:

$$s_r + a_1 s_{r-1} + a_2 s_{r-2} + \ldots . + a_n s_{r-n} = 0,$$

sie ist auch noch gültig für $r \geqq n$, hiebei ist $s_0 = n$.

Unabhängige Formel:

$$s_r = (-1)^r \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \ldots . & 0 \\ 2 a_2 & a_1 & 1 \ldots . & 0 \\ 3 a_3 & a_2 & a_1 \ldots . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r a_r & a_{r-1} & a_{r-2} \ldots . & a_1 \end{vmatrix}$$

Um aus den Potenzsummen der Wurzeln die Koeffizienten der Gleichung zu berechnen hat man:

$$a_r = \frac{(-1)^r}{r!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots . & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \ldots . & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \ldots . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & s_{r-3} & \ldots . & 0 \end{vmatrix}$$

5. Satz von Descartes. Eine Gleichung mit reellen Koeffizienten hat höchstens soviel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel reelle

negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

Eine Gleichung von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen entgegengesetzt ist dem Vorzeichen von a_n.

Hat eine Gleichung geraden Grades a_n negativ, so sind mindestens zwei reelle, mit verschiedenen Vorzeichen versehene Wurzeln vorhanden.

6. Bei einer Gleichung, die nur reelle Wurzeln haben kann, ist die Anzahl der positiven gleich der der Zeichenwechsel, die Anzahl der negativen gleich der der Zeichenfolgen (Bestimmung der Hauptaxen einer Fläche II. Ord.)

7. Ist $p + qi$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p - qi$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben.

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich null, so hat die Gleichung r mal die Wurzel null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞.

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergiebt sich aus derselben durch Division mit $x - \alpha$ die Gleichung $n - 1$ ten Grades

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots . + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0$$

dann ist $\qquad b_r = b_{r-1} \cdot \alpha + a_r.$

Beispiel $3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 2 = 0$ soll durch $x - 2$ dividiert werden.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -7 & +2 & +4 & -7 & -2 \\ \hline 2 & 3 & -1 & 0 & +4 & +1 & 0 \end{array}$$

Res.: $3x^4 - x^3 + 4x + 1 = 0$.

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x = 2\,(= \alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2 \ldots.$ und versuche, ob $x - p_1$, $x - p_2 \ldots.$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht (s. auch § 29_a, 1).

10. Wurzelverkleinerung. Soll die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots. + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots. + p_{n-1} x + p_n = 0$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muss $f(x) = \varphi(x - k)$, also

$$a_0 x_n + a_1 x^{n-1} + \ldots. + a_n = p_0 (x-k)^n + p_1 (x-k)^{n-1} + \ldots. + p_{n-1}(x-k) + p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \ldots. p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man $f(x)$ fortlaufend mit $x - k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$\begin{array}{llllll}
4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -360 = p_n \\
4) & 1 & 4 & -23 & -202 = p_{n-1} & \\
4) & 1 & 8 & +9 = p_{n-2} & & \\
4) & 1 & 12 = p_1 & & & \\
4) & 1 = p_0 & & & &
\end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wegschaffung des zweiten Gliedes. Soll die Gleichung $f(x)=0$ durch die Einsetzung $x=y+k$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1=a_1+nka_0=0$,

$$k=-\frac{a_1}{na_0}.$$

Beispiel: $x^3-18x^2+105x-196=0$; $k=-\frac{-18}{3}=+6$;

$$\begin{array}{llll} 6)\ 1 & -\ 12 & +\ 33 & +\ 2 \\ 6)\ 1 & -\ \ 6 & -\ \ 3 & \\ 6)\ 1 & \ \ \ \ 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} y=x-6; \\ \\ \text{Res.: } y^3-3y+2=0. \end{array}$$

12. Mehrfache Wurzeln: Haben $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ einen gemeinschaftlichen Teiler von der Form $(x-\alpha_1)^k(x-\alpha_2)^l\ldots$, so ist α_1 eine $k+1$fache, α_2 eine $l+1$fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$.

13. Gemeinschaftliche Wurzeln zweier Gleichungen, Resultante. — Eine gemeinschaftliche Wurzel zweier Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ wird gefunden, indem man den gemeinschaftlichen Teiler der linken Seiten sucht und denselben gleich null setzt.

Die Bedingung für das Bestehen einer gemeinschaftlichen Wurzel zweier Gleichungen heisst die Resultante derselben; sie ist das Resultat der Elimination der Unbekannten aus den zwei Gleichungen. Sind diese

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$$
$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b^m=0,$$

so ist die Resultante

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 \cdot & \ldots & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots\ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 \cdot & \ldots & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

Man findet den Wert der gemeinsamen Wurzel aus

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots\ldots & & a_n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ (b_0 x + b_1) & b_2 & \ldots\ldots & & b_m & \ldots & 0 \\ b_0 & b_1 & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & b_m & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

14. Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y. — Man ordne beide Gleichungen nach Potenzen der einen Unbekannten, z. B. von x, und bilde die Resultante aus beiden, indem man die Koeffizienten jener Unbekannten als bekannte Grössen betrachtet. Die Resultante verschwindet wegen des gleichzeitigen Bestehens beider Gleichungen. Diese Resultante, das Eliminationsresultat von x, ist im allgemeinen eine Gleichung vom m . n ten Grade in y.

§ 26. Binomische Gleichungen.

1. $x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi;$

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

2. $x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi;$

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{2k+1}{n}\pi + i \sin \frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

1. $x^3 = 1;$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = 0 \ldots\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \cos 120^0 \pm i \sin 120^0 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ \text{mit } k = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \ldots\ldots & \end{array}$$

$$= \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

2. $x^3 = -1;$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} x = \cos 60^0 \pm i \sin 60^0 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\beta \\ -\alpha \end{cases} \\ x = -1. \end{array}\right. \\ \text{mit } k = 1 \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l|l} x^n = a & x^n = -a \\ x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{+1} & x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{-1} \end{array}$$

wobei $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeutet, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 27. Kubische Gleichungen.

1. $$\begin{array}{l|l} x^3 - a = 0 & x^3 + a = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{a}\right) \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases} & x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -\left(\sqrt[3]{a}\right) \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases} \end{array}$$

s. § 26, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $-\frac{a}{3}$ oder Substitution von $x = y - \frac{a}{3}$ s. § 25_{10}) auf die Form

$$\mathbf{y^3 + 3py + 2q = 0}$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$,

dann ist
$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q\ + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{cases} \quad \text{(Cardan'sche Formeln)}$$

Die Cardan'schen Formeln führen zu einer Lösung nur so lange $q^2 + p^3 > 0$; sie liefern dann 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

3. Fall der 3 reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2 + p^3 < 0$, so hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln (die Cardan'schen Formeln liefern sie aber in imaginärer Form); dann

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} \\ y_1 = 2\sqrt{-p}\,.\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 = -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right) \\ y_3 = -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ\right) \end{cases}$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2: $q^2 + p^3 > 0$.

1. $p > 0$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{p^3}}{q}; \ \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{p} \,.\, \operatorname{ctg} 2\psi \\ y_2 = \pm \sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ y_3 = \pm \sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right); \end{cases}$$

hiebei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \ \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p}\,\frac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm \sqrt{-p}\left(\frac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \\ y_3 = \pm \sqrt{-p}\left(\frac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \end{cases}$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 28. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 23, 6_1, 7_2.
2. Euler'sche Methode.
   1. Transformierung der Gleichung auf die Form
      $$x^4 + a x^2 + b x + c = 0.$$
   2. Bildung der Resolvente
      $$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}.$$

§ 29. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Ganze Wurzelwerte. Dieselben sind in den Faktoren des Absolutgliedes a_n enthalten. Die Bestimmung derjenigen Faktoren, welche zugleich Wurzeln der Gleichung sind, wird erleichtert durch Folgendes: a) Es können nur diejenigen Faktoren in Betracht kommen, welche innerhalb der Wurzelgrenzen liegen (s. u. 3); b) nimmt man eine Wurzelverkleinerung (s. § 25) z. B. um 1 vor und zerlegt in der neuen Gleichung ebenfalls das Absolutglied a'_n, so kann als Wurzel der ursprünglichen Gleichung nur ein solcher Faktor von a_n in Betracht kommen, welcher um 1 grösser ist als ein Faktor von a'_n.

2. Wird $f(x)$ für $x = p$ negativ und für $x = q$ positiv, so liegt eine ungerade Zahl von Wurzeln, also mindestens eine, zwischen p und q.

3. Ist $-a_m$ der erste, und $-a_p$ der numerisch grösste negative Koeffizient, so ist $x < 1 + \sqrt[m]{a_p}$ eine obere Grenze für die potitiven Wurzeln. Vertauscht man x mit $-x$ und sucht in der neuen Glei-

chung wieder die obere Grenze für die positiven Wurzeln, so ist dieselbe mit negativem Zeichen versehen die untere Grenze für die negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

4. Satz von Budan (-Fourier). Bildet man die Reihe $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots . f^{(n)}(x)$ und setzt man hierin $x=a$ und $x=b$, wobei $a < b$, so hat die Gleichung $f(x)=0$ nicht mehr Wurzeln zwischen a und b, als die Reihe Zeichenwechsel verliert, wenn man von a zu b übergeht.

5. Satz von Sturm. Sind $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots . f_m(x)$ die mit umgekehrten Zeichen genommenen Reste, die sich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers der Funktion $f(x)$ und ihres Differentialquotienten $f'(x)$ ergeben, und setzt man in der Reihe der Funktionen $f, f', f_1, f_2, f_3 \ldots . f_m$ für x einmal a, das andremal b, so hat die erste Reihe gerade soviel Zeichenwechsel mehr als die zweite, wie die Gleichung $f(x)=0$ Wurzeln zwischen a und b hat.

6. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektion anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektion p ergiebt sich aus (Taylors Satz s. § 87)

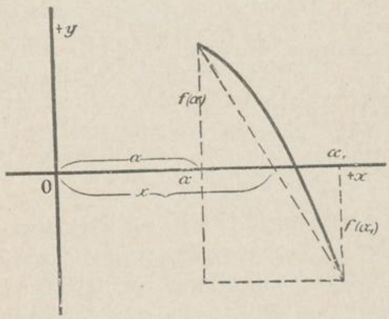
$$p = \frac{-(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α, so erhält hiemit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektion p_1 u. s. f.

7. Regula falsi. Hat die Gleichung $f(x=0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 ($f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen), so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X-Achse den der Sehne setzt, welche die zu den Abscissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x-\alpha}{f(\alpha)} = \frac{x-\alpha_1}{f(\alpha_1)}, \text{ somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha)\, f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$



Mit dem neuen Wert und einem benachbarten kann das Verfahren wiederholt werden u. s. f. — Dieses Verfahren ist insbesondere bei transcendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:

$$x^x = 100, \text{ also}$$

$$x \log x = 2 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Ausrechnung:

x	$f(x) = x \log x - 2$
1	-3
2	$-1,4$
3	$-0,5687$
4	$+0,4084$

$$x = 3 + \frac{1 . 0,57}{0,98} = 3,58$$

3,58	$+0,0171$
3,60	$-0,0027$

$$x = 3,58 + \frac{0,02 . 0,0171}{0,0189}$$

$$= 3,58 + 0,01727 = 3,59727 \text{ u. s. f.}$$

(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

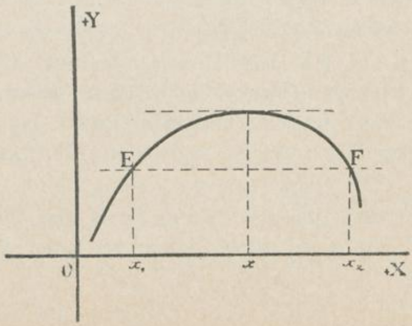
§ 30. Grösste und kleinste Werte.

(Elementare Behandlung.)

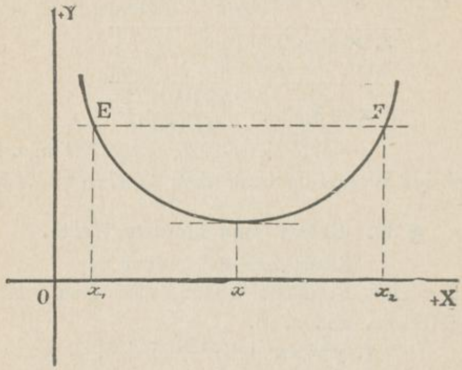
Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

$$1.\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.



Zieht man eine Parallele EF zur Xaxe, welche die betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1.



$a x_1^3 + b x_1^2 + c x_1 + d = a x_2^3 + b x_2^2 + c x_2 + a$, woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$.

$$2.\quad a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Wenn sich nun EF parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abscisse dieses Punktes x, so ergiebt sich demnach aus 2.

$$3.\quad 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren lässt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen:*)

Um einen grössten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Grösse zu finden, muss man:

1. Die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Grösse x ausdrücken;

2. In diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so dass sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren lässt;

4. nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hiedurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein grösster oder kleinster Wert vorliegt, ergiebt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x, die dem gefundenen benachbart sind.

B e m e r k u n g e n: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muss vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$m x_1 + n + \sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} = m x_2 + n + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c},$$

$$m (x_1 - x_2) + \sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} - \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m (x_1 - x_2) + \frac{a (x_1^2 - x_2^2) + b (x_1 - x_2)}{\sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c}} = 0,$$

*) Vergl. hiezu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

folglich $m + \frac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{a x_1^2 + b x_1 + c} + \sqrt{a x_2^2 + b x_2 + c}} = 0.$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen u. s. f.

2. Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung grösster und kleinster Werte giebt die höhere Analysis (s. § 89).

Ebene Geometrie.

§ 31. Gerade Linien und Winkel am Kreis; regelmässiges Vieleck.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf oder ausserhalb einer Kreislinie, je nachdem sein Mittelpunktsabstand $\begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix}$ als der Halbmesser ist.

2. Eine Gerade hat mit einem Kreis zwei, einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. sie schneidet, berührt oder trifft nicht, je nachdem ihr Mittelpunktsabstand $\begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix}$ als der Halbmesser ist.

3. a) Gleiche Sehnen haben gleiche Mittelpunktsabstände und umgekehrt.

b) Von zwei ungleichen Sehnen hat die grössere den kleineren Mittelpunktsabstand und umgekehrt.

4. Zu gleichen Zentriwinkeln in gleichen Kreisen oder in demselben Kreis gehören gleiche Bögen, Sehnen, Aus- und Abschnitte und umgekehrt.

5. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels.

6. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Datum a, r, α.

7. Der Tangentensehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im nicht eingeschlossenen Bogen.

8. a) Im Kreisviereck ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der zwei andern, d. h. 2 R.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel 2 R ist, so ist es ein Kreisviereck.

9. a) Im Tangentviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern ist, so ist das Viereck ein Tangentenviereck.

10. Tangentenabschnitte beim Dreieck

	an den Inkreis,	an den Ankr. d. Gegens.
von der Ecke A	$\frac{b+c-a}{2}$ $(=s-a)$,	$\frac{b+c+a}{2}=s$
„ „ „ B	$\frac{c+a-b}{2}$ $(=s-b)$,	„
„ „ „ C	$\frac{a+b-c}{2}$ $(=s-c)$,	„

Datum s, ϱ_1, α.

11. Zwei Kreise K und K_1

a) berühren sich, wenn sie einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich haben,

b) haben einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich, wenn sie sich berühren.

c) K und K_1 berühren sich, wenn $z = r + \varrho$

„ „ „ schneiden „ „ $\begin{cases} z < r + \varrho \text{ u.} \\ z > r - \varrho \end{cases}$

K liegt innerhalb K_1, wenn $z < r - \varrho$
K „ ausserhalb „ „ $z > r + \varrho$,
z Zentrale, r der grössere, ϱ der kleinere Halbmesser.

12. Kreisteilung. Zu einem Zentriwinkel von $\frac{4}{n}R$ — oder einem Peripheriewinkel von $\frac{2}{n}R$ — gehört der nte Teil der Kreislinie.

13. Regelmässiges Vieleck.

Eckenzahl:	3	4	5	6 ... n
Zentriwinkel:	$\frac{4}{3}R$	$1R$	$\frac{4}{5}R$	$\frac{2}{3}R \ldots \frac{4}{n}R$
Polygonwinkel:	$\frac{2}{3}R$	$1R$	$\frac{6}{5}R$	$\frac{4}{3}R \ldots \frac{2n-4}{n}R.$

§ 32. Proportionalität von Strecken, Aehnlichkeit.

1. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf dem einen Schenkel proportional den entsprechenden auf dem andern und die Parallelen verhalten sich wie die zugehörigen Scheitelabschnitte desselben Schenkels. — Umkehrung des ersten Teils.

2. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite innerlich im Verhältnis der Anseiten; die Halbierungslinie des Aussenwinkels teilt sie äusserlich in demselben Verhältnis. — Umkehrung.

3. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die abgeschnittenen Dreiecke einander ähnlich.

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

a) zwei Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich,

b) zwei Winkel gleich,

c) die 3 Seiten proportional,

d) zwei Seiten proportional der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die Gegenwinkel des andern Paares gleichartig sind. — (Besonderer Fall: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportional und den Gegenwinkel der grösseren gleich haben.)

5. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten, oder wie die reciproken Werte der Seiten und umgekehrt; also

$$h : h' : h'' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab$$

6. a) Zieht man von zwei ähnlich liegenden Punkten bei zwei ähnlichen Vielecken Strahlen nach allen entsprechenden Ecken, so entstehen paarweis ähnliche Dreiecke.

Besonderer Fall: Durch die Diagonalen aus zwei entsprechenden Ecken werden zwei ähnliche Vielecke in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegt.

b) Entstehen durch Strahlen, die man von zwei Punkten nach den Ecken zweier Vielecke zieht, paarweis ähnliche, in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke, so sind die Vielecke ähnlich und die beiden Punkte ähnlich liegend.

Besondere Fälle: α. Werden zwei Vielecke durch die Diagonalen aus zwei Ecken in paarweis ähnliche in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke zerlegt, so sind die Vielecke ähnlich.

β. Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich und die einschliessenden Seiten proportional haben.

7. Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

8. In ähnlichen Vielecken sind entsprechende Winkel einander gleich und entsprechende Längen proportional; die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich daher wie entsprechende Seiten.

9. a) Sind zwei Vielecke in perspektivischer Lage und n—1 Seitenpaare (worunter keines, das mit einem Strahl zusammenfällt) parallel, so ist auch das nte Paar parallel und die Vielecke sind ähnlich.

b) Sind zwei Vielecke ähnlich und zwei Seitenpaare parallel, so sind auch die übrigen parallel und die Vielecke sind in perspektivischer Lage.

10. a) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

b) Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten.

11. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gleich dem grösseren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}$R und umgekehrt. (Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks).

12. a) Sekantensatz. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von einem Kreis geschnitten, so sind die Scheitelabschnitte des einen Schenkels innere, die des andern äussere Glieder einer Proportion, d. h. das Produkt der Scheitelabschnitte ist konstant. (Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis $= PO^2 - r^2$).

Besonderer Fall: Wird der eine Schenkel eines Winkels von einem Kreis geschnitten, der andere berührt, so ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Scheitelabschnitte der Sekante.

b) Sind auf jedem Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel vom Scheitel aus je zwei Stücke abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des einen Schenkels gleich dem Produkt der Abschnitte des andern, so liegen die vier Endpunkte der Abschnitte auf einem Kreis.

Besonderer Fall: Sind auf dem einen Schenkel eines Winkels zwei Abschnitte, auf dem andern ein Abschnitt vom Scheitel aus abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des ersten Schenkels gleich dem Quadrat des Abschnitts auf dem zweiten Schenkel, so berührt der durch die Endpunkte der drei Abschnitte gelegte Kreis den zweiten Schenkel.

§ 33. Flächenvergleichung, Inhaltsbeziehungen.

1. Parallelogramme und ebenso Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

2. Ein Dreieck ist halb so gross als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

3. Ein Trapez ist inhaltsgleich mit einem Parallelogramm, wenn beide gleiche Höhe haben und wenn die Grundlinie des Parallelogrammes gleich der Mittellinie des Trapezes ist. Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhe und gleiche Mittellinie haben.

4. Datum für Parallelogramm und Dreieck: a, h, f^2, für das Trapez: $b + d, h, f^2$.

5. Ein Kreis ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

6. Parallelogramme und ebenso Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschliessenden Seiten.

Datum: α, (bc), f^2.

7. Aehnliche Vielecke verhalten sich dem Inhalt nach wie die Quadrate entsprechender Längen.

8. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

9. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

10. Pythagoreischer Lehrsatz:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

b) Allgemeiner Pythagoreischer Lehrsatz: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so ist die Figur über der

Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

c) Pythagoreischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck: Das Quadrat über einer Dreieckseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite stumpf oder spitz ist (vgl. § 48,6).

§ 34. Längen- und Flächenberechnungen.

1. Inhalt des Rechtecks: $a \cdot b$
2. „ „ Quadrats: a^2
3. Inhalt des Parallelogramms: $a\,h$
4. „ J „ Dreiecks. $(a + b + c) = 2\,s$, ϱ Halbmesser des Inkreises, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 Halbm. des Ankreises an der Seite a, bezw. b, c

$$J = \frac{a\,h}{2} = \varrho \cdot s = \varrho_1 (s - a) = \varrho_2 (s - b) = \varrho_3 (s - c)$$

$$= \sqrt{s (s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{a\,b\,c}{4\,r},$$

5. Inhalt des Trapezes: $\frac{h (b + d)}{2}$,
6. „ „ regelmässigen n Ecks: $\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$,
7. Umfang des Kreises: $2 r \pi = d \pi$; $\left(\pi = 3{,}1416; = \frac{22}{7}\right)$,
8. Inhalt des Kreises: $r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi$,
9. Bogen: $2 r \pi = \alpha^0 : 360^0$; Bogen $= \frac{\alpha^0 r \pi}{180^0}$,

10. Sektor: $r^2 \pi = \alpha^0 : 360^0$; Sektor $= \frac{\alpha^0 r^2 \pi}{360^0} = \frac{b\,r}{2}$,

11. Bogenlänge im Kreise vom Halbmesser 1:

$$\mathrm{arc}\,\alpha' = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0} = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}}$$

Regelmässige Vielecke:

12. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,r}{2} = 3\,\varrho$$

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2\,\varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{4}\sqrt{3} = 3\,\varrho^2\sqrt{3}$$

13. Sechseck.

$$r = a = \frac{2}{3}\varrho\sqrt{3};\quad \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$J = \frac{3\,a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{2}\sqrt{3} = 2\,\varrho^2\sqrt{3}$$

14. Quadrat.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2};\quad \varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$J = a^2 = 2\,r^2 = 4\,\varrho^2$$

15. Achteck.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$a = r\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\varrho(\sqrt{2}-1)$$

$$J = 2a^2(\sqrt{2}+1) = 2r^2\sqrt{2} = 8\varrho^2(\sqrt{2}-1)$$

16. Fünfeck.

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5}-1)$$

$$\varrho = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= 5\varrho^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

17. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1 = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}.$$

§ 35. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln.

A) Datumsbeziehungen. Wo nichts bemerkt ist, beziehen sie sich auf das Dreieck.

1. $h, m, (\beta - \gamma)$.
2. $\begin{cases} h + h', \ a + b, \ \gamma \\ h - h', \ b - a, \ \gamma. \end{cases}$
3. a, r, α.
4. $\begin{cases} s - a, \ \varrho, \ \alpha. \\ s, \ \varrho_1, \ a. \end{cases}$
5. a, h, f^2.
   Trapez: $b + d, h, f^2$.
6. $\begin{cases} s, \ \varrho, \ f^2 \\ s - a, \ \varrho_1, \ f^2, \end{cases}$
   Tangentenviereck: $a + b + c + d, \varrho, f^2$.
7. $(b\,c), \alpha, f^2$.
8. $b^2 - c^2, (p + q), (p - q)$ s. C_{17} dieses §.

B) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

9. $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, (a Hyp., p und q Abschn. derselben).

10. $h^2 = pq$.

11. $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

12. $bc = ah$.

13. Rationale rechtwinklige Dreiecke sind bestimmt durch

$$a = u^2 + v^2$$
$$b = u^2 - v^2$$
$$c = 2uv.$$

u	v	u^2+v^2 a	u^2-v^2 b	$2uv$ c
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

C) Beziehungen am schiefwinkligen Dreieck.

14. $bp = cq$ (p Projekt. von c auf b, q Projekt. von b auf c).

15. $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq$ (Pyth. Lehrsatz für das schiefwinklige Δ), (q Projekt. von b auf c). $\alpha \lesseqgtr R$.

16. $bc = 2rh$.

17. $b^2 - c^2 = p_1{}^2 - q_1{}^2$ (p_1 und q_1 Projekt. von b und c auf a).

18. $$\begin{cases} a^2 + 4t^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4(t^2 + t'^2 + t''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ a^2 = \frac{4}{9}(2t'^2 + 2t''^2 - t^2). \end{cases}$$

19. $m^2 = bc - vw$ (v und w Abschnitte der Seite a, erzeugt durch Winkelhalbierende m).

20. Dreiecksinhalt s. § 34_4

21. $$\begin{cases} \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2 \\ \frac{1}{\partial_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}. \end{cases}$$

22. Kreisviereck (Ptolemäischer Lehrsatz)

$$ee_1 = ac + bd$$

Inhalt des Kreisvierecks:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

wobei $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

§ 36. Geometrische Oerter.

A. Der geometrische Ort für einen Punkt, der

1. von einem Punkt A die Entfernung r hat, ist die Kreislinie um A mit r;

2. von einer Geraden L auf bestimmter Seite derselben die Entfernung h hat, ist die Parallele zu L auf jener Seite im Abstand h;

3. von zwei Punkten A und B gleiche Entfernung hat, ist das Mittellot zu AB;

4. von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, ist die Halbierungslinie des Winkels;

5. von zwei Parallelen gleichen Abstand hat, ist die Parallele im mittleren Abstand.

B. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der

6. den Halbmesser r hat und durch Punkt A geht, ist die Kreislinie um A mit r;

7. den Halbmesser r hat und die Gerade L auf bestimmter Seite berührt, ist die Parallele im Abstand r auf jener Seite;

8. durch die Punkte A und B gehen soll, ist das Mittellot zu AB;

9. die Schenkel eines Winkels berühren soll, ist die Halbierungslinie des Winkels;

10. zwei Parallelen berührt, ist die mittlere Parallele;

11. eine Gerade L im Punkte A berührt, ist das Lot zu L in A;

12. eine Kreislinie im Punkte A berührt, ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit A;

13. den Halbmesser ϱ hat und eine Kreislinie K vom Halbmesser r von aussen oder innen berührt, ist ein zu K konzentrischer Kreis mit dem Halbmesser $r + \varrho$ oder $r - \varrho$, bezw. $\varrho - r$.

B. Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf derselben Seite über der gemeinsamen Grundlinie a mit

14. demselben Winkel α an der Spitze, ist der Kreisbogen über a, welcher den Winkel α fasst;

15. dem gleichen Inhalt, ist eine Parallele zur Grundlinie;

16. demselben Verhältnis m : n für die Seiten b und c ist ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Punkten, welche a innerlich und äusserlich im Verhältnis m : n teilen (Satz des Apollonius).

§ 37. Besondere Linien und Punkte am Dreieck.

In einem Dreieck schneiden sich

1. die Mittellote zu den Seiten in einem Punkt, der von den Ecken gleiche Entfernungen hat (Umkreismittelpunkt 0);

2. die Halbierungslinien der Winkel in einem Punkt, der von den Seiten gleiche Entfernungen hat (Inkreismittelpunkt M); desgleichen die Halbierungslinie eines Winkels und die der beiden Aussenwinkel an der Gegenseite (Ankreismittelpunkte M_1, M_2, M_3);

3. die Schwerlinien (seitenhalbierende Trans-

versalen) in einem Punkt und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 (Schwerpunkt S);

4. die Höhen in einem Punkt (Höhenschnittpunkt H).

In einem Dreieck liegen:

5. Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt in gerader Linie, und es ist hiebei $HS : SO = 2 : 1$;

6. die drei Fusspunkte der Höhen, die drei Halbierungspunkte der Seiten und die drei Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (Feuerbachscher Kreis).

§ 38. Harmonische Teilung.

1. Wenn die Strecke AB durch die Punkte P und Q innerlich bezw. äusserlich nach demselben Verhältnis geteilt ist, dann heissen A, B, P, Q harmonische Punkte; A und B, ebenso P und Q heissen zugeordnet. — PQ wird ebenfalls durch A und B in gleichem Verhältnis geteilt.

2. Gehen die Strahlen eines Büschels durch vier harmonische Punkte, so heisst dasselbe ein harmonisches Büschel; je zwei Strahlen, welche durch zwei zugeordnete Punkte gehen, heissen selbst zugeordnet.

3. Zu einem Teilpunkt einer Strecke giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Punkt; zu einem Teilstrahl eines Winkels giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

4. Der zum Halbierungspunkt einer Strecke (in Bezug auf die Endpunkte) harmonisch zugeordnete Punkt ist der unendiich ferne Punkt; der zur Hal-

bierungslinie eines Winkels in Bezug auf die Schenkel harmonisch zugeordnete Strahl ist das Lot zur Halbierungslinie.

5. a) Wenn man zu einem Strahl eines harmonischen Büschels eine Parallele zieht, so wird das Stück derselben zwischen dem andern Paar zugeordneter Strahlen von dem zum ersten zugeordneten Strahl halbiert. (Bestimmung des 4. harmonischen Elementes zu 3 gegebenen.)

b) Umgekehrt: Werden durch drei Strahlen eines Büschels auf einer Geraden gleiche Strecken abgeschnitten und ist der 4. Strahl dieser Geraden parallel, so bilden die vier Strahlen ein harmonisches Büschel.

6. Jede Gerade schneidet ein harmonisches Büschel in harmonischen Punkten.

7. In einer Nebenecke eines vollständigen Vierecks wird der Winkel zweier Gegenseiten durch die Strahlen nach den andern Nebenecken harmonisch geteilt.

8. Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird der Abstand zweier Gegenecken durch die andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

9. Harmonische Proportion, harmonisches Mittel s. § $2_{10, 11}$.

10. Ist M Halbierungspunkt der durch P und Q harmonisch geteilten Strecke A B, so ist:

$$AM^2 = MP.MQ.$$

§ 39. Kreispolaren.

1. Sind A, B, P, Q vier harmonische Punkte und beschreibt man über der Entfernung AB des einen zu-

geordneten Paares als Durchmesser einen Kreis und errichtet in P ein Lot auf AB, so heisst dieses Lot die Polare von Q in Beziehung auf den Kreis. — Ebenso ist das Lot in Q die Polare von P; P und Q heissen zugeordnete Pole.

2. Die Berührungssehne der von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten ist Polare jenes Punktes. — Eine Tangente ist Polare ihres Berührungspunktes. — Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade und der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

3. Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Pole dieser Geraden.

4. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punktes.

5. Die Polare des Schnittpunktes zweier Geraden ist die Verbindungslinie der Pole derselben.

6. Der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren derselben.

7. Jede durch einen Punkt gehende Sekante wird durch diesen, durch seine Polare und die Kreislinie harmonisch geteilt.

8. In jedem Sehnenviereck ist eine Nebenecke der Pol zur Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken.

9. In jedem Tangentenvierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten.

§ 40. Ceva-, Menelaos-, Pascal-, Brianchon-Satz.

1. Satz des Ceva: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks, so ist das Produkt dreier nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

2. Satz des Menelaos: Schneidet eine Transversale eines Dreiecks die drei Seiten oder ihre Verlängerungen, so ist das Produkt dreier nicht aneinander liegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

3. Satz des Pascal: Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen in einer Geraden.

4. Satz des Brianchon: Die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkt.

§ 41. Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien (Chordalen).

1. Zieht man in zwei Kreisen zwei gegenläufige oder gleichläufige parallele Halbmesser, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte jedes Paares stets für sich durch denselben festen Punkt. Diese beiden Punkte teilen die Centrale innerlich und äusserlich im Verhältnis der Halbmesser; sie heissen innerer bezw. äusserer Aehnlichkeitspunkt.

2. Satz des Monge: Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise, ebenso je zwei innere und ein äusserer liegen auf einer Geraden (Aehnlichkeitsachse.)

3. Die Potenzlinie zweier Kreise (d. h. die

gerade Linie deren sämtliche Punkte in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, s. § 32,$_{12}$a.) steht senkrecht auf der Centrale. Wenn gemeinschaftliche, gleichartige Tangenten vorhanden sind, halbiert sie dieselben; schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Potenzlinie gemeinschaftliche Sekante oder Tangente im Berührungspunkt; sind die Kreise konzentrisch, so liegt sie in unendlicher Entfernung. Die von einem Punkt der Potenzlinie an die beiden Kreise gezogenen Tangenten sind einander gleich.

4. Die Potenzlinien je zweier von drei gegebenen Kreisen schneiden sich in einem Punkt, dem Potenz- oder Chordalpunkt derselben, oder sie sind parallel.

Stereometrie.

§ 42. Gerade Linien und Ebenen.

1. a) Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.

b) Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so schneidet jede durch die Gerade gelegte Ebene die erste Ebene in einer parallelen Geraden.

c) Ist eine Gerade einer Ebene parallel und zieht man durch einen Punkt der Ebene eine Parallele zu der Geraden, so fällt die Gerade ganz in die Ebene hinein.

2. a) Legt man durch jede von zwei Parallelen eine Ebene, welche die andere schneidet, so ist die Schnittlinie der beiden Ebenen den beiden Geraden parallel.

b) Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

3. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

4. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind auch ihre Ebenen parallel.

5. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel und beide Paare gleichläufig oder beide gegenläufig, so sind die Winkel gleich; ist das eine Schenkelpaar gleich-, das andere gegenläufig, so sind die Winkel supplementär.

6. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

7. a) Steht eine Gerade zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen in der Ebene liegenden Geraden senkrecht, d. h. sie ist senkrecht zur Ebene.

b) Alle Geraden, welche in demselben Punkt zu einer Geraden senkrecht sind, liegen in einer Ebene, die senkrecht ist zu der Geraden.

8. Zu einer Ebene lässt sich durch einen Punkt auf oder ausserhalb derselben nur ein Lot ziehen.

9. Zu einer Geraden lässt sich durch einen auf oder ausserhalb derselben gelegenen Punkt nur eine senkrechte Ebene legen.

10. a) Jede Ebene durch ein Lot zu einer Ebene ist zu dieser Ebene senkrecht.

b) Eine Gerade, welche innerhalb einer von zwei zu einander senkrechten Ebenen senkrecht zu deren Schnittlinie ist, ist auch senkrecht zur andern Ebene.

c) Eine Gerade, welche senkrecht zu einer von zwei senkrechten Ebenen ist, fällt ganz in die andere oder ist ihr parallel.

d) Sind zwei sich schneidende Ebenen senkrecht zu einer dritten, so ist auch ihre Schnittlinie senkrecht zur dritten.

11. Ist ein Winkel, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt ein R, so ist auch seine Projektion ein R; umgekehrt ist die Projektion ein R, so ist der Winkel selbst ein R.

12. a) Stehen zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht zu einer Ebene, so ist es auch die andere.

13. a) Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden senkrecht, so ist es auch die andere.

14. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke zwischen Punkt und Ebene und umgekehrt.

15. Diejenigen Strecken zwischen einer Ebene und einem Punkt ausserhalb derselben sind einander gleich, deren Endpunkte von der Projektion des ersten Punktes gleichweit entfernt sind und umgekehrt.

Die gleichen Strecken machen mit der Ebene gleiche Winkel und umgekehrt.

16. Von zwei von einem Punkt nach einer Ebene gezogenen Strecken ist diejenige die kleinere, deren Endpunkt näher bei der Projektion jenes Punktes liegt und umgekehrt.

Die kleinere der Strecken macht mit der Ebene den grösseren Winkel und umgekehrt.

17. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden in der Ebene.

18. Alle parallelen Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich und machen mit derselben Ebene gleiche Winkel.

19. Die kürzeste Strecke zwischen zwei windschiefen Geraden ist diejenige, die auf beiden Geraden senkrecht steht.

20. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind:

a) entsprechende Keile
b) innere Wechselkeile
c) äussere "
} einander gleich,

und d) innere Gegenkeile
e) äussere "
f) gemischte Wechselkeile
} betragen zusammen 2 rechte Keile.

Jeder der sechs Sätze ist umkehrbar.

§ 43. Kugel-, Cylinder-, Kegelfläche.

A. Lagebeziehungen.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kugel, eine Gerade und ebenso eine Ebene schneidet, berührt, liegt ganz ausserhalb der Kugel, je nachdem der Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ r ist. (r Halbm.)

2. Ein Punkt und ebenso eine zur Achse parallele Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Cylinderfläche, eine zur Achse nicht parallele Gerade und eine zur Achse parallele Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nach dem der Abstand von der Achse $\lesseqgtr$ r ist. (r Grundkreishalbm.)

3. Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kegelfläche, eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nachdem der Winkel der Geraden oder der Ebene mit der Achse $\lesseqgtr$ der erzeugende Winkel α ist.

4. Eine Ebene, welche eine Kugel schneidet, schneidet sie in einer Kreislinie. — Eine zur Achse parallele Schnittebene einer Cylinderfläche schneidet diese in zwei zur Achse parallelen Mantellinien. — Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Schnittebene schneidet die Kegelfläche in zwei Mantellinien.

5. Eine Berührungsebene an eine Kugel ist (u a.) bestimmt durch zwei Tangenten im Berührungspunkt, eine Berührungsebene an eine Cylinder- und ebenso an eine Kegelfläche ist bestimmt durch Berührungsmantellinie und Grundkreistangente.

6. Das Lot vom Kugelmittelpunkt auf eine Kugelkreisebene, Berührungsebene, Sehne der Kugel geht bezw. durch den Kreismittelpunkt, Berührungspunkt, Halbierungspunkt derselben.

Umkehrungen.

7. Zwei Kugeln berühren sich, wenn sie einen Punkt der Centrale gemeinschaftlich haben und umgekehrt.

Die Centrale zweier sich berührender Kugeln ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser.

8. Ein Punkt der Kugelfläche ist Pol eines Kugelkreises, wenn er von drei Punkten desselben gleiche sphärische Entfernungen hat; er ist Pol eines Grosskreises, wenn er von zwei Punkten desselben sphärische Entfernungen von 90^0 hat.

B. Grössenbeziehungen.

9. Der Grosskreisbogen ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugelfläche.

10. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck zu einem zweiten, so ist auch das zweite Polardreieck zum ersten.

11. Die Bogengrade der Seiten eines sphärischen Dreiecks ergänzen die Winkelgrade der entsprechenden Winkel des Polardreiecks und die Winkelgrade des sphärischen Dreiecks ergänzen die Bogengrade der entsprechenden Seiten des Polardreiecks zu 180^0.

(No. 10 und 11 gelten ebenso für Dreikant und Polardreikant.)

12. Zwei sphärische Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante sind entsprechend gleich, wenn

a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,

b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,

c) die drei Seiten,

d) die drei Winkel,

e) zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich sind und der Gegenwinkel der andern in beiden zugleich $\overset{<}{\underset{>}{=}} 90^0$ ist,

f) zwei Winkel und die Gegenseite des einen gleich sind und die Gegenseite des andern in beiden zugleich $\overset{<}{\underset{>}{=}} 90^0$ ist.

13. In jedem sphärischen Dreieck und jedem Dreikant

a) liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt,

b) liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber und umgekehrt,

c) sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte,

d) sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte,

e) ist, wenn die Summe zweier Seiten $\gtrless 180^0$, auch die Summe der Gegenwinkel $\gtrless 180^0$ und umgekehrt.

14. Ein sphärisches Zweieck verhält sich zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 4 R; oder

$$\text{sphär. Zweieck} = 2 \cdot R^2 \operatorname{arc} \alpha$$

15. Der Inhalt des sphärischen Dreiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der sphärische Exzess zu 8 R; oder

$$\text{sphär. Dreieck} = R^2 \operatorname{arc} (\alpha + \beta + \gamma - 2\,R)$$

16. In einem sphärischen Dreieck liegt

a) die Summe der Winkel zwischen 2 R und 6 R

b) „ „ „ Seiten „ 0 und 4 R.

§ 44. Geometrische Oerter.

1. Eine um Punkt A mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A den Abstand r hat,

b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „

c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „ „

d) „ den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r, die durch A geht.

2. Eine um die Gerade L als Achse mit dem Grundkreishalbmesser r beschriebene Cylinderfläche ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von L den Abstand r hat,

b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „

c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „ „

d) für den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser, die L berührt.

3 Eine Kegelfläche mit der Achse L, der Spitze A und dem erzeugenden Winkel α ist geometrischer Ort

a) für jede durch A gehende Gerade, welche mit L den Winkel α bildet,

b) für jede durch A gehende Ebene, welche mit L den Winkel α bildet,

c) für jede durch A gehende Ebene, welche mit einer zu L senkrechten Ebene den Winkel $R-\alpha$ bildet.

4. Eine zu einer Ebene E im Abstand r auf einer Seite derselben parallel gelegte Ebene ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt auf dieser Seite, der von E den Abstand r hat,

b) für jede parallele Gerade auf dieser Seite, die von E den Abstand r hat,

c) für den Mittelpunkt jeder Kugel auf dieser Seite, die E berührt und den Halbmesser r hat,

d) für die Achse jedes Cylinders auf dieser Seite, der den Grundkreishalbmesser r hat und E berührt.

5. Die Mittellotebene zu einer Strecke AB ist geometrischer Ort.

a) für jeden Punkt, der von A und B gleiche Entfernungen hat,

b) für jede Gerade, die von A und B gleiche Entfernungen hat und mit AB einen rechten Winkel bildet,

c) den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A und B geht.

6) Die Mittellotebene zu einem Winkel ABC ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den Schenkeln gleichen Abstand hat,

b) für jede durch B gehende Gerade, die mit den Schenkeln gleiche Winkel bildet,

c) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche beide Schenkel berührt.

7. Die Halbierungsebene eines Keils (MQ) ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von M und Q gleichen Abstand hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche M und Q berührt.

8. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Umkreismittelpunkt O desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A, B und C gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A, B und C geht.

9. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Inkreismittelpunkt oder einem Ankreismittelpunkt desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seiten gleiche Entfernungen hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seiten berührt.

10. Die Schnittlinie der drei Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Kanten gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Kanten berührt. Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant umbeschriebenen Kegels.

11. Die Schnittlinie der Halbierungsebenen der drei Keile eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seitenflächen gleichen Abstand hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seitenflächen berührt.

Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant einbeschriebenen Kegels.

§ 45. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen. Rauminhalte.

A. Allgemeine Sätze.

1. Eulers Satz: Bei jedem Vielflächner ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um 2 grösser als die Zahl der Kanten,

$$E + F = K + 2.$$

2. Die Anzahl der Kanten ist halb so gross als die der Winkel,

$$K = \frac{1}{2} W.$$

3. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck und es verhält sich der Inhalt des Parallelschnittes zu dem der Grundfläche

wie die Quadrate ihrer Entfernungen oder derjenigen entsprechender Ecken von der Spitze der Pyramide.

4. Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundflächen und sind alle Parallelschnitte, die in denselben Entfernungen von den entsprechenden Grundflächen gelegt sind, einander gleich, so sind die Körper selbst inhaltsgleich.

5. Aehnliche Körper verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen.

B. Berechnungen.

M Mantel, O Oberfläche, G Grundfläche, Q Querschnitt, h Höhe, r Grundkreishalbmesser, R Kugelhalbmesser, a, b, c Kanten, s Mantellinie, S Mittelschnitt, V Rauminhalt.

6. Quader: $O = 2(ab + bc + ca)$
$V = abc$

7. Prisma: $V = G \cdot h = Q \cdot s$

8. Pyramide: $V = G \cdot \frac{h}{3}$

9. Cylinder: $M = 2 r \pi h$
$O = 2 r \pi (h + r)$; $V = r^2 \pi h$.

Für den Hohlcylinder: $V = (r^2 - r_1{}^2) \pi h$

10. Kegel: $M = r \pi s$; $O = r \pi (s + r)$
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

11. Pyramidenrumpf:
$$V = \frac{h}{3} (G + \sqrt{G G_1} + G_1)$$

12. Kegelrumpf:

$$M = (r + r_1)\pi s = 2 p \pi h$$

(p Mittellot zur Mantellinie bis zur Achse).

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r r_1 + r_1^{\,2}).$$

13. Prismatoid:

$$V = \frac{h}{6}(G + G_1 + 4S)$$

14. Schiefabgeschnittenes dreiseit. Prisma.

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}$$

15. Kugel: $O = 4 R^2 \pi$; $V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$

Kugelzone: $O = 2 R \pi h$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3 r^2 + 3 r_1^{\,2} + h^2)$$

Kugelabschnitt:

$$O = 2 R \pi h = (r^2 + h^2)\pi$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3 r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3 R - h)$$

Kugelausschnitt: $V = \frac{2}{3} R^2 \pi h$

Kugelkeil: $V = \frac{\pi R^3 . \alpha^0}{270^0}$

Ellipsoid: $V = \frac{4}{3} \pi abc$

Drehungsellipsoid: $\frac{4}{3} \pi a b^2$ (2a Drehaxe)

Drehungsparaboloid: $V = \frac{1}{2} r^2 \pi h$

Abgestumpftes Drehungsparaboloid:

$$V = \frac{1}{2}\pi (R^2 + r^2) h$$

(R, r Halbmesser der Endflächen, h Höhe)

Wulst: $V = 2\pi^2 R r^2$; $O = 4\pi^2 Rr$

(r Halbm. des gedrehten Kreises, R Abstand seines Mittelpunktes von der Drehachse).

Schief abgeschnittener, gerader Kreiscylinder: $V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$; $M = \pi r (h_1 + h_2)$

(h_1 kürzeste, h_2 längste Mantellinie)

Cylinderhuf: $V = \frac{h}{3b}[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b-r)\varphi]$

$$M = \frac{2rh}{b}[(b-r)\varphi + a]$$

(h längste Mantellinie, 2a Hufkante, b Länge des Lotes vom Fusspunkt von h auf 2a, 2φ Länge des Bogens bezogen auf den Halben. 1).

16. Guldins Sätze. a) Die Oberfläche einer Drehfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege des Schwerpunkts derselben.

Besteht die erzeugende l aus den Teilen $l_1, l_2, l_3 \ldots$, deren Schwerpunkte die Abstände $s_1, s_2, s_3 \ldots$ von der Achse haben, während der Abstand des Gesamtschwerpunktes der Erzeugenden s ist, so ist

$$s\,l = s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + \ldots$$

b) Der Inhalt eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes derselben.

Zerlegt man die erzeugende Fläche i in die Teile i_1, i_2, i_3 . . . und sind die Achsenabstände der Schwerpunkte der ganzen Fläche und der Teile s, s_1, s_2, s_3 . . . ., so ist

$$si = s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3 + \dots$$

17. Regelmässige Körper. R Halbmesser der umbeschriebenen, r derjenige der einbeschriebenen Kugel, a Kante.

Tetraeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$;

$O = a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$.

Würfel. $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $r = \frac{a}{2}$;

$O = 6a^2$; $V = a^3$.

Oktaeder. $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$;

$O = 2a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

Dodekaeder. $R = \frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}$;

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}} = a \operatorname{ctg} 36^0 \cos 36^0;$$

$$O = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})};$$

$$V = \frac{12\,F \cdot r}{3} = 4\,F \cdot r \text{ (F Seitenfläche)}$$

$$= \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) = 5a^3 \operatorname{ctg}^2 36^0 \cos 36^0.$$

Isokaeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$;

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\,a\cos^2 36^0}{\sqrt{3}}$$

$$O = 5\,a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{20\,.\,F\,.\,r}{3} = \frac{5\,a^3}{12}\,(3+\sqrt{5});$$

$$= \frac{10\,a^3}{3}\cos^2 36^0.$$

Ebene Trigonometrie.

I. Goniometrie.

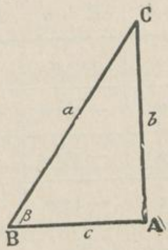
§ 46. Funktionen einfacher Winkel.

1. Erklärung der Funktionen.

a) Am rechtwinkligen Dreieck (a Hypotenuse, b und c Katheten.)

$$\begin{cases} \sin\beta = \frac{b}{a}; & \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}; \\ \cos\beta = \frac{c}{a}; & \operatorname{ctg}\beta = \frac{c}{b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{cosec}\beta = \frac{a}{b}; \\ \sec\beta = \frac{a}{c}. \end{cases}$$



b) Am Koordinatensystem (r Fahrstrahl, x und y Abscisse und Ordinate.)

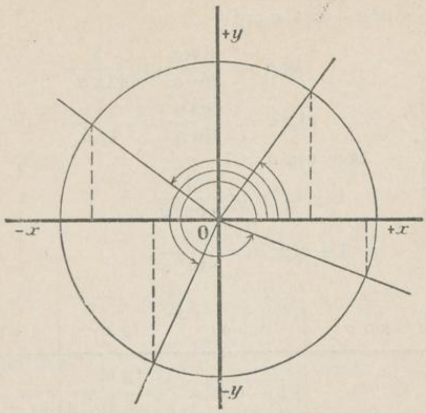
$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{y}{r}; & \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \\ \cos\alpha = \frac{x}{r}; & \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Der sin hat das Vorzeichen der Ordinate, der cos das der Abscisse, tg und ctg haben gleiches Vorzeichen.

c) Vorzeichen in den vier Quadranten:

	sin	cos	tg	ctg
I.	$+$	$+$	$+$	$+$
II.	$+$	$-$	$-$	$-$
III.	$-$	$-$	$+$	$+$
IV.	$-$	$+$	$-$	$-$

2.	$-\alpha$	$R-\alpha$	$R+\alpha$	$2R-\alpha$	$2R+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
	$3R-\alpha$	$3R+\alpha$	$4nR\pm\alpha$		
sin	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin(\pm\alpha)$		
cos	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$\cos(\pm\alpha)$		
tg	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(+\alpha)$		
ctg	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pm\alpha)$		



3. Grenzwerte und besonder: Werte:

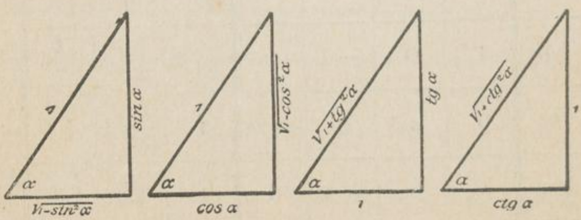
	0° 360°	90°	180°	270°	45°	30°	60°
sin	0	1	0	— 1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	1	0	— 1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	∞	0	— ∞	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ctg	∞	0	— ∞	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

4. Zusammenhang der Funktionen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha}. \end{aligned}\right.$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	



§ 47. Funktionen zusammengesetzter Winkel.

1\.

a) $$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; & \sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; & \cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}; & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha; & 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \\ 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha; & 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \end{cases}$$

2. Umformung von Summen und Differenzen.

a) $$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\,.\,\sin(45^\circ+\alpha) \\ \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\,.\,\cos(45^\circ+\alpha) \\ \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) \\ \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1} = \operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha) \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha \end{cases}$$

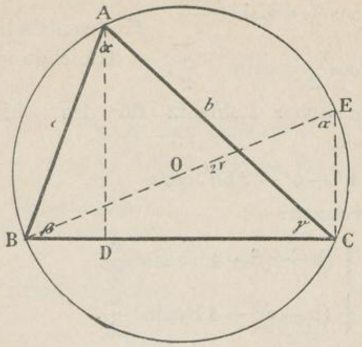
II. Das Dreieck etc.

§ 48. Formeln über das schiefwinklige Dreieck.

1. $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2\,\mathrm{R};\ \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2} = \mathrm{R} \\ \sin(\beta+\gamma) = \sin(2\,\mathrm{R}-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\beta+\gamma) = \cos(2\,\mathrm{R}-\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \sin\left(\mathrm{R}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(\mathrm{R}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

2. $\mathrm{a}:\mathrm{b}:\mathrm{b} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$ (Sinussatz.)

$$\begin{cases} \mathrm{a}\sin\beta = \mathrm{b}\sin\alpha = \mathrm{h}'' \\ \mathrm{b}\sin\gamma = \mathrm{c}\sin\beta = \mathrm{h} \\ \mathrm{c}\sin\alpha = \mathrm{a}\sin\gamma = \mathrm{h}'. \end{cases}$$ (Höhenformel.)



$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2\,r \\ a = 2\,r \sin\alpha \\ b = 2\,r \sin\beta \\ c = 2\,r \sin\gamma. \end{array}\right.$$ (Sehnenformel.)

3. $$\left\{\begin{array}{l} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{array}\right.$$ (Projektionssatz.)

4. $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$ (Neper'sche Gleichgn.)

5. $$\left\{\begin{array}{l} (b+c)\sin\dfrac{\alpha}{2} = a\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} \\ (c+a)\sin\dfrac{\beta}{2} = b\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2} \\ (a+b)\sin\dfrac{\gamma}{2} = c\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ (b-c)\cos\dfrac{\alpha}{2} = a\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} \end{array}\right.$$ Mollweide'sche Gleichgn.)

5. $\begin{cases} (c-a)\cos\frac{\beta}{2} = b\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \\ (a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha-\quad}{2} \end{cases}$ Mollweide'sche Gleichgn.)

6. Pythagoreischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Folgerungen:

$$2.\quad a^2 = \begin{cases} (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} a+b+c=2s & a-b+c=2(s-b) \\ -a+b+c=2(s-a) & a+b-c=2(s-c). \end{array}$$

$$3.\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$4.\quad \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$5.\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a}.$$

7. Inhalt, In- und Ankreishalbmesser.

1. $2J = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta.$

2. $J = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{abc}{4r}.$

3. $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \varrho \cdot s = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c).$

4. $\varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2.$

$$5.\quad \begin{cases} = (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = (s-b)\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = (s-c)\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \\ \varrho_1 = s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2};\quad \varrho_2 = s\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2};\quad \varrho_3 = s\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

$$6.\left\{\begin{array}{l}\varrho = 4\,r \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\ s = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.\end{array}\right.$$

§ 49. Berechnungen.

I. Das rechtwinklige Dreieck,

a Hypotenuse.

1. Gegeben a, β.

$$b = a\sin\beta;\quad c = a\cos\beta.$$

2. Gegeben b, β.

$$a = \frac{b}{\sin\beta},\quad c = b\,\mathrm{ctg}\,\beta.$$

3. Gegeben a, b.

$$\sin\beta = \frac{b}{a},\ c = a\cos\beta = b\,\mathrm{ctg}\,\beta;\ c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

4. Gegeben b, c.

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c};\ a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\cos\beta};\ a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$2\,J = b\,c = a\,b\cos\beta = a\,b\sin\gamma = b^2\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

II. Das gleichschenklige Dreieck.

1. Gegeben b, β.

$$a = 2\,b\cos\beta;\quad h = b\sin\beta.$$

2. Gegeben a, α.

$$b = \frac{a}{2\cos\beta};\quad h = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

3. Gegeben a und b.

$$\cos\beta = \frac{a}{2b};\quad h = b\sin\beta = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$2\,J = b^2\sin\alpha = \frac{a^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

III. Das regelmässige Vieleck.

1. Gegeben a.

$$r = \frac{a}{2} : \sin\frac{180^0}{n}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{180^0}{n};\ J = \frac{n\,a^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\frac{180^0}{n}.$$

2. Gegeben r.

$$a = 2\,r\sin\frac{180^0}{n};\ \varrho = r\cos\frac{180^0}{n};\ J = \frac{n\,r^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}.$$

3. Gegeben ϱ.

$$r = \varrho : \cos\frac{180^0}{n};\ a = 2\,\varrho\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n};\ J = n\,\varrho^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^0}{n}.$$

IV. Segment.

$$\text{Sektor} = \frac{r^2\,\pi\,\alpha^0}{360^0} = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{arc}\,\alpha.$$

$$\Delta = \frac{r^2}{2}\sin\alpha$$

$$\text{Segment} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\,\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right) = \frac{r^2}{2}\,(\mathrm{arc}\,\alpha - \sin\alpha).$$

V. Das schiefwinklige Dreieck.

1. Gegeben a, β, γ.

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma);\ b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha};\ c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

2. Gegeben, b, c, α.

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\beta+\gamma}{2} + \dfrac{\beta-\gamma}{2} \\ \gamma = \dfrac{\beta+\gamma}{2} - \dfrac{\beta-\gamma}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$$

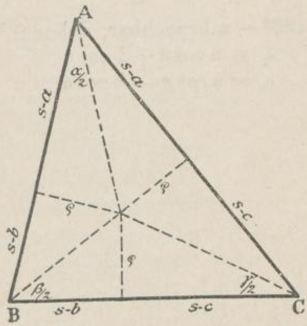
$$(= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha})$$

oder:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b \sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c - b\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

3. Gegeben a, b, c.



1. $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

2. $\varrho = \dfrac{J}{s}.$ $\quad (2s = a + b + c).$

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\varrho}{s-a};\quad \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\varrho}{s-b};\quad \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\varrho}{s-c}.$

Proben: 1. $(s-a)+(s-b)+(s-c) = s.$

$$2.\quad s \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \varrho.$$

$$3.\quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ,$$

4. Gegeben a, b, β.

a) $b > a$.

$$1.\quad \sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b};\quad \alpha < 90^\circ$$

$$2.\quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$3.\quad c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

b) $b < a$; $\sin\alpha = \dfrac{a \sin\beta}{b}$;

hiebei α und $180^\circ - \alpha$ brauchbar, daher 2 Werte für c:

$$c_1 = a\cos\beta + b\cos\alpha$$
$$c_2 = a\cos\beta - b\cos\alpha.$$

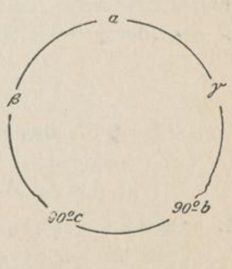
Sphärische Trigonometrie.

§ 50. **Das rechtwinklige sphärische Dreieck.**

I. Formeln (a Hypotenuse).

1. $\cos a = \cos b \cos c$
2. $\cos a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$
3. $\cos \beta = \sin \gamma \cos b$; $\cos \gamma = \sin \beta \cos c$.
4. $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}$; $\sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a}$.
5. $\cos \beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$; $\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$.
6. $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$; $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$.

7. Neper's Regel. Der cos irgend eines der wie nebenstehend angeschriebenen Stücke ist gleich dem Produkt der sin der getrennten und gleich dem Produkt der ctg der anliegenden Stücke.



Hiedurch können die Formeln 1—6 mechanisch abgeleitet werden.

II. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

1. Gegeben a, b.

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \ \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

2. Gegeben b, c.

$$\cos a = \cos b \cos c; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

3. Gegeben a, β.

$$\operatorname{ctg} \gamma = \cos a \operatorname{tg} \beta.$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta; \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos \gamma.$$

4. Gegeben b, β.

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ (zwei Werte für a).}$$

$$\operatorname{ctg} \gamma = \cos a \operatorname{tg} \beta; \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta.$$

5. Gegeben b, γ.

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos \gamma}; \quad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} \gamma; \quad \cos \beta = \cos b \sin \gamma.$$

6. Gegeben β, γ.

$$\cos a = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma; \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}; \quad \cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.$$

Determ. Sind β und γ gleichartig, so muss $\beta + \gamma > 90^\circ$ und $< 270^\circ$ sein; sind β und γ ungleichartig, so muss $\beta - \gamma$ oder $\gamma - \beta < 90^\circ$ sein (s. 43,13$_{c,\,d}$).

§ 51. Das schiefwinklige Dreieck.

A. Formeln.

I. $$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{cases}$$ a, b, c, α; Cosinussatz.

II. $$\begin{cases} \sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma; \\ \sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha = h'' \\ \sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta = h \\ \sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma = h' \end{cases}$$ a, b, α, β; Sinussatz.

III.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin a \cos\beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha; \quad a, b, c, \alpha, \beta: \\
\sin a \cos\gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha; \\
\sin b \cos\gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta; \\
\sin b \cos\alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta; \\
\sin c \cos\alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma; \\
\sin c \cos\beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma.
\end{array}\right.$$

IV.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}; \quad a, b \pm c, \beta \pm \gamma; \\
\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\
\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} \\
\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}
\end{array}\right.$$

Delambre'sche bezw. Gauss'sche Gleichungen

V.
$$\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{tg}\frac{b+c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \left|\begin{array}{l} a, b \pm c, \beta+\gamma, \beta-\gamma \\ a, \beta \pm \gamma, b+c, b-c \end{array}\right. \\
\operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \\
\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} \\
\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}
\end{array}\right.$$

Nepersche Gleichungen.

VI.
$$a + b + c = 2s.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}; \quad \alpha, a, b, c$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}.$$

VII. $$\begin{cases} S=\sqrt{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \\ \sin\alpha=\dfrac{2\,S}{\sin b\sin c}; \quad \alpha,\ a,\ b,\ c \end{cases}$$

(S Eckensinus.)

VIII. $$\begin{cases} k=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin(s-a)}{k} \qquad \alpha,\ a,\ b,\ c \end{cases}$$

IX. $$\begin{cases} \varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ \text{ (sph. Exzess)} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{s}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{s-c}{2}} \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}}. \end{cases}$$

(L'Huilier'sche Gleichung.)

Polarformeln.

Ib) $$\begin{cases} \cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a;\ a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma. \\ \cos\beta=-\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b \\ \cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c. \end{cases}$$

IIIb) $$\begin{cases} \sin\alpha\cos b=\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos a;\ a,\ b,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \\ \sin\alpha\cos c=\cos\gamma\sin\beta+\sin\gamma\cos\beta\cos a \\ \sin\beta\cos c=\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos b \\ \sin\beta\cos a=\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma\cos b \\ \sin\gamma\cos a=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\cos c \\ \sin\gamma\cos b=\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\cos c. \end{cases}$$

VII b) $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2\sigma; \\ \Sigma=\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}; \\ \sin a=\dfrac{2\Sigma}{\sin\beta\sin\gamma}; \\ \sin b=\dfrac{2\Sigma}{\sin\gamma\sin\alpha};\ \sin c=\dfrac{2\Sigma}{\sin\alpha\sin\beta}. \end{cases}$$

VIII b) $$\begin{cases} k'=\sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'} \\ \operatorname{tg}\dfrac{b}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\beta)}{k'};\ \operatorname{tg}\dfrac{c}{2}=\dfrac{\cos(\sigma-\gamma)}{k'}. \end{cases}$$

IX b) $$\begin{cases} d=360^0-(a+b+c)\ (\text{sph. Defekt}) \\ \operatorname{tg}\dfrac{d^0}{4}= \\ \sqrt{-\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\sigma-\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\sigma-\beta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\sigma-\gamma}{2}\right)} \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{d}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\sigma-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma-\alpha}{2}}} \end{cases}$$

X. **Sphärischer Umkreishalbmesser R.**

$$\begin{cases} \dfrac{\sin a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}=\dfrac{\sin c}{\sin\gamma}=2\operatorname{tg}R\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2} \\ \operatorname{ctg}R=k'\ (\text{s. VIII}). \end{cases}$$

XI. **Sphärischer Inkreishalbmesser ϱ.**

$\operatorname{tg}\varrho=k$ (s. VIII).

XII. Inhalt des phär. Dreiecks s. § 43_{15}.

B. Berechnungen.

1. **Gegeben a, b, c.**

1. $a+b+c=2s$, $s-a=\ldots$, $s-b=\ldots$, $s-c=\ldots$

2. k aus VIII.

3. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(s-a)}{k}$; $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{k}$;

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin(s-c)}{k}.$$

Proben: 1. $(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$

2. $\frac{1}{\sin s}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{k}$

2. Gegeben α, β, γ.

1. $2\sigma=\alpha+\beta+\gamma$; $\sigma-\alpha=\ldots$, $\sigma-\beta=\ldots$, $\sigma-\gamma=\ldots$
2. $k'=$ s. VIII b,
3. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'}$, u. s. w. s. VIII b.

Proben: 1. $(\sigma-\alpha)+(\sigma-\beta)+(\sigma-\gamma)=\sigma$

2. $-\frac{1}{\cos\sigma}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{1}{k'}$.

3. Gegeben b, c, α.

1. $$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}}=\frac{Z}{N}\quad\text{(s. V.)}$$

2. $$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{b+c}{2}}=\frac{Z'}{N'}.$$

3. $$\begin{cases}\beta=\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}\\ \gamma=\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}\end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \cos\frac{a}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \overset{\text{oder}}{=} \frac{N}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad \text{(s. IV.), oder} \\ \sin\frac{a}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \end{cases}$$

Ist nur a verlangt, dann dies aus I.

4. Gegeben β, γ, a.

$$1.\ \operatorname{tg}\frac{b+c}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z}{N} \text{ (s. V).}$$

$$2.\ \operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{Z'}{N'}.$$

$$3. \quad \begin{cases} b = \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ c = \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2}. \end{cases}$$

$$4. \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{b+c}{2}} \text{ oder} = \frac{N}{\cos\frac{b+c}{2}} \text{ s. IV, oder}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{b-c}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{b-c}{2}}.$$

Ist nur α verlangt, dann dieses aus Ib.

5. Gegeben a, b, α.

$$1.\ \sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}.$$

$$2.\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ oder}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ (s. V).}$$

$$3.\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.$$

Determination. Für β ergeben sich aus 1. im allgemeinen zwei Werte. Bei der Bestimmung ist zu berücksichtigen, dass

$$\text{wenn } a \gtreqless b, \text{ dann } \alpha \gtreqless \beta$$

$$\text{und } a + b \gtrless 180^\circ, \text{ dann } \alpha+\beta \gtrless 180^\circ$$

(s. § 53, 13 b und e).

6. Gegeben α, β, a.

1. $\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$.

2. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} =$ s. 5,3.

3. $\operatorname{tg}\frac{c}{2} =$ s. 5,2.

Determination s. ebenfalls vorige Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgaben 2, 4, 6 sind die Polarfälle zu den Aufgaben 1, 3, 5; ihre Lösung kann daher durch Uebergang auf das Polardreieck auf die Lösung der Aufgaben 1, 3, 5 zurückgeführt werden.

Mathematische Geographie.

I. Beobachtungsmittel.

§ 52. Koordinatensysteme.

A) Zenitlinie, Horizont.

1. Zenitlinie = Vertikallinie durch den Beobachtungsort; ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel heissen Zenit (Scheitelpunkt) und Nadir (Fusspunkt).

2. Horizont (wahrer Horizont), die durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Zenitlinie gelegte Ebene; scheinbarer Horizont = Berührungsebene an die Erdkugel im Beobachtungsort; scheinbarer Horizont parallel dem wahren. — Horizontalkreise senkrecht zur Zenitlinie.

3. Ost- und Westpunkt, Schnittpunkte des Horizonts mit dem Himmelsäquator (s. B); Süd- und Nordpunkt je um 90° vom Ost- und Westpunkt abstehend, Mittagslinie verbindet diese beiden.

4. Vertikalkreise (Höhenkreise), Schnittkreise der durch die Zenitlinie gelegten Ebenen mit der Himmelskugel, sie sind senkrecht zum Horizont; erster Vertikal geht durch Ost- und Westpunkt.

B) Weltaxe, Aequator.

5. Weltaxe, verlängerte Erdaxe, Drehungsaxe der Himmelskugel; Weltpole (Nordpol, Südpol) Schnittpunkte der Weltaxe mit der Himmelskugel.

6. Aequatorebene durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Weltaxe.

7. Meridiane oder Deklinationskreise, Grosskreise durch die Weltpole, senkrecht zum Aequator; Hauptmeridian durch Zenit, durch Süd- und Nordpunkt.

8. Polhöhe = Neigungswinkel der Weltaxe gegen den Horizont. Aequatorhöhe = Neigungswinkel der Aequatorebene gegen den Horizont.

Polhöhe = geographischer Breite.

Die Polhöhe h_p wird bestimmt durch Beobachtung der Aequatorhöhe h_a zur Aequinoktialzeit, $h_p = 90^0 - h_a$ oder als arithmetisches Mittel aus oberer und unterer Kulminationshöhe eines Circumpolarsternes. — Aus der Polhöhe erhält man die geographische Breite.

9. Sichtbare Sterne für einen Ort von der geographischen Breite φ sind diejenigen, deren Abstand vom sichtbaren Pol $< 180^0 - \varphi$, vom unsichtbaren $> \varphi$ ist.

10. Circumpolarsterne, Abstand vom sichtbaren Pol $\leqq \varphi$.

C) Ekliptik, Axe der Ekliptik.

11. Ekliptik = scheinbare jährliche Bahn der Sonne, Ebene der Erdbahn.

12. Schiefe der Ekliptik = Neigung der Ekliptik gegen den Aequator; sie ist veränderlich, für den Anfang des Jahres 1900 23° 27′ 8″.

13. Axe der Ekliptik = Lot im Erdmittelpunkt auf der Ekliptik; Endpunkte dieser Axe Pole der Ekliptik.

14. Tag- und Nachtgleichepunkte = Schnitt-

punkte der Ekliptik mit dem Aequator, *Frühlingsäquinoktium* (Frühlings- oder Widderpunkt ♈) und *Herbstäquinoktium*; Sonnenwendepunkte oder *Solstitien* stehen von den vorigen je um 90° ab.

15. *Breitenkreise*, Grosskreise durch die Ekliptikpole, $\perp$ zur Sonnenbahn.

§ 53. Lagebestimmung.

1. System A. — Grundkreise: Hauptmeridian und Horizont.

Höhe h gezählt auf dem Vertikalkreise vom Horizont aus, 0° — 90° nördl. oder südl.

Azimut a (A) gezählt auf dem Horizont vom Südpunkt aus über W, N, O von 0° — 360°. Ermittlung dieser Koordinaten durch den Theodolit, Höhe auch durch den Sextanten und annähernd durch Schattenlänge $\left(\mathrm{tg}\, h = \frac{1}{s}\right)$.

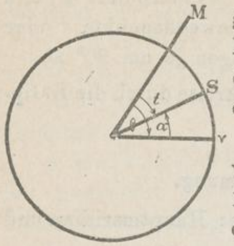
2. System B.

a) *Deklination* δ, nördlich (+) oder südlich (—), sphärischer Abstand des Sterns vom Aequator; *Poldistanz* $90° - \delta$.

Stundenwinkel t = Aequatorialbogen zwischen Meridian des Beobachtungsortes und Meridian des Sterns, gezählt von dem ersteren aus von 0°—360° über W und N (wie das Azimut); statt Gradzählung auch Stundenzählung (15° = 1 St.) ringsherum 0 — 24^h, oder nach beiden Seiten.

Messung durch Aequatoreal.

b) Deklination δ, wie in a, und



Rektascension α (A. R.), gezählt im Aequator vom Frühlingspunkt (♈) aus, entgegengesetzt dem Sinn der täglichen Bewegung der Sonne von 0°—360°.

Sternzeit Θ = Stundenwinkel des Frühlingspunktes, z. B. 1^h Sternzeit, wenn Stundenwinkel des Frühlingspunktes 15°. $\Theta - t = \alpha$.

Messung mit Passage-Instrument und Uhr nach Sternzeit.

3. System C.

Breite β nördlicher oder südlicher Abstand des Sterns von der Ekliptik, gezählt von der Ekliptik aus.

Länge λ, Bogen der Ekliptik zwischen Frühlingspunkt und Breitenkreis, gezählt vom Frühlingspunkt aus im Sinn von α, von 0°—360°.

4. Sternbilder.

Die zwölf Sternbilder des Tierkreises sind:

Widder	♈	Löwe	♌	Schütze	♐
Stier	♉	Jungfrau	♍	Steinbock	♑
Zwillinge	♊	Wage	♎	Wassermann	♒
Krebs	♋	Skorpion	♏	Fische	♓

§ 54. Die Zeit.

1. Sterntag à 24 Sternstunden = Zeit zwischen 2 oberen Kulminationen eines Sterns, = Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde. 0^h Sternzeit, wenn der Frühlingspunkt im Meridian; Dauer eines Sterntags $23{,}935^h = 23^h\ 56^m\ 4^s$ m. Z.

2. Mittlerer Sonnentag = bürgerlicher Tag, = Zeit zwischen 2 Kulminationen der gedachten, im Aequator mit gleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Sonne.

3. Zeitgleichung = Differenz zwischen wahrer und mittlerer Zeit.

4. Tropisches Jahr = scheinbare Umlaufszeit der Sonne, von ♈ Punkt zu ♈ Punkt = 365,2422 m. T. = 365 T. 5^h 48^m 46^s m. Z. = 366,2422 Sterntage.

5. Siderisches Jahr = wirkliche Umlaufszeit der Erde von Fixstern zu Fixstern = 365,2564 mittl. Tage = 365 T. 6^h 9^m 11^s m. Z. = 366,2564 Sterntage.

6. Siderischer Monat = Umlauf von Fixstern zu Fixstern = 27,32 Tg.

7. Synodischer Monat = Zeit von Neumond zu Neumond (d. h. von Sonne zu Sonne) 29,53 Tg.

8. Astronomische Jahreszeiten.

Beginn des Frühlings am 21. März, Sonne im Aequator, im ♈ Punkt, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Sommers am 21. Juni, Sonne im Wendekreis des Krebses, längster Tag (Sommersolstitium).

Beginn des Herbstes am 23. September, Sonne im Aequator, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Winters am 21. Dezember, Sonne im Wendekreis des Steinbocks, kürzester Tag (Wintersolstitium).

II. Das Sonnensystem.

§ 55. Die Erde.

A) Gründe für die Kugelgestalt.

1. Erscheinungen infolge der Ortsveränderungen auf einem Meridian oder einem Parallelkreis.

2. Schattenform bei Mondfinsternissen und die Gestalt der andern Himmelskörper.

3. Depression des Horizonts.

4. Umschiffungen der Erde in verschiedenen Richtungen.

5. Ergebnisse der Gradmessungen.

B) Gründe für die Rotation.

1. Ablenkung der Luftströmungen.

2. Oestliche Abweichung fallender Körper.

3. Foucault'scher Pendelversuch.

4. Rotation anderer Weltkörper.

5. Abplattung der Erde ($^1/_{296}$ bis $^1/_{300}$).

§ 56. Planeten, Sonne und Mond.

	Aequatorialhalbmesser	Mittlere Entfernung von der Sonne	Dichte	Masse	Rotationsdauer	Umlaufszeit	Anzahl der Trabanten
Merkur ☿	0,38	0,39	1—2	0,06	88 T.	88 T.	—
Venus ♀	0,99	0,72	0,83	0,81	$224^2/_3$ T.	$224^2/_3$ T.	—
Erde ♁	1 (= 6377,4 km)	1*)	1	1**)	24^h	$365^1/_4$ T.	1
Mars ♂	0,53	1,52	0,72	0,105	$24^1/_2{}^h$	1 J. 322 T.	2
Planetoiden		2,2—4,3				3—9 J.	—
Jupiter ♃	11,06	5,20	0,24	311	10^h	11 J. 315 T.	5
Saturn ♄	9,26	9,54	0,13	93,4	$10^1/_4{}^h$	29 J. 167 T.	8
Uranus ♅	3,93	19,19	0,27	14,4	12^h?	84 J. 7 T.	4
Neptun ♆	4,35	30,11	0,21	16,7		164 J. 280 T.	1
Sonne	108,5	—	0,25	326800	$25^1/_2$ T.		
Mond	0,272	60,3 Erdhalbm.	0,60	0,012	$29^1/_2$ T.		

*) 148,7 Millionen km = 20 Millionen Meilen.

**) Auf Wasser = 1 bezogen ist die Dichte der Erde 5,6

§ 57. Weltsysteme.

1. Ptolemäisches System. Die Erde ist Mittelpunkt des Weltalls, um sie bewegen sich Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Unregelmässigkeiten in der Bewegung werden durch Epicykeln erklärt.

2. Coppernicanisches System. Die Sonne steht still, um sie bewegen sich Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn in kreisförmigen, exzentrischen Bahnen.

3. Keplers Gesetze.

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der Planet bewegt sich so, dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen.

§ 58. Berechnungsaufgaben.

1. Flächeninhalt J einer Zone zwischen den geographischen Breiten φ_1 und φ_2:

$$J = 2\,r\pi h = 2\,r\pi\,(r\sin\varphi_1 - r\sin\varphi_2)$$
$$= 4\,r^2\pi\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2},$$

der Teil dieser Zone, der von den Meridianen zur Länge λ_1 und λ_2 begrenzt wird, ist

$$J = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^0}{360^0}\,4\,r^2\pi\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}.$$

(Berechnung des Inhalts von Kartenblättern.)

2. Kimm und Kimmtiefe. — Kimm = Kreis, welcher den scheinbaren Horizont begrenzt (Halbmesser

a = Sehne = Bogen); Kimmtiefe (α'') = Winkel zwischen dem Sehstrahl nach der Kimm und der Horizontalen, Höhe des Beobachtungspunktes h.

1. $a = \sqrt{2rh}$
2. $\alpha'' : \dfrac{180.60.60''}{\pi} = a : r$ oder $\alpha'' = \sqrt{\dfrac{2h}{r}} . 206\,265''$,

hiebei ist von der Strahlenbrechung, welche a vergrössert und α verkleinert, abgesehen.

3. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Systeme A und B (s. § 51). In dem Dreieck Zenit-Pol-Stern sind die Seiten $ZP = 90^0 - \varphi$, $ZS = 90^0 - h$, $PS = 90^0 - \delta$; die ZS und PS gegenüberliegenden Winkel sind t (bezw. $360^0 - t$) und $180^0 - a$. Aus den Formeln I—III des § 51 folgt, wenn

1. a und h gegeben, t und δ gesucht (φ ist als bekannt vorausgesetzt):

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos a \\ \cos\delta \sin t = \cos h \sin a \\ (\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a). \end{cases}$$

2. t und δ gegeben, gesucht a und h.

$$\begin{cases} \sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t \\ \cos h \sin a = \cos\delta \sin t \\ \cos h \cos a = -\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t). \end{cases}$$

4. Parallaxe; Entfernung eines Gestirns.

a) Höhenparallaxe p = Winkel, unter welchem vom Gestirn aus der zum Beobachtungsort gehörige Erdhalbmesser r erscheint, = Unterschied der Höhenwinkel über dem wahren und über dem scheinbaren Horizont

$$p = h' - h;$$

die Entfernung R des Gestirns ist dann

$$R = \frac{r \cos h}{\sin p}.$$

b) Ist das Gestirn im Horizont, dann heisst p die Horizontparallaxe (π),

$$R = \frac{r}{\sin \pi}$$

Ist der in Frage kommende Halbmesser ein Aequatorhalbmesser, so heisst p die Aequatorial-Horizontalparallaxe.

c) Bei Fixsternen ist die Parallaxe des Erdhalbmessers (tägl. Parallaxe) verschwindend; man benützt für sie die Parallaxe des Erdbahnhalbmessers, die jährliche Parallaxe; sie ist bei keinem Fixstern über 1″.

d) Die Parallaxe des Mondes kann aus direkter Beobachtung ermittelt werden; die Horizontalparallaxe beträgt für denselben im Mittel 57′ 2,5″.

e) Die Parallaxe der Sonne ist zur Bestimmung durch direkte Beobachtung zu klein; die mittlere Aequatorial-Horizontal-Parallaxe kann gefunden werden aus den Marsoppositionen und dem dritten Keplerschen Gesetz (aus der Parallaxe des Mars zunächst seine Entfernung $d = R_1 - R$ von der Erde, dann folgt aus $R_1^3 : R^3 = t_1^2 : t^2$, $(R_1 - R) : R = \left(\sqrt[3]{t_1^2} - \sqrt[3]{t^2}\right) : \sqrt[3]{t^2}$), oder durch die Methode der Venusdurchgänge, oder aus der Messung der Parallaxe eines Planetoiden (z. B. Flora); ihr Wert ist etwa 8,85″.

f) Ausser vermittelst der Parallaxe kann die Entfernung der Sonne noch durch andere Mittel gefunden werden, insbesondere aus der Geschwindigkeit des Lichts und der Zeit, welche dasselbe braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen (Verfinsterung der Jupiterstrabanten).

5. **Auf- und Untergang der Gestirne, Tageslänge.** Aus § 58$_{3,2}$ folgt für $h = 0$

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Tageslänge ist gleich dem doppelten Stundenwinkel t_0 (für $h=0$) der Sonne. Ergiebt sich aus δ und φ z. B. $t_0 = 120^0 = 8^h$, so ist die Tageslänge 16^h.

Für Morgen- und Abendweite w (Bogen zwischen Ost- und Aufgangspunkt, bezw. zwischen West- und Untergangspunkt) ist.

$$\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Für das Azimut a_0 des Aufgangspunktes ist

$$\cos a_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

6. Entfernung e zweier Punkte $(\lambda_1, \varphi_1; \lambda_2, \varphi_2)$ auf der Erdoberfläche

$$\cos e = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Liegen beide auf demselben Meridian, dann ist $e = \varphi_1 - \varphi_2$.

Liegen sie auf demselben Parallelkreis, dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und daher

$$\sin \frac{e}{2} = \cos \varphi \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Analytische Geometrie.

I. Geometrie der Ebene.

§ 59. Aenderung des Koordinatensystemes.

x, y Koordinaten, OX, OY Axen des ursprünglichen Systems, x′, y′ Koordinaten, OX′, OY′ Axen des neuen Systems, a, b Koordinaten des neuen Ursprungs.

1. Parallele Verschiebung der Axen:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y'. \end{cases}$$

2. Drehung eines rechtwinkligen Systems um den Ursprung um den Winkel φ:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

3. Verschiebung und Drehung jeder Axe (Aenderung des Winkels zwischen den Axen):

$$\begin{cases} x = a + \dfrac{x' \sin(X'Y) + y' \sin(Y'Y)}{\sin(XY)} \\ y = b + \dfrac{x' \sin(X'X) + y' \sin(Y'X)}{\sin(YX)}. \end{cases}$$

§ 60. Allgemeine Sätze.

1. Der Grad einer Gleichung wird durch Verwandlung des Koordinaten-Systems nicht geändert.

2. Die Bedingung dafür, dass der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 auf der Linie liegt, deren Gleichung $F(x, y) = 0$, ist $F(x_1, y_1) = 0$.

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abscissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der Xaxe; aus $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Yaxe.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 61. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Axen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen), φ der Winkel der Geraden mit der + Xaxe, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der + Xaxe bildet.

1. Gleichung der Geraden:*)

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0$,

zweite " $y = mx + b$

dritte " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

vierte " $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ (Normalform.)

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung
für die allgemeine Form $L = 0$,
„ „ Normalform $l = 0$.

Axenabschnitte: $a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m}$; $b = -\frac{C}{B}$

Winkel mit der Xaxe bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B} = m = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

2. Besondere Fälle:

$x = a$ Gleichg. einer Geraden ‖ zur Yaxe
$y = b$ „ „ „ ‖ „ X „
$\left\{\begin{array}{l} Ax + By = 0 \\ y = mx \end{array}\right.$ „ „ „ durch den Ursprung
$y = 0$ „ der Xaxe
$x = 0$ „ „ Y „
$0.x + 0.y + C = 0$ „ „ ∞ fernen Geraden.

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1)

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$, oder
$y - y_1 = m(x - x_1)$, oder
$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha = 0$

(durch ein veränderliches m, bezw. α erhält man ein Strahlenbüschel.)

4. Gerade durch zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ oder } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

oder $(x_1 - x_2)y - (y_1 - y_2)x = x_1 y_2 - x_2 y_1$, oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass 3 Punkte in ger. Linie liegen.)

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1)

$$x_1 y - y_1 x = 0$$

5. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Ax+By+C_1=0 \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} y=mx+b \\ y=mx+b_1, \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \\ x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0 \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax+By+C=0$ und $A_1x+B_1y+C_1=0$ sind parallel, wenn $A:A_1=B:B_1$

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{oder} \quad y=mx+b$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \quad \text{„} \quad y-y_1=m(x-x_1)$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ Bx-Ay+C_1=0 \end{cases} \begin{matrix}\text{oder} \\ \text{„}\end{matrix} \begin{cases} y=mx+b \\ y=-\frac{1}{m}x+b_1. \end{cases}$$

Die Geraden

$$\begin{matrix} Ax+By+C=0 \\ \text{u. } A_1x+B_1y+C_1=0 \end{matrix} \Big\{ \text{ oder } \begin{matrix} y=mx+b \text{ u.} \\ y=m_1x+b_1 \end{matrix}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1+BB_1=0 \text{ oder } mm_1+1=0$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax+By+C=0$ ist:

$$B(x-x_1)-A(y-y_1)=0$$

8. Drei Gerade $Ax+By+C=0$, $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

$$A(B_1C_2-B_2C_1)+B(C_1A_2-C_2A_1)+C(A_1B_2-A_2B_1)=0$$

oder wenn die Zahlfaktoren λ, λ_1, λ_2 sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax+By+C)+\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)\equiv 0.$$

§ 62. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes P einer Strecke P_1P_2, Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $[P_1P:PP_2 = m:n = \lambda:1]$

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n} \overset{\text{od.}}{=} \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n} \overset{\text{od.}}{=} \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Sind m und n ungleichzeichig, bezw. ist λ negativ, so liegt P ausserhalb P_1P_2.

Für den Halbierungspunkt ist:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\quad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$

$$2(x_1x_2+\xi_1\xi_2)=(x_1+x_2)(\xi_1+\xi_2)$$

$$2(y_1y_2+\eta_1\eta_2)=(y_1+y_2)(\eta_1+\eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y=m_1x \qquad y=n_1x$$

$$y=m_2x \qquad y=n_2x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1m_2+n_1n_2)=(m_1+m_2)(n_1+n_2).$$

4. Entfernung e zweier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$e=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1), welche mit der Xaxe den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet:

$$y-y_1=(x-x_1)\operatorname{tg}\varphi$$

6. W i n k e l φ z w i s c h e n z w e i G e r a d e n bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1} = \pm\frac{m_1 - m}{mm_1 + 1} \quad (\text{vgl. § } 61_5 \text{ und } _7)$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\varphi}{1 - m\operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}};$$

das Zeichen wird so gewählt, dass p positiv wird.

9. A b s t a n d e d e s P u n k t e s (x_1, y_1) v o n d e r G e r a d e n $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$
$$= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. E n t f e r n u n g e z w e i e r p a r a l l e l e r G e r a d e n (s. § 61_5)

$$e = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = p - p_1.$$

11. H a l b i e r u n g s l i n i e des Winkels zweier Geraden

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}} \quad \text{oder}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \pm(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1).$$

Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen

Gleichungen $l = 0$, $l_1 = 0_1$ dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0.$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

$$\pm J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big).$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J = 0$, vergl. § 61₄. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

13. Inhalt J eines Dreiecks aus den Gleichungen der drei Seiten (Bez. s. § 10_1)

$$\pm 2 J = \frac{(\Sigma \pm A B_1 C_2)^2}{(AB_1 - A_1 B)(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_2 B - A B_2)}.$$

Gehen die Geraden durch einen Punkt, so ist $2 J = 0$, vergl. § 61 8, sind irgend zwei parallel, so ist $2 J = \infty$, vergl. § 61 5.

14. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken

$$\pm 2 J = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \dots + x_n(y_1 - y_{n-1}).$$

§ 63. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen P und der Polaraxe.

1. Lot zur Polaraxe:

$$r \cos \varphi = p$$

2) Parallele zur Polaraxe:

$$r \sin \varphi = p.$$

3. Gleichung der Geraden:

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p$$

4. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} r\cos(\varphi-\alpha)=p \\ r\cos(\varphi-\alpha)=p_1. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1-\alpha=R.$$

6. Entfernung e zweier Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2)

$$e=\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}-2\,r_1\,r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

7. Inhalt des Dreiecks $C\,P_1\,P_2$

$$J=\pm\frac{1}{2}\,r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$

$$J=\pm\frac{1}{2}\left\{r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right.$$
$$\left.+\,r_3\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)\right\}.$$

9. Bedingung dafür, dass drei Punkte in gerader Linie liegen

$$r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)+r_3\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)=0.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2):

$$r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r\sin(\varphi-\varphi_2)+r\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi)=0.$$

§ 64. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1=0$, $l_2=0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1-\lambda\,l_2=0.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefällten Lote (Sinusteilverhältnis)

$$\lambda = \frac{\sin(l_1\, l_3)}{\sin(l_3\, l_2)}$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \varkappa L_2 = 0.$$

$\varkappa$ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{matrix}$$

das Doppelverhältnis (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels d. h.

$$\frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \text{ ist}$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 \end{cases}.$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ u. s. w. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$L_1 - \lambda_1 L_2 = 0, \quad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$
$$M_1 - \lambda_1 M_2 = 0, \quad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heissen projektivisch.

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 65. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehenden Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0.$$

Hiebei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefasst werden als Grössen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.

§ 66. Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes; Punktreihe; projektivische Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Ist die Gleichung irgend einer Geraden

$$ux + vy + 1 = 0,$$

so ist die Lage der Geraden durch die Konstanten u und v gegeben; sie heissen daher die Koordinaten jener geraden Linie oder Linienkoordinaten. u und v sind die negativen reziproken Werte der Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenaxen macht.

2. Alle Geraden, deren Koordinaten einer Gleichung

$$(1)\quad Au + Bv + C = 0$$

genügen, gehen durch einen Punkt, dessen Koordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ sind; die Gleichung (1) heisst allgemeine Gleichung des Punktes. Die Gleichung

$$(2)\quad au + bv + 1 = 0$$

heisst die Normalform der Gleichung des Punktes.

3. Eine Gleichung nten Grades in u und v stellt eine von Geraden eingehüllte Kurve dar; bestimmt man aus dieser Gleichung und der Gleichung eines Punktes die gemeinschaftlichen Werte von u und v, so ergeben sich aus denselben n Tangenten an die Kurve; diese heisst eine Linie nter Klasse. Die Ordnungszahl giebt die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden an, die Klassenzahl die Anzahl der Tangenten der Kurve, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

4. Sind $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ die Gleichungen zweier Umhüllungslinien, so stellt $\Sigma + \lambda \Sigma_1 = 0$ eine Umhüllungslinie dar, welche alle gemeinschaftlichen Tangenten von $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ berührt (vgl. § 70_4).

5. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte P_1 und P_2, so ist

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 67. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 68. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b), Halbmesser r.

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1)\quad \mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.}$$

2. (2) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$a = -\frac{A}{2},\ b = -\frac{B}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berührt der Kreis die X-, bezw. die Y axe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

(3) $x^2 + y^2 = r^2$ (Mittelpunktsgleichung).

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$y^2 = 2rx - x^2$ (Scheitelgleichung).

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \text{ oder } y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1), Mittelpunkt (0, 0):

(1) $x x_1 + y y_1 = r^2$,

Mittelpunkt (a, b):

(2) $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$.

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der X axe macht, mit α, so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = r$$
$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1},\ b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$x' x_1 + y' y_1 = r^2$$
$$x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = r^2.$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2} (x - x').$$

8. **Polare** (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des **Pols** der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{A r^2}{C},\ y_1 = -\frac{B r^2}{C}.$$

9. **Kreis durch drei Punkte** (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$
$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$$
$$(x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 = r^2,$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x, & y, & 1 \\ x_1^{\,2} + y_1^{\,2}, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^{\,2} + y_2^{\,2}, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^{\,2} + y_3^{\,2}, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreis liegen.)

10. **Zwei Kreise**

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1$, $B = B_1$.

11. **Potenzlinie** (s. § 41) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 41_8 und § 60_4).

§ 69. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, $\sphericalangle MOX = \alpha$, $\sphericalangle POX = \varphi$, $OP = \varrho$, $OM = d$, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\varrho \cos\varphi - d\cos\alpha)^2 + (\varrho\sin\varphi - d\sin\alpha)^2 = r^2 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos\varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\varrho = 2r\cos\varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ϱ_1 und ϱ_2, so ist

$$d\cos(\varphi - \alpha) = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d\sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 70. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

$\left.\begin{array}{l}\text{Grosse Axe } 2a \\ \text{kleine \quad „ \quad } 2b\end{array}\right\}$ bei Ellipse und Hyperbel;

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist $p = \frac{b^2}{a}$.

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

$$\text{Ellipse } f = \sqrt{a^2 - b^2};\ f < a.$$

Hyperbel $f = \sqrt{a^2 + b^2}$; $f > a$.

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$;

Numerische Exzentrizität bei Ellipse u. Hyperbel $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε giebt zugleich das Verhältnis der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die Ellipse, Parabel, Hyperbel bezw. $\varepsilon \lesseqgtr 1$.

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form

$$\text{I.}\quad y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2;$$

(gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$. $\varepsilon = 0$ giebt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & \text{(Ellipse)} \\ y^2 = 2px & \text{(Parabel)} \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Ellipse)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

4. **Polargleichung.**

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Axe bezw. grosse Axe ist Polaraxe, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$.

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die grosse Axe Polaraxe

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Ellipse)};$$

$$\varrho^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Hyperbel)}.$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. **Sekante** durch die beiden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1 + y_2) y - y_1 y_2 = 2 p x \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1 + x_2) x}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2) y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)} (x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1 + x_2)\,x}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)\,y}{b^2} = \frac{x_1\,x_2}{a^2} - \frac{y_1\,y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{b^2\,(x_1 + x_2)}{a^2\,(y_1 + y_2)}\,(x - x_1).$$

6. Tangente im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $y\,y_1 = p\,(x + x_1)$.

2. Ellipse: $\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1,$

3. Hyperbel: $\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1,$

7. Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ist der Asymptotenwinkel 2φ, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten auf einander senkrecht.

Ein Durchmesser $y = m\,x$ schneidet, berührt in einem unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \lesseqgtr \frac{b^2}{a^2}$.

8. Normale im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $p\,(y - y_1) + y_1\,(x - x_1) = 0$, oder

$$x\,y_1 + p\,y = y_1\,(x_1 + p).$$

2. Ellipse: $\frac{a^2\,x}{x_1} - \frac{b^2\,y}{y_1} = a^2 - b^2$, oder

$$y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x - x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{a^2\,x}{x_1} + \frac{b^2\,y}{y_1} = a^2 + b^2$, oder

$$y - y_1 = -\frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der Xaxe mit x_0, die Subtangente (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und Xaxe auf die Xaxe) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-x_1$	$2x_1$	p
2. „ „ Ellipse	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$
3. „ „ Hyperbel	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$

Aus dem Wert von x_0 ergiebt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1).

10. Tangente vom Punkt (x_1, y_1) ausserhalb der

1. Parabel:

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}(x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

3. Hyperbel·

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

1. Parabel: $y - mx = \frac{p}{2m}$.

2. Ellipse: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 + b^2}$.

3. Hyperbel: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 - b^2}$.

12. Zieht man durch einen Punkt P eine Sekante eines Kegelschnitts, so heisst der Ort des zu P in Beziehung auf die beiden Schnittpunkte zugeordneten vierten harmonischen Punktes die Polare von P in Beziehung auf den Kegelschnitt.

Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $y y_1 = p(x + x_1)$.
2. Ellipse: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$.
3. Hyperbel: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$, für die

1. Parabel: $x_1 = + \frac{C}{A}$, $y_1 = - \frac{Bp}{A}$.
2. Ellipse: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = - \frac{b^2 B}{C}$.
3. Hyperbel: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$.

14. Zwei Gerade heissen konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht, die Koordinaten des Pols der einen müssen also die Gleichung der andern befriedigen.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugehörige Durchmesser
$$y = \frac{p}{m}.$$
2. Gleichungen für zwei konjugierte Durchmesser bei der

Ellipse: $Ax - By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Hyperbel: $Ax + By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$, $2b_1$

1. Ellipse: $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$; Beziehung: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$

2. Hyperbel: $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$: „ $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden, so ist für die

3. Ellipse: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$; $a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab$ (s. § 81_{21})

4. Hyperbel: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = +\frac{b^2}{a^2}$; $a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab$ (s. § 81_{25})

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten

$$x' y' = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

gleichseitige Hyperbel $x' y' = \frac{1}{2} a^2$

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

1. Parabel: $x = -\frac{p}{2}$; Brennpunkt $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

2. Ellipse: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; f. d. Brennpunkt $(f, 0)$

3. Hyperbel: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; „ „ „ $(f, 0)$

17. Länge des Brennstrahls, bezw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1)

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$

2. Ellipse: $r = a - x_1 \varepsilon$

$r_1 = a + x_1 \varepsilon$; $\mathbf{r + r_1 = 2a}$

3. Hyperbel: $r = x_1 \varepsilon - a$

$r_1 = x_1 \varepsilon + a$; $\mathbf{r_1 - r = 2a}$

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $$\begin{cases} x_0 = 3x_1 + p = \dfrac{3y_1^2 + 2p^2}{2p} \\ y_0 = -\dfrac{y_1^3}{p^2} = -\dfrac{2x_1 y_1}{p} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \text{ für den Scheitel } \varrho = \mathbf{p}.$$

2. Ellipse: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{N_x^3}{p^2}$$

N_x Normale vom Punkt $(x_1 y_1)$ bis zur Xaxe. Für den Scheitel der grossen Axe ist

$$\varrho_2 = \frac{b^2}{a} = p, \text{ für den der kleinen}$$

$$\varrho_1 = \frac{a_2}{b}$$

3. Hyperbel: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r\, r_1)^{\frac{3}{2}}}{a\, b} = \frac{N_x{}^3}{p^2}$$

für den Scheitel ist $\varrho = \frac{b^2}{a} = p$

19. Flächeninhalt

1. Parabelsegment S,

Sehne senkrecht zur Axe, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunkts:

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Beliebiges Segment; (x_1, y_1), (x_2, y_2) Koordinaten der Endpunkte

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12\, p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Axe und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne

$$\frac{b}{a}\left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1{}^2} + a^2 \arc\sin \frac{x_1}{a}\right)$$

Gesamte Ellipsenfläche: $a b \pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur Xaxe:

$$S = x_1 y_1 - a b \, l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} + 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a_1{}^2} - \dfrac{y^2}{a_1{}^2(\varepsilon_1{}^2 - 1)} = 1 \end{cases}$$

wobei $a\,\varepsilon = a_1\, \varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} - \frac{y^2}{f^2 - a_1^{\,2}} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Zentralkegelschnitte sind in der Gleichung enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

§ 71. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Ein Kegelschnitt im allgemeinen ist durch fünf Punkte bestimmt.

2. Eine Gerade schneidet einen Kegelschnitt in zwei Punkten.

3. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

Die Berührungssehne zweier von einem Punkt ausgehender Tangenten ist die Polare dieses Punktes.

Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

4. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε. (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

5. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

6. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

7. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

8. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und K_1 und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf K_1, so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

9. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Punkten.)

10. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Tangenten.)

11. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der grossen Axe ist gleich dem halben Parameter.

B) Für die Parabel.

12. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Axe.

13. Der Fusspunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

14. Der Ort des Schnittpunkts zweier Parabeltangenten, die senkrecht auf einander stehen, ist die Leitlinie.

15. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe. (Konstruktion der Tangente.)

16. Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser (Konstruktion der Tangente und Normale).

17. Die Subtangente einer Parabel wird durch den Scheitel halbiert; die Subnormale ist gleich dem halben Parameter (p).

18. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

C) Für Ellipse und Hyperbel.

19. Hat man ein System von Ellipsen, bezw. Hyperbeln, welche die Scheitel und die grosse Axe gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche die nämliche Abscisse für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der grossen Axe. (Konstruktion der Tangente.)

20. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

21. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

22. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fusspunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die grosse Axe zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnitts durch Umhüllung.)

23. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt mit einander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

24. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der Kurve unveränderlich und zwar gleich der grossen Axe. (Faden-Konstruktion der Kurven.)

25. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

26. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

27. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

---

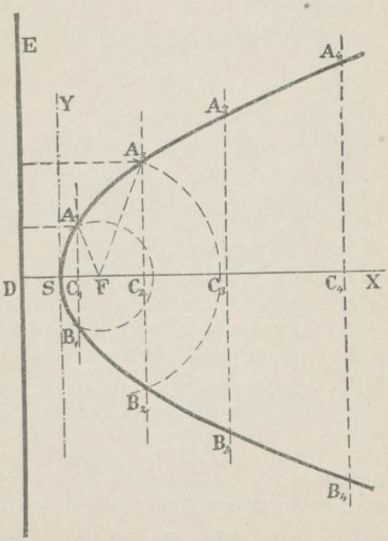
28. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

29. Zwei Ellipsen mit den Halbaxen (a, b), (a_1, b_1) sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

§ 72. Konstruktion der Kegelschnitte.

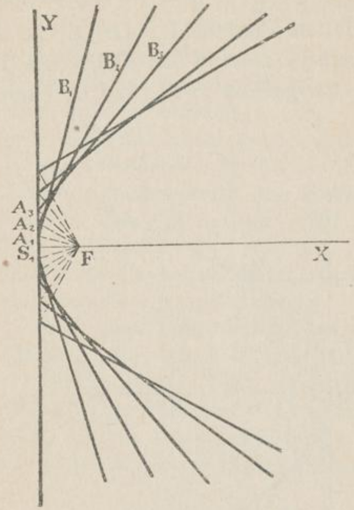
1. Parabel.

a) DX Axe, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber zweckmässig gewählten Punkten C_1, C_2, C_3 . . . Lote zur Axe und beschreibe um F mit DC_1 einen Bogen, der das zu C_1 gehörige Lot in A_1 und B_1 schneidet; ver-



fahre ebenso mit DC_2 u. s. w. A_1, A_2, A_3 . . . ., B_1, B_2, B_3 . . . sind Parabelpunkte. (Begründung: Jeder Punkt der Parabel hat vom Brennpunkt und der Leitlinie gleiche Abstände.)

b) Durch Umhüllung. — S_1X Axe, S_1Y Scheiteltangente, F Brennpunkt. Ziehe von F nach S_1Y die Strahlen FA_1, FA_2, FA_3 . . . und errichte auf denselben in A_1, A_2, A_3 . . . die Lote A_1B_1, A_2B_2,

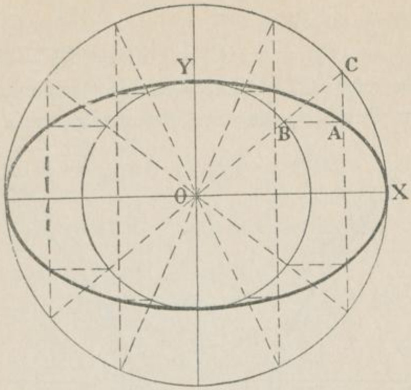


A_3B_3 . . . ., so umhüllen diese die Parabel. (Begründung § 71,13).

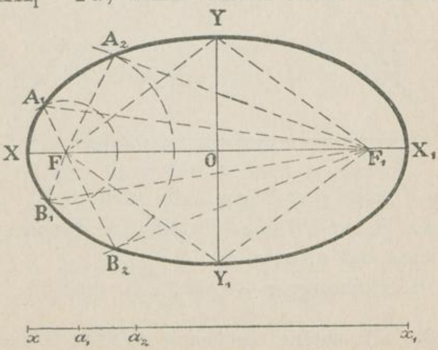
2. Ellipse.

a. $OX = a$, halbe grosse Axe, $OY = b$, halbe kleine Axe. Beschreibe um O mit a und b Kreise; ziehe durch O eine Gerade, welche die Kreise in B und C schneidet, ziehe $CA \perp OX$, $BA \parallel OX$, so ist A ein Punkt der Ellipse. Aehnlich weitere Punkte.

(Begründung: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$).



b. $OX = OX_1 = a$, $OY = OY_1 = b$. Bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch $FY = F_1Y = a$. Ziehe $xx_1 = XX_1 = 2a$; nimm darauf Punkt a beliebig an,



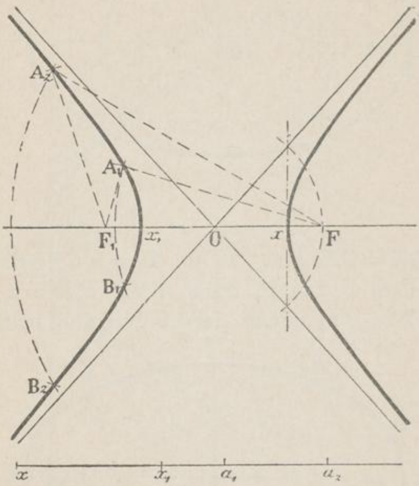
beschreibe um F mit xa_1 und um F_1 mit x_1a_1 Kreisbögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden u. s. f. A_1 und B_1 sind Punkte der Ellipse.

(Begründung: $r + r_1 = 2a$, s. § 71_{24}.)

3. Hyperbel.

$$OX = OX_1 = a; \; OF = OF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $xx_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von xx_1 einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit xa_1



und um F_1 mit x_1a_1 Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Verfahre ebenso mit a_2 u. s. f.

Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 71_{24}.)

§ 73. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

(1) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, dass die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Koordinaten des **Mittelpunktes** bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{2} f'_x = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13} = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y = a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23} = 0$$

3. **Polare** des Punktes (x_1, y_1):

$$(x - x_1)\,f'_{x_1} + (y - y_1)\,f'_{y_1} + 2\,f(x_1, y_1) = 0, \text{ oder}$$

$$a_{11}\,x_1\,x + a_{12}\,(x\,y_1 + x\,y_1) + a_{22}\,y_1\,y + a_{13}\,(x_1 + x)$$
$$+ a_{23}\,(y_1 + y) + a_{33} = 0.$$

Regel: Die Gleichung der Polare von (x_1, y_1) wird erhalten, indem man in die Kurvengleichung für x^2, y^2, $2\,x\,y$, $2\,x$, $2\,y$ bezw. $x_1\,x$, $y_1\,y$, $x_1\,y + x\,y_1$, $x_1 + x$, $y_1 + y$ setzt.

Die Gleichung der Polare ist Gleichung der **Tangente** im Punkt (x_1, y_1), wenn dieser auf der Kurve liegt.

4. **Durchmesser** konjugiert zu den Sehnen, welche mit der Xaxe den Winkel α machen:

$$\cos\alpha\, f'_x + \sin\alpha\, f'_y = 0 \text{ oder}$$

$$\cos\alpha\,(a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}) + \sin\alpha\,(a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{23}) = 0.$$

5. Die Richtung der **Hauptaxen** (zwei zu einander senkrechte konjugierte Durchmesser), von welchen die eine mit der Xaxe den Winkel α bildet, ergiebt sich aus:

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha = \frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

6. **Besprechung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.**

Es sei

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + a_{12}(a_{23}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Die Gleichung zweiten Grades stellt nun dar:

I. **Eigentlichen Kegelschnitt**, wenn $\triangle \gtrless 0$ und zwar

1) **Ellipse**, wenn $A_{33} > 0$; dieselbe ist reell oder imaginär, je nachdem a_{11} und $\triangle$ verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben; sie ist ein **Kreis**, wenn $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$;

2) **Parabel**, wenn $A_{33} = 0$;

3) **Hyperbel**, wenn $A_{33} < 0$.

II. **Zerfallenden Kegelschnitt**, wenn $\triangle = 0$ und zwar

1) reelles, **sich schneidendes Geradenpaar**, wenn $A_{33} < 0$,

2) **paralleles Geradenpaar** (reell und verschieden, zusammenfallend, oder imag.), wenn $A_{33} = 0$

3) **imaginäres**, sich schneidendes Geradenpaar, wenn $A_{33} > 0$.

Anderes Verfahren: die Gleichung sei

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

sie stellt Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem bezw. $B^2 - AC \lesseqgtr 0$.

Um zu untersuchen, ob das Gebilde reell, imaginär oder zerfallend ist, löse man die gegebene Gleichung nach einer der Veränderlichen, z. B. nach y, auf. Wird der Radikand der auftretenden Quadratwurzel für einen gewissen Bereich der Werte von x positiv, so ist das Gebilde reell; ist er für alle Werte von x negativ, so ist es imaginär; ist er ein Quadrat, d. h. die Wurzel ausziehbar, so ist es zerfallend.

§ 74. Gleichungen weiterer Kurven.

A. Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = a x^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ oder
$r^2(r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$.
3. Conchoide $x^2 y^2 = (b + y)^2 (a^2 - y^2)$ oder
$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$ oder $r = a + \frac{b}{\cos\varphi}$.
4. Cissoide $y^2(a - x) = x^3$.
5. Deskartes'sches Blatt $x^3 + y^3 = 3axy$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Cardioide $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ oder
$r = a(1 + \cos\varphi)$.

B. Transcendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = m e^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

3. Cykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt, (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc} \sphericalangle POX$, X Berührungspunkt)

$$\begin{cases} x = a\varphi - a_1 \sin\varphi \\ y = a - a_1 \cos\varphi \end{cases}$$

4. Epycykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Aussenseite eines Kreises (Halbmesser b), rollt

$$\begin{cases} x = (a+b)\sin\frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin\frac{a+b}{b}\varphi \\ y = (a+b)\cos\frac{a\varphi}{b} - a_1 \cos\frac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

5. Hypocykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Innenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt

$$\begin{cases} x = (b-a)\sin\frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin\frac{b-a}{b}\varphi \\ y = (b-a)\cos\frac{a\varphi}{b} + a_1 \cos\frac{b-a}{b}\varphi. \end{cases}$$

Die Cykloide, ebenso die Epi- und Hypocykloide ist die gestreckte, gemeine oder verschlungene, je nachdem $a_1 \lesseqgtr a$.

6. Spirale des Archimedes (lineare Spirale) $r = a\varphi$.

7. Parabolische Spirale $r^2 = 2p\varphi$.

8. Hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$.

9. Logarithmische Spirale $r = m e^{\frac{\varphi}{a}}$.

10. Kreisevolvente (Tangente = dem Bogen zwischen einem festen Punkt des Kreises und dem Berührungspunkt): $r = a\sqrt{1+\varphi^2}$, $\psi = \varphi - \mathrm{avc\,tg}\,\varphi$.

II. Geometrie des Raumes.

§ 75. Koordinaten-*) und Grössenbeziehungen.

O Ursprung, P ein Punkt im Raum, $OP = r$; α, β, γ Winkel der OP mit den positiven Teilen der Koordinatenaxen; x, y, z die Koordinaten von P.

1. Ein Punkt. Die Koordinaten des Punktes P sind die Projektionen von OP auf die Axen:

$$x = r \cos \alpha,\ y = r \cos \beta,\ z = r \cos \gamma,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Zwei Punkte. (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2).

$$OP_1 = r_1,\ OP_2 = r_2;$$

$$\cos(r_1, r_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}.$$

Stehen r_1 und r_2 senkrecht aufeinander, so ist

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

Entfernung $e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Für Punkt P (x, y, z), der $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n = \lambda : 1$ teilt $(P_1 P : P P_2 = m : n)$, ist

$$x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n},\ y = \frac{m y_2 + n y_1}{m + n},\ z = \frac{m z_2 + n z_1}{m + n};$$

$$\text{oder } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda};$$

sind m und n ungleichzeichig, bezw. ist λ negativ, so liegt P ausserhalb $P_1 P_2$.

3. Projektionen. Ist l eine Strecke, f eine Fläche, sind ferner l_1, l_2, l_3, bezw. f_1, f_2, f_3, ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

1. $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2\, l^2$.
2. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f^2$.

*) Es sind stets, wofern nichts anders bemerkt ist, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

$f_1 = f \cos\alpha$, $f_2 = f \cos\beta$, $f_3 = f \cos\gamma$; α, β, γ Neigungswinkel der f gegen die Koordinatenebenen.

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei andern Ecken sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

$$V = \frac{1}{6}[x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z), so ergiebt sich V, indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so dass der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$, u. s. f.

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 76. Aenderung des Koordinatensystemes.

1. Parallele Verschiebung der Axen; a, b, c Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

O X'	bilde mit O X, O Y, O Z die Winkel	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
O Y'	„ „ „ „ „ „ „	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
O Z'	„ „ „ „ „ „ „	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Cosinus, so ist:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \qquad & x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' & y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' & z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Zwischen den Cosinus bestehen die Beziehungen

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \qquad \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$$
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1 \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$$
$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \qquad \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1$$
$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0 \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$
$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0$$
$$\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0 \qquad \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0.$$

3. Euler'sche Formeln für den Uebergang von einem rechtwinkligen System O, XYZ zu einem andern rechtwinkligen O, X′Y′Z′ mit demselben Ursprung. Es sei OA die Spur der OX′Y′Ebene in der OXYebene, $\sphericalangle AOX=\psi$, $\sphericalangle AOX'=\varphi$, $\sphericalangle ZOZ'=\Theta$, dann ist

$$\begin{cases} x=x'(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\Theta)+y'(-\sin\varphi\cos\psi \\ \qquad -\cos\varphi\sin\psi\cos\Theta)+z'\sin\psi\sin\Theta \\ y=x'(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\Theta) \\ \qquad +y'(-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\Theta) \\ \qquad +z'(-\cos\psi\sin\Theta) \\ z=x'\sin\varphi\sin\Theta+y'\cos\varphi\sin\Theta+z'\cos\Theta. \end{cases}$$

4. Polarkoordinaten. $OP=r$, φ Winkel zwischen OP und der XYebene, gezählt von der letzteren gegen die +Z Axe hin (von -90^0 bis $+90^0$); ψ ist der Winkel, den die Ebene ZOP mit der Ebene ZOX bildet, gezählt von der +Xaxe aus im positiven Drehungssinn von 0^0-360^0.

Uebergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt:

$$1.\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \sin\varphi=\frac{z}{r},\ \cos\psi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\psi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$2.\quad \begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\psi \\ y=r\cos\varphi\sin\psi \\ z=r\sin\varphi. \end{cases}$$

§ 77. Allgemeine Sätze.

1. Eine Fläche ist durch eine Gleichung zwischen x, y und z bestimmt. Die Bedingung dafür, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche liegt, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, ist $F(x_1, y_1, z_1) = 0$.

2. Eine Linie ist durch zwei Gleichungen in x, y und z bestimmt; die Linie ist die Schnittlinie der durch jene zwei Gleichungen dargestellten Flächen. Jeder Punkt, dessen Koordinaten die beiden Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ befriedigen, liegt auf der Schnittlinie der durch die beiden Gleichungen dargestellten Flächen. (S. auch § 95).

3. Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eine der Koordinaten, z. B. z, gleich null, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene der andern Koordinaten, z. B. der X Yebene.

4. Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Koordinate, so erhält man die Gleichung der Projektion der Schnittlinie beider Flächen auf die Ebene der beiden andern Koordinaten. Bestimmt man aus den Gleichungen dreier Flächen die gemeinschaftlichen Werte von x, y, z, so stellen diese die Koordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen dar.

5. $F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$ giebt die Gleichung einer Fläche an, welche durch die Schnittlinie oder die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ geht.

§ 78. Die Ebene.

a, b, c Abschnitte der Ebene auf den Koordinatenaxen; α, β, γ die Winkel, welche das Lot vom Ursprung auf die Ebene mit den Axen bildet, p die Länge dieses Lotes.

1. **Gleichungsformen für die Ebene:**

1. allgemeine Form $Ax + By + Cz + D = 0$ (E)

2. " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

3. " $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$ (Normalform N)

Spur in der XYebene $Ax + By + D = 0$

" " " YZ " $By + Cz + D = 0$

" " " ZX " $Ax + Cz + D = 0$

Axenabschnitte:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

Lot vom Ursprung:

$$p = a \cos\alpha = b \cos\beta = c \cos\gamma = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass p positiv wird.)

Winkel des Lotes p mit den Axen aus:

$$\cos\alpha = \frac{p}{a} = -\frac{Ap}{D} = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ u. s. f.

2. Besondere Fälle:

1. $\left\{\begin{array}{ll} x = a & \text{Ebene parallel zur YZebene,} \\ y = b & \text{" " " ZX "} \\ z = c & \text{" " " XY "} \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ll} Ax + By + D = 0 & \text{Ebene parallel zur Zaxe} \\ Ax + Cz + D = 0 & \text{" " " Y "} \\ By + Cz + D = 0 & \text{" " " X "} \end{array}\right.$

3. $Ax + By + Cz = 0$ " durch den Ursprung

4. $\left\{\begin{array}{ll} Ax + By = 0 & \text{" " die Zaxe} \\ Ax + Cz = 0 & \text{" " " Y "} \\ By + Cz = 0 & \text{" " " X "} \end{array}\right.$

3. Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1):

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \text{ wobei}$$

$$A=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(s. auch § $75_{4,2}$.)

5. Abstand e eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene E oder N (s. 1.):

$$e=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p$$

6. Zwei Ebenen $Ax+By+Cz+D=0$ und $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$;

1. sie sind parallel, wenn $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$,

also Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax+By+Cz+D_1=0 \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p_1=0 \end{cases}$$

2. Abstand zweier paralleler Ebenen:

$$\pm\frac{D-D_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p-p_1$$

3. Winkel φ zweier Ebenen aus:

$$\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)}}$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi=0$, d. h. wenn

$$AA_1+BB_1+CC_1=0$$

7. Ebenenbüschel. Sind $A_1=0$, $A_2=0$ die Gleichungen zweier Ebenen (1) u. (2) in Normalform, so ist die Gleichung einer dritten Ebene (3) die durch die Schnittlinie der beiden ersten geht

$$A_1-\lambda A_2=0.$$

Sind (3, 1), (3, 2) die Neigungswinkel zwischen (3) und den beiden gegebenen Ebenen, so ist

$$\lambda = \frac{\sin(3,1)}{\sin(3,2)}.$$

Die Halbierungsebenen der von den beiden Ebenen gebildeten Keile haben daher die Gleichung

$$A_1 \mp A_2 = 0$$

8. Drei Ebenen durch eine Gerade.

Damit drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ sich in derselben Geraden schneiden ist notwendig und hinreichend, dass es drei von null verschiedene Zahlfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ giebt, für welche die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 \equiv 0$$

9. Vier Ebenen durch einen Punkt. Damit vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Idendität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 \equiv 0.$$

§ 79. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c. \end{cases}$$

Eine Gerade parallel zur YZebene ist durch (2) nicht darstellbar; ihre Gleichungen sind

$$x = a, \quad y = p z + q.$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZebene ergeben sich aus bezw. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Besondere Fälle.

1. $\begin{cases} y = mx + b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur XYebene.

$\begin{cases} y = b \\ z = nx + c \end{cases}$ Gerade parallel zur XZebene.

$\begin{cases} z = py + q \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur YZebene.

2. $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur Xaxe;

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Xaxe.

$\begin{cases} z = c \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur Yaxe;

$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ Yaxe.

$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ Gerade parallel zur Zaxe;

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Zaxe.

3. $\begin{cases} y = mx \\ z = nx \end{cases}$ Gerade durch den Ursprung.

3. **Winkel mit den Axen,** α, β, γ. Wenn die Gleichungen der Geraden sind

$$y = mx + b, \quad z = nx + c, \text{ so ist}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

4. Gerade bestimmt durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und Richtung (α, β, γ)

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma}.$$

5. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Durch den Ursprung und den Punkt (x_1, y_1, z_1):

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

6. Zwei gerade Linien.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

1. Die Geraden schneiden sich, wenn
$(m-m_1):(n-n_1) = (b-b_1):(c-c_1)$ (s. u. 5).

2. Sie sind parallel, wenn $m_1 = m$, $n_1 = n$.

3. Der Winkel φ der Geraden ergiebt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)(1+m_1{}^2+n_1{}^2)}}.$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi = 0$, also wenn $1 + mm_1 + nn_1 = 0$.

5. Kürzester Abstand zweier Geraden

$$e = \frac{(b-b_1)(n-n_1) - (c-c_1)(m-m_1)}{\sqrt{(mn_1 - m_1 n)^2 + (m-m_1)^2 + (n-n_1)^2}}, \text{ (s. o. 1.).}$$

6. Abstand e zweier paralleler Geraden

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{matrix} y = mx + b. \\ z = nx + c_1. \end{matrix}$$

$$e = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + m^2 + n^2}, \text{ wobei}$$

$$F=(b-b_1)m+(c-c_1)n$$
$$G=(c-c_1)mn-(b-b_1)(1+n^2)$$
$$H=(b-b_1)mn-(c-c_1)(1+m^2).$$

7. Gerade und Ebene.

$$\begin{cases} y=mx+b \\ z=nx+c \end{cases} \text{ und } Ax+By+Cz+D=0.$$

1. Die Gerade liegt in der Ebene, wenn $A+Bm+Cn=0$ und $Bb+Cc+D=0$.

2. Die Gerade ist parallel der Ebene, wenn

$$A+Bm+Cn=0.$$

3. Winkel ω zwischen der Geraden und der Ebene aus

$$\sin\omega=\frac{A+Bm+Cn}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(1+m^2+n^2)}}.$$

4. Die Gerade ist senkrecht zur Ebene, wenn

$$\frac{B}{A}=m, \quad \frac{C}{A}=n.$$

5. Beliebige Ebene durch die Gerade

$$y=mx+b, \quad z=nx+c:$$

$$\frac{y-mx-b}{z-nx-c}=\lambda.$$

8. Ebene durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Geraden

$$y=mx+b, \quad z=nx+c$$
$$(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0.$$

9. Gerade durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Ebene $Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{B}{A}(x-x_1) \\[2ex] z-z_1=\dfrac{C}{A}(x-x_1) \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6_1)

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1 . \end{cases}$$

oder $$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1} \text{ oder } = \frac{m - m_1}{n - n_1}.$$

Ebene durch zwei parallele Gerade

$$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}.$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ parallel zu einer 2. Geraden $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$$(mn_1 - m_1 n)x + (n - n_1)y - (m - m_1)z = b_1(n - n_1) - c_1(m - m_1).$$

12. Ebene durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) parallel zu zwei Geraden

$$(mn_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0.$$

§ 80. Erzeugung von Flächen.

Allgemeines: Enthalten die Gleichungen 1) $F(x, y, z, p) = 0$, 2) $f(x, y, z, p) = 0$ einer Linie einen veränderlichen Parameter p, so stellen sie eine bewegliche Linie dar. Die Gleichung der durch die bewegte Linie erzeugten Fläche wird erhalten, indem man aus den Gleichungen 1) und 2) p eliminiert.

Enthalten die Gleichungen $F(x, y, z, p, q, \ldots) = 0$, $f(x, y, z, p, q, \ldots) = 0$ der Beweglichen n veränderliche Parameter p, q ...., die durch $n - 1$ Gleichungen mit einander verbunden sind, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche das Eliminationsresultat der n Parameter p, q .... aus den $n + 1$ gegebenen Gleichungen. — Die $n - 1$ Bedingungsgleichungen sind in der Regel der analytische Ausdruck dafür, dass die bewegliche Linie auf n — 1 festen gleitet. — Die Bedingung dafür, dass eine Linie eine andere schneidet, erhält man, indem man aus den vier Gleichungen beider Linien x, y, z entfernt.

Regelflächen werden erzeugt durch die Bewegung einer Geraden; da die Gleichungen einer Geraden im allgemeinen vier Konstanten (Parameter) enthalten, so sind drei Leitlinien nötig. Man unterscheidet abwickelbare und windschiefe Regelflächen. Bei den ersteren liegen zwei unendlich nahe Mantellinien in einer Ebene (z. B. Cylinder- und Kegelfläche), bei den letzteren nicht (einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid).

A. Zylinderflächen.

I. Leitlinie in der XYEbene:

$$1)\ F(x, y) = 0,\quad 2)\ z = 0$$

Erzeug. Mantellinie: $3)\ y = mz + y_0$, $4)\ x = pz + x_0$

Zylinderfläche: $F(x - pz, y - mz) = 0$.

II. Leitlinie im Raum: $1)\ \varphi(x, y, z) = 0$,
$2)\ \psi(x, y, z) = 0$.

Erzeugende: $3)\ y = mz + y_0$, $4)\ x = pz + x_0$.

Eliminationsresultat von x, y, z aus 1) bis 4):

$$5)\ F(x_0, y_0) = 0$$

Gleichung der Zylinderfläche:

$$6)\ F(x - pz, y - mz) = 0.$$

III. Allgemeine Gleichung der Zylinderflächen:

$$F[(ax + by + cz + d), (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)] = 0.$$

B. Kegelflächen.

Spitze: (x_1, y_1, z_1).

I. Leitlinie in der XY-Ebene:

$$1)\ F(x, y) = 0,\quad 2)\ z = 0.$$

Erzeug. Mantellinie: $3)\ x - x_1 = p\,(z - z_1),$

$$4)\ y - y_1 = m\,(z - z_1).$$

Elimin.-Resultat von x, y, z aus 1) bis 4):

$$5)\ F(x_1 - p\,z_1,\ y_1 - m\,z_1) = 0.$$

Gleichung der Kegelfläche (Elim.-Resultat von m und p aus 3) bis 5)):

$$6)\ F\left(\frac{x_1\,z - x\,z_1}{z - z_1},\ \frac{y_1\,z - y\,z_1}{z - z_1}\right) = 0.$$

II. Leitlinie im Raum: $1)\ \varphi\,(x, y, z) = 0,$

$$2)\ \psi\,(x, y, z) = 0.$$

Erzeug. Mantellinie: $3)\ x - x_1 = p\,(z - z_1),$

$$4)\ y - y_1 = m\,(z - z_1).$$

Elim.-Resultat von x, y, z aus 1) bis 4):

$$5)\ F(m, p) = 0.$$

Gleichung der Kegelfläche (Elim.-Resultat von m und p aus 3) bis 5)):

$$6)\ F\left(\frac{x - x_1}{z - z_1},\ \frac{y - y_1}{z - z_1}\right) = 0.$$

Liegt die Spitze im Ursprung, so ist die Gleichung der Kegelfläche $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, d. h. sie ist homogen.

Die Gleichung $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + f\,y\,z = 0$ stellt einen Kegel zweiten Grades dar mit der Spitze im Ursprung.

III. Allgemeine Gleichung der Kegelflächen:

$$F\left(\frac{a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1}{a\,x + b\,y + c\,z + d},\ \frac{a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2}{a\,x + b\,y + c\,z + d}\right) = 0$$

C. Drehflächen.

I. Zaxe ist Drehaxe.

Erzeugende: 1) $\varphi(x, y, z) = 0$, 2) $\psi(x, y, z) = 0$;

Parallelkreis: 3) $x^2 + y^2 = r^2$, 4) $z = d$;

Bedingungsgleichung (Elim.-Result. von x, y, z aus 1) bis 4)): 5) $F(r, d) = 0$; Gleichung der Drehfläche (Elim.-Result. von r und d aus 3) bis 5)):

$$6)\ F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

II. Drehaxe durch den Punkt (x_0, y_0, z_0), α, β, γ Richtungswinkel derselben:

Erzeugende: 1) und 2) wie bei I.

$$\text{Parallelkreis:} \begin{cases} 3)\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0 \\ 4)\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0. \end{cases}$$

Bedingungsgleichung (Elim.-Result. von x, y, z aus 1) bis 4)):

$$5)\ F(r, d) = 0.$$

Gleichung der Drehfläche (Elim.-Result. von r und d aus 3) bis 5)):

$$6)\ F(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

Geht die Drehaxe durch den Ursprung, so geht 6) über in

$$6^1)\ F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = 0.$$

D. Conoidische Flächen.

Eine Gerade bewegt sich so, dass sie die Zaxe und eine Leitlinie beständig schneidet und dabei der XYebene parallel bleibt.

Leitlinie: 1) $\varphi(x, y, z) = 0$, 2) $\psi(x, y, z) = 0$

Erzeugende: 3) $\dfrac{y}{x} = m$, 4) $z = d$.

Elim.-Result. von x, y, z aus 1) bis 4):

5) $F(m, d) = 0$.

Gleichung der Conoidfläche (Elim.-Result. von m und d aus 3) bis 5):

6) $F\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0$.

Beispiel: Schraubenfläche. Die Leitlinie dieser Conoidfläche ist die Schraubenlinie:

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = \frac{ht}{2\pi},$$

deren Axe die Zaxe ist. Die Gleichung der Schraubenfläche ist: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{2\pi z}{h}$.

Flächen zweiter Ordnung.

§ 81. Allgemeines.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung ist:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz$$
$$+ 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

1) Die Koordinaten des Mittelpunktes ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}f'_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ \frac{1}{2}f'_y = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ \frac{1}{2}f'_z = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{array}\right.$$

2) Durchmesser- (Diametral-) Ebene zugeordnet der Richtung $x = mz$, $y = nz$, bezw. $\sphericalangle\, \alpha, \beta, \gamma$:

$$m f'_x + n f'_y + f'_z = 0, \text{ bezw.}$$
$$\cos\alpha\, f'_x + \cos\beta\, f'_y + \cos\gamma\, f'_z = 0.$$

3) Durchmesser zugeordnet der Richtung der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$, bezw.

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0:$$

$$\frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{B} = \frac{f'_z}{C}, \text{ bezw. } \frac{f'_x}{\cos\alpha} = \frac{f'_y}{\cos\beta} = \frac{f'_z}{\cos\gamma}$$

4) Polarebene zum Punkt (x_1, y_1, z_1), d. h. Ort des Punktes auf einer durch (x_1, y_1, z_1) gehenden Sekante, welcher diesem Punkt in Beziehung auf die zwei Schnittpunkte der Sekante mit der Fläche harmonisch zugeordnet ist:

$$(x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} + (z - z_1) f'_{z_1} + 2 f(x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Liegt der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche, so ist seine Polarebene zugleich Berührungsebene an die Fläche.

5) Hauptdiametralebene oder Hauptebene heisst jede Ebene, welche senkrecht ist auf den von ihr halbierten Sehnen (Hauptsehnen). Die Richtungscosinus α, β, γ dieser Sehnen und die Zahl λ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(\mathrm{W}) \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0 \\ \qquad\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array} \right.$$

λ ist bestimmt durch die kubische Gleichung

$$(\mathrm{R}) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ oder}$$

$$(\mathrm{R})\ \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2)\lambda - (a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind reell; vermittelst λ sind α, β, γ aus den Gleichungen (W) erhältlich.

6) Hauptaxen. Man verschiebe das ursprüngliche System parallel durch den Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0), so geht die allgemeine Gleichung über in:

$$(T)\ a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,xy + 2\,a_{13}\,xz + 2\,a_{23}\,yz = M,$$

hiebei ist $M = -(a_{14}\,x_0 + a_{24}\,y_0 + a_{34}\,z_0 + a_{44})$; $M \gtrless 0$.

Man dividiere die Gleichung (T) mit M durch und bilde aus den Coëfficienten der neuen Gleichung die Gleichung (R), sie werde mit $F(\lambda) =$ bezeichnet. Die Wurzeln dieser neuen Gleichung seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dann sind die halben Hauptaxen der Fläche gegeben durch

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}},\ \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}},\ \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}}.$$

7) Allgemeine Sätze.

a) Eine Fläche II. Ordnung (F. II. O.) wird im allgemeinen durch neun Punkte oder neun Berührungsebenen bestimmt.

b) Eine F. II. O. wird von einer Ebene in einer Linie II. Ordnung und von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten.

c) Wenn ein Teil des Schnittes zweier F. II. O. eine ebene Kurve ist, so ist auch der übrige Teil eine solche.

d) Wenn ein Punkt eine Ebene durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt, den Pol dieser Ebene und umgekehrt.

e) Wenn ein Punkt sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich seine Polarebene um eine in dieser liegenden geraden Linie und umgekehrt.

f) Durch den Pol und die Schnittlinie seiner Polarebene mit der Fläche II. Ordnung ist der zum Pol als Spitze gehörige Berührungskegel bestimmt.

g) Wenn der Pol einer gegebenen Oberfläche II. Ordnung eine zweite Oberfläche derselben Ordnung beschreibt, so berührt seine Polarebene eine dritte Oberfläche II. Ordnung und umgekehrt, wenn die Polarebene einer gegebenen Oberfläche II. Ordnung sich als Berührungsebene um eine zweite Oberfläche derselben Ordnung herumbewegt, so beschreibt der Pol eine dritte Oberfläche II. Ordnung.

§ 82. Einteilung der Flächen II. Ordnung.

Die Flächen II. Ordnung werden nach den Wurzeln der Gleichung (R), bezw. $F(\lambda) = 0$ (s. § 81, 5 und 6) eingeteilt.

I. Mittelpunktsflächen.

$F(\lambda) = 0$ (s. § 81_6) hat keine Wurzel gleich 0.

A. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ haben gleiche Zeichen.

1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positiv $\begin{cases} \text{a) } M > 0 \text{ (s. § 81) Ellipsoid} \\ \text{b) } M = 0 \quad \text{Punkt.} \end{cases}$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ negativ: Imaginäre Fläche.

B. Zwei Wurzeln λ mit gleichem, die dritte mit entgegengesetztem Zeichen.

1) Zwei Wurzeln positiv, eine negativ

a) $M > 0$, einmanteliges Hyberboloid

b) $M = 0$, Kegel und Punkt.

2) Zwei Wurzeln negativ: Zweimanteliges
$M > 0$ Hyberboloid.

II. Nicht zentrale Flächen.

Die Gleichung (R) (s. § 81_5) hat eine oder zwei Wurzeln gleich null, die Flächen haben 0 oder unendlich viele Mittelpunkte.

A. Eine Wurzel λ ist gleich 0, kein Mittelpunkt vorhanden. Die beiden andern Wurzeln haben:

1) gleiche Zeichen: Elliptisches Paraboloid;

2) ungleiche Zeichen: Hyperbolisches Paraboloid.

B. Eine Wurzel ist gleich null, unendlich viele Mittelpunkte auf einer Geraden. Die beiden andern Wurzeln haben:

1) gleiche Zeichen: Elliptischer Cylinder oder eine Gerade;

2) entgegengesetzte Zeichen: Hyperbolischer Zylinder oder zwei sich schneidende Ebenen.

C. Zwei Wurzeln gleich null:

1) kein Mittelpunkt vorhanden: Parabolischer Zylinder;

2) unendlich viele Mittelpunkte: Zwei parallele Ebenen (Doppelebene; zwei imaginäre Ebenen).

§ 83. Die einzelnen Flächen II. Ordnung.

1) **Ellipsoid:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Die Fläche liegt ganz im Endlichen, sie wird von jeder Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse geschnitten; die Hauptschnitte sind ebenfalls Ellipsen.

Durchmesserebene, welche die Sehnen, deren Richtungscosinus α, β, γ sind, halbiert:

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0$$

Polarebene des Punktes $x_1 | y_1 | z_1$:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 1$$

Liegt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche selbst, so stellt die vorige Gleichung die Berührungsebene dar.

Konjugierte Durchmesser. Die Geraden $\begin{cases} x = m z \\ y = n z \end{cases}$, $\begin{cases} x = m_1 z \\ y = n_1 z \end{cases}$ $\begin{cases} x = m_2 z \\ y = n_2 z \end{cases}$ stellen konjugierte Durchmesser dar, wenn folgende Bedingungen stattfinden:

$$\begin{cases} \frac{m m_1}{a^2} + \frac{n n_1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \\ \frac{m m_2}{a^2} + \frac{n n_2}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \\ \frac{m_1 m_2}{a^2} + \frac{n_1 n_2}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Werden zwei, bezw. 3 Axen einander gleich, so geht die Fläche in ein Drehungsellipsoid, bezw. eine Kugel über.

Kugel, Mittelpunkt im Ursprung: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

„ „ Punkt (x_1, y_1, z_1):

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

2) Einmanteliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Die Fläche besteht aus einem ins Unendliche sich erstreckenden Mantel; sie wird von der XY-Ebene in einer Ellipse, von der XZ- und der YZ-Ebene je in einer Hyperbel, von einer beliebigen Ebene, in einer reellen Ellipse, einer Parabel oder Hyperbel geschnitten.

Asymptotenkegel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Zwei Scharen von Mantellinien:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Jede Schargerade schneidet alle Gerade der andern und keine der eigenen Schar. Die Fläche ist der Ort einer Geraden, welche immer drei Gerade schneidet. Sie ist eine windschiefe Kegelfläche.

3) **Zweimanteliges Hyperboloid:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$

Die Fläche besteht aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Mänteln, sie enthält keine reellen Geraden, wird von der XY-Ebene in einer imaginären Ellipse, von der XZ- und der YZ-Ebene in Hyperbeln, von einer beliebigen Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse, einer Parabel oder Hyperbel geschnitten. — Wird $a=b$, so geht jedes der Hyperboloide in ein Drehungshyperboloid über.

4) **Elliptisches Paraboloid:** $\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=2x$ (b u. c gleichzeichig.)

Die Fläche besteht aus einem einseitig sich ins Unendliche erstreckenden Mantel; sie wird von der YZ-Ebene berührt, von der XY- und der XZ-Ebene je in einer Parabel und von einer beliebigen Ebene in einer reellen oder imaginären Ellipse oder in einer Parabel geschnitten. — Die Fläche entsteht, wenn die Parabel, die in der XY-Ebene liegt, parallel so verschoben wird, dass ihr Scheitel auf der in der XZ-Ebene liegenden Parabel weiter rückt.

Für $b=c$ Drehungsparaboloid.

5) **Hyperbolisches Paraboloid:** $\frac{y^2}{b}-\frac{z^2}{c}=2x$ (b u. c positiv)

Die Fläche ist sattelförmig, sie hat mit der unendlich fernen Ebene ein Geradenpaar gemein, sie wird von der XY- und von der XZ-Ebene je in einer Parabel (diese beiden Parabeln haben den Ursprung gemeinschaftlich und ihre auf der X-Axe liegenden

Axen sind entgegengesetzt gerichtet), von der YZ-Ebene in einem Geradenpaar und von einer beliebigen Ebene in einer Parabel oder Hyperbel geschnitten. Sie ist der Ort einer Geraden, welche immer zwei gegebene Gerade schneidet und einer gegebenen Ebene parallel bleibt. — Sie wird ferner erzeugt, wenn die in der XY-Ebene liegende Parabel parallel weiter rückt und dabei mit ihrem Scheitel auf der in der XZ-Ebene liegenden Parabel bleibt.

Die Fläche enthält 2 Scharen von Geraden, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}=\lambda \\ \frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}=\frac{2x}{\lambda} \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}=\mu \\ \frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}=\frac{2x}{\mu} \end{array}\right.$$

Die Geraden der Schar λ sind parallel der Ebene $\frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}=0$, die des Systems μ parallel zur Ebene $\frac{y}{\sqrt{b}}-\frac{z}{\sqrt{c}}=0$.

6) **Kegelfläche,** Spitze im Ursprung;

imaginärer Kegel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$

reeller " $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

Letztere Fläche, welche abwickelbar ist, wird von einer Ebene in einer reellen Ellipse, oder Parabel oder Hyperbel (oder deren Ausartungen) geschnitten; sie enthält eine Schar von Geraden, welche durch die Spitze gehen, nämlich

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{y}{b\lambda} \text{ und } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=-\frac{\lambda y}{b}.$$

7) **Elliptischer Cylinder** (schiefer):

$$\begin{cases} \dfrac{(x-pz)^2}{a^2}+\dfrac{(y-mz)^2}{b^2}-1=0 \\ \text{wenn die Erzeugende: } \begin{cases} x=pz+c \\ y=mz+d \end{cases} \\ \text{und die Leitlinie: } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=0. \end{cases}$$

Die sich ins Unendliche erstreckende Fläche wird von jeder Ebene in einer Ellipse (oder einem Parallelenpaar) geschnitten und enthält eine Schar von parallelen Geraden.

Ist die Erzeugende parallel der Z-Axe, so ist die Gleichung der Fläche: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

8) **Hyperbolischer Cylinder:** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, die Leitlinie $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$ und die Erzeugende parallel der Z-Axe; er wird von einer Ebene in einer Hyperbel oder einem Parallelenpaar geschnitten.

9) **Parabolischer Cylinder:** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2y}{b}=0$, Leitlinie $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{2y}{b}=0$, $z=0$, Erzeugende parallel der Z-Axe; er wird von einer Ebene in einer Parabel oder einem Parallelenpaar geschnitten.

10) Jede Gleichung von der Form

1) $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

2) $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=0$

3) $(ax+by+cz+d)(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=0$

stellt bezw. eine Kugel, einen Kegel, ein Ebenenpaar dar.

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 84. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert 3, 5, a, 3a—b ...) heisst eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Ist die Grösse y mit der Grösse x so verbunden, dass — einem bestimmten Gesetz zufolge — jeder Veränderung von x eine Veränderung von y und jedem Wert von x ein bestimmter Wert von y entspricht, so heisst y eine Funktion von x. Man nennt hiebei y die abhängige, x die unabhängige Veränderliche oder das Argument. Sind x, y und z so mit einander verbunden, dass zu einem willkürlich gewählten Wertepaar von x und y ein bestimmter Wert von z gehört, so ist z eine Funktion von x und y; x und y sind hiebei die unabhängigen Veränderlichen; u. s. f. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bezw. von Länge, Breite und Höhe.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen,

$y = f(x)$ ist eine Funktion von *einer* unabhängigen Veränderlichen x,

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen, x und y.

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von *drei* unabhängigen Veränderlichen, x, y und z.

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ u. s. f. heissen *entwickelte* (explizite) Funktionen.

Die Funktion $y = f(x)$ heisst für einen bestimmten Wert von x *n-deutig*, wenn die durch den Ausdruck von $f(x)$ gegebene Vorschrift zur Berechnung von y aus jenem Wert von x im allgemeinen n verschiedene Werte von y liefert.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ u. s. f. heissen *unentwickelte* (implizite) Funktionen.

4. Man unterscheidet *algebraische* und *transcendente* Funktionen und teilt die algebraischen ein in *rationale* und *irrationale*. Die allgemeine Form einer rationalen Funktion ist

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

wobei m und n ganz und positiv sind; eine *ganze* rationale Funktion $n$ten Grades hat die Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \text{ wobei } a_n \gtrless 0.$$

y ist eine *irrationale* Funktion von x, wenn zur Berechnung des Wertes von y neben rationalen Zahlenverbindungen noch eine oder mehrere Wurzelausziehungen notwendig sind.

Eine Funktion heisst transcendent, wenn der Wert derselben nicht vermittelst einer endlichen Anzahl von einfachen algebraischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung mit konstanten Exponenten) aus der unabhängigen Veränderlichen berechnet werden kann. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ z. B. sind transcendente Funktionen.

5. Eine Funktion $f(x)$ heisst stetig für den Wert a des Arguments, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse ε die Grösse δ so bestimmt werden kann, dass für eine Aenderung des Arguments um eine Grösse $h < \delta$, die Aenderung der Funktion $f(a+h) - f(a) < \varepsilon$ bleibt, oder kurz, wenn

$$\lim f(a+h)\Big|_{h=0} = \lim f(a-h)\Big|_{h=0}$$

Unendlich kleine Grössen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Grösse sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Grösse, so nennt man sie unendlich klein.

7. Zwei unendlich kleine Grössen heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Grösse, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ.

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der nten Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen

endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim \frac{\gamma}{\delta^n} = q.$$

Das nte Differential $d^n y$ einer Funktion $y = f(x)$ ist im allgemeinen unendlich klein von der nten Ordnung, sofern dx von der ersten Ordnung ist.

9. Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ist im Vergleich zu einer solchen niederer Ordnung selber unendlich klein; sie kann daher neben dieser vernachlässigt werden.

Ist eine endliche Grösse Γ gleich der Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\gamma_1, \gamma_2 \dots$, so bleibt Γ unverändert, wenn jede Grösse γ um ein Unendlich kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots = \lim \Sigma\gamma, \text{ so ist auch}$$
$$\Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \dots = \lim \Sigma(\gamma + \varepsilon).$$

10. Es ist

$$1.\ \lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta=0} = e,\ \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m_{m=\infty} = e;$$

$$2.\ \lim \frac{a^\delta - 1}{\delta}\bigg|_{\delta=0} = \frac{\log a}{\log e}.$$

$$3.\ \lim \frac{\sin\delta}{\delta}\bigg|_{\delta=0} = 1;\ \lim \frac{\operatorname{tg}\delta}{\delta}\bigg|_{\delta=0} = 1.$$

$$4.\ \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\bigg|_{m=\infty} = e^x$$

11. Differential und Differentialquotient.

$$y = f(x)$$
$$\frac{y + \Delta y = f(x + \Delta x)}{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$
$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Bigg|_{\lim \Delta x = 0} = \frac{dy}{dx} = y'$$
$$= \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = D f(x).$$

dx heisst das Differential von x, dy dasjenige von y, $df(x) = f'(x)\,dx$ das von f(x); $\frac{dy}{dx}$ heisst Differentialquotient, die Funktion f′(x) die (erste) Ableitung von f(x).

Es giebt stetige Funktionen, die keinen Differentialquotienten haben.

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist $\frac{dC}{dx} = 0$.

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also

$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von f(x).

§ 85. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
2. $d(Au + Bv + Cw) = A\,du + B\,dv + C\,dw$

$$\frac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx}$$
$$= Au' + Bv' + Cw'$$

3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$; $d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)$$

$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots\right)$$

4. $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die nte Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A\,u^{(n)} + B\,v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + \binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)} + u\,v^{(n)}$$

6. Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

7. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen. Sind x und y Funktionen von t, so ist:

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = y' : x'$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

Ist x als Funktion von y gegeben, so hat man

3. $$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

8. Betrachtet man in der Funktion $z = f(x, y)$ die eine der Grössen x und y z. B. x als veränderlich,

die andere als konstant, so heisst die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen x die **partielle Ableitung** nach x; sie wird mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder mit $f'_x(x,y)$ oder auch kurz mit f'_x bezeichnet. Es ist also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\bigg|_{h=0};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}\bigg|_{k=0}.$$

Das **partielle Differential** nach x wird mit $d_x z$, das nach y mit $d_y z$ bezeichnet und es ist

$$\partial_x z \text{ oder } \partial_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f'_x(x,y)\, dx \text{ od. kurz} = f'_x\, dx$$

Die Aenderung dz, welche z erfährt, wenn die beiden Veränderlichen x und y zugleich sich um die von einander unabhängigen Differentiale dx und dy ändern, heisst das **totale Differential** von $f(x,y)$ und es ist

$$dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$$

Für $u = f(x,y,z)$ ist

$$du = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz, \text{ d. h.}$$

Das totale Differential einer Funktion ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen:

9. Sind x, y, z Funktionen von t, dann ist

$$\frac{df(x,y,z)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

10. Für die höheren partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x,y)$ gelten folgende Bezeichnungen und Beziehungen:

$$\frac{\delta \frac{\delta z}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = f''_{xx}; \quad \frac{\delta \frac{\delta z}{\delta x}}{\delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = f''_{x,y};$$

$$\frac{\delta \frac{\delta z}{\delta y}}{\delta x} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = f''_{y,x}; \quad \frac{\delta \frac{\delta z}{\delta y}}{\delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = f''_{y,y};$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} \text{ **oder** } f''_{x,y} = f''_{y,x}$$

11. $$d^2 u = \left(\frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz\right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jeden Gliedes δu^2 durch $\delta^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential nter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen

Ist $f(x, y) = 0$, so ist

$$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -f'_x : f'_y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f''_{xx} f'^2_y - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_y f'^2_x}{f'^3_y}$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0$, hieraus folgt $\frac{\delta z}{\delta x}$;

2) $\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 0$, „ „ $\frac{\delta z}{\delta y}$.

Differenziert man Gleichung 1) nach x, dann auch nach y, ferner Gleichung 2) nach y, so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}, \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ erhält.

14. Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f(x_0 + \Theta h),$$

wobei Θ ein positiver, ächter Bruch.

§ 86. Specielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

2. $\dfrac{d x^n}{d x} = n x^{n-1}$

3. $\dfrac{d^r(x^n)}{d x^r} = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)\,x^{n-r},\ r \leqq n$

---

4. $\dfrac{d a^x}{d x} = a^x\,l a;\ \dfrac{d a^{mx}}{d x} = a^{mx}\,m\,l a;\ \dfrac{d e^x}{d x} = e^x$

5. $\dfrac{d^r(a^x)}{d x^r} = a^x\,(l a)^r$

---

6. $\dfrac{d \log x}{d x} = \dfrac{1}{x} \log e = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{l a} = \dfrac{M}{x}$ (s. § 29_7.)

$\dfrac{d\,l x}{d x} = \dfrac{1}{x}$

7. $\dfrac{d^r(\log x)}{d x^r} = (-1)^{r-1}(r-1)!\,\dfrac{\log e}{x^r}$

---

8. $\dfrac{d \sin x}{d x} = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

9. $\dfrac{d^r \sin x}{d x^r} = \sin\left(x + \dfrac{r\pi}{2}\right)$

10. $\dfrac{d \cos x}{d x} = -\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

11. $\dfrac{d^r \cos x}{d x^r} = \cos\left(x + \dfrac{r\pi}{2}\right)$

12. $\dfrac{d\,\mathrm{tg}\,x}{d x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ (= \sec^2 x).$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

13. $\dfrac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{d x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ (= -\operatorname{cosec}^2 x).$

---

14. $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d \operatorname{arc\,tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d \operatorname{arc\,ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d \operatorname{arc\,sec} x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

19. $\frac{d \operatorname{arc\,cosec} x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

§ 87. Die Taylor'sche und die Mac Laurin'sche Reihe.

1. Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\mu h),$$

wofern μ positiv und < 1, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.... endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endlich und stetig für alle Werte zwischen x und $x+h$.

Für $x = a$ und $h = a - x$ ergiebt sich:

$$2.\ f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(a + \mu(x-a)\big).$$

Hiebei muss $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a = 0$ ergiebt sich:

3. Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern f(x) und seine Ableitungen im Intervall 0 bis x endlich und stetig bleiben.

Wird f(x) oder eine seiner Ableitungen für $x=0$ unendlich oder unstetig, so kann f(x) nicht mehr vermittelst der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden. In diesem Fall ist 2. anzuwenden.

4. Taylor's Reihe für zwei Veränderliche.

$$x+ht=p,\ y+kt=q,\ f(p,q)=U,\ f(x,y)=u,$$

$$f(x+h,\ y+k)=u+\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(2)}$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(3)}+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}+R.$$

(s. § 85 11.)

$$R=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\delta U}{\delta p}h+\frac{\delta U}{\delta q}k\right)^{(n)}-\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}\right],$$
$$(p=x+\Theta h,\ q=y+\Theta k).$$

§ 88. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\,\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an, so ist

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}\bigg|_{x=a}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}=\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n)}(a)$ und $\varphi^{(n)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}\bigg|_{x=a} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$$

2. Ist $f(x) . \varphi(x) = 0 . \infty$ für $x = a$, so ist:

$$f(x) . \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergiebt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $(f(x))^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setzt man $(f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) l f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x) l f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muss man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a + h$ setzen, den Ausdruck umformen oder nach steigenden Potenzen von h entwickeln und wenn möglich, vereinfachen, worauf sich für $h = 0$ der gesuchte Wert ergeben kann. Es ist jedoch auch möglich, dass ein Grenzwert der unbestimmten Form überhaupt nicht existiert.

5. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermassen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}$$

Der Wert hiefür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

6. Die Bestimmung des wahren Wertes eines für $x = a$ unbestimmten Ausdrucks kann häufig dadurch vereinfacht werden, dass man denselben von solchen Faktoren befreit, welche für $x = a$ weder zu null noch unendlich gross werden. Das Produkt aus dem wahren Wert des übrig bleibenden Teiles und den bestimmten Werten der weggelassenen Faktoren giebt den wahren Wert des gegebenen Ausdrucks an.

§ 89. Grösste und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
" Minimum, " $f(a \pm h) - f(a) > 0$,
wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.

2. Bei zunehmendem x ist
$f(x)$ wachsend, wenn $f'(x) > 0$,
$f(x)$ abnehmend, " $f'(x) < 0$.

3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
" Minimum, " $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;
allgemein: Sind $f(x), \ldots f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ stetig und verschwinden die $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = a$, während die nte $\lessgtr 0$ ist, so ist $f(a)$ bezw. ein Maximum oder Minimum von $f(x)$, wenn n gerade ist.

Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster) so ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich null gesetzt und die erhaltene Gleichung nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergiebt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1.\quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ und } \frac{\delta f}{\delta y} = 0.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Gleichung genügen:

$$2.\quad \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\, \delta y}\right)^2 - \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3.\quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \text{ und } \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig bezw. < 0 oder > 0 sind.

5. Relative Maxima und Minima. Die Werte von x, y, z, für welche die Funktion $v = f(x, y, z)$ unter gleichzeitigem Bestehen der Bedingungsgleichungen (Nebenbedingungen) $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ ein

Maximum oder Minimum erreicht, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x + \lambda \varphi'_x + \mu \psi'_x = 0;$$

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + \lambda \varphi'_y + \mu \psi'_y = 0;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial z} = f'_z + \lambda \varphi'_z + \mu \psi'_z = 0;$$

$$4)\ \varphi(x, y, z) = 0; \quad 5)\ \psi(x, y, z) = 0,$$

aus welchen man zunächst die willkürlichen Konstanten λ, μ entfernt und wobei

$$u = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z).$$

B. Integralrechnung.

§ 90. Bezeichnung und Erklärung.

F(x) heisst das Integral von f(x) dx, geschrieben $\int f(x)\,dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d \int f(x)\,dx}{dx} = f(x).$$

§ 91. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln.

Bei sämtlichen nachstehenden Formeln ist rechts die unbestimmte Konstante zu ergänzen.

$$1.\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ für } n \gtrless -1$$

$$\int (a + bx)^n = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1) \cdot b}.$$

2. $\int \frac{dx}{x} = lx; \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = l f(x).$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{la}; \quad \int e^x dx = e^x.$

4. $\int \cos x \, dx = \sin x.$

5. $\int \sin x \, dx = - \cos x.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \operatorname{ctg} x.$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} \; (= \sec x).$

9. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = - \frac{1}{\sin x} \; (= - \operatorname{cosec} x).$

10. $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$

---

11. $\int \operatorname{tg} x \, dx = - l \cos x.$

12. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = l \sin x.$

13. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tg} x; \quad \int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$

---

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin x = - \operatorname{arc} \cos x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arc} \sin \frac{bx}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}.$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a}.$$

17. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{bx}{a}.$$

18. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\arcsin(1 - x).$$

19. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = l(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

20. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

21. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} l(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

22. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

23. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l(b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}).$$

24. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{cx - b}{\sqrt{b^2 + ac}}.$$

25. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a + 2bx + cx^2} - \frac{b}{\sqrt{c^3}} l(b + cx + \sqrt{c}\sqrt{a + 2bx + cx^2}).$$

26. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + 2bx - cx^2}} = -\frac{1}{c} \sqrt{a + 2bx - cx^2} + \frac{b}{\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{cx - b}{\sqrt{b^2 + ac}}.$$

§ 92. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen; Rekursionsformeln.

Es seien u, v, w .... Funktionen von x; A, B... konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$$\int(Au+Bv+Cw+\ldots.)dx=A\int u\,dx+B\int v dx+C\int w dx+\ldots$$

2. Teilweise Integration.

$$uv=\int u\,dv+\int v\,du \text{ und}$$
$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Beispiel:

$$\int x^2\cos x\,dx=\int x^2\,d\sin x=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$$
$$\int x\sin x\,dx=-\int x\,d\cos x=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C, \text{ also}$$
$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x=\varphi(z)$, dann ist $dx=\varphi'(z)\,dz$,

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Beispiel: $\int\frac{dx}{x^m(a+bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x}+b=z$, dann ergiebt sich

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}}\int\frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\,dz;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$$z=a+bx;\ z=a+bx^2;\ z=\frac{a}{x}+b.$$

$$z=\frac{a+bx}{a-bx}, \text{ oder } x=\frac{a}{b}\cdot\frac{z-1}{z+1};$$

$\sqrt[m]{a+bx} = z$, oder $x = \frac{z^m - a}{b}$; $dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1} dz$;

$\sin x = z$ und $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ lässt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere lässt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1. Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots = 0,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots,$$

hiebei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},\ B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots$$

2. $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p+qi$ und $p-qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-p-qi} + \frac{A_2}{x-p+qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hiebei ist

$$A_1 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)},\quad A_2 = \frac{f(p-qi)}{F'(p-qi)}.$$

Fasst man nach der Bestimmung von A_1 und A_2

die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x-p)^2+q^2$.

3. Mehrfache Wurzeln. Es sei

$$F(x)=0=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ \ldots\ldots, \text{ dann ist}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $F(x)=(x-a)^{\alpha}.\varphi(x)$, so hat man zur Bestimmung von $A, A_1, A_2 \ldots.$ folgende Gleichungen:

$$f(a)=A.\varphi(a)$$
$$f'(a)=A.\varphi'(a)+A_1\varphi(a)$$
$$f''(a)=A\varphi''(a)+A_1.2\varphi'(a)+A_2.2\varphi(a)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(a)=A\varphi^{(n)}(a)+A_1.n.\varphi^{(n-1)}(a)+A_2.n(n-1)$$
$$\varphi^{(n-2)}(a)+\ldots+n!\,A_{n-1}\varphi(a).$$

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergiebt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Es bedeute $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$ eine Funktion, welche aus x und der nten Wurzel durch rationale Verbindungen derselben aufgebaut ist, dann lässt sich

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx.$$

in das Integral einer rationalen Funktion überführen durch die Einsetzung $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=y.$

Um $\int R(x, \sqrt{a + bx \pm cx^2})\, dx \quad (c > o)$

auszuführen benützt man die Einsetzung $y = \frac{cx + b}{\sqrt{ac + b^2}}$, man erhält dann

$$\int R(x, \sqrt{a + bx \pm cx^2})\, dx = \int R_1(y, \sqrt{1 \pm y^2})\, dy.$$

Hiebei stellt R_1 wieder eine Funktion dar, die durch rationale Verbindungen von y und $\sqrt{1 \pm y^2}$ gewonnen wird. Ist nun R_1 eine Summe mehrerer Glieder, so integriert man jedes Glied einzeln. Andernfalls lässt sich das Integral, abgesehen von Integraten rationaler Differentiale, zurückführen auf eine Summe von Integralen von der Gestalt $\int \frac{R_2(y)\, dy}{\sqrt{1 \pm y_2}}$.

Wendet man auf R_2 Partialbruchzerlegung an, so erhält man eine Summe von Integralen von der Form $\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$ wobei $n > 0$ und $\frac{dy}{(y - a)^n \sqrt{1 \pm y^2}}$.

Die letztere lässt sich durch die Einsetzung $y - a = \frac{1}{z}$ und durch Wiederholung des obigen Ganges ebenfalls auf die erste Form bringen, auf welche nunmehr auch das ursprüngliche Integral zurückgeführt ist.

Rekursionsformel:

$$\int \frac{y^n\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}} = \pm \frac{y^{n-1}\sqrt{1 \pm y^2}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \int \frac{y^{n-2}\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Rekursionsformel gelangt man auf das Integral 15. oder 19. von § 91 oder auf $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{1 \pm y^2}}$.

Durch unmittelbare Integration vermittelst der

Grundformeln, durch Teilbruchzerlegung und durch die vorstehenden Verfahrungsweisen ist die Integration von $\varphi(x)\,dx$ durchführbar für folgende drei Fälle:

$$\text{I. } \varphi(x) = R(x), \quad \text{II. } \varphi(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right).$$

$$\text{III. } \varphi(x) = R(x, \sqrt{a + 2bx \pm cx^2}).$$

6. Weitere Rekursionsformeln.

1. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

2. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} d}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$$

3. $$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

4. $$\int \frac{e^x}{x^n} dx = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx.$$

5. $$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx.$$

6. $$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx.$$

7. $$\int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx.$$

8. $$\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx.$$

7. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent

ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § $93_{,11}$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurin'sche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = C + x f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 93. Bestimmte Integrale.

1. Ist f(x) dx das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von f(x) dx; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für $x = a$ und $x = b$. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials f(x) dx, wenn x durch unendlich kleine Aenderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left\{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right\} . h.$$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. $\int_a^b [f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$

c und d Werte zwischen a und b.

5. Mittelwertsätze. Wenn $f(x)$ in dem Intervall $x = a$ bis $x = b$ stetig bleibt, ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(a + \varepsilon(b - a)),\quad 0 < \varepsilon < 1;$$

wenn ferner $f(x)$ in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ positiv und nicht überall gleich null, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(c) \int_a^b f(x)\,dx,\quad a \leqq c \leqq b.$$

6. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$\varphi(x) < f(x)$, desgleichen für eine zweite $\psi(x)$
$\psi(x) > f(x)$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen x_0 und x_{2n} in $2n$ gleiche Teile von der Länge h, und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_{2n})$$

(s. auch § 94_{11}).

7. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei Grenzen a und b, die von m unabhängig sind integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m, so dass also

$\int_a^b f(x, m)\,dx = \varphi(m)$, daher

$$\int_a^b \left[f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \ldots + f(x, n - 1)\right] dx$$
$$= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n - 1)$$

Lässt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals.*)

8. $$\frac{\delta}{\delta\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\delta f(x,\alpha)}{\delta\alpha}\,dx$$

wenn die Grenzen a und b konstant sind in Beziehung auf α, dagegen

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\delta f(x,\alpha)}{\delta\alpha}\,dx + f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

wenn a und b Funktionen von α sind.

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

wenn $f(x,y)$ für $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ eindeutig und stetig ist.

9. Besondere bestimmte Integrale

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

4. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx;\quad 2n > 0$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2.4.6.\ldots.2n}{1.3.5.\ldots.(2n+1)}$$

*) Siehe Schlœmilch, Uebgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3\ldots\ldots(2n+1)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx;\ 2n+1 > 1$$

6. $\int_0^{\infty} \frac{\sin a x}{x} dx = \frac{\pi}{2};\ a > 0$

$\int_0^{\infty} \frac{\cos a x}{x} dx = \infty$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1;\ \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ (a > 0, n ganze Zahl.)

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 94. Ebene Kurven.

1. Ist. $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 94_4):

$$\sin \tau = \frac{dy}{ds},\ \cos \tau = \frac{dx}{ds},\ \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 89_3).

3. Besondere Punkte. Für einen Wende-

punkt der Kurve $y = f(x)$ haben $f''(x - h)$ und $f'(x + h)$ entgegengesetzte Vorzeichen (h unendl. kl.). Die Koordinaten der Wendepunkte ergeben sich aus der Kurvengleichung und aus der Bedingung: $f''(x) = 0$, während $f'''(x) \gtrless 0$; oder aus $f''(x) = \infty$.

Für die in Polarkoordinaten gegebene Kurve $r = f(\varphi)$ erhält man die Koordinaten der Wendepunkte aus dieser Gleichung und aus

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0.$$

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also für ihn mehrere Werte von y' ergeben.

Dies ist möglich, wenn $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn also $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. Durch Ableitung des Zählers und des Nenners der rechten Seite nach x erhält man zur Bestimmung von y':

$$\alpha)\ f''_{xx} + 2f''_{xy}\frac{dy}{dx} + f''_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$

hieraus ergeben $\left.\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ Werte von y', d. h. der Punkt ist Doppelpunkt, bezw. Rückkehrpunkt oder Selbstberührungspunkt, bezw. isolierter Punkt jenachdem:

$$f''^2_{xy} \gtreqless f''_{xx} \cdot f''_{yy}.$$

Für einen Rückkehrpunkt (Abscisse x_0) erster Art (Zweige auf verschiedenen Seiten der Tangente) erhält man mit $x_0 \pm h$ zwei verschiedene Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit entgegengesetzten Zeichen; für den Rückkehrpunkt 2ter Art erhält man in derselben Weise Werte mit gleichen Zeichen.

Besondere Punkte im Ursprung O. Es sei

$$A+(Bx+Cy)+(Dx^2+Exy+Fy^2)+\ldots.$$
$$+(Px^n+Qx^{n-1}y+\ldots+Sy^n)=0$$

die Gleichung einer Linie nten Grades. Ist nun

α) $A=0$, so geht die Linie durch O und es ist $Bx+Cy=o$ die Gleichung der Tangente in O.

β) $A=B=C=0$, so ist O doppelter Punkt und es ist $Dx^2+Exy+Fy^2=0$ die gemeinschaftliche Gleichung der Tangenten in O. Ist dabei $E^2-4DF \gtreqless 0$, so sind dieselben bezw. reell getrennt, reell zusammenfallend oder imaginär und O ist bezw. eigentlicher Doppelpunkt, Rückkehrpunkt oder Einsiedler.

Einen Doppelpunkt der Kurve $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ bestimmt man aus

$$x=\varphi(t_1)=\varphi(t_2),\ y=\psi(t_1)=\psi(t_2),$$

einen Rückkehrpunkt aus $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=0$.

In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. Grössenbestimmungen.

Bogenelement $ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm\sqrt{1+y'^2}\,.\,dx$ $=\pm\sqrt{(dr)^2+(r\,d\varphi)^2}$.

ds muss bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos c$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $\operatorname{tg}\tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die Xaxe in T, bezw. in U, dann ist:

$$\text{Tangente } PT = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\text{Subtangente } = \frac{y}{y'}$$

$$\text{Normale } PU = y\sqrt{1+y'^2}$$

$$\text{Subnormale } = yy'.$$

Polarkoordinaten: μ Winkel der Tangente PT mit dem Fahrstrahl OP zum Berührungspunkt P, im Sinne des wachsenden Winkels φ genommen; das Lot auf OP in O schneide die Tangente in T, die Normale in N, dann heisst PT die Tangente (T), PN die Normale (N), OT Polarsubtangente (St), ON Polarsubnormale (S_n) und es ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}\left(= r : \frac{dr}{d\varphi}\right),\ T = r\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2};\ N = \sqrt{r^2+r'^2};$$

$$S_t = \frac{r^2}{r'};\ S_n = r'.$$

5. Gleichung der

Tangente im Punkt (x, y), an die Kurve $y = f(x)$, bezw. $F(x, y) = 0$, bezw. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, X und Y laufende Koordinaten

1) $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$

2) $F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) = 0$

3) $(X - x)\frac{dy}{dt} - (Y - y)\frac{dx}{dt} = 0;$

6. Bestimmung der Asymptoten. Die Gleichung einer Asymptote kann in einer der Formen geschrieben werden:

$$y = mx + c,\ x = \mu y + \gamma;\ \text{hiebei ist}$$

$$m = \lim \frac{y}{x}\bigg|_{x=\infty} = \lim \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\infty},\quad c = \lim (y - mx)\bigg|_{x=\infty}$$

$$\mu = \lim \frac{x}{y}\bigg|_{y=\infty} = \lim \frac{dx}{dy}\bigg|_{y=\infty},\quad \gamma = \lim (x - \mu y)\bigg|_{y=\infty}$$

Bei einer Linie $n$ten Grades kann man die n möglichen Asymptoten (Tangenten in den n Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden) erhalten, indem man ausdrückt, dass die Richtungsgerade ($y = mx$) mit der Kurvengleichung eine Wurzel $x = \infty$ und dass die Asymptote ($y = mx + c$) deren zwei hat. Man setzt daher das Aggregat der Glieder $n$ter Ordnung gleich null dividiert mit x^n und löst nach $\frac{y}{x}$ auf. Die n Wurzelwerte (m) für $\frac{y}{x}$ sind die Richtungskoëfficienten. Man setzt nun $y = mx + c$ in die Kurvengleichung ein und ordnet nach Potenzen von x. Der Faktor von x^n wird von selbst zu null. Aus dem gleich null gesetzten Faktor von x^{n-1} ergiebt sich c.

Für die Kurve $r = f(\varphi)$ (Polarkoord.) bestimmt sich die Richtung einer Asymptote aus dem Wert von φ, für welchen $r = \infty$ wird, die Lage der Asymptote ergiebt sich aus der Polarsubtangente, für welche man hat

$$S_t = \lim \frac{r^2}{r'}\bigg|_{r=\infty}.$$

Asymptoten parallel der Y-Axe. Man sucht die Werte von x, für welche $y = \infty$ wird. — Für die Kurve $y^p F(x) + y^{p-1} F_1(x) + \ldots + F_p(x) = 0$, — $F(x)$, $F_1(x) \ldots$ ganze rationale Ausdrücke — ergeben sich die zur Yaxe parallelen Asymptoten aus $F(x) = 0$.

7. Berührung von Kurven. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte (Abscisse x_0) eine Berührung nter Ordnung, wenn $f(x_0) = \varphi(x_0)$ und für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur nten einschliesslich einander gleich sind. — Eine Berührung nter Ordnung kann aufgefasst werden als eine Grenzlage, bei welcher $n + 1$ Schnittpunkte der beiden Kurven in einen zusammenfallen. Eine Gerade $y = mx + b$ bildet mit einer Kurve $y = f(x)$ eine Berührung nter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur nten einschliesslich verschwinden und $f'(x) = m$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit Schneiden oder Nichtschneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

8. Krümmungskreis. Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat, der Mittelpunkt desselben, der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier unendlicher naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Kordinaten (X, Y) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen

1. $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \varrho^2$
2. $(x - X) + (y - Y) \cdot y' = 0$
3. $1 + y'^2 + (y - Y) y'' = 0$, hieraus ergiebt sich

Krümmungshalbmesser $\varrho = \pm (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$

($\pm$ je nachdem $y'' \gtrless 0$)

$$\begin{cases} X = x - (1 + y'^2) \cdot y' : y'' \\ Y = y + (1 + y'^2) : y'' \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, so ist

$$\begin{cases} \varrho = (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : (x' y'' - x'' y') \\ X = x - y' (x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y') \\ Y = y + x' (x'^2 + y'^2) : (x' y'' - x'' y'). \end{cases}$$

Für Polarkoordinaten hat man

$$\varrho = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 r'^2 - r r''}.$$

Der Kontingenzwinkel $d\tau$ ist der Winkel zweier unendlich naher Tangenten, er ist gleich dem Differential des Neigungswinkels der Tangente gegen die Polaraxe; es ist

$$d\tau = \frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{ds^2} = d\varphi + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 d\frac{r\, d\varphi}{dr}$$

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\varphi + d\mu}.$$

Mass der Krümmung, kurz Krümmung: $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$.

9. Die Evolute einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für X und Y in Nr. 8 unter Benützung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heisst Evolvente. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, bieg-

samer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

10. Hüllkurven. Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergiebt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$1.\quad F(x, y, p) = 0 \text{ und}$$

$$2.\quad \frac{\delta F}{\delta p} = 0.$$

Enthält die Gleichung der beweglichen Kurve zwei veränderliche Parameter p und q, zwischen welchen die Beziehung $\varphi(p, q)$ besteht, so ergiebt sich die Gleichung der Hüllkurve durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen:

$$\frac{\delta F}{\delta p} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta q} - \frac{\delta F}{\delta q} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta p} = 0,\ F(x, y, p, q) = 0,\ \varphi(p, q) = 0.$$

11. Flächeninhalt (Quadratur). Der Inhalt J der Fläche, welche zwischen der Kurve, der Xaxe und den zu den Abscissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergiebt sich aus

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx, \text{ oder bei schiefw. Koord.}$$

$$J = \sin\gamma \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Soll die Fläche begrenzt sein durch die Kurven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ und die zu x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten, so ist

$$J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x) - \varphi(x)]\, dx.$$

Simpsonsche Regel. Ist $f(x)$ höchstens vom

3. Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1 dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(x_1 - x_0)(y_0 + 4y_m + y_1).$$

(s. auch § 93_6).

12. Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

13. Polarkoordinaten: Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$J = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\,d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2 + r^2}\,.\,d\varphi = \int_{r_0}^{r^1} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\cdot dr.$$

§ 95. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases} \text{ (Schnittlinie der Flächen.)}$$

$$\text{oder } \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x). \end{cases} \text{ (Projektionen der Kurve.)}$$

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,.\,dx.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-x(t)}{x'(t)},\ \text{oder}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(X-x)+\frac{\delta f}{\delta y}(Y-y)+\frac{\delta f}{\delta z}(Z-z)=0, \\ \frac{\delta F}{\delta x}(X-x)+\frac{\delta F}{\delta y}(Y-y)+\frac{\delta F}{\delta z}(Z-z)=0. \end{cases}$$

Winkel α, β, γ der positiven Tangentenrichtung mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt (x, y, z)

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0,\ \text{oder}$$

$$[X-\varphi(t)]\,\varphi'(t)+[Y-\psi(t)]\,\psi'(t)+[Z-\chi(t)]\,\chi'(t)=0$$

$$\text{oder}\ (X-x)\cos\alpha+(Y-y)\cos\beta+(Z-z)\cos\gamma=0.$$

5. Gleichung der Schmiegungsebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt (x, y, z) und zwei unendlich nahe Punkte)

$$(X-x)\cos\lambda+(Y-y)\cos\mu+(Z-z)\cos\nu=0\ \text{oder}$$

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,\ \text{wobei}$$

$$A=dy\,d^2z-d^2y\,dz,\ B=dz\,d^2x-d^2z\,dx,\ C=dx\,d^2y-d^2x\,dy:$$

Normale zur Schmiegungsebene (Binormale)

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C}.$$

Die Winkel λ, μ, ν dieser Normalen mit den Axen sind bestimmt durch

$$\cos\lambda=\frac{A}{D},\ \cos\mu=\frac{B}{D},\ \cos\nu=\frac{C}{D},\ \text{wobei}$$

$$D=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{X-x}{d\frac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{d\frac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

Für die Richtungswinkel ξ, η, ζ der positiven Hauptnormalen hat man:

$$\frac{\cos\xi}{\varrho_1}=\frac{d\cos\alpha}{ds},\ \frac{\cos\eta}{\varrho_1}=\frac{d\cos\beta}{ds},\ \frac{\cos\zeta}{\varrho_1}=\frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten

$$d\tau=\frac{D}{ds^2}=\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1=\frac{ds}{d\tau}=\frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X=x+\varrho_1{}^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\ Y=y+\varrho_1{}^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\ Z=z+\varrho_1{}^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung oder Flexion versteht man

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{\varrho_1}.$$

Kurven mit der Flexion null $\left(\frac{1}{\varrho_1}=0\right)$ sind gerade Linien.

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungsebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung (Torsion) der Kurve

$$\pm\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Kurven mit der Torsion null $\left(\frac{1}{\varrho_2} = 0\right)$ sind ebene Kurven.

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \pm\frac{ds}{d\vartheta}$$ (links oder rechts gewundene Kurven).

8. Frenet's Formeln:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\xi}{\varrho_1},\ \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{\cos\eta}{\varrho_1},\ \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos\zeta}{\varrho_1} \\ \frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\cos\xi}{\varrho_2},\ \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{\cos\eta}{\varrho_2},\ \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\cos\zeta}{\varrho_2} \\ \frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\varrho_1} - \frac{\cos\lambda}{\varrho_2},\ \frac{d\cos\eta}{ds} = -\frac{\cos\beta}{\varrho_1} - \frac{\cos\mu}{\varrho_2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{d\cos\zeta}{ds} = -\frac{\cos\gamma}{\varrho_1} - \frac{\cos\gamma}{\varrho_2}. \end{array}\right.$$

9. Schmiegungskugel, Grenzlage einer durch vier unendlich benachbarte Punkte einer Raumkurve gehenden Kugel; ihr Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0), der Schnittpunkt dreier unendlich naher Normalebenen, bestimmt sich aus

$$x_0 = x + \varrho_1\cos\xi - \varrho_2\frac{d\varrho_1}{ds}\cos\lambda$$

$$y_0 = y + \varrho_1 \cos\eta - \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{ds} \cos\mu$$

$$z_0 = z + \varrho_1 \cos\zeta - \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{ds} \cos\nu.$$

Der Schnitt der Schmiegungskugel mit der Schmiegungsebene heisst Schmiegungskreis.

10. Rektifikation, die Länge s eines Bogens der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ zwischen den Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 ist

$$s = \int_{t_0}^{t^1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

§ 96. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$, oder entwickelt $z = f(x, y)$, oder durch $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$.

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p,\quad \frac{\delta z}{\delta y} = q;\quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r,\quad \frac{\delta^2 z}{\delta x\, \delta y} = s,\quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(X - x) F'_x + (Y - y) F'_y + (Z - z) F'_z = 0, \text{ oder}$$
$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \text{ oder}$$
$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = -(Z - z).$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{F'_x}{N},\quad \cos\mu = \frac{F'_y}{N},\quad \cos\nu = \frac{F'_z}{N}, \text{ bezw.}$$

$$\cos\lambda = \frac{p}{n},\ \cos\mu = \frac{q}{n},\ \cos\nu = -\frac{1}{n},\ \text{wobei}$$
$$N^2 = (F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2 \ \text{und}$$
$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heisst Normalschnitt. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α, β, γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Axen bildet, dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos^2\alpha + 2 s \cos\alpha \cos\beta + t \cos^2\beta}.$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fusspunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho' = \varrho \cos(\varrho\, \varrho') \ \text{oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen grössten (ϱ_1) und einen kleinsten Wert (ϱ_2) erreicht, heissen Hauptnormalschnitte, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 &= \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}\,.\,n \\ \varrho_1\, \varrho_2 &= \frac{n^4}{rt - s^2} \end{aligned}\right. \ \text{oder als Wurzeln der Gleichung}$$

$$(rt - s^2)\varrho^2 - \left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\right] n\,\varrho + n^4 = 0.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 gehörigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$$

heisst das (Gauss'sche) Mass der Krümmung für den betreffenden Punkt.

Satz von Gauss: Das Krümmungsmass bleibt bei einer beliebigen Verbiegung der Fläche ungeändert; oder: Sind zwei Flächen auf einander abwickelbar, so haben sie in je zwei entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

d. h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe der Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heisst der Ort des Punktes einer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen zur Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher einer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer Oberfläche gehen zwei Krümmungslinien, die auf einander senkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte berühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$\left[(1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+\left[pqr-(1+p^2)s\right]=0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heisst **geodätische Linie**, wenn ihre Schmiegungsebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{d\cos\alpha}=\frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{d\cos\beta}=\frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{d\cos\gamma}$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. **Hüllfläche.** Die Gleichung

$$F(x, y, z, p)=0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die Gleichung der Hüllfläche ergiebt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p)=0 \text{ und} \\ \dfrac{\delta F(x, y, z, p)}{\delta p}=0 \end{cases}$$

Enthält die Flächengleichung $F(x, y, z, p, q)=0$ zwei veränderliche Parameter p und q, die durch die Gleichung $\varphi(p, q)=0$ mit einander verbunden sind, so wird die Gleichung der Umhüllungsfläche erhalten durch Entfernung von p und q und $\frac{dq}{dp}$ aus

$$F(x, y, z, p, q)=0, \qquad \varphi(p, q)=0$$
$$\frac{\delta F}{\delta p}+\frac{\delta F}{\delta q}\cdot\frac{dq}{dp}=0, \quad \frac{\delta\varphi}{\delta p}+\frac{\delta\varphi}{\delta q}\cdot\frac{dq}{dp}=0.$$

Enthält die Gleichung der bewegten Fläche zwei, von einander unabhängige, Parameter p und q, so wird die Gleichung der Hüllfläche erhalten als Eliminationsresultat von p und q aus

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta p} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta q} = 0.$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.

Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1 + p^2 + q^2} . dx\, dy$$

$$\text{daher} \quad F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy,$$

y_0 und y_1 sind die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XYebene, x_0 und x_1 sind die Abscissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergiebt sich (—Xaxe ist Drehaxe—):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta \varphi}\right)^2\right] \cos^2\varphi + \left(\frac{\delta r}{\delta \psi}\right)^2} . r\, d\varphi\, d\psi.$$

(s. § $76_{,3}$)

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (—0X Drehaxe—); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der Xaxe.

$$V = \pi \int y^2\, dx$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei

Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1^2)\,dx$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abscissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\,dx \qquad \text{(u abhängig von x)}$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz.$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § 76_3) ergiebt sich

$$V = \frac{1}{3} \iint r^3 \cos\varphi \,d\varphi\, d\psi.$$

§ 97. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,15 052	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,10 034
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	0,23 856	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$	0,15 903
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,34 948	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7100$	0,23 300
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,38 908	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,25 937
$\sqrt{10} = 3{,}16225$	0,50 000	$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544$	0,33 333

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\pi = 3{,}1416$	0,49 715	$\pi^2 = 9{,}8696$	0,99 430
$2\pi = 6{,}2832$	0,79 818	$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	0,24 857
$4\pi = 12{,}5664$	1,09 921	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$	0,16 572
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,19 612	$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$	0,50 285—1
$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	0,02 003	$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132$	0,00 570—1
$\frac{\pi}{4} = 0.7854$	0,89 509—1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419$	0,75 143—1
$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	0,71 900—1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0{,}68278$	0,83 428—1
$\frac{4}{3}\pi = 4{,}1888$	0,62 209	$\frac{180}{\pi} = 57.29578$	1,75 812
$g = 9{,}81$	0,99 167	$e = 2{,}7183$	0,43 429
$\frac{g}{2} = 4{,}905$	0,69 064	$e^2 = 7{,}3891$	0,86 859
$\frac{1}{g} = 0{,}1019$	0,00 833—1	$e^3 = 20{,}086$	1,30 288
$\sqrt{g} = 3{,}1321$	0,49 583	$\sqrt{e} = 1{,}6487$	0,21 715
$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}0030$	0,00 132	$\sqrt[3]{e} = 1{,}3956$	0,14 476

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

In unserem Verlage erscheint:

Sammlung Schubert.

Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die erstens auf wissenschaftlicher Grundlage beruhen,

zweitens den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen, und

drittens durch eine leicht fassliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

Die „Sammlung Schubert" umfasst alle Gebiete der Mathematik in einheitlich angelegten, systematisch sich entwickelnden Einzeldarstellungen, welche streng wissenschaftliche Grundlage mit leichtfasslicher Ausdrucksweise verbinden. Die Form der Darstellung ist so gewählt, dass die einzelnen Bände in gleicher Weise für den Unterricht wie für den Selbstunterricht oder zur Repetition geeignet sind.

Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

„Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Oktober 1902:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

Band III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.40.

„ V: **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 3.60.

„ VI: **Algebra mit Einschluss d. elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Professor Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg. Mk. 9.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mk. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. Mk. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.

„ XXVII: **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Privatdozent Dr. Karl Doehlemann in München. Mk. 10.—.

„ XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Strassburg. Mk. 8.50.

„ XXXIV: **Liniengeometrie m. Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konr. Zindler in Innsbruck. Mk. 12.—.

Band XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Mk. 10.—.

" XL: **Mathematische Optik** von Dr. J. Classen in Hamburg. Mk. 6 —.

" XLVI: **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Strassburg. Mk. 4.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Anwendungen der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg.

Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.

Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Geodäsie.

Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

Räumliche projektive Geometrie.

Theorie der höheren algebraischen Kurven.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Elliptische Funktionen von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

Theorie und Praxis der Reihen von Prof. C. Runge in Hannover.

Invariantentheorie von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

Kinematik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.

Mechanische Wärmelehre von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.

Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I und II von Dr. J. Classen in Hamburg.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

69 **Englische Litteraturgeschichte** v. Dr. Karl Weiser in Wien.

70 **Griechische Litteraturgeschichte** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Professor an der Universität Greifswald.

71 **Allgemeine und physikalische Chemie** von Dr. Max Rudolphi, Dozent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren.

72 **Projektive Geometrie** in synthetischer Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Privatdozent an der Universität München. Mit 85 zum Teil zweifarbigen Figuren.

73 **Völkerkunde** von Dr. Mich. Haberlandt, k. u. k. Custos der ethnograph. Sammlung d. naturh. Hofmuseums u. Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 56 Abbildungen.

74 **Die Baukunst des Abendlandes** von Dr. K. Schafer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen.

75 **Die graphischen Künste** v. Carl Kampmann, Fachlehrer an d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Beilagen und 40 Abbildungen.

76 **Theoretische Physik.** I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univ. Wien. Mit 19 Abbildungen.

77 **Theoretische Physik.** II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen.

78 **Theoretische Physik.** III. Teil: Elektricität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor a. der Universität Wien. Mit 33 Abbildgn.

79 **Gotische Sprachdenkmäler** mit Grammatik, Uebersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen in Breslau.

80 **Stilkunde** von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Mosbach. Mit 12 Vollbildern und 179 Textillustrationen.

81 **Vierstellige Tafeln und Gegentafeln** für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg.

82 **Grundriß d. lateinischen Sprachlehre** von Professor Dr. W. Votsch in Magdeburg.

83 **Indische Religionsgeschichte** von Dr. Edmund Hardy, Professor a. d. Universität Würzburg.

84 **Nautik.** Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handesschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor d. Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen.

85 **Französische Geschichte** von Dr. R. Sternfeld, Professor an der Universität Berlin.

86 **Kurzschrift.** Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungs-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein.

87 **Höhere Analysis I:** Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Professor am Realgymnasium u. an der Realanstalt in Ulm. Mit 68 Fig.

88 **Höhere Analysis II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Professor am Realgymnasium u. an d. Realanstalt in Ulm. Mit 89 Fig.

89 **Analytische Geometrie des Raumes** von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Fig.

90 **Ethik** von Dr. Thomas Achelis in Bremen.

91 **Astrophysik,** die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Professor an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbildungen.

92 **Astronomische Geographie** von Dr. Siegmund Günther, Professor a. d. Technisch. Hochschule München. Mit vielen Abbildungen.

93 **Deutsches Leben im 12. Jahrhundert.** Kulturhistor. Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen.

Wenden!

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

94 **Photographie.** Von H. Keßler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen.

95 **Paläontologie.** Von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen.

96 **Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymn. zu Hannover. Mit 14 Abbildungen.

97 **Stereometrie** von Dr. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren.

98 **Grundriß der Psychophysik** von Dr. G. F. Lipps in Straßburg. Mit 3 Figuren.

99 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. Gerh. Hessenberg in Charlottenburg. Mit 69 ein- u. zweifarbigen Figuren.

100 **Sächsische Geschichte** von Prof. Dr. Otto Kaemmel, Rektor des Nicolaigymnasiums zu Leipzig.

101 **Sociologie** von Prof. Dr. Thom. Achelis in Bremen.

102 **Geodäsie** von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild.

103 **Wechselkunde** von Dr. G. Funk in Mannheim. Mit vielen Formul.

104 **Oesterreichische Geschichte I:** Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Professor an der Universität Graz.

105 **Oesterreich. Geschichte II:** Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Professor an der Universität Graz.

106 **Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstl. Versuchswesens.

107 **Geschichte der Malerei I** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.

108 **Geschichte der Malerei II** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.

109 **Geschichte der Malerei III** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.

110 **Geschichte der Malerei IV** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.

111 **Geschichte der Malerei V** von Dr. Rich. Muther, Professor an d. Universität Breslau.

114 **Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe d. Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren.

115 **Buchführung.** Lehrgang der einfachen und doppelten Buchhaltung von Robert Stern, Oberlehrer der Oeffentl. Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit vielen Formularen.

116 **Die Plastik des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln.

117 **Griechische Grammatik I:** Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. a. d. Klosterschule z. Maulbronn.

118 **Griechische Grammatik II:** Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Professor a. d. Klosterschule zu Maulbronn.

119 **Abriß der Burgenkunde** v. Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 29 Abbildungen.

120 **Harmonielehre** von A. Halm, Musikdirektor in Stuttgart. Mit vielen Notenbeilagen.

121 **Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik** von Dr. A. Möhler in Tübingen. Mit zahlreichen Abbildgn. u. Musikbeilagen.

122 **Das Pflanzenreich.** Einteilung d. gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau u. Dr. W. Migula, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Figuren.

123 **Nutzpflanzen** von Dr. J. Behrens in Weinsberg. Mit 53 Abbildungen.

124 **Die deutschen Altertümer** von Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen.

125 **Italienische Litteraturgeschichte** von Dr. Karl Voßler, Privatdozent a. d. Universität Heidelberg.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

126 **Deutsche Stammeskunde** von Dr. Rudolf Much, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln.

127 **Pflanzenbiologie** von Dr. W. Migula, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abb.

128 **Romanische Sprachwissenschaft** von Dr. Adolf Zauner, k. k. Realschulprofessor in Wien.

129 **Die Alpen** von Dr. Rob. Sieger, Privatdozent an der Universität u. Professor an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte.

130 **Das öffentl. Unterrichtswesen Deutschlands in der Gegenwart** von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau.

131 **Abriß der Biologie der Tiere I:** Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinr. Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen.

132 **Abriß der Biologie der Tiere II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinr. Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbildungen.

133 **Volkswirtschaftslehre** von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an d. Universität Freiburg i. B.

134 **Deutsche Litteraturgeschichte d. 19. Jahrhunderts I.** von Dr. Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart.

135 **Deutsche Litteraturgeschichte d. 19. Jahrhunderts II** v. Dr. Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart.

136 **Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 67 Fig.

137 **Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl mit Einleitungen u. Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen in Breslau.

138 **Simplicius Simplicissimus** von H. Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl hrsg. v. Professor Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau.

139 **Kaufmännisches Rechnen I** von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft.

140 **Kaufmännisches Rechnen II** von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft.

141 **Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen.** Von Dr. W. Migula, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit vielen Abbildungen.

142 **Darstellende Geometrie I.** Von Dr. Rob. Haußner, Professor a. d. Universität Gießen. Mit 100 Fig.

143 **Geschichte der Pädagogik** von Oberl. Dr. H. Weimer i. Wiesbaden.

146 **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Professor am Realgymnasium u. a. d. Realanstalt in Ulm. Mit 42 Fig.

147 **Repetitorium und Aufgabensammlung z. Integralrechnung** von Dr. Friedrich Junker, Professor am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 50 Fig.

148 **Finanzwissenschaft** von Prof. Dr. R. van d. Borght in Friedenau.

149 **Musikal. Formenlehre (Kompositionslehre)** v. Stephan Krehl. I. Teil. Mit vielen Notenbeispielen.

151 **Schmarotzer u. Schmarotzertum i. d. Tierwelt.** Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. an der Universität Gießen. Mit vielen Abbildungen.

152 **Eisen-Hütten-Kunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. und 4 Tafeln.

153 **Eisen-Hütten-Kunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningenieur. II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln.

154 **Gletscherkunde** von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln.

155 **Das Fernsprechwesen** von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel.